



Titre: [Cours](#) MAP : Mathématiques Appliquées

Auteurs: Jocelyne Erhel

Ecole: [INRIA](#), [UR Rennes](#)

Résumé: L'objectif de ce cours est la résolution de systèmes linéaires avec soit autant de [données](#) que d'inconnues, soit plus de données que d'inconnues (système surdéterminé), soit plus d'inconnues que de données (système sous-déterminé). Un système linéaire est un ensemble de  $m$  équations linéaires à  $n$  inconnues.

Extrait du sommaire:

- 1 Introduction 7
  - 1.1 Notations 7
  - 1.2 Objectif du cours 7
  - 1.3 Application au calibrage d'un modèle 8
    - 1.3.1 Exemple : interpolation et approximation polynomiale 8
  - 1.4 Application à un moteur de recherche 9
- 2 Bases de l'algèbre linéaire 11
  - 2.1 Matrices et vecteurs 11
    - 2.1.1 Matrices particulières 11
    - 2.1.2 Opérations sur les matrices 11
    - 2.1.3 Matrices carrées symétriques 11
    - 2.1.4 Partitions par blocs 12
  - 2.2 Normes matricielles 12
  - 2.3 Orthogonalité dans  $\mathbb{R}^n$  12
  - 2.4 [Image](#), noyau, rang d'une matrice 13
  - 2.5 Valeurs propres et vecteurs propres 15
  - 2.6 Notions de complexité et de performances 15
  - 2.7 Bibliothèques BLAS et LAPACK 16
    - 2.7.1 Opérations BLAS1 16



- 2.7.2 Opérations BLAS2 16
- 2.7.3 Opérations BLAS3 16
- 2.7.4 Bibliothèque LAPACK 17
- 3 Arithmétique flottante 19
  - 3.1 Erreurs de calcul 19
    - 3.1.1 Sources d'erreur 19
    - 3.1.2 Mesures de l'erreur 19
  - 3.2 Arithmétique flottante 20
    - 3.2.1 Format flottant 20
    - 3.2.2 Arrondis 21
    - 3.2.3 Opérations arithmétiques 22
    - 3.2.4 Exceptions 22
    - 3.2.5 Norme IEEE-754 23
    - 3.2.6 Phénomène d'absorption 23
    - 3.2.7 Phénomène de cancellation 24
    - 3.2.8 Extensions de la norme IEEE 25
  - 3.3 Stabilité des problèmes 26
    - 3.3.1 Lien avec le résidu 26
    - 3.3.2 Exemple : effet papillon 26
  - 3.4 Stabilité et ordre des schémas de discrétisation 27
  - 3.5 Convergence des algorithmes itératifs 27
  - 3.6 Stabilité des algorithmes directs 29
    - 3.6.1 Exemple : produit scalaire 29
    - 3.6.2 Exemple : produit extérieur 30
- 4 Résolution de systèmes linéaires carrés 31
  - 4.1 Inverse d'une matrice 31
    - 4.1.1 Matrices particulières 32
  - 4.2 Résolution d'un système linéaire 32
    - 4.2.1 Cas des matrices symétriques définies positives 33



- 4.3 Analyse des erreurs pour un système linéaire 34
  - 4.3.1 Stabilité numérique de Gauss et de Cholesky 34
  - 4.3.2 Analyse de perturbation d'un système linéaire 35
  - 4.3.3 Précision de la résolution d'un système linéaire 37
- 5 Problèmes aux moindres carrés - cas du rang plein 39
  - 5.1 Existence et unicité d'une solution 39
    - 5.1.1 Existence d'une solution dans le cas général 39
    - 5.1.2 Condition d'unicité de la solution 40
  - 5.2 Equations normales 40
  - 5.3 Factorisation QR 41
  - 5.4 Analyse d'erreur pour les problèmes aux moindres carrés de rang plein 42
    - 5.4.1 Stabilité numérique de la factorisation QR 42
    - 5.4.2 Analyse de perturbation et conditionnement 42
    - 5.4.3 Précision d'une résolution de problème aux moindres carrés de rang plein 43
- 6 Décomposition en Valeurs Singulières 45
  - 6.1 Diagonalisation d'une matrice carrée 45
    - 6.1.1 Diagonalisation des matrices symétriques 46
  - 6.2 Décomposition SVD (Singular Value Decomposition) d'une matrice rectangulaire 46
    - 6.2.1 SVD réduite. Rang, image et noyau 48
  - 6.3 Approximation de rang k et rang numérique 48
  - 6.4 Calcul de la SVD 49
    - 6.4.1 Bidiagonalisation 50
  - 6.5 Analyse d'erreur du calcul de la SVD 51
    - 6.5.1 Stabilité numérique du calcul d'une SVD 51
    - 6.5.2 Analyse de perturbation des valeurs singulières 51
    - 6.5.3 Précision du calcul des valeurs singulières 51
- 7 Problèmes aux moindres carrés - cas général 53
  - 7.1 Problèmes aux moindres carrés - cas du rang plein 53
    - 7.1.1 SVD, équations normales et factorisation QR 53



7.1.2 SVD, inverse et pseudo-inverse 54

7.2 Problèmes aux moindres carrés - cas général 54

7.2.1 Résolution d'un problème aux moindres carrés avec la SVD 56

7.3 SVD et conditionnement des matrices 56

8 Conclusion 57

[Mathématique appliquée cours 17](#)

Télécharger le fichier PDF: [Cours MAP : Mathématiques Appliquées](#)