



Découvrez notre Chaîne YouTube "[Ingénierie et Projets](#)"

Découvrez notre Chaîne Secondaire "[Information Neuronale et l'Ingénierie du Cerveau](#)"

**Titre:** Analyse de Fourier – Ondelettes

**Auteurs:** Jean-Pol Guillement

**Ecole/Université:** [Université de Nantes](#)

**Résumé:** Le but de ce [cours](#) intitulé "Traitement du signal", est de décrire les techniques mathématiques de base utilisées en traitement du signal et de présenter des applications. Les rubriques suivantes sont énumérées dans la maquette du Master :

- Analyse de Fourier
- Filtrage
- Analyse multi-résolution
- Analyse temps-fréquence et temps-échelles
- Exemples concrets en traitement d'images et de signaux

On va présenter les mathématiques communes aux thèmes suivants :

- Représentation et approximation.
- Filtrage des signaux et des images.
- Compression des images en s'attachant essentiellement à l'analyse de Fourier et à l'analyse par ondelettes.

Mais qu'entend-on par "traitement du signal" ? D'abord le mot signal est synonyme de fonction numérique définie sur un espace à une ou plusieurs dimensions.

On peut dire que la théorie du signal est l'art de détecter dans les signaux peu compréhensibles, peu lisibles, confus, les informations qui intéressent. Bien souvent il faut éliminer des parasites qui corrompent la lecture, bien souvent les informations recherchées ne sont pas visibles. C'est le cas par exemple quand elles correspondent à un phénomène vibratoire de haute fréquence. Un tracé en fonction de  $t$  est rarement informatif. Il arrive que



les informations recherchées nécessitent la résolution d'un problème inverse. C'est le cas de la RMN où les temps de relaxation sont à extraire du signal, et de la tomographie où le signal lu correspond à la transformée de Radon de l'information recherchée. Mais traditionnellement on ne considère pas que la RMN et la tomographie relèvent directement de la théorie du signal. Cette discipline concerne de façon privilégiée, l'étude des signaux vibratoires, ceux pour lesquels on s'intéresse à rechercher les composantes oscillatoires. Le son est l'exemple majeur.

Mais on va voir, notamment avec les images, que cette catégorie est vaste. Il y a lieu de distinguer les signaux analogiques (**fonctions** continues), ceux qui proviennent d'une mesure physique **continue** (électrique) et les signaux numériques (fonctions échantillonnées, discrètes) qui proviennent d'un convertisseur analogique-numérique, correspondant à la **valeur moyenne** d'un signal continu sur un petit espace de temps, de surface ou de volume.

### **Extrait du sommaire:**

- Introduction 7
- 1 Présentation 9
  - 1.1 Introduction 9
  - 1.2 Description des images numériques - Formats 9
  - 1.3 Compression des images 10
  - 1.4 Filtrage des images 11
  - 1.5 Filtrage 1D 12
  - 1.6 Description du son numérisé - Formats 15
  - 1.7 Filtrage d'un passage musical 15
  - 1.8 Notion générale de Représentation et d'Approximation 17
- 2 Décomposition en Séries de Fourier 19
  - 2.1 Introduction 19
  - 2.2 Décomposition en série de Fourier - Théorème de Fourier 19
  - 2.3 Les  $e^{2i\frac{1}{4}n x}$
  - T forment une base de  $L^2[0, T]$  19
  - 2.4 Décomposition - Reconstruction 19
  - 2.5 Approximation - Lissage - Filtrage 19



2.6 Vocabulaire - Fréquence - Spectre 20

2.7 Filtre - Fonction de Transfert 21

2.8 Le Noyau de Dirichlet 21

2.9 Régularité de  $f$  et décroissance des coefficients de Fourier 22

2.10 Échantillonnage - Théorème de Whittaker-Shannon pour l'intervalle  $[0, T]$  22

2.11 Série de Fourier d'une fonction définie sur un intervalle 22

3 Transformation de Fourier 25

3.1 Introduction 25

3.2 Transformation de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$  25

3.2.1  $\hat{f}$  est une fonction définie pour tout  $\xi$ , bornée, continue, qui tend vers 0 à l'infini 25

3.2.6  $\mathcal{R} \hat{f} = \widehat{\mathcal{R} f}$  26

3.2.7  $\widehat{f \otimes g} = \widehat{f} \widehat{g}$  26

3.2.8 Théorème d'inversion de Fourier  $\widehat{\widehat{f}} = f$  26

3.2.9 Si  $f$  et  $g$  sont dans  $L^1 \cap L^2$ , alors  $\|\widehat{fk}\|_2 = \|f\|_2$  et  $(\widehat{f}, \widehat{g}) = (f, g)$  26

3.2.10  $\widehat{fg} = \widehat{f} \otimes \widehat{g}$  26

3.2.11  $f \otimes h^2 \in L^1$  ou  $L^2$  26

3.3 Transformation de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$  26

3.3.1 Théorème de Plancherel 26

3.3.2 Égalité de Parseval 26

3.4 Régularité de  $f$  et décroissance de  $\widehat{f}$  27

3.5 Masses et Peigne de Dirac - Transformation de Fourier des Distributions Tempérées 27

3.5.1 Les espaces de fonctions tests  $\mathcal{D}, \mathcal{S}$  27

3.5.2 Les fonctions localement intégrables sont des distributions 27

3.5.3 Les fonctions à croissance lente sont des distributions tempérées 27

3.5.4 Les fonctions de  $L^p(\mathbb{R})$  sont des distributions tempérées 28

3.5.5 Les masses de Dirac  $\pm a$  28

3.5.6 Convergence dans  $\mathcal{D}'$  et dans  $\mathcal{S}'$  28

3.5.7 Le peigne de Dirac  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na}$  28

3.5.8 Dérivée au sens des distributions, produit par une fonction, translation 28

3.5.9 Transformation de Fourier des distributions tempérées 28

3.5.11  $\widehat{\delta}$



$$\mathcal{F}(t^k) = (i)^k \delta^{(k)}(\omega) \quad 28$$

$$3.5.12 \mathcal{F}(e^{iat}) = \delta(\omega - a) \quad 28$$

$$3.5.13 \mathcal{F}(e^{-at}) = \delta(\omega) + \frac{1}{i\omega + a} \quad 28$$

$$3.5.14 \mathcal{F}(\cos at) = \frac{1}{2}(\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)) \quad 29$$

$$3.5.15 \mathcal{F}(e^{iat} \cos at) = \frac{1}{2}(\delta(\omega - a - a) + \delta(\omega - a + a)) \quad 29$$

$$3.5.16 \mathcal{F}(\cos at) = \frac{1}{2}(\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)) \quad 29$$

$$\mathcal{F}(t^{-n}) = \frac{1}{i^n} \delta^{(n)}(\omega) \quad 29$$

$$e^{-at} \cos at \quad 29$$

3.5.17 Si  $f$  est à croissance lente,  $\mathcal{F}(f \cos at)$  est une distribution à support compact 29

### 3.6 Formules de Poisson 29

3.6.1 Transformée de Fourier d'une fonction a-périodique 29

3.6.2 Formule de Poisson dans  $L^1(\mathbb{R})$  29

3.6.3 Formule de Poisson dans  $L^2(\mathbb{R})$  29

3.6.4 Formule de Poisson au sens des distributions 29

3.7 Le Principe d'incertitude d'Heisenberg 30

3.8 Échantillonnage - Théorème de Shannon 30

3.8.1 Théorème d'interpolation de Shannon - Critère de Nyquist 30

3.9 Problème du recouvrement du spectre 30

3.10 Transformation de Fourier 2D 31

## 4 Transformation de Fourier discrète 33

4.1 Introduction 33

4.2 La TFD 33

4.3 Propriétés de la TFD 33

4.3.1 FN est un opérateur linéaire inversible 33

4.3.2  $\|kX\|_2 = \|X\|_2$  34

4.4 La FFT 34

4.4.1 Principe "diviser pour régner" 34

4.4.2 La décomposition Cooley-Tukey base 2 34

4.4.3 Remarques 36

4.5 Les signaux discrets 36

4.5.1 Propriétés 36



- 4.5.2 Produit de convolution 36
- 4.6 TFD et Décomposition en Série de Fourier 37
  - 4.6.1 Coefficients de Fourier d'un polynôme trigonométrique 37
  - 4.6.2 Approximation des coefficients de Fourier 37
- 4.7 TFD et Transformation de Fourier continue 37
  - 4.7.1 Réponse A1 37
  - 4.7.2 Réponse A2 38
  - 4.7.3 Réponse B1 38
  - 4.7.4 Réponse B2 38
  - 4.7.5 Cas d'un polynôme trigonométrique 39
  - 4.7.6 En résumé 40
  - 4.7.7 Exemples 40
- 4.8 Le problème du recouvrement revisité 42
- 4.9 Le fenêtrage 42
- 4.10 Le Zéro-Padding 42
  - 4.10.1 Sur-échantillonnage 42
  - 4.10.2 Effet de zoom 43
- 5 Filtrage 45
- 6 Décomposition en Ondelettes 49
  - 6.1 Localisation temps-fréquence 49
  - 6.2 Les Ondelettes 49
  - 6.3 Analyse Multirésolution 49
    - 6.3.1 Analyse Multirésolution (à fonction d'échelle) orthogonale 51
  - 6.4 Décomposition en ondelettes orthogonales 53
    - 6.4.1 Exemple de décomposition avec l'ondelette de Haar 54
  - 6.5 Algorithmes de décomposition-reconstruction en ondelettes orthogonales 54
    - 6.5.1 Décomposition 55
    - 6.5.2 Reconstruction 56
    - 6.5.3 Exemple 56
  - 6.6 Moments nuls. Régularité. Taille des supports 56
  - 6.7 Quelques ondelettes orthogonales 57



- 6.7.1 Haar 57
- 6.7.2 Daubechies 57
- 6.7.3 Shannon 57
- 6.7.4 Battle-Lemarié 58
- 6.8 Bases d'ondelettes biorthogonales 58
- 6.9 Visualisation des ondelettes 59
  - 6.9.1 Méthode des itérations successives 59
  - 6.9.2 Utilisation de l'algorithme de décomposition-reconstruction 59
- 6.10 Ondelettes en dimension 2 60
- 7 Compression des images 61
  - 7.1 Principe général 61
  - 7.2 La Compression JPEG 61
    - 7.2.1 Décomposition fréquentielle 61
    - 7.2.2 Découpage en blocs  $8 \times 8$  62
    - 7.2.3 Quantification 63
    - 7.2.4 Compression de Huffman 64
    - 7.2.5 Conclusions 64
  - 7.3 La Compression JPEG2000 64
    - 7.3.1 Décomposition en ondelettes 64
    - 7.3.2 Quantification et codage entropique 66
- 8 Formulaire 67
- Bibliographie 67
- Index 71

[Ondelettes et traitement du signal et d'image 27](#)

**Télécharger le fichier PDF:** [Analyse de Fourier – Ondelettes](#)

[Nous Soutenir](#) 

Le blog contient des publicités, elles permettent de financer l'hébergement et



maintenir le blog en fonctionnement. Vous pouvez utiliser adblock pour une lecture sans publicités.