

CI 2 AUTOMATIQUE - SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS

B2 Proposer un modèle de connaissance et de comportement	Systèmes linéaires continus et invariants : - modélisation par équations différentielles - calcul symbolique - fonction de transfert ; gain, ordre, classe, pôles et zéros	Déterminer les fonctions de transfert à partir d'équations physiques (modèle de connaissance)
	Signaux canoniques d'entrée : - échelon - rampe	Caractériser les signaux canoniques d'entrée
	Schéma-bloc : - fonction de transfert en chaîne directe - fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée	Analyser ou établir le schéma-bloc du système Déterminer les fonctions de transfert
	Modèles de comportement	Renseigner les paramètres caractéristiques d'un modèle de comportement (premier ordre, deuxième ordre, dérivateur, intégrateur, gain, retard)

I. LIMITE D'ETUDE : LINEAIRE CONTINU INVARIANT

Dans cette étude, nous nous limiterons aux Systèmes Linéaires Continus Invariants :

- **Invariant** : le système ne vieillit pas : son comportement dans le temps reste inchangé (si on reproduit la même expérience à 2 dates différentes, on obtiendra les mêmes résultats).
- **Continu** : les grandeurs étudiées sont définies pour toute valeur du temps et sur l'ensemble de leur plage de variation.
- **Linéaire** : les systèmes étudiés respectent le principe de superposition :

Si à une entrée $e_1(t)$ correspond une sortie $s_1(t)$ et si à une entrée $e_2(t)$ correspond une sortie $s_2(t)$, alors à une entrée $k_1 \cdot e_1(t) + k_2 \cdot e_2(t)$ correspond une sortie $k_1 \cdot s_1(t) + k_2 \cdot s_2(t)$, avec k_1 et k_2 constantes.

Remarque :

Dans la réalité les phénomènes sont linéaires dans un certain domaine de variation. A l'extérieur de ce domaine, des phénomènes non linéaires, comme des saturations apparaissent.

Quelques SLCI du laboratoire :

	Grandeurs d'entrée	Grandeurs de sortie
Pilote automatique de bateau	Angle de cap souhaité $\theta_{consigne}$	Angle de cap réel θ
Un chariot filoguidé	Position et vitesse souhaitées $x_{consigne}, v_{consigne}$	Position et vitesse réelles x, v
Un axe d'un robot manipulateur	Position souhaité $x_{consigne}$	Position réelle x

II. CRITERES QUANTIFIANT LES PERFORMANCES D'UN SLCI

Afin d'analyser les performances (**précision**, **rapidité** et **stabilité**) d'un système, on le sollicite à une variation de l'entrée et on étudie la réponse (ou sortie) du système.

4 critères principaux permettent d'analyser la réponse d'un système automatique :

- La stabilité
- La précision
- La rapidité
- L'amortissement

L'asservissement idéal est un système ayant une bonne stabilité et bonne précision, le régime transitoire doit être rapide et bien amorti. Ces critères de performances ne sont pas toujours compatibles.

Par exemple en mécanique, un processus rapide est léger, il a ainsi une faible inertie et risque d'être peu amorti voire instable. D'autre part si on veut améliorer la précision, on raidit l'asservissement et on risque de tomber alors sur un phénomène d'instabilité. Tout l'art de l'automaticien est de réaliser une partie commande permettant de respecter au mieux ces critères.

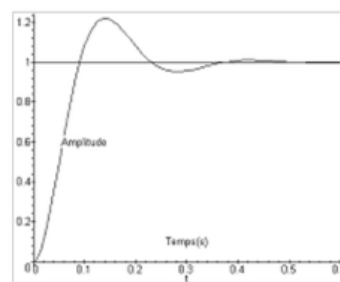
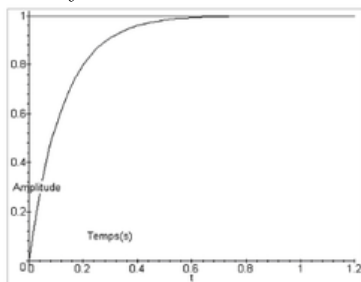
1. STABILITE

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.

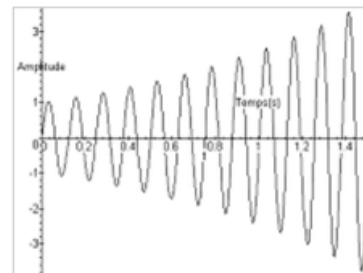
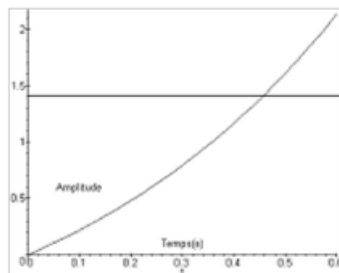
Le bouclage peut déstabiliser un système.

C'est le critère que l'on regarde en premier, car sinon on ne peut pas analyser les autres critères.

Exemples de réponses de systèmes stables et instables :



Système stable



Système instable

2. PRECISION

La précision qualifie l'aptitude du système à atteindre la valeur visée.

Elle est caractérisée par l'écart entre la consigne et la valeur effectivement atteinte par la grandeur de sortie.

$$\varepsilon_s = e(t) - s(t)$$

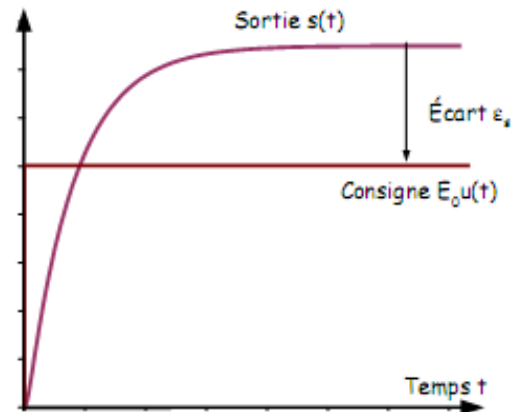
L'écart éventuel s'exprime dans la même unité que la grandeur de sortie.

- **Ecart statique ε_s :**

Le système est en mode régulation (entrée fixe). On définit alors l'écart statique ε_s comme l'écart entre la consigne fixe E_0 (échelon) et la réponse $s(t)$ en régime permanent

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (E_0 u(t) - s(t))$$

Un système régulateur est précis si l'écart statique est nul.

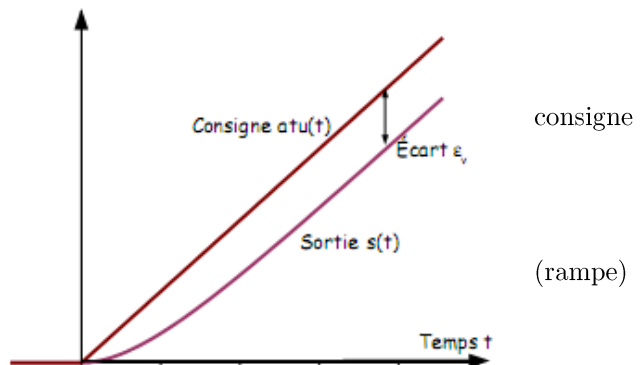


- **Ecart de traînage ou de poursuite ε_v :**

Il représente la différence entre la variable et la réponse en régime permanent (système en mode suiveur).

$$\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t))$$

avec en général $e(t) = a \cdot t \cdot u(t)$

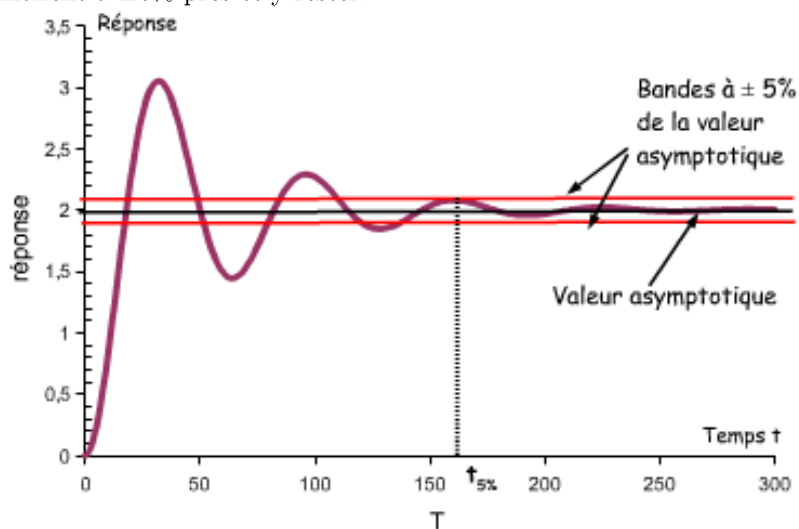


3. RAPIDITE

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée.

Cependant, la valeur finale étant le plus souvent atteinte de manière asymptotique, on retient alors comme principal critère d'évaluation de la rapidité d'un système, le temps de réponse à n%.

En pratique, on utilise le temps de réponse à 5% ($t_{5\%}$), c'est le temps mis par le système pour atteindre sa valeur de régime permanent à $\pm 5\%$ près et y rester.



III. ANALYSE DE SLCI

Une analyse comportera 2 étapes :

- **UNE PHASE D'OBSERVATION DES CRITERES** : ERREUR, TEMPS DE REPONSE ET OSCILLATIONS...
- **UNE PHASE DE CONCLUSION SUR LES PERFORMANCES** : PRECISION, RAPIDITE ET STABILITE.

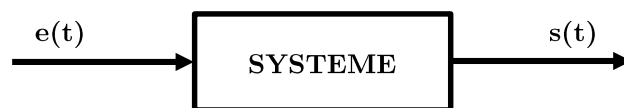
NB : On ne dira jamais que le système est rapide ... Les critères s'évaluent par des chiffres qui peuvent être plus faibles, plus grands... que d'autres...

Étudier les SLCI, c'est essayer d'améliorer ces différentes caractéristiques.

IV. MODELISATION DES SLCI PAR EQUATION DIFFERENTIELLE

4. CAS GENERAL

Après modélisation, la relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie s'exprime sous la forme d'une équation différentielle à coefficients constants.



$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) = b_0 \cdot e(t) + b_1 \cdot \frac{de(t)}{dt} + \dots + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

n est

La résolution de cette équation différentielle donnera la réponse (ou sortie $s(t)$) théorique du système à une entrée fixée $e(t)$. **Attention ce n'est qu'un modèle !**

Exemple : Exemples pour les systèmes électriques

Résistance : $u(t) = R \cdot i(t)$

Bobine : $u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$

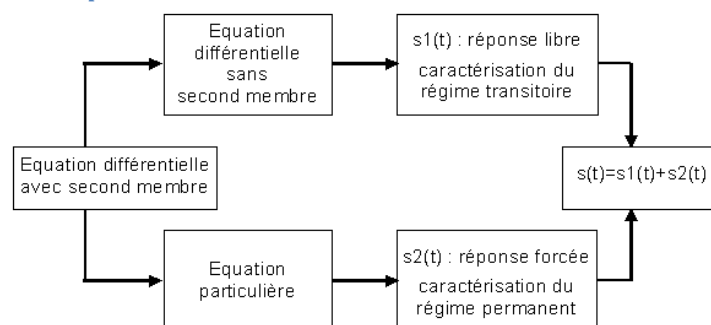
Condensateur : $u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt$

Il faut noter que ces relations simplifiées ne reflètent le comportement qu'en première approximation

5. RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE : LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

TECHNIQUES DE RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE

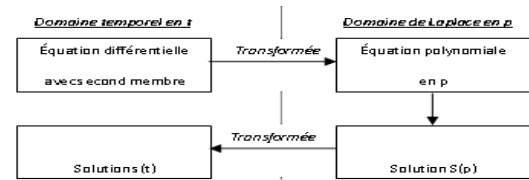
Technique de résolution classique :



Technique utilisée par les automaticiens :

Elle repose sur les transformées de Laplace.

L'objectif est de résoudre un polynôme plutôt qu'une équation différentielle

**DEFINITION MATHÉMATIQUE DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE**

La transformée de Laplace $F(p)$ de la fonction $f(t)$ est $\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt$

où p est une variable complexe.

Cette transformation permet de passer du domaine temporelle en t au domaine de Laplace en p

FONCTIONS CAUSALES

La cause précède l'effet. L'ingénieur a pour pratique d'étudier l'effet d'une cause qu'il situe à la date $t = 0$.

En automatique, on utilisera donc la transformée de Laplace restreinte $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt$ qui ne s'applique qu'aux fonctions causales (c'est-à-dire aux fonctions $f(t)$ telles que $f(t) = 0$ pour $t < 0$).

Remarque :

Pour rendre une fonction mathématique $f(t)$ (qui n'est pas nulle quand $t < 0$) causale, on la multiplie par la fonction d'Heaviside $u(t)$: $u(t) = 0$ si $t < 0$ et $u(t) = 1$ si $t \geq 0$

TRANSFORMÉES USUELLES DE FONCTIONS CAUSALES

Nous ne chercherons pas à déterminer $F(p)$ par la définition (car résoudre l'intégrale est aussi difficile que de résoudre l'équation différentielle du départ). Nous nous servirons de tableaux qu'il faudra connaître :

$f(t)$	impulsion de Dirac : $\delta(t)$	échelon : $k \cdot u(t)$	rampe : $t \cdot u(t)$	$e^{-a \cdot t} \cdot u(t)$	$t \cdot e^{-a \cdot t} \cdot u(t)$	$e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)$	$e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot u(t)$
$F(p)$	1	$\frac{K}{p}$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{p + a}$	$\frac{1}{(p + a)^2}$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$

PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE

	Dérivation 1ère	Dérivation 2ème	Intégration
$f(t)$	$f'(t)$	$f''(t)$	$\int_0^t f(x) \cdot dx$
$F(p)$	$p \cdot F(p) - f(0^+)$	$p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0^+) - f'(0^+)$	$\frac{F(p)}{p}$
	Retard	Multiplication d'une fonction par un scalaire	Multiplication d'une fonction par une fonction
$f(t)$	$f(t - x)$	$K \cdot f(t)$	$f(t) \cdot g(t)$
$F(p)$	$e^{-p \cdot x} \cdot F(p)$	$K \cdot F(p)$	Non trivial

Fondamental : Théorème de la valeur initiale

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot \mathcal{L}(f(t)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p)$$

Fondamental : Théorème de la valeur finale

$$f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot \mathcal{L}(f(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot F(p)$$

6. REPRESENTATION DES SLCI PAR FONCTION DE TRANSFERT

EXISTENCE DE LA FONCTION DE TRANSFERT SI LES CONDITIONS INITIALES SONT NULLES

Soit un système décrit par l'équation différentielle suivante, où $e(t)$ représente l'entrée et $s(t)$ la sortie :

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) = b_0 \cdot e(t) + b_1 \cdot \frac{de(t)}{dt} + \dots + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

Partant de conditions initiales nulles (système au repos à l'origine), et en appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle, on trouve :

$$a_n \cdot p^n \cdot S(p) + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot S(p) + \dots + a_1 \cdot p \cdot S(p) + a_0 \cdot S(p) = b_0 \cdot E(p) + b_1 \cdot p \cdot E(p) + \dots + b_{m-1} \cdot p^{m-1} \cdot E(p) + b_m \cdot p^m \cdot E(p)$$

On note transmittance du système ou Fonction de Transfert : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{j=0}^n a_j p^j}$

Attention !

La fonction de transfert existe seulement si les conditions initiales sont nulles.

Dans le cas contraire : $S(p) = H(p) \cdot E(p) + H_0(p)$ où $H_0(p)$ est une fraction dépendante des conditions initiales.

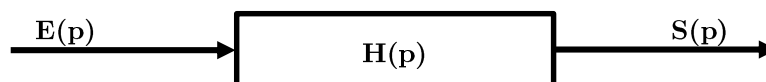
NOTION DE FORME CANONIQUE, GAIN STATIQUE, ORDRE ET CLASSE, POLES ET ZEROS

Attention !

- Si $H(p)$ est une fonction de transfert alors :
 - $H(p)$ caractérise le système indépendamment de l'entrée appliquée
 - les valeurs de p qui annulent le numérateur sont appelées zéros du système
 - les valeurs de p qui annulent le dénominateur sont appelées pôles du système
 - le degré n du polynôme du dénominateur est appelé ordre du système
- En mettant $H(p)$ sous **forme canonique** $H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + \dots + p^2 + \dots}{1 + \dots + p^2 + \dots}$
 - K est appelé le gain statique (il caractérise le régime permanent)
 - α représente la classe du système, (nombre d'intégrations $\frac{1}{p}$ présentes dans le système)

7. REPRESENTATION DES SLCI PAR SCHEMA-BLOC

La représentation externe d'un composant de la chaîne fonctionnelle du système peut être faite par un bloc représentant sa fonction de transfert :



$$\text{avec } S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

V. SLCI ASSERVIS

Insuffisance des systèmes en boucle ouverte (BO).



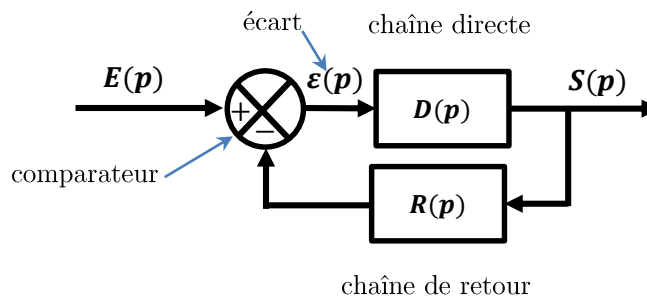
Un système en BO ne tient pas compte de l'effet de sa commande (si la consigne a été respectée ou non).

1 LES SLCI ASSERVIS OU EN BOUCLE FERMEE (BF) - GENERALITES.

DIFFERENTES FONCTIONS REALISEES PAR UN SYSTEME ASSERVI.

Traduire la consigne en un signal utilisable	→	Utilisation de transducteurs.
Observer l'état du système	→	Utilisation de capteurs.
Comparer L'état mesuré est comparé à l'état souhaité.	→	Utilisation d'un comparateur (ou soustracteur).
Corriger Une modification éventuelle de la commande est déterminée.	→	Utilisation d'un correcteur pour améliorer précision-rapidité-stabilité

REPRESENTATION PAR SCHEMA BLOC D'UN SYSTEME ASSERVI ELEMENTAIRE.



Remarque

NB : $\varepsilon(t) = u_c(t) - u_{mes}(t)$ est appelé écart (généralement en Volt) et est « l'image » de l'écart $E_r(t) = \omega_c(t) - \omega(t)$

Ainsi, un système asservi tient compte de l'effet de sa commande (si la **consigne a été respectée ou non**).

DEFINITION : SUIVRE LES VARIATIONS DE LA CONSIGNE QUELS QUE SOIENT LES EFFETS PERTURBATEURS EXTERIEURS.

Un système est dit asservi lorsque la réponse suit aussi précisément que possible les variations de la consigne quels que soient les effets perturbateurs extérieurs.

Système régulé : Cas où l'entrée est fixe dans le temps

Le système cherche à maintenir la sortie constante lorsque d'autres causes que l'entrée (appelées perturbations) tendent à la faire varier (ex : système de chauffage, température d'un four, niveau d'un bac,

régulation de vitesse...).

Système suiveur : Cas où l'entrée varie dans le temps

Le système cherche à suivre les variations de l'entrée (ex : missile, radar de poursuite, robot, gouverne de bateau ou d'avion...).

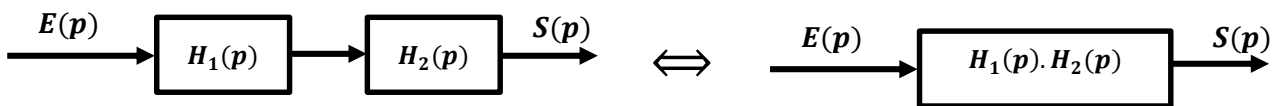
2 MANIPULATIONS SUR LES SCHEMAS BLOCS

MANIPULATIONS ELEMENTAIRES.

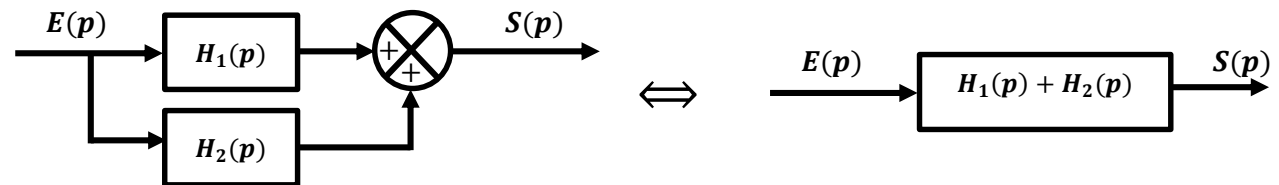
Les schémas blocs ne sont pas toujours de structure simple. Des manipulations permettent de réduire leur complexité et ainsi de déterminer la fonction de transfert globale.

En revanche leur simplification éloigne le modèle, de la réalité physique du système...

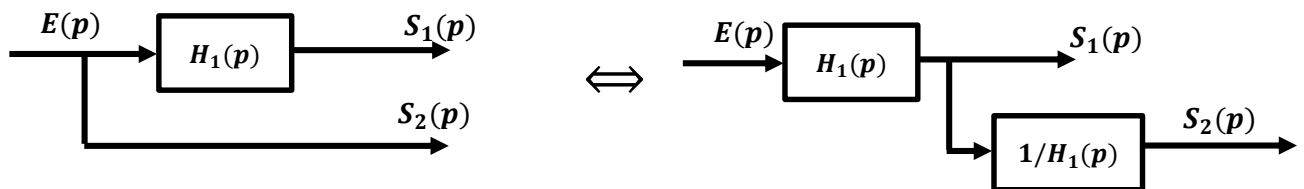
Blocs en série



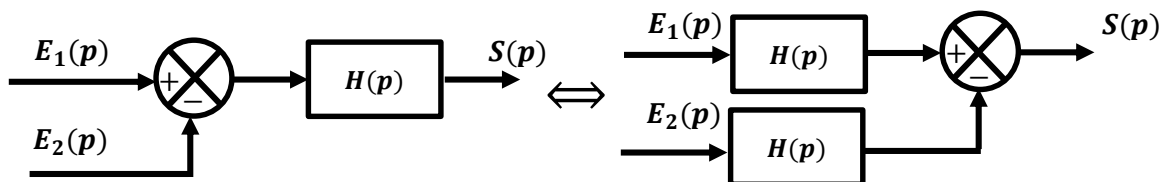
Blocs en parallèle



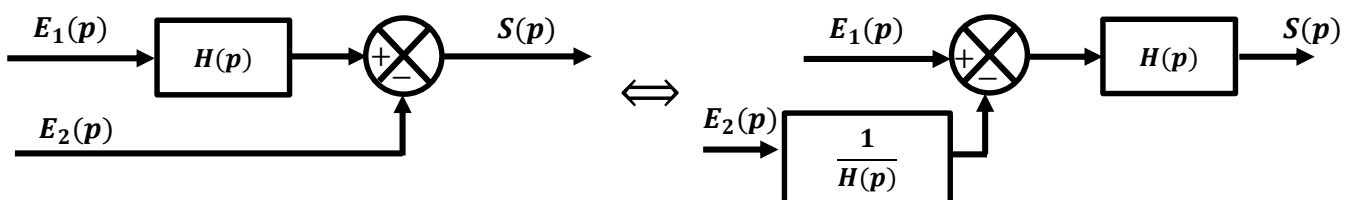
Déplacement d'un bloc avant un point de prélèvement



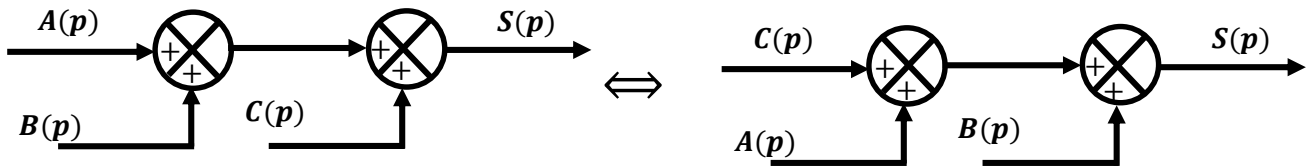
Déplacement d'un bloc avant un comparateur



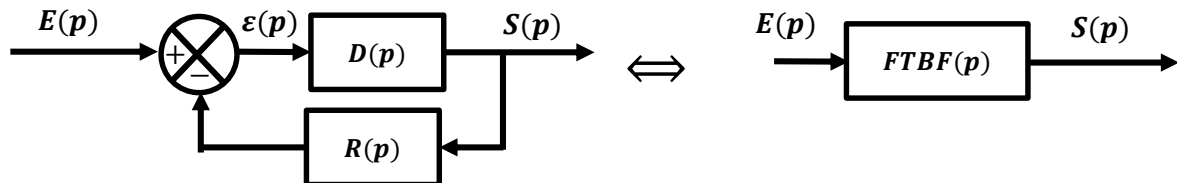
Déplacement d'un bloc après un comparateur



Intervention de 2 sommateurs (lors du chevauchement de 2 boucles)



FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE FERMEE : FTBF ET FORMULE DE BLACK



Avec $D(p)$ la fonction de transfert de la chaîne directe, $R(p)$ la fonction de transfert de la chaîne de retour.

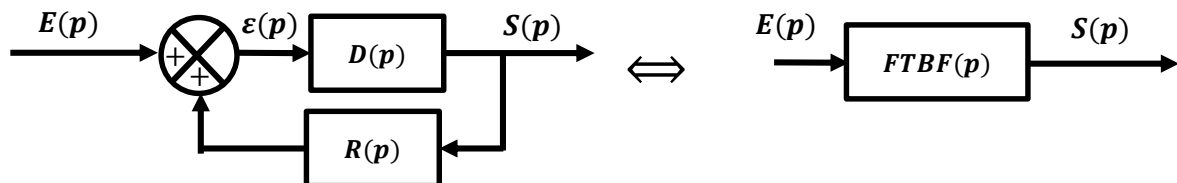
$$S(p) = D(p) \cdot \varepsilon(p) = D(p) \cdot [E(p) - R(p) \cdot S(p)]$$

$$S(p) \cdot [1 + D(p) \cdot R(p)] = D(p) \cdot E(p)$$

On obtient la formule de Black : $FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{D(p)}{1 + D(p) \cdot R(p)}$

Remarque

Attention au signe dans le comparateur. Si :



On obtient alors : $FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{D(p)}{1 - D(p) \cdot R(p)}$

FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE OUVERTE : FTBO

$$FTBO = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = D(p) \cdot R(p)$$

NB : En SPÉ, l'étude de la FTBO déterminera si le système est stable ou non

SYSTEMES A N ENTREES, PRINCIPE DE SUPERPOSITION.

On suppose que toutes les entrées sont nulles sauf une. On calcule alors la sortie en fonction de cette 1ère entrée.

On fait la même chose pour toutes les autres entrées.

Puis, on détermine la sortie lorsque toutes les entrées sont présentes par le principe de superposition en additionnant toutes les réponses précédentes...

Exemple : Cas d'un système à deux entrées



$$H_1(p) = \frac{S(p)}{E_1(p)} \text{ quand } E_2 = 0 \text{ et}$$

$$H_2(p) = \frac{S(p)}{E_2(p)} \text{ quand } E_1 = 0 \text{ alors } S(p) = H_1(p) \cdot E_1(p) + H_2(p) \cdot E_2(p)$$

3 CALCUL DE L'ECART (STATIQUE OU DE POURSUITE) EN REGIME PERMANENT

Pour déterminer $\varepsilon(+\infty)$ il faut d'abord déterminer $\varepsilon(p)$:

$$\varepsilon(p) = E(p) - M(p), \quad \varepsilon(p) = E(p) - D(p) \cdot R(p) \cdot \varepsilon(p)$$

$$\text{donc } \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1+D(p) \cdot R(p)} \text{ ou } \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1+FTBO(p)} \text{ qui est entièrement connu.}$$

En effet, $D(p)$ et $R(p)$ sont connues, et $E(p) - S(p) = E_r(p)$ si $\varepsilon(+\infty) = E_r(+\infty) = e(+\infty) - s(+\infty)$

Définition

En utilisant $\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1+D(p) \cdot R(p)}$ et le théorème de la valeur finale, il est aisé de déterminer $\varepsilon(+\infty)$