Majorations de l'erreur dans les calculs classiques de valeurs approchées d'intégrale

Notes pour la préparation au CAPES - Strasbourg- février 2006

On trouve dans différents ouvrages élémentaires des démonstrations (à coup d'intégration par parties ou d'utilisation subtile de la formule de TAYLOR) des majorations de l'erreur obtenue en approchant une intégrale définie par la méthode des milieux, des trapèzes ou de SIMPSON (voir [G] page 78, [L] page 65 ou [O-V 1] page 69). Tout d'abord il n'est pas facile de mémoriser ces démonstrations (le fameux 2880 de la formule de SIMPSON par exemple), mais surtout elles ne permettent pas de comprendre l'ordre de ces majorations.
Pour les rectangles la majoration est en $O(1/n)$ mais pour les milieux (c'est aussi des rectangles) en $O(1/n^2)$. Pour les trapèzes elle est en $O(1/n^2)$ mais pour SIMPSON on passe tout d'un coup en $O(1/n^4)$. Le but de ce texte est d'en donner une démonstration qui permet de comprendre pourquoi (ce n'est pas un modèle de leçon !).

Objectif. —On se donne une fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$ et on cherche à obtenir des valeurs approchées de l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

Rappel. —(Sommes de RIEMANN) Si on choisit une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même largeur en considérant les points

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b \text{ avec } a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n} \ ,$$

et que l'on choisit un point $\xi_i (i = 0, \ldots, n-1)$ dans chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ alors

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n \text{ où } I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \ .$$

La démonstration repose sur le fait que la fonction f, qui est continue sur le compact $[a, b]$, y est uniformément continue par le théorème de HEINE.

Ici I_n peut être interprétée comme la somme des aires des rectangles de côtés $a_{i+1} - a_i$ et $f(\xi_i)$ ou comme l'intégrale d'une fonction en escaliers. On remplace en fait sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$,la fonction f par la fonction constante $x \longmapsto f(\xi_i)$ c'est-à-dire par un polynôme de degré 0.

C'est ce que l'on va généraliser en remplaçant sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ cette fonction constante par un polynôme bien choisi. *On notera $[\alpha, \beta]$ un intervalle qui sera remplacé par la suite par l'un des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$.*

1. Interpolation de Lagrange

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et $(\alpha_i)_{i=0,\ldots,p}$ une suite croissante de points appartenant à l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

Proposition 1.1 (Interpolation de Lagrange)**.** *Il existe un unique polynôme de degré p tel que*

$$P(\alpha_i) = f(\alpha_i) \text{ pour } i = 0, \ldots, p \ .$$

Démonstration. La plus rapide consiste à définir, pour $i = 0, \ldots, p$ le polynôme L_i de degré p par

$$L_i(x) = \frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\cdots\widehat{(x-\alpha_i)}\cdots(x-\alpha_p)}{(\alpha_i-\alpha_0)(\alpha_i-\alpha_1)\cdots\widehat{(\alpha_i-\alpha_i)}\cdots(\alpha_i-\alpha_p)} \ ,$$

où le signe $\widehat{\ }$ signifie que l'on supprime ce facteur. Ces polynômes vérifient

$$L_i(\alpha_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \ . \end{cases}$$

On en déduit aisément qu'ils sont linéairement indépendants dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à p et donc qu'ils en forment une base car ils sont au nombre de $p+1$ qui est la dimension de cet espace.

Un polynôme P vérifie les hypothèses de la proposition si et seulement si il s'écrit sous la forme

$$P = \sum_{i=0}^{i=p} f(\alpha_i) L_i \ .$$

Il est donc déterminé de façon unique par cette formule. On sera attentif au fait que les polynômes L_i dépendent du choix des points α_i.

Pour des petits degrés, on peut aussi démontrer l'existence de P en écrivant le système linéaire dont ses coefficients sont solutions. □

En utilisant la formule donnant P explicitée dans la démonstration, on obtient immédiatement le corollaire

Corollaire 1.2. *Si P est le polynôme de degré p tel que*

$$P(\alpha_i) = f(\alpha_i) \text{ pour } i = 0, \ldots, p \ ,$$

alors

$$\int_\alpha^\beta P(x)\, dx = \sum_{i=0}^{p} C_i f(\alpha_i) \ ,$$

où les constantes C_i (qui sont indépendantes de P) sont données par

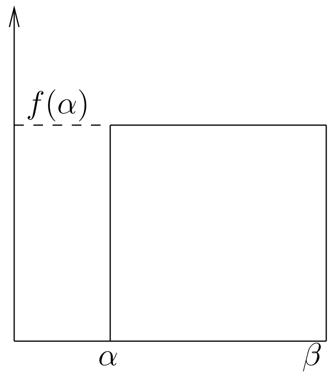
$$C_i = \int_\alpha^\beta L_i(x)\, dx \ .$$

Cas 1. —Si P_0 est le polynôme de degré 0 tel que $P(\alpha) = f(\alpha)$ alors

$$\int_\alpha^\beta P_0(x)\,dx = (\beta - \alpha) f(\alpha)\ ,$$

et

$$C_0 = \beta - \alpha\ .$$



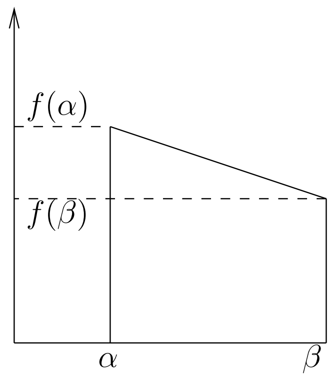
Cas 2. —Si P_1 est le polynôme de degré 1 tel que $P(\alpha) = f(\alpha)$ et $P(\beta) = f(\beta)$ alors

$$\int_\alpha^\beta P_1(x)\,dx = \frac{\beta - \alpha}{2}\left(f(\alpha) + f(\beta)\right)\ ,$$

et

$$C_0 = C_1 = \frac{\beta - \alpha}{2}\ .$$

Noter que c'est la formule donnant l'aire d'un trapèze.



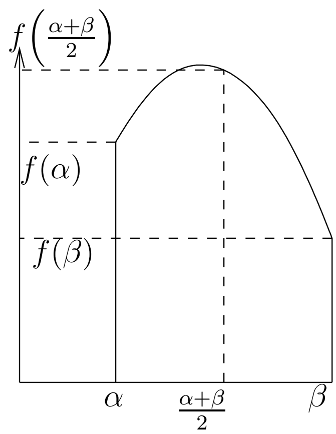
Cas 3. —Si P_2 est le polynôme de degré 2 tel que $P(\alpha) = f(\alpha)$, $P(\frac{\alpha+\beta}{2}) = f(\frac{\alpha+\beta}{2})$ et $P(\beta) = f(\beta)$ alors

$$\int_\alpha^\beta P_2(x)\,dx = \frac{\beta - \alpha}{6}\left(f(\alpha) + f(\beta) + 4f(\frac{\alpha+\beta}{2})\right)\ ,$$

et

$$C_0 = C_2 = \frac{\beta - \alpha}{2} \text{ et } C_1 = \frac{2}{3}(\beta - \alpha)\ .$$

Cette formule est appelée *formule des trois niveaux.*



Démonstration. Appliquons le corollaire avec $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha_2 = \beta$. On a par définition des L_i

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{2}{(\beta - \alpha)^2}(x - \frac{\alpha + \beta}{2})(x - \beta)\ ,\\
L_1(x) &= -\frac{4}{(\beta - \alpha)^2}(x - \alpha)(x - \beta)\ ,\\
L_2(x) &= \frac{2}{(\beta - \alpha)^2}(x - \alpha)(x - \frac{\alpha + \beta}{2})\ .
\end{aligned}$$

Calculons les intégrales des polynômes L_i en utilisant le changement de variable
$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} + t\frac{\beta-\alpha}{2} \ .$$
On obtient
$$\int_\alpha^\beta L_0(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{4}\int_{t=-1}^{t=1} t(t-1)\,dt = \frac{\beta-\alpha}{6} \ ,$$
$$\int_\alpha^\beta L_1(x)\,dx = -\frac{(\beta-\alpha)}{2}\int_{t=-1}^{t=1} (t^2-1)\,dt = \frac{2}{3}(\beta-\alpha) \ ,$$
$$\int_\alpha^\beta L_2(x)\,dx = \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}\int_{t=-1}^{t=1} t(t+1)\,dt = \frac{\beta-\alpha}{6} \ ,$$
d'où le résultat. □

Pour un polynôme d'interpolation de degré 2, il est probablement plus rapide de calculer directement ses coefficients en fonction de $f(\alpha)$, $f(\beta)$ et $f(\frac{\alpha+\beta}{2})$ pour obtenir la formule des 3 niveaux.

2. Majorations

Nous allons décrire ici les majorations dans les cas où on interpole avec des polynômes de petit degré (0,1 ou 2). On trouvera un résultat plus général dans [O-V 2] page 103.

2.1. **Majoration de l'erreur dans le cas 1 (*méthode des rectangles*).** Une application directe de l'inégalité des accroissements finis implique la

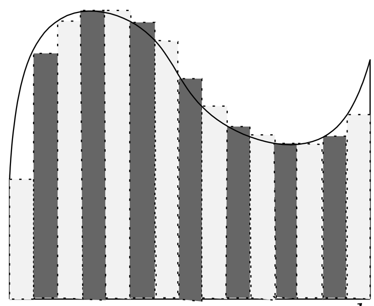
Proposition 2.1. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$, on a pour tout $x \in [\alpha,\beta]$*
$$|f(x) - P_0(x)| = |f(x) - f(\alpha)| \leqslant (\beta-\alpha) \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f'(x)| \ .$$

On en déduit en utilisant le calcul de l'intégrale de P_0 fait plus haut le

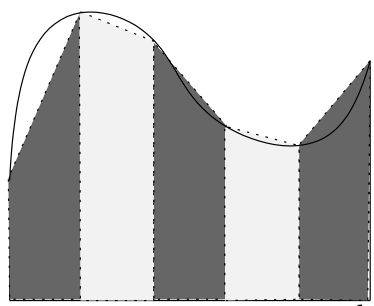
Corollaire 2.2. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$,*
$$|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - (\beta-\alpha)f(\alpha)| \leqslant (\beta-\alpha)^2 \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f'(x)| \ .$$

En appliquant ce résultat à chacun des n intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ qui ont pour longueur $\frac{b-a}{n}$, on obtient

Théorème 2.3 (Méthode des rectangles)**.** *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$,*
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{n} M_1 \ .$$
où $M_1 = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.



Méthode des rectangles (à gauche)



Méthode des trapèzes

2.2. **Majoration de l'erreur dans le cas 2 (***méthode des trapèzes***).**

Proposition 2.4. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha, \beta]$, on a pour tout $x \in [\alpha, \beta]$*

$$|f(x) - P_1(x)| \leqslant \frac{|(x-\alpha)(x-\beta)|}{2} \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f''(x)| \ .$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que les fonctions f et P_1 sont égales aux points α et β er fixons un point $x \in]\alpha, \beta[$. Considérons la fonction

$$\varphi : t \longmapsto \Big(f(t) - P_1(t)\Big) - \Big(f(x) - P_1(x)\Big)\frac{(t-\alpha)(t-\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)} \ .$$

Cette fonction s'annule aux points (distincts) α, β et x. En appliquant deux fois le théorème de Rolle, on obtient l'existence d'un point $\xi \in]\alpha, \beta[\setminus\{x\}$ tel que

$$\varphi''(\xi) = 0 \ .$$

La dérivée seconde du polynôme (de degré 1) P_1 est nulle et la dérivée seconde de la fonction $t \longmapsto (t-\alpha)(t-\beta)$ est constante, égale à $2!$. On en déduit que

$$\varphi''(\xi) = f''(\xi) - \Big(f(x) - P_1(x)\Big)\frac{2!}{(x-\alpha)(x-\beta)} \ .$$

Comme elle est nulle, on conclut que

$$|f(x) - P_1(x)| = |f''(\xi)| \frac{|(x-\alpha)(x-\beta)|}{2!} \leqslant \frac{|(x-\alpha)(x-\beta)|}{2!} \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f''(x)| \ .$$

Et comme l'inégalité est aussi vérifiée pour $x = \alpha$ ou $x = \beta$ on obtient bien le résultat annoncé. □

Corollaire 2.5. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha, \beta]$,*

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \frac{(\beta-\alpha)}{2}\Big(f(\alpha) + f(\beta)\Big)\right| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3}{12} \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f''(x)| \ .$$

Démonstration. Ce résultat s'obtient en intégrant l'inégalité démontrée à la proposition précédente. Pour le membre de gauche, il suffit d'utiliser le calcul de l'intégrale de P_1 fait plus haut. Pour le membre de droite, il suffit d'utiliser à nouveau le changement de variable $x = \frac{\alpha+\beta}{2} + t\frac{\beta-\alpha}{2}$. On obtient

$$\int_\alpha^\beta |(x-\alpha)(x-\beta)|\, dx = \frac{(\beta-\alpha)^3}{8}\int_{t=-1}^{t=1}(1-t^2)\, dt = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}\ .$$

□

En appliquant ce résultat à chacun des n intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ qui ont pour longueur $\frac{b-a}{n}$, on obtient le

Théorème 2.6 (Méthode des trapèzes)**.** *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$,*

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}(f(a_i + f(a_{i+1}))\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12\, n^2}M_2\ .$$

où $M_2 = \sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

2.3. **Majoration de l'erreur dans le cas 3.** On applique exactement la même méthode que dans le cas **2** et on comprendra qu'on aurait pu l'écrire directement pour tous les cas (à ce détail près qu'on n'a pas calculé l'intégrale du polynôme d'interpolation de degré p, et qu'on n'a pas non plus précisé les points choisis pour interpoler). Pour simplifier l'écriture, nous désignerons par m le milieu de $[\alpha,\beta]$.

Proposition 2.7. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[\alpha,\beta]$, on a pour tout $x\in[\alpha,\beta]$*

$$|f(x) - P_2(x)| \leqslant \frac{|(x-\alpha)(x-m)(x-\beta)|}{3!}\sup_{x\in[\alpha,\beta]}|f'''(x)|\ .$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que les fonctions f et P_2 sont égales aux points α, β et m. Fixons un point $x\in[\alpha,\beta]$ distincts de ces trois points. Considérons la fonction

$$\varphi : t \longmapsto \Big(f(t) - P_2(t)\Big) - \Big(f(x) - P_2(x)\Big)\frac{(t-\alpha)(t-m)(t-\beta)}{(x-\alpha)(x-m)(x-\beta)}\ .$$

Cette fonction s'annule aux points (distincts) α, m, β et x. En appliquant trois fois le théorème de Rolle, on obtient l'existence d'un point $\xi \in]\alpha,\beta[\setminus\{m,x\}$ tel que

$$\varphi'''(\xi) = 0\ .$$

La dérivée troisième du polynôme (de degré 2) P_2 est nulle et la dérivée troisième de la fonction $t \longmapsto (t-\alpha)(t-m)(t-\beta)$ est constante, égale à 3!. On en déduit que

$$\varphi'''(\xi) = f'''(\xi) - \Big(f(x) - P_2(x)\Big)\frac{3!}{(x-\alpha)(x-m)(x-\beta)}\ .$$

Comme elle est nulle, on en déduit, comme ci-dessus, le résultat annoncé. □

Corollaire 2.8. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[\alpha, \beta]$,*

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\, dx - \frac{(\beta-\alpha)}{6}(f(\alpha) + 4f(\frac{\alpha+\beta}{2}) + f(\beta)) \right| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^4}{2^5\, 3!} \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f'''(x)| \ .$$

Démonstration. Comme dans le cas **2** ce résultat s'obtient en intégrant l'inégalité démontrée à la proposition précédente. L'intégrale de P_2 ayant été calculé plus haut, il reste à calculer l'intégrale du membre de droite de l'inégalité avec toujours le même changement de variable. On obtient

$$\int_\alpha^\beta |(x-\alpha)(x-m)(x-\beta)|\, dx = \frac{(\beta-\alpha)^4}{16} \int_{t=-1}^{t=1} |t|(1-t^2)\, dt = \frac{(\beta-\alpha)^4}{2^5} \ .$$

□

En appliquant à nouveau ce résultat à chacun des n intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ qui ont pour longueur $\frac{b-a}{n}$, on obtient

Théorème 2.9. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a, b]$,*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{6n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(a_i + f(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}) + f(a_{i+1})) \right| \leqslant \frac{(b-a)^4}{2^5\, 3!\, n^3} M_3 \ .$$

où $M_3 = sup_{x\in[a,b]}|f'''(x)|$.

Nous avons obtenu des résultats assez cohérents, avec une majoration en $O\left(\frac{1}{n}\right)$ en utilisant un polynôme de degré 0, une majoration en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en utilisant un polynôme de degré 1 et une majoration en $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ en utilisant un polynôme de degré 2. Mais il se passe un phénomène a priori étonnant.

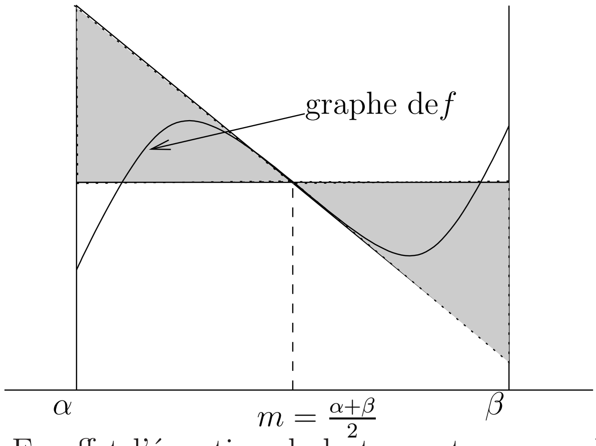
3. La méthode des milieux

Dans le cas **1** où nous interpolons avec un polynôme constant, nous avons choisi α comme point d'interpolation. Le résultat du corollaire 2.2 est aussi vrai si on remplace le point α par le point β, ou par un autre point du segment $[\alpha, \beta]$, par exemple $c\alpha + (1-c)\beta$ où $c \in [\alpha, \beta]$. On obtient alors une variante de la majoration de l'erreur pour la méthode des rectangles qui s'écrit ainsi pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(ca_i + (1-c)a_{i+1}) \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{n} M_1 \ .$$

Si on choisit comme point d'interpolation le milieu $m = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$ du segment $[\alpha, \beta]$, bien sûr cette majoration est correcte.....mais nous allons montrer qu'on a une bien meilleure majoration.

Sur la figure ci-contre on a tracé le rectangle dont l'aire est égale à l'intégrale du polynôme d'interpolation de degré 0 qui prend au point m la même valeur que f. On a aussi tracé la tangente au graphe de f au point d'abscisse m. Et on remarque que l'aire comprise entre cette tangente et l'axe des x est égale à l'aire du rectangle mentionné ci-dessus.



Ceci se démontre aisément analytiquement. En effet l'équation de la tangente au graphe de f étant donnée par $y = f(m) + (x - m)f'(m)$, l'aire comprise entre cette tangente et l'axe des x est égale à

$$\int_\alpha^\beta \big(f(x) - f(m) - (x-m)f'(m)\big)\, dx \ .$$

Comme m est le *milieu* de $[\alpha, \beta]$, l'intégrale sur $[\alpha, \beta]$ de $x \longmapsto (x - m)$ est nulle pour d'évidentes raisons de symétrie. Par conséquent on a

$$\int_\alpha^\beta \big(f(x) - f(m) - (x-m)f'(m)\big)\, dx = \int_\alpha^\beta \big(f(x) - f(m)\big)\, dx \ ,$$

qui est bien l'aire du rectangle considéré. La façon de majorer l'erreur commise apparaît alors clairement.

Proposition 3.1. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha, \beta]$, on a pour tout $x \in [\alpha, \beta]$*

$$|f(x) - f(m) - (x-m)f'(m)| \leqslant \frac{(x-m)^2}{2} \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f''(x)| \ .$$

Démonstration. —
Méthode 1. —On applique la formule de Taylor qui donne l'existence d'un point $\xi \in [\alpha, \beta]$ tel que

$$f(x) - f(m) - (x-m)f'(m) = \frac{(x-m)^2}{2} f''(\xi) \ ,$$

ce qui implique le résultat.
Méthode 2. —On (re)démontre la formule de Taylor en intégrant par partie $\int_x^m (t-x)f''(t)\, dt$. On obtient

$$\int_x^m (t-x)f''(t)\, dt = (t-x)f'(t)\Big]_x^m - \int_x^m f'(t)\, dt = f(x) - f(m) - (x-m)f'(m) \ .$$

On en déduit que

$$|f(x) - f(m) - (x-m)f'(m)| \leqslant \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f''(t)| \int_m^x |(t-m)|\, dt = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f''(t)| \frac{(x-m)^2}{2} \ .$$

Méthode 3. —Posons $\widetilde{P_1}(x) = f(m) - (x-m)f'(m)$. On remarque tout d'abord que les fonctions f et $\widetilde{P_1}$ ainsi que leurs dérivées sont égales au point m. Fixons un point $x \in [\alpha, \beta]$ distinct de m et considérons la fonction

$$\chi : t \longmapsto \Big(f(t) - \widetilde{P_1}(t)\Big) - \Big(f(x) - \widetilde{P_1}(x)\Big)\frac{(t-m)^2}{(x-m)^2} \ .$$

Cette fonction s'annule aux points (distincts) m et x. Sa dérivée s'annule donc en un point y distinct de x et de m. Mais comme cette dérivée s'annule aussi au point m, on en déduit, en appliquant à nouveau le théorème de Rolle, l'existence d'un point $\xi \in [\alpha, \beta]\backslash\{x, m\}$ tel que

$$\chi''(\xi) = 0 \ .$$

La dérivée seconde du polynôme (de degré 1) $\widetilde{P_1}$ est nulle et la dérivée seconde de la fonction $t \longmapsto (t-m)^2$ est constante, égale à 2!. On en déduit que

$$\chi''(\xi) = f''(\xi) - \Big(f(x) - \widetilde{P_1}(x)\Big)\frac{2!}{(x-m)^2} \ ,$$

ce qui implique le résultat puisque $\chi''(\xi) = 0$. □

On en déduit en utilisant la remarque faite avant la proposition le

Corollaire 3.2. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha, \beta]$ et m le milieu de $[\alpha, \beta]$*

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - (\beta-\alpha)f(m)\right| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3}{24}\sup_{x\in[\alpha,\beta]}|f''(x)| \ .$$

Démonstration. Ce résultat s'obtient en intégrant l'inégalité démontrée à la proposition précédente. Pour le membre de droite, il suffit d'utiliser le fait que m est le milieu de $[\alpha, \beta]$. On obtient

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x-m)^2\,dx = \int_m^\beta (x-m)^2\,dx = \frac{(\beta-\alpha)^3}{24} \ .$$

□

En appliquant ce résultat à chacun des n intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ qui ont pour longueur $\frac{b-a}{n}$, on obtient

Théorème 3.3 (Méthode des milieux)**.** *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$,*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24\,n^2}M_2 \ .$$

où $M_2 = \sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

4. Méthode de Simpson

Par une méthode analogue à celle utilisée pour la méthode des milieux, on peut améliorer la majoration obtenue au théorème 2.9 (voir [O-V 2] page 115). En effet on remarque que

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-m)(x-\beta)\,dx = 0\ ,$$

car en utilisant le même changement de variable qu'à la section **2.3** on obtient

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-m)(x-\beta)\,dx = \int_{t=-1}^{t=1} t(1-t^2)\,dt = 0\ .$$

En remplaçant le polynôme P_2 qui interpole f aux points α, β et m par un polynôme $\widetilde{P_3}$ tel que

$$\widetilde{P_3}(x) = P_2(x) + \lambda(x-\alpha)(x-\beta)(x-m)\ ,$$

on ne change pas l'intégrale car

$$\int_\alpha^\beta (f(x) - P_2(x))\ dx = \int_\alpha^\beta \Big(f(x) - \widetilde{P_3}(x)\Big)\ dx\ .$$

Par contre en choisissant bien λ, on peut améliorer la majoration. On choisit λ de sorte que

$$\widetilde{P_3'}(m) = f'(m)\ ,$$

ce qui est possible car

$$\frac{d}{dx}(x-\alpha)(x-m)(x-\beta)\Big|_{x=m} \neq 0\ .$$

Proposition 4.1. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[\alpha,\beta]$, on a pour tout $x \in [\alpha,\beta]$*

$$|f(x) - \widetilde{P_3}(x)| \leqslant \frac{|(x-\alpha)(x-m)^2(x-\beta)|}{4!} \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f^{(4)}(x)|\ .$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que les fonctions f et $\widetilde{P_3}$ sont égales aux points α, β et m. Fixons un point $x \in [\alpha,\beta]$ distincts de ces trois points. Considérons la fonction

$$\theta : t \longmapsto \Big(f(t) - \widetilde{P_3}(t)\Big) - \Big(f(x) - \widetilde{P_2}(x)\Big)\frac{(t-\alpha)(t-m)^2(t-\beta)}{(x-\alpha)(x-m)^2(x-\beta)}\ .$$

Cette fonction s'annule aux points (distincts) α, m, β et x. Par le théorème de Rolle sa dérivée s'annule en trois points distincts de α, β, m et x, mais elle s'annule aussi au point m. En appliquant trois fois le théorème de Rolle à cette dérivée, on obtient l'existence d'un point $\xi \in]\alpha,\beta[\setminus\{m,x\}$ tel que

$$\theta^{(4)}(\xi) = 0\ .$$

La dérivée quatrième du polynôme (de degré 3) $\widetilde{P_3}$ est nulle et la dérivée quatrième de la fonction $t \longmapsto (t-\alpha)(t-m)^2(t-\beta)$ est constante, égale à $4!$. On en déduit que

$$\theta^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - \Big(f(x) - \widetilde{P_3}(x)\Big)\frac{4!}{(x-\alpha)(x-m)^2(x-\beta)} ,$$

ce qui implique le résultat annoncé. □

Corollaire 4.2. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[\alpha, \beta]$,*

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \frac{(\beta-\alpha)}{6}\left(f(\alpha) + 4f(\frac{\alpha+\beta}{2}) + f(\beta)\right)\right| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^4}{2^3\, 4!\, 15} \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f^{(4)}(x)| .$$

Démonstration. Comme plus haut, ce résultat s'obtient en intégrant l'inégalité démontrée à la proposition précédente. Pour le premier membre on utilise le choix de $\widetilde{P_3}$ et le calcul de l'intégrale de P_2 fait en **2.3**, d'où

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \Big(f(x) - \widetilde{P_3}(x)\Big)\ dx &= \int_\alpha^\beta (f(x) - P_2(x))\ dx \\ &= \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \frac{(\beta-\alpha)}{6}\Big(f(\alpha) + 4f(\frac{\alpha+\beta}{2}) + f(\beta)\Big) .\end{aligned}$$

Pour le membre de droite on obtient (avec toujours le même changement de variable)

$$\int_\alpha^\beta |(x-\alpha)(x-m)^2(x-\beta)|\,dx = \frac{(\beta-\alpha)^5}{2^5}\int_{t=-1}^{t=1} |t|^2(1-t^2)\,dt = \frac{(\beta-\alpha)^5}{2^5}\frac{4}{15} = \frac{(\beta-\alpha)^5}{2^3\times 15} .$$

□

En appliquant à nouveau ce résultat à chacun des n intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ qui ont pour longueur $\frac{b-a}{n}$, on obtient

Théorème 4.3 (Méthode de SIMPSON)**.** *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a, b]$,*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(a_i) + f(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}) + f(a_{i+1})\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2^3\times 4!\times 15\times n^4} M_4 .$$

où $M_4 = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Et pour finir on calcule

$$2^3 \times 4! \times 15 = 2880 .$$

5. CONCLUSION

En augmentant le nombre de points d'interpolation, que l'on choisit régulièrement espacés sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, on peut obtenir de meilleures majorations. Pour $p+1$ points d'interpolation, on interpole par un polynôme de degré p et il n'est pas difficile de généraliser ce qu'on a fait au paragraphe **2** pour obtenir à l'aide du théorème de ROLLE une majoration de l'erreur commise en $O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$. C'est la méthode de NEWTON-COTES composée (voir par exemple [De] page 62).

Dans le cas où p est pair on pourra améliorer la majoration car l'un des points d'interpolation est le milieu de l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$. La généralisation de la proposition 4.1 est donnée par l'interpolation d'Hermite (voir [K] théorème 8.7).

Pratiquement le calcul des dérivées de f peut devenir très compliqués et on se contente souvent de la méthode de Simpson qui est assez performante. On peut aussi choisir des points d'interpolation qui ne sont pas régulièrement espacés. En choisissant les zéros de polynômes orthogonaux on obtient la méthode de Gauss (voir problème écrit du CAPES 2000 ou [K] théorème 10.3).

Références

[D] J-P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles
[G] X. Gourdon, Les maths en tête : analyse
[K] V. Komornik, Précis d'analyse réelle
[L] T. Lambre, Analyse pour l'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES
[O-V 1] J-L. Ovaert & J-L. Verley, Analyse avec commentaires et notes historiques
[O-V 2] J-L. Ovaert & J-L. Verley, Algèbre avec commentaires et notes historiques