

# 7 ÉTUDE DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES

Comment courants et potentiels électriques se répartissent au sein d'un circuit électrique ? C'est à cette question que ce cours entend répondre, sachant qu'on limitera notre propos aux réseaux électriques linéaires. En effet, ces réseaux ont le bon goût de mener à des équations analytiquement solubles.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/etude-des-reseaux-electriques.php>

## Sommaire

---

<b>7.1 Lois de l'électrocinétique</b> . . . . .	<b>73</b>
7.1.1 Introduction . . . . .	73
7.1.2 Loi des nœuds . . . . .	73
7.1.3 Loi des mailles . . . . .	74
7.1.4 Puissance reçue par un dipôle électrique . . . . .	75
<b>7.2 Phénomènes résistifs</b> . . . . .	<b>76</b>
7.2.1 Loi d'ohm - effet Joule . . . . .	76
7.2.2 Association de résistances . . . . .	77
7.2.3 Ponts diviseurs . . . . .	78
<b>7.3 Modélisation linéaire d'un dipôle actif</b> . . . . .	<b>79</b>
7.3.1 Source de tension . . . . .	79
7.3.2 Source de courant . . . . .	80
7.3.3 Équivalence Thévenin-Norton . . . . .	81
7.3.4 Récepteur actif . . . . .	81
7.3.5 Loi de Pouillet . . . . .	82
7.3.6 Méthodes de résolution . . . . .	83
<b>7.4 Phénomènes capacitifs</b> . . . . .	<b>84</b>
7.4.1 Rappels . . . . .	84
7.4.2 Association de condensateurs . . . . .	85
7.4.3 Décharge d'un condensateur . . . . .	86
<b>7.5 Phénomène d'auto-induction</b> . . . . .	<b>87</b>
7.5.1 Introduction à l'induction magnétique . . . . .	87
7.5.2 Auto-induction . . . . .	89
7.5.3 Énergie emmagasinée dans une bobine . . . . .	90
7.5.4 Circuit R-L . . . . .	90

---

## 7.1 Lois de l'électrocinétique

Les lois de l'électrocinétique ou **lois de Kirchhoff**<sup>1</sup> se résument en deux lois : la *loi des nœuds* et la *loi des mailles*.

### 7.1.1 Introduction

Un **réseau électrique** (ou circuit électrique) est un ensemble d'éléments présentant des propriétés électriques, reliés entre eux par des conducteurs que l'on considérera parfaits (conductivité infini). Les lois de l'électricité permettent de trouver la façon dont les courants et les potentiels électriques se répartissent au sein de ce circuit.

Lorsque les grandeurs électriques ne varient pas dans le temps, on parle de **régime continu** ; le **régime variable** désigne la situation contraire. En général, les grandeurs électriques stationnaires sont notées en majuscule (tension  $U$  et intensité du courant  $I$ ) alors que les grandeurs variables sont en minuscules ( $u(t)$  et  $i(t)$ ).

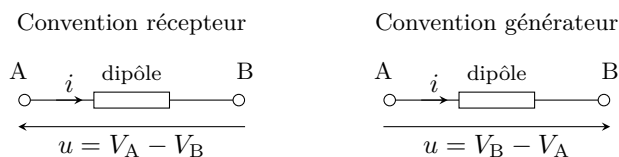
En régime variable, les fluctuations de courant se propagent à une vitesse proche de la vitesse de la lumière. Pour des circuits de taille raisonnable, la durée de propagation  $\tau$  est très petite devant le temps caractéristique  $T$  des fluctuations (période du signal s'il est périodique). Il est alors légitime de négliger  $\tau$  devant  $T$  ; c'est ce qu'on appelle l'*approximation des régimes quasi-stationnaires*.

#### Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS)

Nous admettrons que les lois des régimes permanents restent valables en régime variable si l'on peut considérer les phénomènes de propagation négligeables. Notamment, dans une branche d'un circuit, à un instant donné, le courant a la même intensité en tout point.

Un **dipôle électrocinétique** est une partie d'un circuit qui peut être reliée au reste du circuit par deux fils. On décrit le comportement d'un dipôle par sa relation courant-tension ( $i = f(u)$ ) dans une convention précisée. Il en existe deux :

- dans la convention récepteur, si le courant algébrique est orienté dans le sens AB, alors  $u = V_A - V_B$  ;
- dans la convention générateur, si le courant est orienté dans le sens AB, alors  $u = V_B - V_A$ .



Enfin, nous restreindrons notre propos aux réseaux constitués seulement de dipôles électrocinétiques linéaires, c'est-à-dire ceux dont la relation entre  $u$  et  $i$  est soit affine ( $i = a \times u + b$ ), soit intégro-différentielle.

### 7.1.2 Loi des nœuds

Dans chaque branche d'un réseau électrique, on définit un sens positif (le choix est arbitraire !) du courant et une intensité algébrique  $i$ . Si  $i > 0$ , le courant circule dans le sens positif ; si  $i < 0$ , le courant circule dans le sens opposé.

Un nœud est la rencontre d'au moins trois conducteurs électriques. Considérons  $n$  branches de conducteurs liées par un nœud N. Définissons  $i_k$ , l'intensité algébrique du courant de la  $k^e$  branche. La loi des nœuds

1. **Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)** : physicien allemand qui énonça les lois relatives au courant électrique dans les circuits alors qu'il était encore étudiant. On lui doit surtout des avancées en spectroscopie.

traduit la conservation de la charge en régime stationnaire et exprime le fait que la charge ne peut pas s'accumuler en N : le courant électrique qui arrive en N doit être compensé par le courant qui sort. Cette loi, rigoureusement vérifiée en régime continu, est admise en régime variable dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

### Loi des nœuds

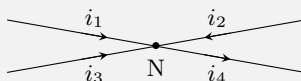
En chaque nœud d'un circuit, on a

$$\sum_{k=1}^n \epsilon_k i_k = 0 \quad (7.1)$$

où  $\epsilon_k = +1$  quand le courant est entrant et où  $\epsilon_k = -1$  dans le cas contraire.

### Exemple –

On considère le schéma suivant :



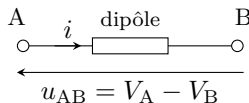
la loi des nœuds (7.1) exprimée en N donne

$$i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0 \quad \text{soit} \quad i_4 = i_1 + i_2 + i_3$$

ce qui traduit bien le fait que le courant qui arrive en N est égale au courant qui sort.

### 7.1.3 Loi des mailles

Le transport électrique est assuré grâce aux forces électrostatiques. On peut dès lors définir un potentiel électrique en chaque point du circuit. Lorsque le potentiel électrique est le même partout, le réseau est à l'équilibre et n'est le siège d'aucun courant électrique. En revanche, lorsque le potentiel électrique n'est plus uniforme, le conducteur n'est plus à l'équilibre ce qui génère un courant électrique (qui tente de rétablir l'équilibre). Aux extrémités d'une branche il existe alors une tension qui dépend du courant électrique et de la nature du dipôle traversé par ce courant. Il est traditionnel de représenter une tension  $u_{AB} = V_A - V_B$  par une flèche allant de B vers A.



Les tensions qui règnent dans un circuit obéissent à quelques contraintes physiques. En effet, si l'on parcourt un circuit fermé (on parle de maille) en partant d'un nœud N pour revenir à ce même nœud, on doit trouver une tension nulle en vertu du caractère conservatif du champ électrique ( $\oint \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = 0$ ). Autrement dit, si l'on décompose le circuit  $\mathcal{C}$  en  $n$  branches adjacentes on aura :

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0$$

où  $u_k$  est la tension qui règne aux extrémités de la  $k^e$  branche. Cette loi est à appliquer si toutes les tensions sont orientées dans le même sens, ce qui n'est pas toujours la cas à cause des différentes conventions choisies pour les dipôles, c'est pourquoi on retiendra la règle suivante :

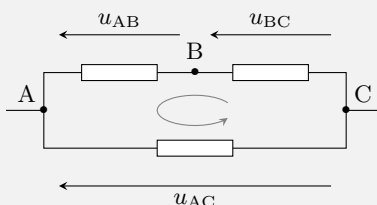
**Loi des mailles**

Prenons une maille et choisissons arbitrairement un sens de parcours. Visitions toutes les branches de la maille et associons un coefficient  $\epsilon_k = +1$  à la tension rencontrée lorsqu'elle est orientée (sa flèche représentative) dans le sens de parcours et un coefficient  $\epsilon_k = -1$  lorsque la tension rencontrée est orientée dans l'autre sens. La loi des mailles se traduit alors par

$$\sum_{k=1}^n \epsilon_k u_k = 0 \quad (7.2)$$

**Exemple –**

Dans le circuit ci-dessous, appliquons la loi des mailles en parcourant la maille dans le sens indiqué.



On trouve

$$1 \times u_{BC} + 1 \times u_{AB} - 1 \times u_{AC} = 0$$


soit


$$u_{AC} = u_{AB} + u_{BC}$$

On retrouve d'ailleurs une loi identique à celle de Chasles propre aux vecteurs.

**Remarques :**

- Rappelons qu'il existe une indétermination du potentiel; ceci reste vrai au sein d'un réseau électrique. Cependant, une convention souvent rencontrée consiste à poser l'origine du potentiel au niveau du pôle - de l'alimentation. Ce potentiel de référence est appelée **masse du circuit**.
- Un équipement sous tension présente, en général, une connexion physique avec la terre. Elle permet de protéger l'utilisateur et également d'évacuer les courants induits par la foudre. Cependant, il ne faudrait pas confondre ligne de terre et ligne de masse, car le potentiel de la terre n'est pas nécessairement constant et sa fonction est uniquement liée à la sécurité.

  
 ligne de masse

  
 ligne de terre

**7.1.4 Puissance reçue par un dipôle électrique**

On appelle  $\mathcal{P}(t)$  la puissance électrique reçue à l'instant  $t$  par un dipôle électrocinétique. La puissance électrique se mesure en **watt** (symbole :  $W$ ) en hommage à James Watt<sup>2</sup> et on rappelle que

$$1 \text{ W} \triangleq 1 \text{ J.s}^{-1}$$

Entre  $t$  et  $t + dt$ , la quantité de charge  $dq = i(t) dt$  arrive en une extrémité du dipôle (point A) pendant que la même quantité – nous sommes en régime stationnaire ou quasi-stationnaire – en sort par l'autre extrémité (point B). Cette quantité de charge possède une énergie électrique  $\mathcal{E}_p(A) = dqV_A$  en A et  $\mathcal{E}_p(B) = dqV_B$  en

<sup>2</sup> **James Watt (1736-1819)** : ingénieur britannique, dont les améliorations sur la machine à vapeur furent une étape clé dans la révolution industrielle.

B. Remarquons qu'entre A et B l'énergie des charges n'a pas changé du fait que la distribution des charges et du potentiel est la même entre  $t$  et  $t + dt$ . Autrement dit, d'un point de vue énergétique, tout se passe comme si l'on avait transporté la charge  $dq$  de A en B. Pendant ce transport la charge perd une énergie potentielle  $dqV_A - dqV_B$  qu'elle cède intégralement au dipôle. Celui-ci reçoit donc une quantité d'énergie

$$\delta W = dqV_A - dqV_B = i(t) u_{AB}(t) dt$$

La puissance électrocinétique reçue (l'énergie reçue par unité de temps) par un dipôle D à l'instant  $t$ , soumis à une tension  $u(t)$  et traversé par un courant d'intensité  $i(t)$  vaut, *en convention récepteur*,

$$\mathcal{P}(t) = u(t) i(t) \quad (7.3)$$

Si  $\mathcal{P}(t) > 0$ , le dipôle absorbe effectivement, à l'instant  $t$ , de l'énergie électrique. On dit que le dipôle a un caractère **récepteur**. Cette énergie reçue par le dipôle est soit stockée, soit convertie sous une autre forme (effet Joule dans une résistance, énergie mécanique dans un moteur).

Si  $\mathcal{P}(t) < 0$ , le dipôle fournit effectivement de l'énergie électrique; on dit que le dipôle à un caractère **générateur** (batterie en fonctionnement par exemple).

**Tab. 7.1** – Ordres de grandeur

électronique	lampe de poche	consommation des français en hiver	centrale électrique	moteur TGV
$\mu\text{W}$ -mW	W	100 GW	GW	MW

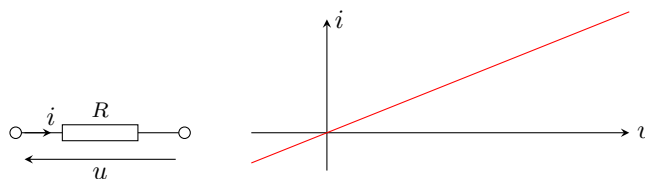
## 7.2 Phénomènes résistifs

### 7.2.1 Loi d'ohm - effet Joule

Comme on l'a vu précédemment (cf. [femto-physique.fr/electromagnetisme/conducteurs\\_electriques.php](http://femto-physique.fr/electromagnetisme/conducteurs_electriques.php)), un conducteur ohmique obéit à la loi d'Ohm

$$u(t) = R i(t) \quad [\text{Convention récepteur}]$$

où  $R$  désigne la résistance du conducteur ohmique dont la valeur dépend de la géométrie et de la conductivité du matériau conducteur. Rappelons que  $R$  s'exprime en ohm (symbole  $\Omega$ ). La caractéristique  $i = f(u)$  est



**Fig. 7.1** – Schéma et caractéristique d'un conducteur ohmique.

donc une droite passant par l'origine.

Un circuit uniquement composé de résistances ne peut pas produire de courant. On dit que le conducteur ohmique est un *dipôle linéaire passif*. Par exemple, si l'on branche deux résistances ensemble, la loi des mailles donne

$$u_1 + u_2 = 0$$

soit

$$R_1 i + R_2 i = 0 \implies i = 0$$

Aucun courant ne circule et par conséquent tous les conducteurs sont au même potentiel. On retrouve une des propriétés des conducteurs à l'équilibre.

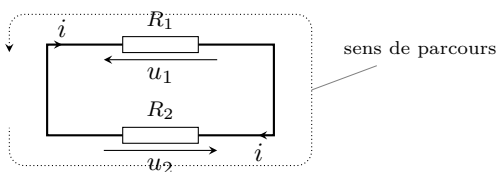


Fig. 7.2 – Réseau constitué de deux résistances

La puissance reçue par un conducteur ohmique vaut

$$\mathcal{P} = u i = R i^2 > 0 \quad \heartsuit \quad (7.4)$$

Le conducteur ne peut que recevoir de l'énergie électrique, sans pouvoir en fournir. On parle alors de *récepteur* électrique. En revanche cette énergie électrique est convertie essentiellement sous forme de chaleur si le conducteur n'est pas thermiquement isolé. En effet, si le conducteur est maintenu à température et pression constantes, le premier principe de la thermodynamique donne, pendant la durée  $\tau$  :

$$\Delta H = Q_P + W_{\text{elec}} = Q_P + \int R i^2 dt = 0 \implies Q_P = - \int R i^2 dt$$

Cette dissipation de l'énergie électrique sous forme de chaleur porte le nom d'*effet Joule*. Cet effet est mis à profit dans les bouilloires électriques par exemple.

**Remarque :** notez qu'en général le conducteur voit sa température varier, ce qui fait augmenter son enthalpie ( $\Delta H = \int m c_p dT$ ). Dans ce cas, une partie de l'énergie électrique sert à augmenter l'énergie interne du conducteur et à le dilater.

## 7.2.2 Association de résistances

Tout dipôle constitué uniquement de résistances équivaut à une résistance équivalente  $R_{\text{eq}}$ . Intéressons-nous à deux configurations simples.

### Résistances en série

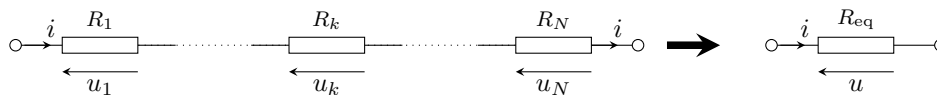


Fig. 7.3 – Conducteurs ohmiques en série.

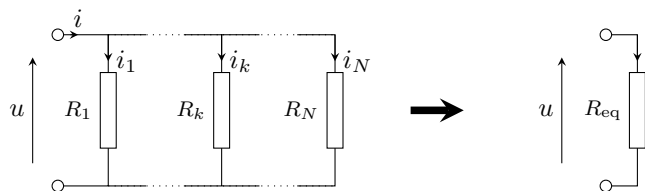
On dit que des résistances sont en série lorsqu'elles sont traversées par le même courant électrique. Appelons  $i$  l'intensité du courant. On a

$$u = R_{\text{eq}} i = \sum_{k=1}^N u_k = i \sum_{k=1}^N R_k$$

Par conséquent, on obtient

$$R_{\text{eq}} = \sum_k R_k \quad \heartsuit \quad (7.5)$$

### Résistances en parallèle



**Fig. 7.4** – Conducteurs ohmiques en parallèle.

On dit que des résistances sont associées en parallèle lorsqu'elles sont soumises à la même tension. Appelons  $u$  la tension commune. On a

$$i = \frac{u}{R_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^N i_k = u \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}$$

On trouve donc

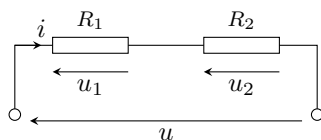
$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_k \frac{1}{R_k} \quad \heartsuit \quad (7.6)$$

On pourra retenir par exemple que :

- deux résistances en parallèle équivalent à une résistance  $R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  ;
- $N$  résistances identiques  $R$  en parallèle équivalent à un conducteur de résistance  $R/N$ .

### 7.2.3 Ponts diviseurs

Considérons deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  *en série* soumises à une tension globale  $u$ . En vertu de la loi des



**Fig. 7.5** – Pont diviseur de tension

mailles, on a  $u = u_1 + u_2 = (R_1 + R_2)i$ . La tension aux bornes de chaque résistance  $u_k = R_k i$  est alors une fraction de la tension  $u$

$$u_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2} u \quad k = 1 \text{ ou } 2 \quad \heartsuit \quad (7.7)$$

On parle alors de montage *diviseur de tension*.

On considère maintenant deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  *en parallèle* alimentées par un courant global  $i$ . Définissons les conductances  $G_k = 1/R_k$ , exprimées en siemens (symbole : S). Le courant traversant chacune des résistances a pour intensité  $i_k = G_k u$  et  $u = (G_1 + G_2)i$ . En conséquence, on obtient

$$i_k = \frac{G_k}{G_1 + G_2} i \quad k = 1 \text{ ou } 2 \quad \heartsuit \quad (7.8)$$

Le courant se répartie au prorata des conductances et l'on parle de montage *diviseur de courant*.

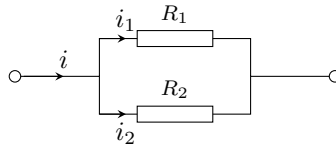
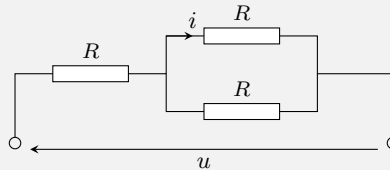


Fig. 7.6 – Pont diviseur de courant

**Exercice** – On considère le montage ci-dessous. Calculer l'intensité du courant  $i$ .



Les deux résistances en parallèle sont équivalentes à une résistance de valeur  $R/2$ . La tension qui règne aux bornes de ces deux résistances est donnée par la formule du diviseur de tension :

$$u' = \frac{R/2}{R/2 + R} u = \frac{1}{3} u$$

On en déduit le courant  $i$  à partir de la loi d'ohm :  $u' = Ri$  soit  $i = u/(3R)$ .

## 7.3 Modélisation linéaire d'un dipôle actif

Contrairement aux dipôles passifs, les dipôles actifs produisent une tension en circuit ouvert. On distingue les sources (piles, alimentation stabilisée, batteries en utilisation,...) et les récepteurs (électrolyseurs, batteries en charge, moteurs électriques).

### 7.3.1 Source de tension

Une source de tension permet aux charges de « remonter » le potentiel grâce à l'existence d'un champ électromoteur au sein de la source. Ce champ électromoteur produit une tension, dite force électromotrice (f.é.m) que nous noterons  $e$ .

La caractéristique d'une source de tension idéale s'écrit en *convention générateur* :

$$u = e \quad \forall i$$

où  $e$  est la *force électromotrice* (f.é.m) de la source de tension.

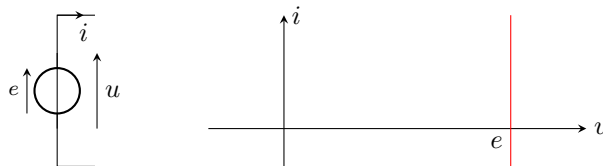


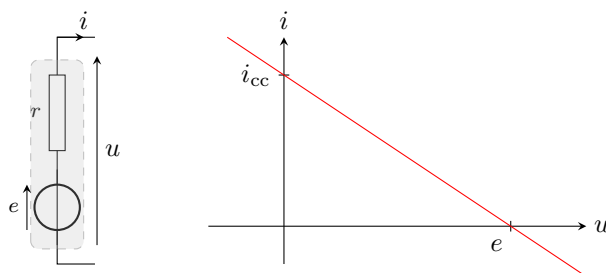
Fig. 7.7 – Source idéale de tension : schéma et caractéristique

Pour tenir compte des pertes par effet Joule d'une source de tension, on modélise la source par une source idéale en série avec une résistance  $r$  dite *résistance interne*. La caractéristique s'écrit alors :

$$u = e - ri \quad \heartsuit \quad (7.9)$$



Il ressort de cette caractéristique que la source de tension acquiert un comportement quasi-idéal à la



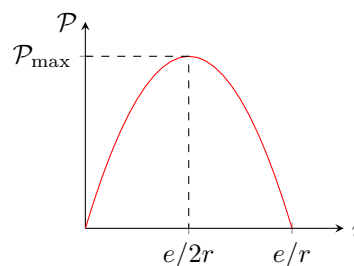
**Fig. 7.8** – Source réelle de tension : schéma et modélisation linéaire.

condition que  $ri \ll e$  : le courant débité par la source doit rester faible. C'est ce que l'on obtient lorsque que l'on branche un voltmètre aux bornes de la source : la résistance interne du voltmètre étant très grande, le courant débité est quasi-nul de sorte que le voltmètre indique la f.é.m de la source. Par ailleurs, lorsque l'on court-circuite la source en reliant ses deux bornes ( $u = 0$ ), on trouve un courant de court-circuit

$$i_{cc} = e/r$$

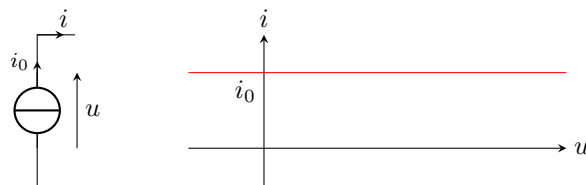
Du point de vue énergétique, la puissance délivrée par la source de tension vaut  $\mathcal{P} = ui = ei - ri^2$ . Ainsi, la puissance atteint une valeur maximale lorsque  $i = e/2r$ . Une source réelle de tension délivre donc une puissance maximale

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{e^2}{4r}$$



### 7.3.2 Source de courant

Le rôle d'une source de courant est d'imposer un courant constant indépendamment de la tension qui règne à ses bornes. Une source de courant idéale aura la caractéristique suivante :



**Fig. 7.9** – Source de courant idéale : schéma et caractéristique.

$$i = i_0 \quad \forall u$$

où  $i_0$  désigne le *courant électromoteur* (c.é.m).

Pour tenir compte des pertes par effet Joule d'une source de courant réelle, on la modélise par une source idéale en parallèle avec une *conductance interne*  $g$ . La caractéristique s'écrit alors :

$$i = i_0 - gu \quad \text{avec} \quad g = \frac{1}{r}$$

où  $g$  est la conductance interne ( $r$  la résistance interne). On notera qu'une source de courant se rapproche d'une source de courant idéale quand sa conductance interne  $g \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ).

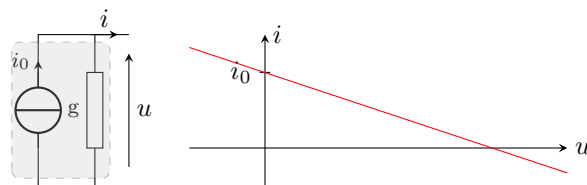
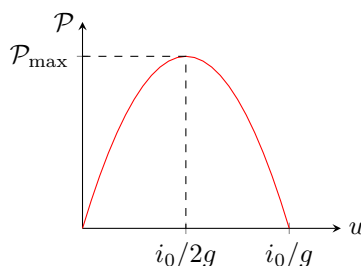


Fig. 7.10 – Source réelle de courant : schéma et caractéristique.

La puissance fournie par une source de courant réelle vaut  $\mathcal{P} = ui = ui_0 - gu^2$ . Suivant le dipôle que charge la source de courant, la tension et donc la puissance délivrée varie. La courbe ci-contre montre que lorsque  $u = i_0/2g$  la puissance atteint une valeur maximale

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{i_0^2}{4g}$$

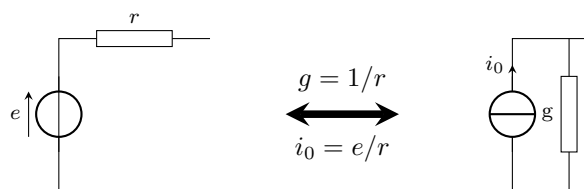


### 7.3.3 Équivalence Thévenin-Norton

Considérons une source de tension réelle dont la modélisation linéaire est donnée par  $u = e - ri$ . Cette caractéristique peut se ré-écrire  $i = e/r - gu$  avec  $g = 1/r$ . En d'autres termes, une source de tension réelle peut s'interpréter comme une source de courant de c.é.m  $i_0 = e/r$  et de conductance  $g = 1/r$ . Ainsi, toute source linéaire présente deux représentations possibles :

- la modélisation de Thévenin correspondant à une source de tension idéale en série avec une résistance ;
- la modélisation de Norton correspondant à une source de courant idéale en parallèle avec une conductance.

On passe d'une représentation à une autre en retenant l'équivalence Thévenin-Norton suivante :



### 7.3.4 Récepteur actif

Étudions le cas d'une batterie chimique. On distingue deux comportements : la décharge ou la charge. Lorsque la batterie se décharge, elle est alors source d'énergie et est modélisée par une source de tension de f.é.m  $e$  et de résistance interne  $r$ . On a en convention générateur

$$u = e - ri \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = ei - ri^2 > 0$$

En fonctionnement générateur, la puissance fournie est positive et le sens du courant est dictée par la polarité de la source. En revanche, lorsque la batterie est en charge, le courant est dans l'autre sens. Dans ce cas, le dipôle reçoit de la puissance : on dit qu'il s'agit d'un récepteur actif et  $e$  est désigné par le terme *force contre-électromotrice* (f.c.é.m). En convention récepteur, on écrira donc

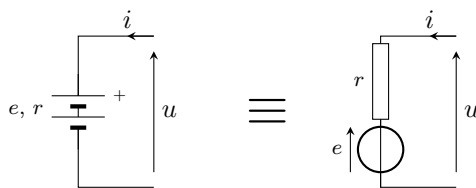


Fig. 7.11 – Batterie en charge.

$$u = e + ri$$

et la puissance fournie à la batterie vaut

$$\mathcal{P} = ei + ri^2$$

Une partie de cette puissance ( $ri^2$ ) est dissipée par effet joule et l'autre partie ( $ei$ ) est convertie en énergie chimique. On peut d'ailleurs définir un rendement de conversion

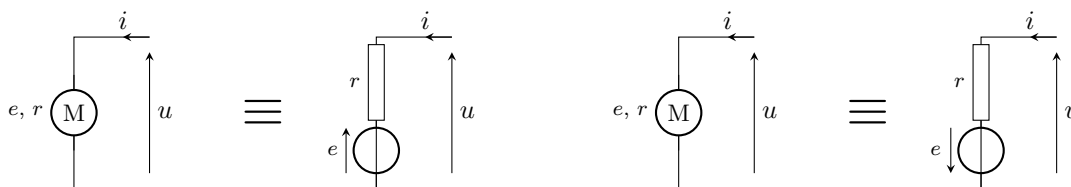
$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{convertie}}}{\mathcal{P}_{\text{fournie}}} = \frac{e}{e + ri}$$

Finalement, une batterie est une source de tension qui peut fonctionner, soit en générateur, soit en récepteur, la polarité étant fixé par la borne + de la batterie. On parle alors de *récepteur réversible*. Les accumulateurs, les électrolyseurs ont ce comportement.

Il existe cependant des dipôles actifs dont le comportement est toujours récepteur quel que soit le sens du courant. La polarité de la f.c.é.m est toujours orientée à contre sens du courant. On parle de *récepteur non réversibles* (ou non polarisés). Le moteur à courant continu en est un exemple.

Cas où  $i > 0$  :  $u = e + ri$

Cas où  $i < 0$  :  $u = -e + ri$



### 7.3.5 Loi de Pouillet

Imaginons une maille constituée de dipôles actifs (en représentation de Thévenin) et de résistances. Appelons  $R$  la somme de toutes les résistances (résistances internes incluses). Imposons un sens positif du courant et notons  $i$  l'intensité algébrique du courant qui circule dans la maille. Notons  $e_k$  les f.é.m (orientées dans le sens positif) et  $e'_k$  les f.c.é.m (orientés dans le sens contraire). La loi des mailles permet d'écrire

$$\sum_k e_k - \sum e'_k - Ri = 0$$

Ce qui donne la loi connue sous le nom de loi de Pouillet :

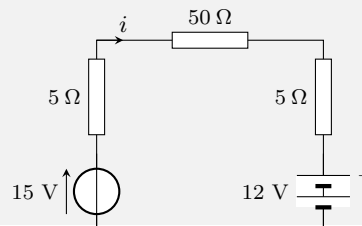
$$i = \frac{\sum_k e_k - \sum_{k'} e'_k}{R} \quad \heartsuit \quad (7.10)$$

**Exercice**

Une source de tension continue, de f.é.m  $e = 15 \text{ V}$ , charge une batterie de f.c.é.m  $e' = 12 \text{ V}$ . Déterminer le courant de charge  $i$  à l'aide de la loi de Pouillet.

La loi de Pouillet donne

$$i = \frac{e - e'}{R} \quad \text{soit} \quad i = \frac{15 - 12}{50 + 5 + 5} = 50 \text{ mA}$$

**7.3.6 Méthodes de résolution**

Dans un réseau constitué de  $b$  branches et  $n$  nœuds, il y a  $N = b - n + 1$  courants indépendants. En effet, les  $b$  courants circulant dans les  $b$  branches vérifient  $n - 1$  relations (lois des nœuds). Il nous faut donc  $N$  relations pour déterminer ces inconnues. Ces relations sont obtenues en appliquant la loi des mailles dans  $N$  mailles indépendantes associées aux caractéristiques des dipôles. On obtient alors un système d'équations à résoudre.

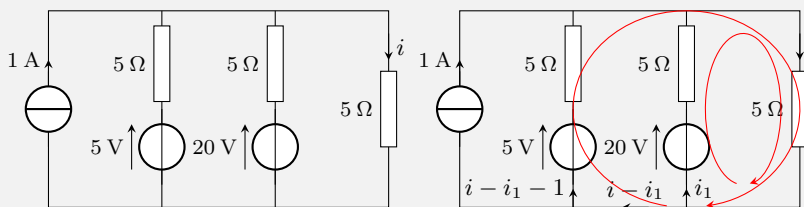
**Méthodologie**

1. Parcourir toutes les branches du réseau en définissant les courants algébriques et en appliquant le plus possible la loi des nœuds à chaque fois que l'on rencontre un nœud.
2. Compter le nombre  $N$  de courants inconnus puis choisir  $N$  mailles avec un sens de parcours.
3. Écrire  $N$  lois des mailles en utilisant les caractéristiques des dipôles. Notez que si une branche contient une source de courant, l'intensité électrique dans cette branche est alors déterminée, mais la tension aux bornes de la source est alors une inconnue.
4. Résoudre le système d'équations.

Cette méthode présente l'avantage de déterminer toutes les grandeurs électriques et s'applique à tous les réseaux électriques. Son inconvénient majeur étant qu'elle nécessite de résoudre un système de  $N$  équations même si l'on ne cherche qu'une seule grandeur électrique. Le risque d'erreur de calcul peut devenir important.

**Exemple –**

À l'aide des lois de Kirchoff, déterminons l'intensité du courant  $i$  dans le circuit ci-dessous.



Commençons par définir tous les courants. Appelons  $i_1$  le courant qui traverse le dipôle (20 V, 5 Ω). En parcourant tout le réseau, on s'aperçoit qu'il n'y a que deux courants inconnus :  $i$  et  $i_1$  (notez qu'il y a une source de courant qui impose la valeur de l'intensité du courant dans une branche). Il suffit donc de deux relations pour les déterminer. On choisira les mailles représentées en couleur sur la figure. La loi des mailles donne alors

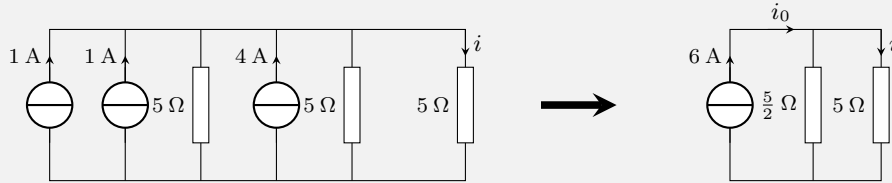
$$\begin{cases} 20 - 5i_1 - 5i = 0 \\ 5 - 5(i - i_1 - 1) - 5i = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 5i_1 + 5i = 20 \\ -5i_1 + 10i = 10 \end{cases}$$

En sommant les deux relations, on trouve  $15i = 30$ , soit  $i = 2 \text{ A}$ .

Pour remédier à ce défaut, on peut utiliser de façon judicieuse l'équivalence électrique entre une source de tension réelle et une source de courant réelle ainsi que l'association des résistances. Cela permet de simplifier une partie d'un réseau électrique, et de diminuer le nombre de mailles, quand le but est de calculer le courant dans une branche particulière.

**Exemple –**

Reprenons l'exemple précédent en utilisant l'équivalence Thévenin-Norton.



Après plusieurs simplifications, on aboutit à un simple diviseur de courant. La formule du diviseur donne alors

$$i = \frac{1/5}{2/5 + 1/5} \times 6 = 2 \text{ A}$$

## 7.4 Phénomènes capacitifs

### 7.4.1 Rappels

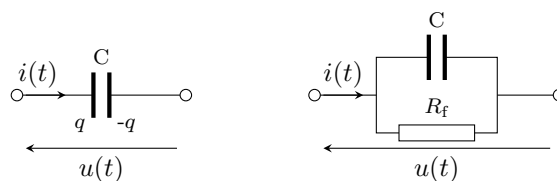
On a vu dans le chapitre consacré aux conducteurs qu'un condensateur soumis à une tension électrique constante  $U$  accumule au niveau de ses armatures des charges électriques de signe opposé ( $Q$  et  $-Q$ ) telles que  $Q = CU$ . On admettra que dans le cadre de l'ARQS un condensateur idéal répond à cette loi. On a donc en convention récepteur

$$q(t) = C u(t) \implies i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad [\text{Convention récepteur}] \quad \heartsuit \quad (7.11)$$

où  $C$  se mesure en farad (symbole : F). La relation étant linéaire, le condensateur est un dipôle linéaire.

Un condensateur réel s'écarte un peu de l'idéalité pour deux raisons essentielles.

1. La tension est en général limitée. En effet, il existe un champ électrique qu'il ne faut pas dépasser au risque de détruire le diélectrique placée entre les armatures du condensateur (existence d'un champ disruptif).
2. Il existe un courant de fuite à travers le diélectrique du fait de la conductivité finie de ce dernier. Par exemple, lorsqu'un condensateur chargé est abandonné en circuit ouvert, on constate que sa charge diminue au cours du temps. Pour modéliser cette fuite, on introduit la notion de **résistance de fuite**  $R_f$ . Son ordre de grandeur varie entre le  $M\Omega$  et la centaine de  $M\Omega$ .



**Fig. 7.12** – Condensateurs idéal et réel.

### Énergie emmagasinée dans un condensateur

On rappelle qu'un condensateur idéal stocke une énergie électrique

$$W_E = \frac{1}{2} q u = \frac{1}{2} C u^2$$

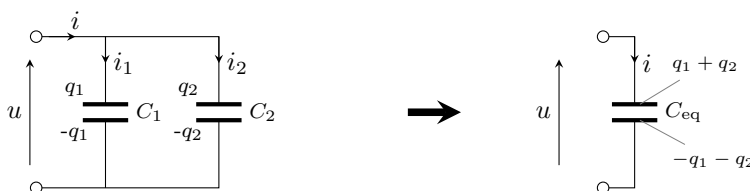
Le condensateur chargé agit comme un réservoir d'énergie qu'il peut fournir au reste du circuit. La puissance que reçoit un condensateur idéal s'écrit

$$\mathcal{P} = u i = C u \frac{du}{dt} = \frac{dW_E}{dt}$$

Lorsque l'énergie stockée décroît,  $\mathcal{P} < 0$  : le condensateur se décharge en fournissant de l'énergie au reste du circuit, agissant ainsi comme un générateur.

### 7.4.2 Association de condensateurs

#### Association en parallèle



**Fig. 7.13** – Deux condensateurs associés en parallèle.

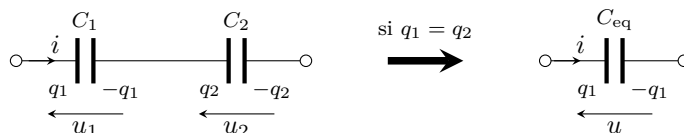
Soient deux condensateurs de capacité  $C_1$  et  $C_2$  montés en parallèle. On suppose que ces condensateurs sont suffisamment éloignés pour pouvoir négliger toute influence mutuelle (ce qui est fréquemment réalisé). Exprimons l'énergie emmagasinée :

$$W_E = \frac{1}{2} C_1 u^2 + \frac{1}{2} C_2 u^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) u^2$$

Par conséquent, l'ensemble est équivalent à un condensateur de capacité  $C_{eq} = C_1 + C_2$  soumis à la tension commune  $u$ . Cette propriété se généralise aisément :  $N$  condensateurs montés en parallèle et sans influence mutuelle équivalent à un condensateur de capacité :

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i \quad \heartsuit \quad (7.12)$$

#### Association en série



Considérons deux condensateurs de capacité  $C_1$  et  $C_2$  montés en série. Appelons  $i$  l'intensité du courant qui les traverse. La conservation de la charge implique que

$$i = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} \implies q_2 - q_1 = C^{te}$$

la quantité de charge  $q_2 - q_1$  représente la charge répartie sur la liaison conductrice entre les deux condensateurs. Supposons la liaison initialement neutre :  $q_1 = q_2 = q$ . Dans ce cas, l'ensemble est équivalent à un condensateur portant une charge  $q$  et une capacité  $C_{\text{eq}}$ . En effet, l'énergie de l'association s'écrit

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_2} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_{\text{eq}}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

On peut étendre cette démonstration à un nombre quelconque de condensateurs. Ainsi,  $N$  condensateurs associés en série, sans influence mutuelle et tels que les liaisons inter-armatures soient neutres, se comportent comme un condensateur de capacité

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad \heartsuit \quad (7.13)$$

### 7.4.3 Décharge d'un condensateur

Considérons un circuit constitué d'une source réelle de f.é.m  $e_0$ , d'un condensateur de capacité  $C$ , d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  et d'un inverseur  $K$ . On commence par charger le condensateur en basculant  $K$  de manière à mettre en contact la source de tension et le condensateur. Le condensateur se trouve alors chargé et stocke ainsi la quantité de charge

$$q_0 = C e_0$$

À  $t = 0$ , on bascule  $K$ . Le condensateur se décharge alors dans la résistance : c'est le régime libre du dipôle RC. Cherchons l'évolution de la tension capacitive  $u_c(t)$  ainsi que le courant de décharge  $i(t)$ .

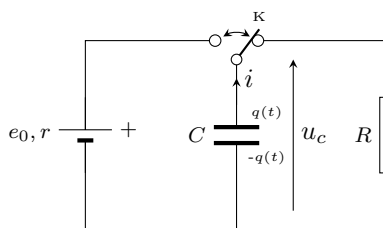


Fig. 7.14 – Montage RC

La loi des mailles donne

$$u_c(t) - Ri(t) = 0 \quad \text{avec} \quad i(t) = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{du_c}{dt}$$

La tension  $u_c$  vérifie donc l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

On voit immédiatement, par l'analyse dimensionnelle de l'équation différentielle, que  $\tau$  représente une durée. Les solutions sont de la forme  $u_c(t) = Ae^{-t/\tau}$ . On détermine  $A$  grâce à la condition initiale  $u_c(0) = e_0$ , ce qui donne  $A = e_0$ . Finalement, la tension  $u_c$  évolue au cours du temps suivant la loi

$$u_c(t) = e_0 e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad i(t) = -C \frac{du_c}{dt} = \frac{e_0}{R} e^{-t/\tau}$$

La tension capacitive décroît exponentiellement jusqu'à s'annuler au bout d'un certain temps. Le temps caractéristique de cette décharge peut s'obtenir en prenant l'intersection de la tangente à l'origine avec la valeur finale  $u_c = 0$ . Il est facile de montrer que cette intersection a lieu lorsque  $t = \tau$ . La durée  $\tau = RC$

donne ainsi un ordre de grandeur de la durée de la décharge. **On retiendra qu'au bout de  $5\tau$  la décharge peut être considérée terminée.** On voit donc qu'une grande résistance ralentit le temps de décharge du condensateur.

Le courant de décharge, quant à lui, n'est pas constant lors de ce processus. Il est maximum à  $t = 0^+$  et vaut  $e_0/R$ . Notez que le courant n'est pas une fonction continue puisqu'il subit une discontinuité entre  $t = 0^-$  et  $t = 0^+$ . En effet, lorsque l'on bascule l'interrupteur K sur la branche contenant la résistance, on met brutalement la résistance sous tension ( $e_0$ ) ce qui impose un courant initial  $e_0/R$ .

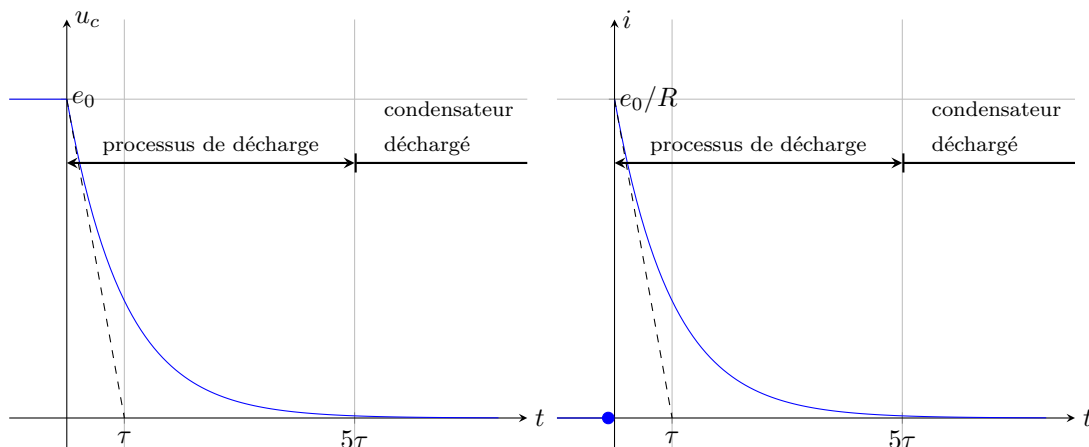


Fig. 7.15 – Évolution de la tension capacitive et du courant de décharge.

### Bilan d'énergie.

D'un point de vue énergétique, l'énergie stockée sous forme électrique  $W_E = \frac{1}{2}Cu_c^2$  décroît avec un temps de relaxation  $\tau_E = 2\tau$ . L'énergie initialement emmagasinée par le condensateur est complètement dissipée par effet Joule. En effet, on pourra vérifier que

$$\int_0^{\infty} Ri^2(t) dt = \frac{1}{2}Ce_0^2$$

■ **Remarque** : l'énergie dissipée ne dépend pas de la résistance. C'est la durée de la dissipation qui en dépend.

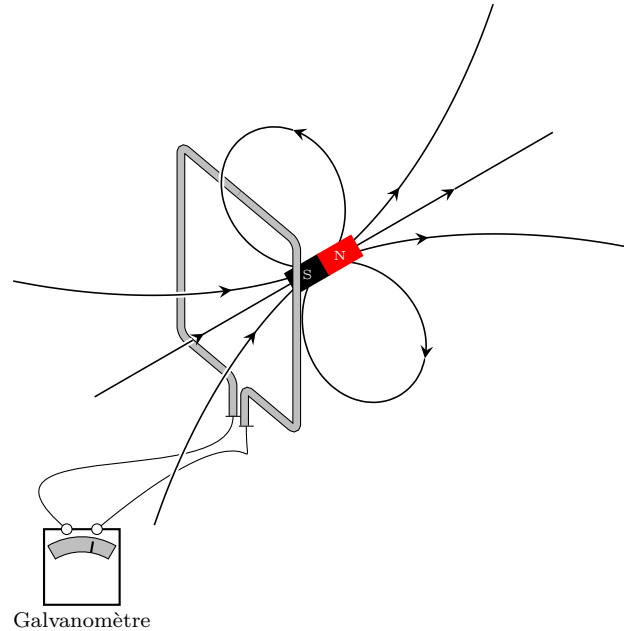
## 7.5 Phénomène d'auto-induction

### 7.5.1 Introduction à l'induction magnétique

Le phénomène d'induction électromagnétique, découvert par Faraday en 1831, a une grande portée industrielle puisqu'il permet de convertir une énergie mécanique en une énergie électrique et vice-versa. Décrivons le principe à l'aide de l'expérience suivante.



**Expérience** : Mettons en mouvement un aimant au voisinage d'un cadre conducteur reliée à un galvanomètre (détecteur de courant).



On observe l'existence d'un courant induit par le mouvement de l'aimant. Plus précisément, on constate que l'intensité du courant dépend de la façon dont on déplace l'aimant.

- Si l'on approche l'aimant de façon à ce que le champ magnétique augmente au voisinage de la spire, le courant électrique qui apparaît circule dans un sens tel qu'il produit un champ opposé au champ magnétique imposé par l'aimant.
- à l'inverse, quand l'aimant s'éloigne de façon à ce que le champ magnétique diminue, le courant électrique induit circule de façon à renforcer le champ magnétique imposé.
- le sens du courant dépend du sens de l'aimant et du mouvement mais dans tous les cas, le courant induit crée un champ magnétique qui s'oppose à la variation du champ magnétique imposé par le mouvement de l'aimant.
- Ce phénomène est amplifié par la vitesse du mouvement et par la puissance de l'aimant.

Répétons la même expérience en remplaçant l'ampèremètre par un voltmètre. Dans ce cas, on note que le mouvement de l'aimant induit également une tension d'autant plus importante que le mouvement de l'aimant est rapide. La polarité de la tension induite dépend du sens de l'orientation de l'aimant.

La première expérience montre que la spire se comporte comme un aimant dont l'action sur l'aimant consiste à le freiner dans son mouvement.

### Loi de Lenz

Dans un circuit fermé, la variation de flux magnétique produit un courant induit dont les effets s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

Dans la deuxième expérience, le circuit ouvert n'est plus le siège d'un courant mais voit apparaître à ses bornes, une tension électrique. Le circuit se comporte alors comme une source de tension de f.é.m  $e$ , dite **force électromotrice induite**. Quantitativement, on montre que

$$e = - \frac{d\phi_B}{dt} \quad \heartsuit \quad (7.14)$$

Cette loi, dite **loi de Faraday**, fait intervenir le flux magnétique  $\phi_B$  à travers le circuit. Rappelons que

$$\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad [\text{Wb}]$$

Sa valeur, exprimée en weber (Wb), dépend de la forme du circuit et du champ magnétique mais en aucune manière il ne dépend du choix de la surface  $S$  s'appuyant sur le circuit. Comme d'habitude,  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire localement normal à la surface  $S$  et dont le sens est lié au sens positif du circuit *via* la règle du tire-bouchon.

### 7.5.2 Auto-induction

On parle d'auto-induction quand la source de champ magnétique à l'origine du phénomène d'induction dans un circuit est produit par le circuit même.

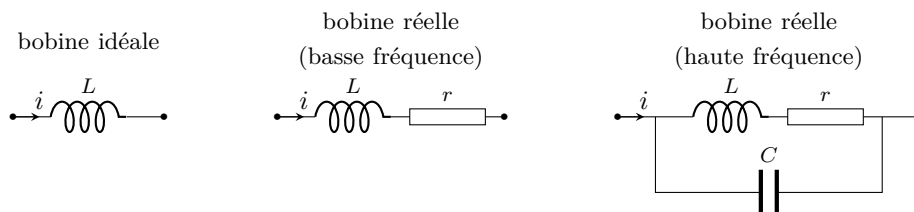
Considérons une bobine, c'est-à-dire un enroulement de fil électrique. Lorsque cette bobine est traversée par un courant électrique, celui-ci produit un champ magnétique ainsi qu'un flux magnétique  $\phi_B$ , dit *flux propre*, à travers la bobine. Étant donné que le champ magnétique créé est proportionnel à l'intensité  $i$  du courant (d'après la loi de Biot et Savart), on peut écrire

$$\phi_B = Li$$

où  $L$  désigne le *coefficient d'auto-inductance*<sup>3</sup>. La grandeur  $L$  s'exprime en henry (symbole : H) en hommage à Joseph Henry<sup>4</sup>. Lorsque le courant varie au cours du temps, la bobine se comporte comme une source de f.é.m  $e = -L \frac{di}{dt}$  en convention générateur. Ainsi, la caractéristique d'une bobine idéale s'écrit, en convention récepteur :

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad [\text{convention récepteur}] \quad \heartsuit \quad (7.15)$$

En régime continu, le courant étant permanent,  $u_L = 0$ . Autrement-dit, la bobine peut être remplacée par un fil conducteur parfait. Dans la pratique, le fil formant la bobine est résistive. C'est pourquoi, on modélise



**Fig. 7.16** – Modélisations d'une bobine.

une bobine réelle en ajoutant en série une résistance (quelques ohms). À moyenne et haute fréquence, une modélisation plus fidèle exige la présence d'un condensateur en parallèle.

3. On dit aussi inductance propre

4. **Joseph Henry (1797 - 1878)** : physicien américain. En 1830, Henry découvre qu'un courant peut être induit dans un conducteur par déplacement d'un champ magnétique ; principe de l'électromagnétisme qu'il ne publiera pas. Dès 1831, il démontre la possibilité de transmettre des messages à distance en utilisant simplement une source de courant, un interrupteur et un électro-aimant. Henry présenta au public un appareil expérimental à Albany, dans l'état de New York et établit une liaison de plus de 150 mètres, démontrant ainsi la faisabilité du procédé. Mais il ne breveta pas son invention, pas plus qu'il ne lui trouva d'application pratique.. Henry sera « doublé » par M. Faraday qui découvrira seul le phénomène d'induction magnétique (août 1831) et par S. Morse qui appliquera cette découverte à la transmission d'information (1832). On lui attribue malgré tout, la découverte de l'auto-induction (juillet 1832), phénomène fondamental en électromagnétisme

### 7.5.3 Énergie emmagasinée dans une bobine

La puissance électrique que reçoit une bobine parcourue par un courant électrique s'écrit

$$\mathcal{P} = ui = iL \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Par définition, l'énergie stockée par une bobine idéale  $W_B$  est l'énergie qu'elle est susceptible de libérer lorsque l'on coupe son alimentation ( $i = 0$ ).

$$W_B = - \int \mathcal{P} dt = - \int_{i'=i}^0 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li'^2 \right) dt = \frac{1}{2} Li^2$$

Cette énergie ne dépend pas de la façon dont on coupe l'alimentation. Ainsi, on dira qu'une bobine idéale alimentée par un courant électrique emmagasine une énergie sous forme magnétique qui vaut

$$W_B = \frac{1}{2} Li^2 \quad \heartsuit \quad (7.16)$$

### 7.5.4 Circuit R-L

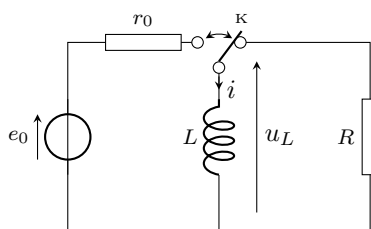


Fig. 7.17 – Montage R-L.

Considérons un circuit constitué d'une source réelle de tension de f.é.m  $e_0$  en série avec une résistance  $r_0$  (si la source présente une résistance interne alors celle-ci est incluse dans  $r_0$ ) qui, dans un premier temps alimente une bobine idéale. Au bout d'un certain temps, un courant permanent s'établit. Dès lors, la bobine se comportant comme un fil, on voit immédiatement que le courant s'établit à la valeur  $i_0 = e_0/r_0$ . À l'instant  $t = 0$ , on bascule un interrupteur K de sorte que la bobine se trouve en contact avec une résistance de charge  $R$  (si la bobine présente une résistance interne  $r$ , il suffit de remplacer dans les calculs qui suivent  $R$  par  $R + r$ ). On oriente le courant dans le sens qui correspond au sens réel du courant  $i_0$ .

Cherchons l'évolution du courant et de la tension inductive  $u_L(t)$  à partir de  $t = 0$ .

La loi des mailles donne

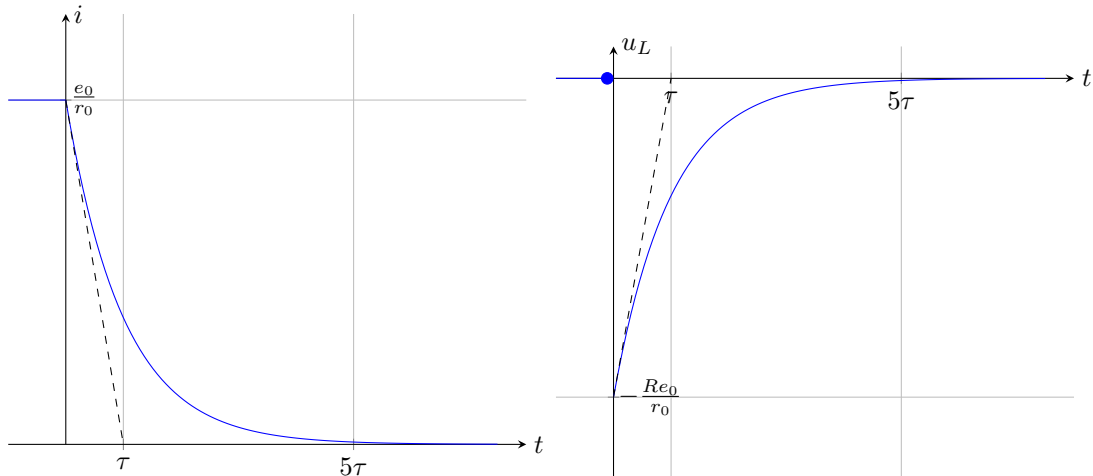
$$u_L(t) + Ri(t) = 0 \quad \text{avec} \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

ce qui donne, en posant  $\tau = L/R$ ,

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \quad \text{pour } t > 0$$

Les solutions de cette équation différentielle du premier ordre sont de la forme  $i = Ae^{-t/\tau}$ . Pour déterminer la constante d'intégration  $A$  il faut connaître la valeur de  $i$  lorsque  $t \rightarrow 0^+$ . Or, **la bobine impose la continuité du courant**. En effet, étant donné qu'il est impossible de fournir une puissance électrique infinie, l'énergie stockée par une bobine ne peut présenter de discontinuité. En conséquence  $1/2Li^2$  varie continûment. On a donc  $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = e_0/r_0$ . Finalement on obtient

$$i(t) = \frac{e_0}{r_0} e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{Re_0}{r_0} e^{-t/\tau}$$



**Fig. 7.18** – Évolution de la tension inductive et du courant.

La tension inductive est négative et croît jusqu'à s'annuler au bout d'une durée d'environ  $5L/R$ . Le courant décroît également jusqu'à s'annuler avec le même temps de relaxation. La mesure du temps de relaxation du dipôle RL peut permettre de mesurer la résistance interne d'une bobine réelle par exemple.

D'un point de vue énergétique, l'énergie magnétique  $W_M = \frac{1}{2}Li^2$  décroît avec un temps de relaxation  $\tau_E = 2\tau$ . Là aussi, l'énergie stockée est complètement dissipée par effet Joule. En effet, on pourra vérifier que

$$\int_0^{\infty} Ri^2(t) dt = \frac{1}{2}Li_0^2$$