Chapitre I

Electrostatique

I. Phénomène d'électrisation

I. 1. Introduction

Tous les corps s'électrisent, on dispose de plusieurs moyens pour le faire:

- par frottement;
- par contact avec un corps déjà électrisé;
- en reliant le corps à une borne d'un générateur électriques.

Des expériences montrent que l'on peut ranger les corps schématiquement en deux classes:

- ceux pour lesquels l'électrisation reste localisée au point où l'a apporte (par frottement par exemple) $\Rightarrow$ isolants ou diélectriques.

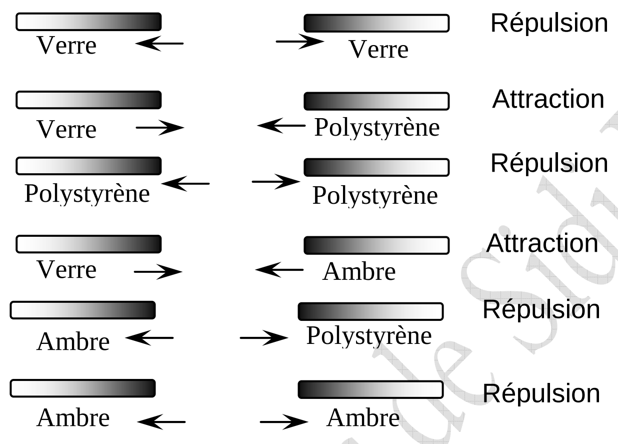
  Exemple: verre, nylon, matières plastiques.

- ceux pour lesquels l'électrisation se répond en tous les points du corps électrisé ⇒ conducteurs

  Exemple : métaux, corps humain, terre, eau

I.2. Les deux sortes d'électricité

<u>Expérience</u>



Le comportement de l'Ambre est le même que celui du polystyrène. Nous dirons que l'électrisation de l'Ambre et du polystyrène est de même nature.

On est amené à admettre l'existence de deux sortes d'électricité: l'une vitreuse ou positive et l'autre résineuse ou négative. Par ailleurs, un corps non électrisé est dit neutre.

I. 3. Interprétation, structure de la matière

Il est admis qu'un atome neutre comprend:

- un noyau constitué de Z protons (de charge +e) et de N neutrons (neutre électriquement et de même masse que les protons)
- Z électrons: particule de charge –e et dont la masse est 1836 fois plus faible que celle des nucléons. Ils gravitent autour du noyau.

<u>Conducteurs</u>

Ils sont constitués d'un réseau rigide d'ions positifs: ce sont des atomes ayant perdu un ou plusieurs électrons. La neutralité est assurée par ces électrons qui peuvent circuler plus ou moins librement dans le réseau (électrons libres). Lorsqu'on prélève des électrons libres sur le conducteur neutre (par frottement par exemple), un déséquilibre est créé en cet endroit. Ce déséquilibre est comblé par le déplacement d'ensemble des autres électrons libres: l'électrisation (+) apparaît partout. De même, lorsqu'on apporte des électrons sur un conducteur neutre, ils se répartissent sur tout le corps qui devient électrisé (-).

Isolants

Dans un isolant, les électrons ne peuvent se déplacer d'un atome à un autre: tout déséquilibre de charge reste localisé. L'électrisation n'apparaît qu'à l'endroit où elle a été apportée.

Electrisation par frottement

Elle s'explique par l'arrachement mécanique des électrons de l'un des corps neutre frottés et par leur transfert sur l'autre. Le sens du transfert dépend de l'affinité électronique relative des deux corps.

On peut classer les corps dans un ordre tel que, lorsqu'on frotte l'un sur l'autre, deux entre deux, celui qui précède l'autre sur la liste s'électrise positivement. Ces séries sont appelées "série triboélectriques".

Exemples:

Poil de Lapin, Verre, Mica, Poil de Chat, Soie, Bois, Ambre, Résine, Soufre, Ebonite, Celluloid.

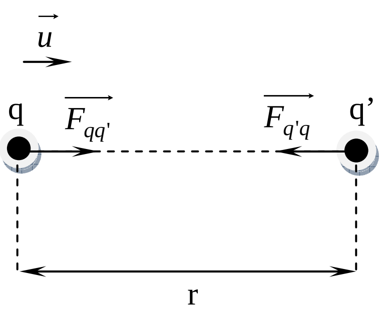
On voit par exemple que, frotter sur la Laine ou de la Soie, le Verre s'électrise positivement, l'Ebonite négativement.

II. Loi de Coulomb dans le vide

Soient deux charge ponctuelles q et q' séparées par une distance r. Coulomb, par analogie avec la loi d'attraction universelle, a proposé:

$$\overrightarrow{F_{q'q}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q'}{r^2}\vec{u} = K\frac{q\,q'}{r^2}\vec{u}$$

$$\text{avec } K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\;10^9\;\; N\,m\,C^{-2}$$



On peut en tirer désormais une définition du coulomb:

C'est la charge d'un point électrisé qui, placé à un mètre d'une charge identique, subit de sa part une force de 9 10^9.

$\Rightarrow$ Nécessité d'utiliser des sous multiples du coulomb

micro C (1μC = 10^{-6}C); nano C (1nC = 10^{-9}C) ; pico C (1pC = 10^{-12}C)

III. Ordres de Grandeur des forces électrostatiques

Au niveau microscopique

- Envisageons le cas d'un proton et d'un électron qui dans un atome d'Hydrogène s'attirent selon une force coulombienne:

  Q= 1,6 10^{-19} C, r=5 10^{-11} m=0,5 Å alors F=10^{-7} N

- Comparons avec la force d'attraction gravitationnelle qui s'exerce entre ces deux particules

  $F = k\frac{m_e M_p}{r^2}$, k=6.67 10^{-11}, m_e=9 10^{-31} Kg, M_p=1850 m_e alors F=4 10^{-47}N

- Considérons enfin le poids de ces particules (c. a. d. la force de gravitation que la terre exerce sur elles

  Electron: $m_e.g$=9 10^{-30} N; Proton : $M_p.g$=1.6 10^{-26} N

De ces exemples, on peut immédiatement conclure que dans les problèmes d'interaction entre particules, on pourra systématiquement négliger leur poids et leur interaction gravitationnelle, ceci au mois en première approximation.

Chapitre II

Champ et Potentiel Electrique

I. Rappel sur le champ et potentiel gravitationnel

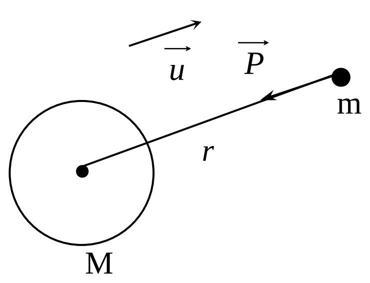
✷ *Champ*

Il est bien établi qu'une masse m, située à une distance r du centre de la terre, est soumise à une force correspondant à son poids. Cette force est donnée par:

$$\vec{P} = -k\frac{M\,m}{r^2}\vec{u}$$

(k= 6.67 10^{-11} S.I.)

Il est possible aussi, d'écrire cette même force, sous la forme:

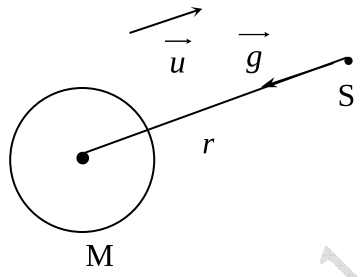


$$\vec{P} = m\vec{g}$$

En introduisant le vecteur champ de gravitation $\vec{g}$

donné par: $\vec{g} = -k\dfrac{M}{r^2}\vec{u}$

Ce vecteur décrit l'état gravitationnel de chaque point de l'espace indépendamment de la masse m qui peut y être placée.



✷*Potentiel*

Une masse m, située en un point S dans le champ de pesanteur terrestre, possède une énergie potentielle E_p.

Une force dérive d'un potentiel si le travail w de cette force est indépendant du chemin suivi.

$$w_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = E_p(x_A, y_A, z_A) - E_p(x_B, y_B, z_B)$$

C'est le cas du poids d'un corps $\vec{P}$. L'énergie potentielle gravitationnelle E_P se calcule par :

$$dE_P = -dw = -\vec{P}\,\vec{dl} = -k\frac{Mm}{r^2}\vec{u}\,\vec{dl} = k\frac{Mm}{r^2}dr$$

$$= -k\frac{Mm}{r} + cte$$

que l'on peut l'écrire

$$E_p = mU \qquad avec\ U = -k\frac{M}{r} + cte' \qquad (potentiel)$$

La relation entre $\vec{g}$ et U est donnée par:

$$dU = -\vec{g}\,\vec{dl} \qquad ou\ encore \qquad \vec{g} = -\frac{dU}{\vec{dl}}$$

c'est-à-dire $\quad \vec{g} = -\overrightarrow{grad}U$

II. Champ et Potentiel créés par des charges électriques

II.1. Charge ponctuelle unique

Considérons une charge ponctuelle Q immobile, dans son voisinage, toute charge q subit une force :

$$\vec{F} = k\frac{Q\,q}{r^2}\vec{u} \qquad\qquad (loi\ de\ Coulomb)$$

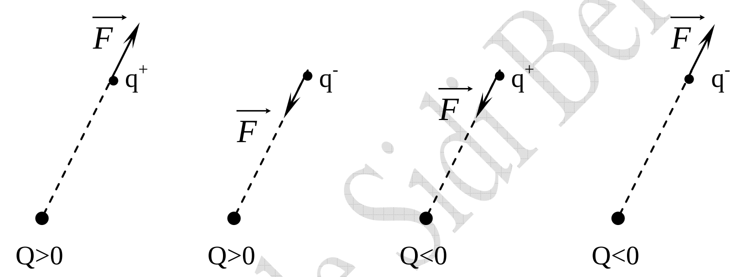
Les charges peuvent être positives ou négatives. Deux charges positives (ou négatives) se repoussent, deux masses s'attirent, ce qui explique la différence de signe par rapport à la loi de Newton.

Comme dans le cas du phénomène de gravitation, nous pouvons par similitude définir les grandeurs suivantes:

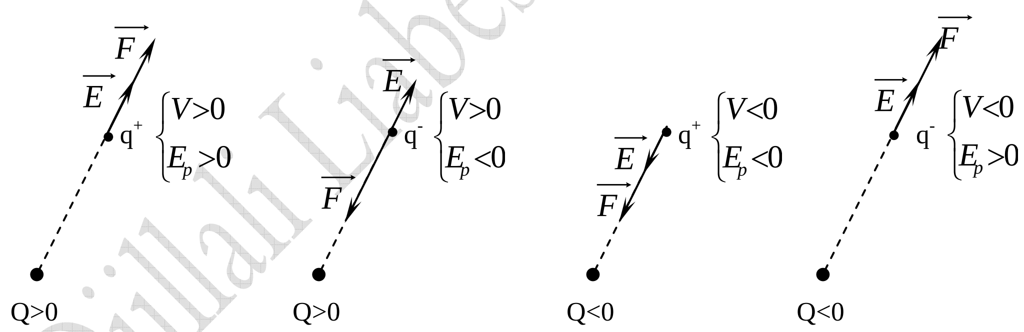
✷ *Force électrique:*

$$\vec{F} = k\frac{Q\,q}{r^2}\vec{u}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$



✷ *Champ électrique, Potentiel électrique:*



$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\vec{u}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$V = k\frac{Q}{r} + cte$$

$$E_p = qV$$

Remarque

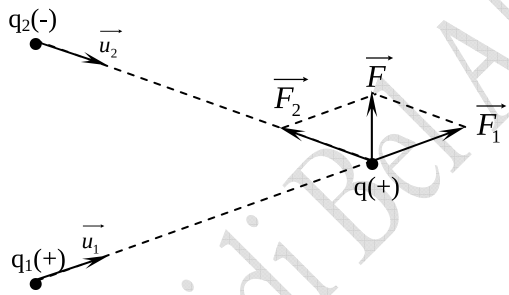
- Le vecteur champ électrique $\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\vec{u}$ est défini comme la force agissant sur la charge unité placée en un point.

- Le potentiel électrique $V = k\dfrac{Q}{r} + cte$ est défini comme l'énergie d'une charge unité placée en un point.

II.2. Cas de deux charges ponctuelles (Principe de superposition)

Considérons le cas de deux charges ponctuelles fixes q_1 et q_2 agissant sur une troisième charge q.

L'action conjuguée de q_1 et q_2 sur q est la somme des actions de q_1 et q_2 agissant séparément.

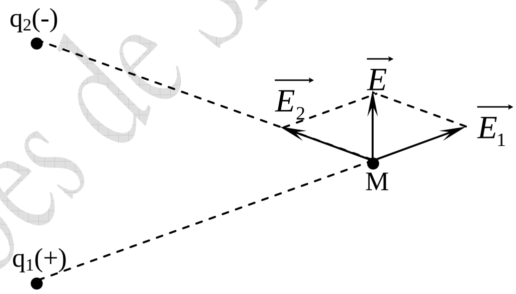


Composition des forces

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = k\frac{q_1\, q}{r_1^2}\vec{u_1} + k\frac{q_2\, q}{r_2^2}\vec{u_2}$$

$$= q(\vec{E_1} + \vec{E_2}) = q\vec{E}$$

Le champ $\vec{E}$ créé en un point M par deux charges ponctuelles est la somme des deux champs $\vec{E_1}$ *et* $\vec{E_2}$ créés par chacune des charges q_1 et q_2.



Composition des champs

Le potentiel en M se calcule en additionnant les potentiels créés en ce point par chacune des charges q_1 et q_2 : $V = V_1 + V_2$

Une charge q placée en M possède une énergie potentielle $E_p = qV = q(V_1 + V_2)$

II.3. Généralisation

✷ *Cas de n charges ponctuelles* $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n$

Le champ se calcule par : $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} k\dfrac{q_i}{r_i^2}\vec{u_i}$

Le potentiel est donné par : $V = \sum_{i=1}^{n} k\dfrac{q_i}{r_i} + cte$

✷ *Cas d'une distribution continue de charges réparties en surface ou en folume*

- ✓ *cas d'une surface*

si $\sigma = \dfrac{dq_i}{ds}$ (densité superficielle de charge), alors:

$$\vec{E} = k\iint_S \sigma \frac{ds}{r_i^2}\vec{u_i}$$

$$V = k\iint_S \sigma \frac{ds}{r_i} + c$$

✓ *cas d'un volume*

si $\rho = \frac{dq_i}{dv}$ (densité volumique de charge), alors:

$$\vec{E} = k\iiint_v \rho \frac{dv}{r_i^2}\vec{u_i}$$

$$V = k\iiint_v \rho \frac{dv}{r_i} + cte$$

II.4. Passage du champ au potentiel et du potentiel au champ

A chaque point de l'espace M(x, y, z) sont associés deux fonctions, l'une vectorielle et l'autre scalaire, qui permettent de décrire l'espace électrique:

Le champ $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$; le potentiel $V = V(x, y, z)$

On sait que:

$$-dV = \vec{E}\,\vec{dl} = E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz$$

cela permet de calculer V à partir du champ $\vec{E}$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Par identification:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

On écrit séparément:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$

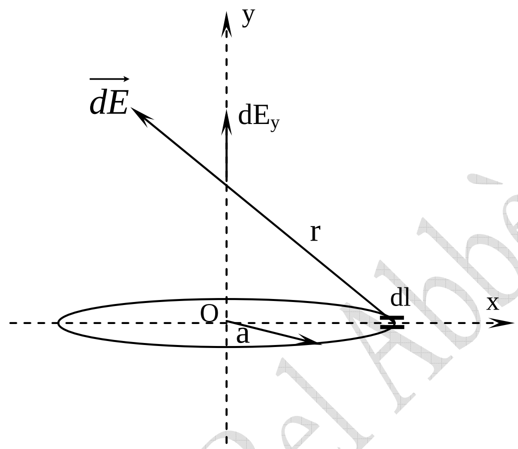
II.5. Exemple de calcul de champ et de potentiel électrique

✷ *Champ et potentiel créé circonférence uniformément électrisé*

Soit une charge q uniformément répartie, avec une densité linéiqueλ, sur une circonférence de centre O et de rayon a.

Un élément **dl** de circonférence

$$dE = \frac{kdq}{r^2} = k\frac{\lambda\, dl}{x^2 + y^2}$$



en raison de la symétrie sur oy

le champ total créé par la circonférence

et $E = E_y = \int dE_y = \int dE \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{y}{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}}$$

$$E = \int_0^{2\pi a} \frac{k\,\lambda\, y\, dl}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}} = \frac{k\, y\, \lambda\, 2\pi a}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

on sait que $q = \lambda\, 2\pi\, a$

alors, $$E = \frac{k\,q\;y}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

ou $\vec{E} = \overrightarrow{E_y}$, une seule composante

$$\Rightarrow \quad E_y = E = -\frac{dV}{dy} \qquad \Rightarrow \quad V = \int dV = -\int E\, dy$$

$$V = -\int \frac{k\,a\,y}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\,dy = -\,k\,a\int \frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\,dy$$

$$\Rightarrow \qquad V = \frac{k\,q}{(a^2 + y^2)^{1/2}} + cte$$

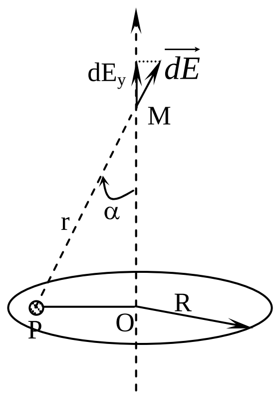
✷ *Champ et potentiel créé par un disque circulaire uniformément électrisé*

Champ

Un élément de surface dS, centré en P, porte charge:

$$dq = \sigma\, ds$$

Cet élément de surface créé au point M, situé sur l'axe,



Un champ $\overrightarrow{dE}$ donné par:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, ds}{r^2}$$

Ce champ est porté par PM, mais le champ total,

par raison de symétrie, est porté par Oy. En conséquence:

$$E = \int dE_y = \int dE \cos\alpha$$

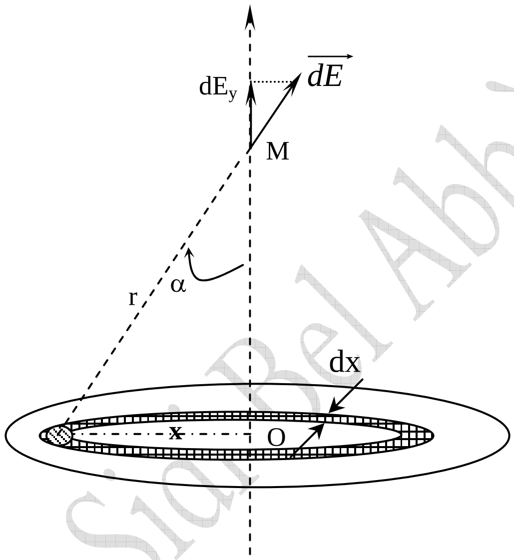
Soit une couronne circulaire comprise entre les cercles de rayon x et x+dx et portant la charge:

$$dq = \sigma\, 2\pi\, x\, dx$$

Cette charge constitue un champ:

$$dE_y = k\frac{\sigma\, 2\pi\, x\, dx}{r^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, 2\pi\, x\, dx}{r^2}\frac{y}{r}$$

$$dE_y = \frac{\sigma\, y}{2\varepsilon_0}\frac{x\, dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$



On obtient E, en sommant dE_y pour toutes les valeurs de x comprises entre O et R

$$E = \int_0^R dE_y = \frac{\sigma\, y}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{x\, dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \left[-\frac{\sigma\, y}{2\varepsilon_0}\left(x^2+y^2\right)^{1/2}\right]_{x=0}^{x=R} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{y}{\left(R^2+y^2\right)^{1/2}}\right)$$

Cas particulier

✓ Si le point M est au centre du cercle: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

✓ Si R $\to \infty$, le disque devient un plan de dimension infinie et quelque soit la position de M, le champ et constant : $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Potentiel

La couronne crée en M un potentiel : $dV = k\dfrac{dq}{r}$

C'est-à-dire : $V = k\displaystyle\int_{x=0}^{x=R}\frac{\sigma\, 2\pi\, x\, dx}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\left(x^2+y^2\right)^{1/2}\right]_{x=0}^{x=R} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\left(R^2+y^2\right)^{1/2}-|y|\right]$

Il est possible d'en déduire le champ par:

$$E = -\frac{dV}{dy} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{y}{\left(R^2+y^2\right)^{1/2}}\right)$$

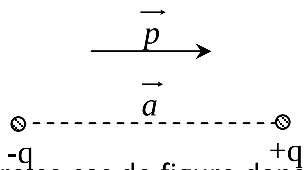
III. Dipôle électrique

III.1. Définition

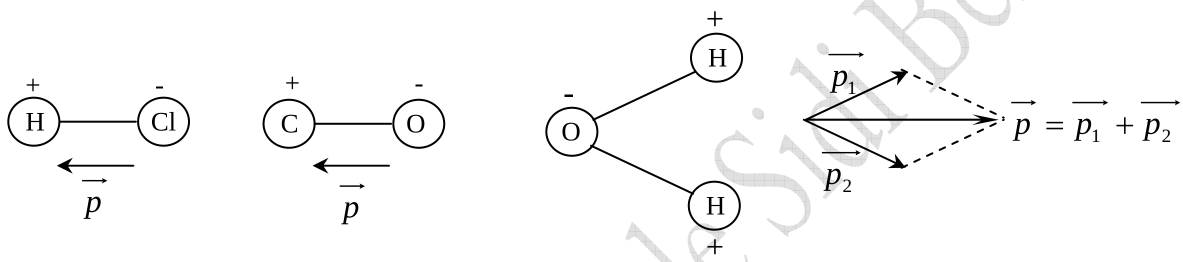
Il est constitué par l'arrangement de deux charges ponctuelles égales de signes différents.

Le moment électrique dipolaire est défini par:

$$\vec{p} = q\vec{a}$$



Cette étude particulière est justifiée, car on rencontre ce cas de figure dans certaines molécules (Ex: HCl, H_2O, CO, etc…………)

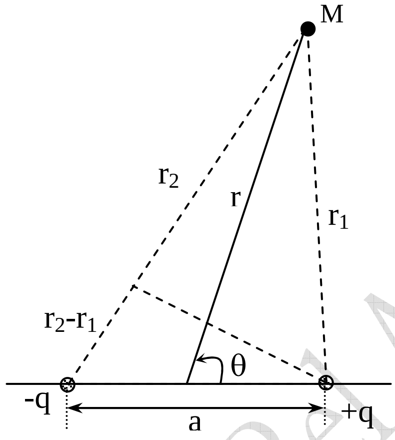


Moment dipolaire de certaines molécules polaires

Molécule	p (C.m)
HCl	$3{,}43\ 10^{-30}$
HBr	$2{,}60\ 10^{-30}$
HI	$1{,}26\ 10^{-30}$
CO	$0{,}40\ 10^{-30}$
H_2O	$6{,}2\ 10^{-30}$
H_2S	$5{,}3\ 10^{-30}$
SO_2	$5{,}3\ 10^{-30}$
NH_3	$5{,}0\ 10^{-30}$
C_2H_5OH	$3{,}6\ 10^{-30}$

III. Potentiel et Champ créés par un dipôle à grande distance

Le potentiel au point M dû au dipôle s'écrit:



$$V = k\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = kq\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$

Si la distance r est grande par rapport à a,

on peut écrire:

$r_2 - r_1 \approx a\cos\theta$ et $r_1 r_2 \approx r^2$

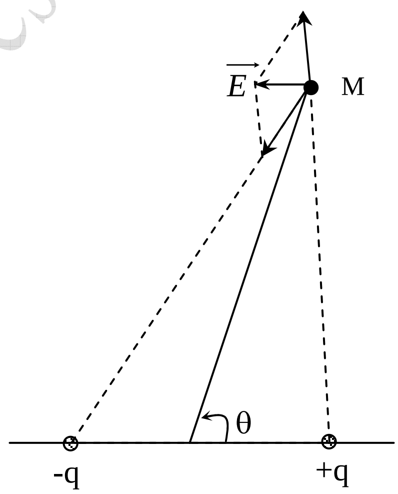
et l'on aura:

$$V = kq\frac{a\cos\theta}{r^2} = k\,qa\,\frac{\cos\theta}{r^2} = k\,p\,\frac{\cos\theta}{r^2} \qquad (p = qa)$$

Le champ est donné par: $dV = -\vec{E}\,\vec{dl}$

On fera les calculs en coordonnées polaires.

A prendre en considération que le gradient d'une fonction f s'exprime par:



En coordonnées cartésiennes:

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}$$

En coordonnées polaires:

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{\theta}\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}$$

Il vient

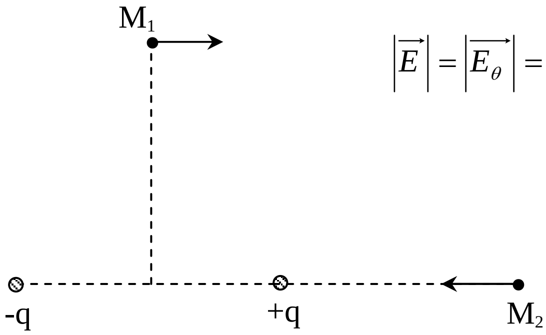
$$\vec{E}\begin{cases} E_r \\ E_\theta \end{cases} \qquad \vec{dl}\begin{cases} dl_r = dr \\ dl_\theta = r d\theta \end{cases}$$

$$dV = -\vec{E}\,\vec{dl} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} dV = -(E_r\,dr + E_\theta\,r\,d\theta) \\ \\ dV = \dfrac{\partial V}{\partial r}dr + \dfrac{\partial V}{\partial \theta}d\theta \end{cases}$$

Par identification, on aura:

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases} \qquad V = k\,p\,\frac{\cos\theta}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{2k\,p\cos\theta}{r^3} \\ \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{k\,p\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

<u>Positions particulières:</u>

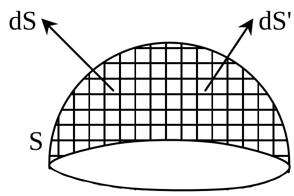


$$\left|\overrightarrow{E}\right| = \left|\overrightarrow{E_\theta}\right| = \left|\frac{2k\,\overrightarrow{p}}{r^3}\right| \qquad (\theta = \pi/2)$$

$$\left|\overrightarrow{E}\right| = \left|\overrightarrow{E_r}\right| = \left|\frac{2k\,\overrightarrow{p}}{r^3}\right| \qquad (\theta = 0)$$

IV. Flux du champ électrique: Théorème de Gauss

IV.1. Représentation d'une surface



On décompose (S) en élément dS très petits;

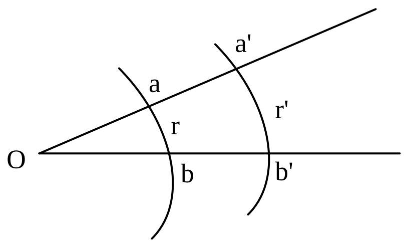
chaque élément dS est représenté par un vecteur $\overrightarrow{dS}$:

- appliqué sur dS
- de grandeur dS
- dirigé selon la normale au plan dS
- sur une direction arbitraire qui sera conservée pour tous les éléments de S.

Ainsi : $S = \iint \left|dS\right|$

IV.2. Angle solide

✓ *<u>Angle dans le plan</u>*



$\overset{\frown}{ab}$: longueur de l'arc

$\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{ab}}{r} = \dfrac{\overset{\frown}{a'b'}}{r'}$ est indépendant de r

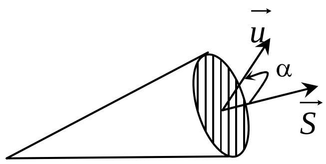
au maximum : $\alpha = \dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$

$[\alpha] = radian$: rad

✓ *Angle solide*

Par analogie avec ce qui précède, on définit l'angle solide Ω comme ayant pour mesure la surface S interprétée sur la sphère de rayon unité.

$[\Omega] = stéradian$: st



$$\Omega = \frac{\vec{S}\,\vec{u}}{r^2} = \frac{S\cos\alpha}{r^2}$$

Pour une surface d'orientation normale:

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \qquad (\alpha = 0)$$

Cette définition conduit au résultat suivant :

- pour tout l'espace : $\Omega = \frac{S}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \;\; st$

- Une calotte sphérique de centre O de rayon r a une surface telle que :

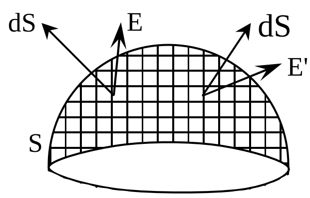
$$S = \Omega\,\mathrm{r}^2$$

- Si l'angle solide est petit : $dS = d\Omega\;\mathrm{r}^2$

- Soit $d\sum$ une surface s'appuyant, autour de M, sur le même angle solide $d\Omega$, et dont le plan fait un angle θ avec celui de dS, on a $dS = d\sum cos\theta$

$$\Rightarrow \qquad d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{d\sum cos\theta}{r^2}$$

IV. 3. Flux du vecteur champ électrostatique



- On appelle flux de $\vec{E}$ à travers dS, élément de S, la quantité scalaire positive ou négative :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

- Le flux total de $\vec{E}$ à travers S est l'intégrale sur toute la surface :

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Remarque

Dans le cas général, $\vec{E}$ varie d'une surface élémentaire à l'autre.

IV. 4. Théorème de Gauss

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée entourant des charges q_i est :

$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

$\sum q_i$: représente la somme algébrique des charges intérieures.

IV. Applications

Exercice 01

Calculer le champ électrique E créé par une charge ponctuelle q en un point distant de r par rapport à celle-ci.

Exercice 02

Etudier le champ électrique créé par une charge distribuée uniformément sur un plan infini. σ est la densité superficielle de cette charge.

Exercice 03

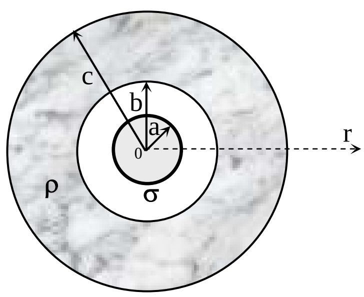
Etudier le champ électrique créé par une distribution sphérique de charges. On prendra en considération le cas d'une sphère de rayon a et de charge totale Q. la distribution de charge est soit superficielle (σ=cte) ou volumique (ρ=cte).

Exercice 04

On définit trois sphères concentriques de rayons « a », « b » et « c », tels que a<b<c. La sphère de rayon « a » est chargée en surface avec une répartition surfacique constante « σ ». Le volume compris entre les sphères de rayons « b » et « c » est chargé en volume avec une répartition volumique constante « ρ ».

1. Calculer le champ électrique « E » créé en tout point de l'espace en fonction du rayon « r » (r variant de 0 à l'infini)
2. Tracer l'allure de « E » en fonction de r.

Rq : on prendra $\rho = \frac{3\sigma a^2}{b^3}$ pour tout l'exercice.



Chapitre III

Conducteurs électriques

I. Conducteurs en équilibre électrostatique

I.1. Définition

- Un conducteur est un corps à l'intérieur duquel les charges libres peuvent se déplacer.

- Un conducteur est dit en équilibre électrostatique si toutes ses charges sont immobiles ; c'est-à-dire que les charges intérieures ne sont soumises à aucune force.

I.2. Propriétés des conducteurs en équilibre

a- Le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre

Si E n'était pas nul, chaque charge libre serait soumise à une force $\vec{F} = q\vec{E}$, et se déplacerait : le conducteur ne serait plus en équilibre.

Pour la même raison, le champ à la surface du conducteur doit être perpendiculaire à cette surface, car s'il y avait une composante parallèle, les charges libres migreraient sur la surface du conducteur.

b- Le conducteur en équilibre constitue un volume équipotentiel

En effet, la différence de potentiel (ddp) entre deux points quelconques M et M' est définie par $dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'}$, or E=0 pour un conducteur en équilibre $\Rightarrow$ V=cte.

Comme le potentiel est le même en tous les points du conducteur, la surface externe est une surface équipotentielle. On retrouve bien que le champ est normal à cette surface.

c- La charge est nulle en toute région interne au conducteur. La charge est localisée en surface

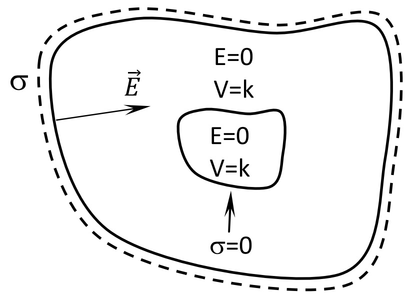
Le champ E est nul en tout point M intérieur au conducteur, le flux $\Phi = \int \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$ est donc nul à travers toute surface fermée intérieure au conducteur et entourant M. D'après le théorème de Gauss, la charge intérieure à cette surface est nulle.

Les charges se répartissent donc uniquement sur la surface du conducteur (en réalité une surface occupant une épaisseur de quelques couches d'atomes).

Remarque

Les mêmes résultats sont encore valables pour un conducteur creux. Le champ est nul dans le conducteur et la cavité qui constitue un même volume équipotentiel.

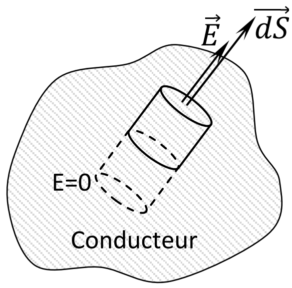
Les charges sont localisées à la surface externe du conducteur.



d- Relation entre le champ au voisinage immédiat d'un conducteur et la charge électrique superficielle

Le flux électrique se compose de 3 termes :

- Flux à travers la surface latérale (nul) ($\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}$)
- Flux à travers la base intérieure (nul) (E=0)



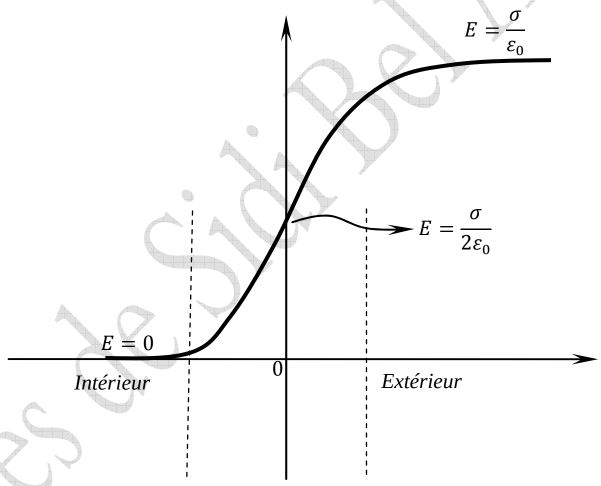
- Seule subsiste le flux à travers la base extérieure : $d\Phi = E \cdot dS$

Par ailleurs, si σ est la densité superficielle de charge, la charge contenue dans le cylindre est :

$$dq = \sigma\, dS$$

En appliquant le théorème de Gauss :

$$EdS = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



e- Pression électrostatique

Les charges à la surface d'un conducteur sont soumises à des forces répulsives de la part des autres charges. La force exercée par unité de surface, ou pression électrostatique, peut se calculer en multipliant le champ électrique moyen sur la surface du conducteur par la charge par unité de surface.

Le champ électrique moyen est d'après ce qui précède :

$$E_m = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

La pression électrostatique vaut :

$$p = \sigma\ E_m = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}$$

I.3. Capacité propre d'un condensateur seul dans l'espace

Sur un conducteur isolé dans l'espace, déposons une charge q : il en résulte en tout point de l'espace une charge q'=αq, on aura en tout point de l'espace, un champ $\overrightarrow{E'} = \alpha \vec{E}$, puisque E et q sont proportionnels et ceci est vrai en particulier sur le conducteur dont le potentiel est V.

On écrit ceci sous la forme :

$$Q = C\,V$$

La constante de proportionnalité C est appelée capacité propre du conducteur isolé :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Coulomb}{Volt} = \text{Farad}$$

Le farad est une unité très grande, on utilise des sous multiples :

- ✓ le microfarad : 10^{-6} F (µF)
- ✓ le nanofarad : 10^{-9} F (nF)
- ✓ le picofarad : 10^{-12} F (pF)

Exemple

Calcul de la capacité propre d'un conducteur sphérique.

Soit une sphère de rayon R. En un point quelconque situé à une distance r du centre, le potentiel est donné par : $V = K\frac{Q}{r}$

Sur la surface de la sphère (r=R), $V = K\frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ d'où $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$

Ordre de grandeur

- La capacité de la terre (R=6400Km) est c=710 µ F
- Une sphère de 10 cm de rayon, portée à un potentiel de 1000 V par rapport au sol, emmagasine une charge de 10 nC (sa capacité étant de 10 pF)

I.4. Energie interne d'un conducteur chargé seul dans l'espace

Soit C la capacité propre du condensateur, Q sa charge et V son potentiel dans un état d'équilibre donné.

- L'énergie interne est mesurée par le travail qu'il faut fournir pour charger le conducteur
- Ou bien par le travail des forces électrostatiques mis en jeu au cours de la décharge du conducteur
- Ou encore, elle représente la somme des variations d'énergie potentielle subies par toutes les charges au cours de la charge du conducteur.

Partant de l'énergie potentielle élémentaire donnée

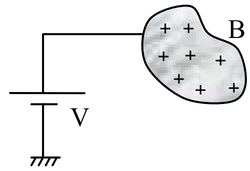
$$dE_p = v\,dq \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} E_p = \int_0^Q v\;dq \\ v = \frac{q}{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad E_p = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$or \quad q = C\,v \quad ;$$

Il s'ensuit donc que : $E_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}Qv$ (Cette énergie est positive >0)

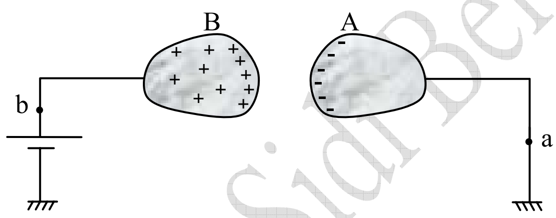
II. Condensateurs

Un condensateur B de capacité C est maintenu à un potentiel constant V (V>0 par exemple). Il porte, donc, une charge Q, telle que Q=C v



Approchons de B un conducteur A maintenu à un potentiel constant (0 par exemple). B influence A sur le quel apparaissent des charges négatives.

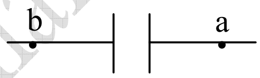
Ces charges <0 influencent à leurs tour le conducteur B sur lequel de nouvelles charges >0 apparaissent.



Il n'y a pas eu, proprement parlé, créations de charges sur B, c'est le générateur qui en a assuré le transport.

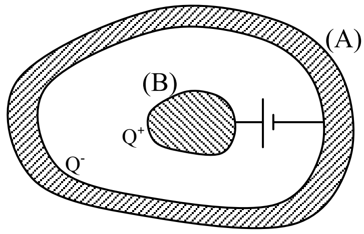
Ainsi, à l'équilibre, du fait de la présence de A, le conducteur B porte plus de charge que lorsqu'il était seul. Il y a eu condensation de l'électricité sur B et sa capacité a augmenté.

On obtient donc un condensateur (formé des condensateurs A et B), représenté schématiquement par :



En pratique, on réalise un condensateur en utilisant 2 conducteurs en influence totale. Les charges Q_a et Q_b sont égales et de signe contraire.

$|Q_a| = |Q_b| = Q$ charge du condensateur



Si V est la différence de potentiel entre A et B, on peut montrer que Q=C V

$$\frac{Q}{V} = Constante = C \text{ (Capacité du condensateur)}$$

II. 1. Calcul de la capacité d'un condensateur

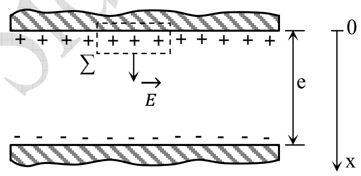
Méthode

- Calculer le champ en tout point intérieur au condensateur
- Déduire, par circulation du champ, la différence de potentiel entre les condensateurs
- Effectuer le rapport $\frac{Q}{V} = C$

Exemples

a. Condensateur plan

Il est constitué théoriquement de deux conducteurs dont les faces en regard sont des plans parallèles indéfinis en influence total. En pratique, il suffira que l'épaisseur e, soit petite par rapport à la dimension des plaques



× $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = cste$ (théorème de Gauss, surface $\sum$)

× $dv = -\vec{E}\vec{dl} = -E\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,e \qquad (\sigma = \frac{Q}{S})$

× $C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$

b. Condensateur cylindrique

Il est composé de deux cylindres coaxiaux, rayons R_1 et R_2 avec $R_2 > R_1$.

$\sum$ est la surface de gauss,

$\sum$ est un cylindre de rayon r avec $R_1 < r < R_2$

Théorème de gauss :

$\phi = \iint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\epsilon_0}$

$\phi = \phi_{SB} + \phi_{SL}$, ϕ_{SB}: flux dans la surface de base

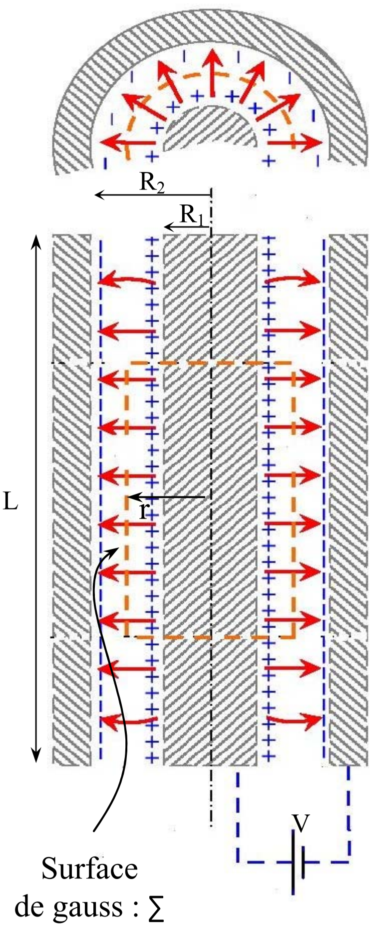
ϕ_{SL} : flux dans la surface latérale

$\phi = \phi_{SL} = \iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_L} = E\,S_L = 2\pi r\,L = \frac{Q}{\epsilon_0}$

$\Longrightarrow E = \frac{Q}{2\pi r\,L\epsilon_0}$

$\vec{E} = \overrightarrow{grad}V \Longrightarrow \vec{E} = \frac{-dV}{\vec{dr}}$

$\Longrightarrow dV = -\vec{E}\vec{dr} = -Edr$



$$\int_1^2 -dV = \int_{R_1}^{R_2} Edr \Longrightarrow V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi r\, L\epsilon_0} dr$$

$$\Longrightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0} Log\ \frac{R_2}{R_1}$$

La capacité est donnée par $C = \frac{Q}{V}$

$$V = V_1 - V_2 \Longrightarrow C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi L\epsilon_0}{Log \frac{R_2}{R_1}}$$

D'autre part, on sait que R_2-R_1=e, puisque e est très faible, on peut admettre que $R_2 \approx R_1 = R$.

Il vient :

$$Log\ \frac{R_2}{R_1} = Log\ \frac{R+e}{R} = Log\ \left(1 + \frac{e}{R}\right)$$

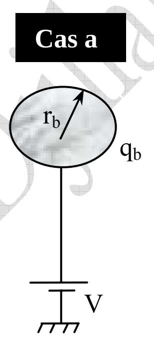
Etant donné que $Log\ (1 + \epsilon)$ et $\frac{e}{R} \cong \epsilon,\ alors$

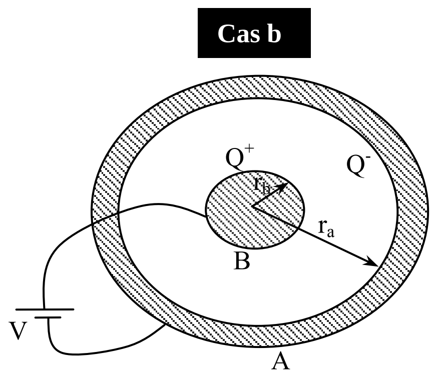
$$Log\left(1 + \frac{e}{R}\right) \cong \frac{e}{R} \Longrightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 LR}{e}$$

S=$2\pi LR$: la surface de l'armature, il vient $C = \frac{S\epsilon_0}{e}$

Remarque

Deux conducteurs en influence (condensateur) ont une capacité plus grande qu'un conducteur de surface équivalente. L'exemple suivant prouve cette affirmation :





Cas (a)

Une sphère de rayon r_b, portée à un potenetiel V par rapport au sol, porte une charge :

$$q_b = 4\pi\epsilon_0 r_b V$$

$$C = \frac{Q}{V} \Longrightarrow C = \frac{q_b}{V}_b = 4\pi\epsilon_0 r_b$$

Cas (b)

Condensateur sphérique

$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} = k\frac{Q}{r^2}$ $\quad$ ($r_b<r<r_a$)

V, pris identique au cas (a), est donné par :

$V_A - V_B = V = kQ\frac{r_a - r_b}{r_a r_b}$

$$\left.\begin{array}{l} Q = \frac{r_a r_b V}{k(r_a - r_b)} \\ or\ V = \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0 r_b} = k\frac{q_b}{r_b} \end{array}\right\} \Longrightarrow Q = \frac{r_a}{r_a - r_b} q_b > q_b$$

Ainsi, avec un même générateur de tension, la charge Q emmagasinée sur le condensateur est supérieur à celle de la sphère B seule et ceci d'autant plus que les conducteurs A et B sont plus rapprochés.

II.3. Energie électrique d'un condensateur

Elle se calcule de la même manière que dans le cas des conducteurs

$$w = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

II.4. Associations de condensateurs

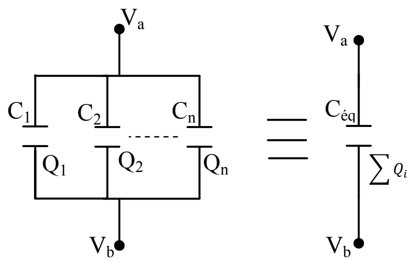
II.4.1. Association en parallèle

Tous les condensateurs sont soumis à la même ddp :V, ils portent alors les charges

$Q_1=C_1V$, $Q_2=C_2V$, ……….. $Q_n=C_nV$

$\sum Q_i=\sum C_i V$, tout se passe comme si on avait un seul condensateur de capacité $C_{éq} = \sum C_i$ et qui emmagasinerait une charge $Q = \sum Q_i$

$$\boldsymbol{C_{éq} = \sum C_i}$$



II.4.1. Association en série

Il apparait sur chaque condensateur une charge Q et par suite, on peut écrire

$Q=C_1V_1 \quad \Rightarrow \quad V_1=Q/C_1$

$Q=C_2V_2 \quad \Rightarrow \quad V_2=Q/C_2$

.

.

.

.

.

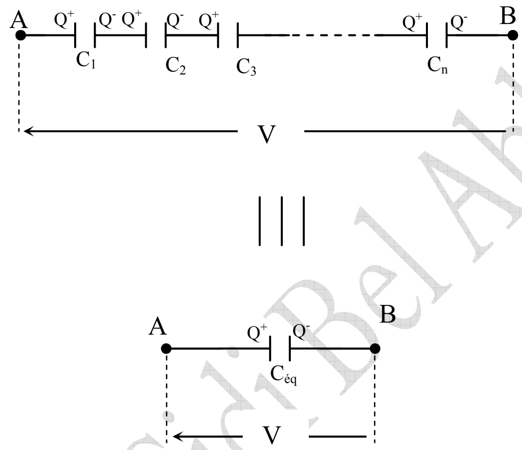
$Q=C_nV_n \quad \Rightarrow \quad V_n=Q/C_n$

$V= V_1+ V_2+\ldots\ldots\ldots\ldots V_n$

$= Q\,(1/ C_1+1/ C_2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1/ C_n)$

$= Q/C_{éq}$

Et par suite : $\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \frac{1}{C_n}$



III. Application

Exercice

Un condensateur plan a des armatures de surface « S » et distance « e ». On applique entre les deux plaques une différence de potentiel V_0=500 V. en intercalant entre les deux plaques une lame d'un diélectrique de permittivité ε_r, la ddp passe à V_1=100 V.

1. Calculer la capacité du condensateur après introduction du diélectrique puis en déduire la valeur de ε_r.
2. Déterminer la charge q_i induite sur chacune des faces du diélectrique.

On donne : S=400 cm^2 et e=5 mm.

Chapitre IV

Electrocinétique, conduction électrique

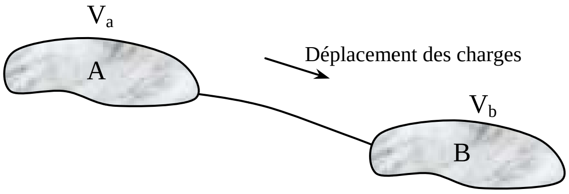
I. Introduction au courant électrique

I.1. Rupture d'un équilibre électrostatique, courant électrique

Soient deux conducteurs A et B en équilibre électrostatique.

Soient V_a et V_b leurs potentiels

(V_a>V_b) Q_a et Q_b leurs charges.

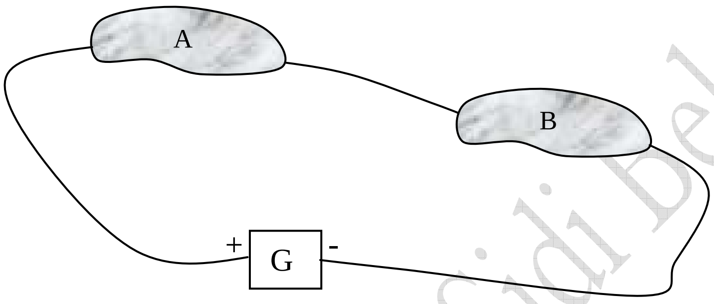


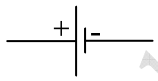
Si on relie les conducteurs A et B à l'aide d'un fil conducteur, l'ensemble A, B et le fil constitue un conducteur unique, pour lequel l'état précédent n'est plus en état d'équilibre.

Sous l'influence du champ électrostatique qui règne dans le fil, les charges se mettent en mouvement. Il y'a donc apparition d'un courant électrique qui cesse de circuler (s'annule) une fois l'équilibre est atteint.

I. 2. Obtention d'un régime permanent

Pour entretenir ce mouvement des charges, on apporte continuellement des charges sur l'un des conducteurs, ceci est possible grâce à l'emploi de générateur.





I.3. propriétés principales du courant électrique

Le passage du courant électrique se traduit principalement par les effets physiques suivants

- × Effet joule (Chaleur)
- × Effet chimique (Electrolyse)
- × Effet Magnétique (Déviation d'une aiguille aimentée)
- × etc ……….

La plupart de ces effets dépendent de la manière dont on a branché le générateur car le courant électrique a un sens.

<u>Sens conventionnel du courant électrique</u>

Le sens conventionnel du courant

+ vers – à l'extérieur du générateur

- vers + à l'intérieur du générateur

II. Vecteur densité de courant

II. 1. Définitions

× On appelle ligne de courant, la trajectoire orientée des charges positives en mouvement (fictif en général).

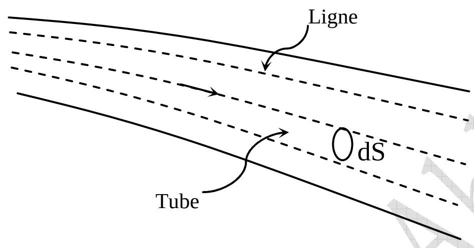
× On appelle tube de courant, l'ensemble de ces lignes s'appuyant sur un contour fermé quelconque.

× En chaque point M d'un milieu où se déplacent des charges électriques, on peut introduire un vecteur $\vec{J}$ (appelé vecteur densité de courant) défini par :

$$\vec{J} = \rho\vec{v}$$

$\vec{v}$: vitesse de déplacement des charges

ρ : densité volumique de charge



II. 2. Intensité du courant électrique

On considère un tube de courant, de section droite dS, à travers laquelle circule un courant électrique de vecteur densité de courant $\vec{J} = \rho\vec{v}$.

On peut évaluer la charge dq qui traverse la surface dS pendant le temps dt.

$$dq = \rho v \, dt \, dS$$

$$\frac{dq}{dt} = \vec{J}\,\overrightarrow{dS}$$

Si l'on considère maintenant une surface donné S, la charge dQ qui la traverse pendant l'intervalle de temps dt s'obtient par :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \iint_S \vec{J}\,\overrightarrow{dS}$$

I : est l'intensité du courant à travers la surface S.

III. Loi d'Ohm, Loi de Joule

III. 1. Expression de la loi d'Ohm

La loi d'Ohm s'exprime de la façon suivante :

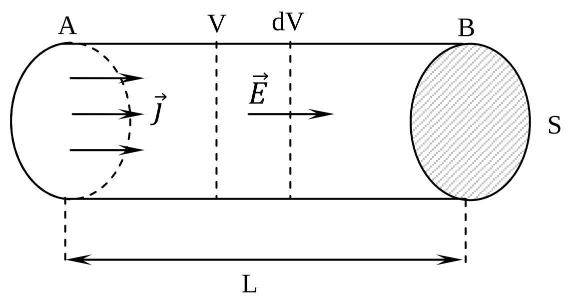
$$\vec{J} = \gamma\vec{E} \qquad \text{(ou encore V=R I)}$$

$\vec{J}$: Densité de courant ;

$\vec{E}$: Champ électrique ;

γ : Conductivité. $\gamma = \frac{1}{r}$ r : résistivité (notée souvent ρ)

<u>*Calcul de la résistance d'un conducteur*</u> : exemple d'un conducteur cylindrique homogène



$$\vec{J} = \gamma\vec{E}$$

Partant de la loi d'Ohm, on peut écrire :

$$J = \gamma E = -\gamma\frac{dv}{dx} = \frac{I}{S}$$

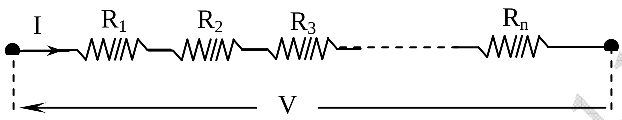
$$\Rightarrow \qquad dv = -\frac{1}{\gamma}\frac{I}{S}\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \int_A^B dv = -\frac{1}{\gamma}\int_0^L \frac{I}{S}\,dx$$

$V_B - V_A = -\frac{1}{\gamma}\ \frac{I}{S}\ L$ ou encore $V_A - V_B = \rho\ \frac{I}{S}\ L$ (V=R.I)

d'où $R = \rho\frac{L}{S}$ $[R]$=Ohm (Ω)

III.2. Association des résistances

<u>*Association en série*</u>



$$\left.\begin{aligned} V_A - V_B &= R_1 I \\ V_B - V_C &= R_2 I \\ &\vdots \\ V_E - V_F &= R_n I \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &V = \sum R_i\, I \qquad V = R_{éq} I \\ &donc \quad R_{éq} = \sum R_i\, I \end{aligned}$$

<u>*Association en parallèle*</u>

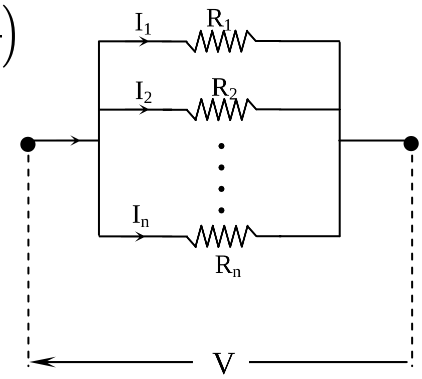
$I = I_1 + I_2 + I_3 + .\ .\ .\ .\ . + I_n$

Or $I_1 = \frac{V}{R_1}$, $I_2 = \frac{V}{R_2}$, $I_3 = \frac{V}{R_3}$ .. . . . . $I_n = \frac{V}{R_n}$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + .\ .\ .\ . + \frac{V}{R_n} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + .\ .\ .\ . + \frac{1}{R_n}\right)$$

$$I = \frac{1}{R_{éq}} V$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R_{éq}} = \sum\left(\frac{1}{R_i}\right)$$



IV. Loi de Joule

Energie w=R I^2 t (Joule)

Puissance P=R I^2=V I= V^2/R (Watt)

V. Circuits électriques

Un circuit électrique est constitué principalement par une association série ou parallèle de composants suivants :

- Composants passifs : (résistances, bobines, condensateurs, etc………)
- Composants actifs : (diodes, circuits intégrés, etc ….)
- Des forces électromotrices fem (ou générateurs continus ou alternatifs)
- Des forces contre électromotrices fcem (moteurs, etc..)

V.1. Force électromotrice et générateur

C’est un dispositif capable de délivrer un courant dans le circuit extérieur sous une tension généralement continue.

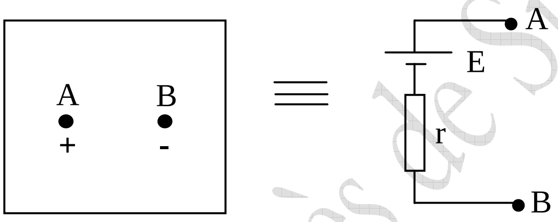
In existe plusieurs types de générateur :

- Générateur électrostatique
- Générateur électrochimique (pile)

Quelque soit le type de générateur, il présente à ses bornes une fem ou ddp qui s’exprime en volt.

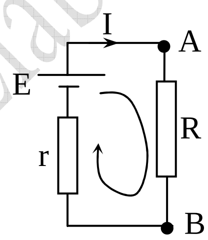
Schéma équivalent d’une pile

On peut représenter un générateur par un circuit équivalent constitué d’une fem en série avec une résistance r, appelée résistance interne du générateur.



E : fem
r : résistance interne

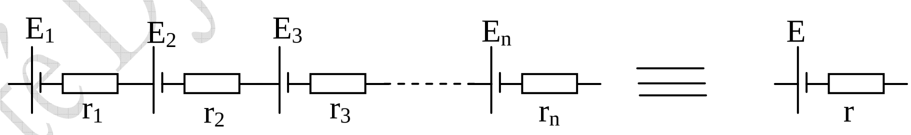
Lorsqu’on branche aux bornes du générateur une résistance R, il débitera un courant I.



$$(V_A - V_B) = E - rI$$

$$\Rightarrow E = (V_A - V_B) + rI$$

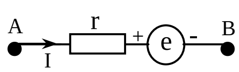
Association des générateurs



$E = \sum E_i$ et $r = \sum r_i$

V.2. force contre électromotrice d’un récepteur

Les récepteurs sont des appareils qui ont pour but de transformer l’énergie électrique en une autre forme d’énergie (moteur, accumulateur en charge…….). On ne peut réaliser cette opération sans perte d’énergie par effet joule dans le récepteur de résistance r.



e : fcem

V.3. Loi d'Ohm appliquée à un circuit fermé

Soit un circuit *fermé* comprenant des générateurs($\sum E$), des récepteurs ($\sum e$) et des résistances ($\sum R$).

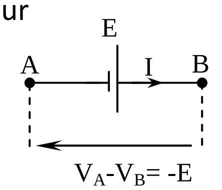
On peut écrire, selon le contour fermé du circuit :

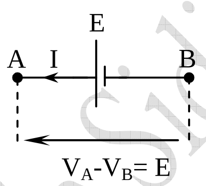
$$\sum E + \sum e + \sum R\, I = 0$$

V.4. Application de la loi d'Ohm à une portion de circuit

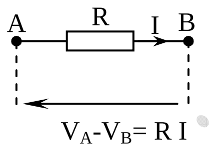
Un circuit fermé (ou une branche de circuit) est parcouru par un courant I. considérons une portion de circuit AB parcourue par le courant I de A vers B. si AB comporte un générateur et une résistance, une ddp existe entre A et B.

- Générateur

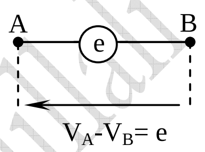




- Résistance

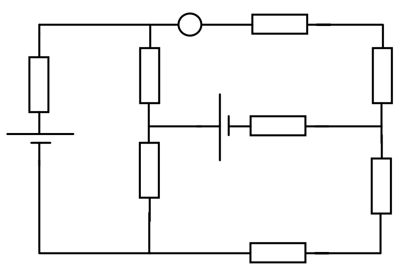


- Récepteur par de fcem « e »



V.5. Généralisation de la loi d'Ohm : Loi de KIRCHOFF

<u>*Définitions*</u> : considérons un réseau constitué de générateurs, de récepteurs et de résistances mortes.



× On appelle *Nœud* tout point où aboutissent plus de deux conducteurs reliant les éléments entre eux ;

× On appelle *Branche*, l'ensemble des éléments situés entre deux nœuds consécutifs ;

× On appelle *Maille,* tout contour fermé, formé d'une suite de branches.

<u>*Lois de Kirchoff*</u>

× Loi des Nœuds : $\sum I = 0$

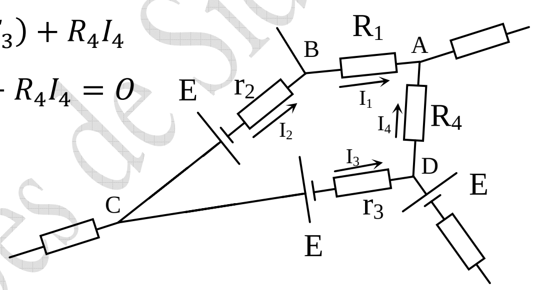
× Loi des Mailles : $\sum E - \sum RI = 0$

V.6. Application à un réseau (mise en équation)

On définit arbitrairement un sens pour les courants dans chaque branche du réseau. Puis on écrit les lois des mailles et loi des nœuds.

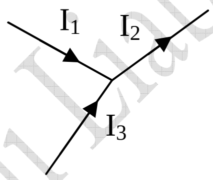
<u>*Loi des mailles*</u> (exemple)

$$V_A - V_A = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_A)$$
$$= -R_1I_1 - (r_2I_2 + E_2) + (r_3I_3 + E_3) + R_4I_4$$
$$= -E_2 + E_3 - R_1I_1 - r_2I_2 + r_3I_3 + R_4I_4 = 0$$

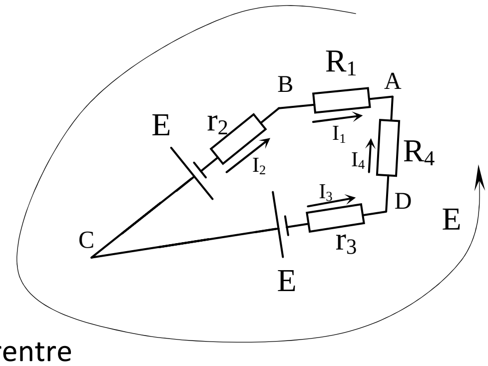


<u>*Loi des nœuds*</u> (exemple)

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0$$



<u>***Règles***</u>



<u>*Loi des mailles*</u>

× On définit un sens arbitraire des courants

× On définit un sens arbitraire des parcours

× Pour les fem, on attribue le signe par lequel on rentre

× Pour les chutes de tension RI, on attribue un signe + si le sens de parcours coïncide avec le sens des courants, un signe – si le sens de parcours est différent du sens du courant

$$\sum E - \sum RI = 0 \quad \Rightarrow -E_2 + E_3 - R_1I_1 - r_2I_2 + r_3I_3 + R_4I_4 = 0$$

Identique à celle trouvée auparavant

Loi des Nœuds

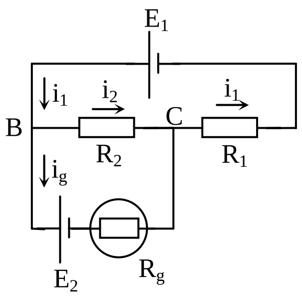
× $\sum I \quad = 0$

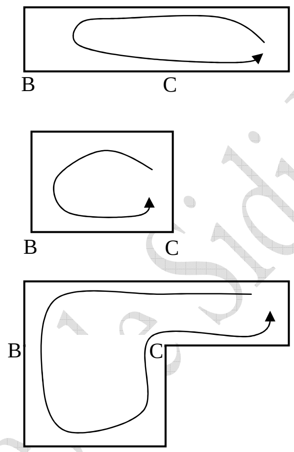
× On choisit comme signe + pour les courants entrant,

× on choisit comme signe – pour les courants sortant.

Application des lois de Kirchoff

On se propose de calculer la grandeur et le sens du courant i_g dans le galvanomètre G, de résistance R_g, pour des valeurs données de E_1, E_2, R_1, R_2 et R_g du circuit suivant :





maille (1)

maille (2)

maille (3)

Loi des nœuds

Nœud (B) : $i_1 - i_2 - i_g = 0$

$\Rightarrow \quad i_1 = i_2 + i_g$

Loi des mailles

Maille (1) : $-E_1 + R_2 i_2 + R_1 i_1 = 0$

Maille (2) : $+E_2 + R_g i_g - R_2 i_2 = 0$

Maille (3) : $-E_1 + E_2 + R_g i_g + R_1 i_1 = 0$

On obtient alors le système d'équations, suivant, à résoudre :

(1) $\quad i_1 - i_2 - i_g = 0$

(2) $\quad R_g i_g - R_2 i_2 = -E_2$

(3) $\quad R_g i_g + R_1 i_1 = E_1 - E_2$

(1) $\quad \Rightarrow \quad i_2 = i_1 - i_g$

(2) $\quad R_g i_g - R_2(\, i_1 - i_g) = -E_2$

$$(4) \qquad \begin{array}{ll|l} (R_g + R_2) i_g & - R_2\, i_1 = -E_2 & x \quad R_1 \\ R_g i_g & + R_1 i_1 = E_1 - E_2 & x \quad R_2 \end{array}$$

$$[R_1(R_2 + R_g) + R_2 R_g] i_g \; + \; 0 = R_2(E_1 - E_2) - R_1 E_2$$

Il vient : $i_g = \frac{R_2(E_1 - E_2) - R_1 E_2}{R_1 R_2 + R_1 R_g + R_2 R_g}$

Si le numérateur s'avère positif, le courant dans le galvanomètre a pour sens celui choisi arbitrairement, dans le cas contraire, il circule en sens inverse.

VI. Théorèmes généraux dans l'analyse des circuits

VI.1. Théorème de superposition

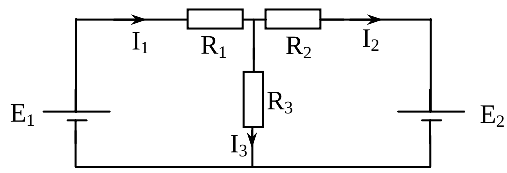
Une source quelconque d'énergie peut être considérée séparément des autres quant à son effet sur les grandeurs en jeu dans le circuit. La combinaison de tous les effets individuels donne l'effet total.

La marche à suivre comprend six opérations

1. choisir une source d'énergie
2. retirer toutes les autres sources selon la règle :
    a. les sources de tension sont court-circuitées
    b. les sources de courant sont ouvertes
3. garder dans le circuit les résistances internes des sources enlevées
4. déterminer le courant dans chaque élément, ou la tension entre les bornes de chacun d'eux. Indiquer les directions et les polarités
5. répéter les opérations de 1 à 4 pour chaque source
6. additionner algébriquement les résultats partiels

<u>Exemple</u>

Quels sont les courants dans le circuit suivant :

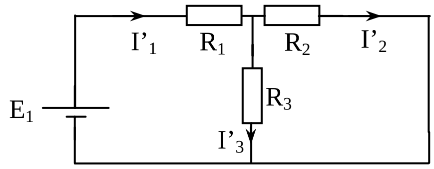


E_1=10V et E_2=20V

R_1=1,2 KΩ, R_2=1,8 KΩ et R_3=2,7 KΩ

<u>Solution</u>

Choisir une source E_1 et éteindre la source E_2, cela correspond au circuit suivant :

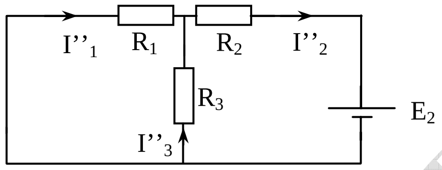


$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \quad \Rightarrow \quad AN. \quad I'_1 = \frac{10}{1{,}2\ \ 10^3 + \frac{1{,}8\ 10^3 2{,}7\ \ 10^3}{1{,}8\ 10^3 + 2{,}7\ \ 10^3}} = 4{,}386\ mA$$

$$I'_2 = I'_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad \Rightarrow \quad AN. \quad I'_2 = 4{,}386\ 10^{-3} \frac{2{,}7\ 10^3}{1{,}8\ 10^3 + 2{,}7\ \ 10^3} = 2{,}632\ mA$$

$$I'_3 = I'_1 - I'_2 \quad \Rightarrow \quad AN. \quad I'_3 = 4{,}386 - 2{,}632 = 1{,}754\ mA$$

Choisir la source E_2 et reprendre le circuit avec E_1 éteinte, cela correspond au circuit suivant :



Calcul des courants dus à E_2

$$I''_2 = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} \quad \Rightarrow \quad AN. \quad I''_2 = \frac{20}{1{,}8\ \ 10^3 + \frac{1{,}2\ 10^3 2{,}7\ \ 10^3}{1{,}2\ 10^3 + 2{,}7\ \ 10^3}} = 7{,}602\ mA$$

$$I''_1 = I''_2 \frac{R_3}{R_1 + R_3} \quad \Rightarrow \quad AN. \quad I''_1 = 7{,}602\ 10^{-3} \frac{2{,}7\ 10^3}{1{,}2\ 10^3 + 2{,}7\ \ 10^3} = 5{,}263\ mA$$

$$I''_3 = I''_2 - I''_1 \quad \Rightarrow \quad AN. \quad I''_3 = 7{,}602 - 5{,}263 = 2{,}339\ mA$$

Le courant, du aux deux sources (E_1 et E_2), sera :

$$I_1 = I'_1 + I''_1 \quad \Rightarrow \quad AN. \quad I_1 = 4{,}386 + 5{,}263 = 9{,}649\ mA \qquad \xrightarrow{I_1}$$

$$I_2 = I'_2 + I''_2 \quad \Rightarrow \quad AN. \quad I_2 = 2{,}632 + 7{,}602 = 10{,}23\ mA \qquad \xrightarrow{I_2}$$

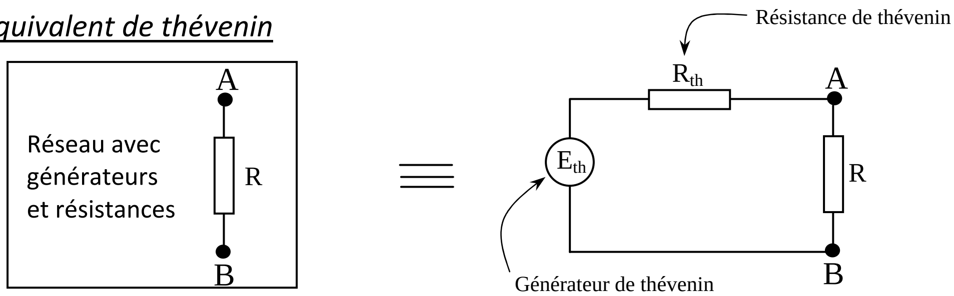
$$I_3 = I'_3 + I''_3 \quad \Rightarrow \quad AN. \quad I_3 = 2{,}339 - 1{,}754 = 0{,}585\ mA \qquad \uparrow I_3$$

VI.2. Théorème de Thévenin

Le théorème de Thévenin établit que le courant dans toute résistance R branchée entre les deux bornes d'un réseau est le même que si R était branchée à une source de tension où :

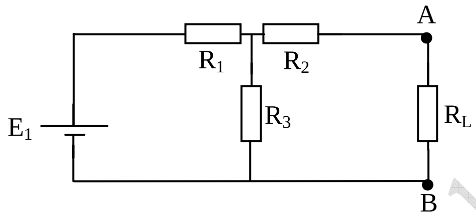
1. la fem est la tension à vide entre les bornes de R
2. la résistance interne est la résistance du réseau entre les bornes de R, avec toutes les autres sources remplacées par des résistances égales à leurs résistances internes.

<u>Circuit équivalent de thévenin</u>



__Exemple__

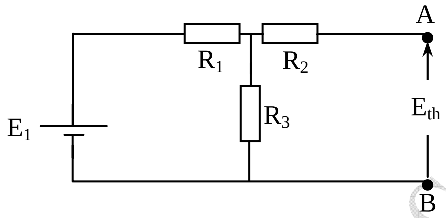
Appliquer le théorème de thévenin au circuit suivant



× *__Détermination de E_{th}__*

1. débrancher R_L
2. Déterminer la tension entre A et B

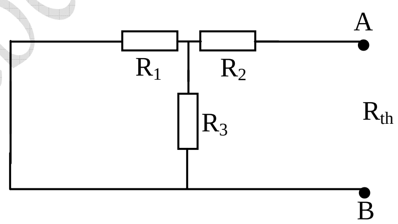
$$E_{th} = E\,\frac{R_3}{R_1+R_3}$$



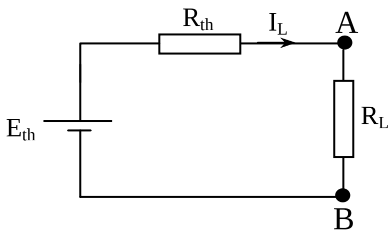
× *__Détermination de R_{th}__*

1. débrancher R_L
2. Eteindre la source E
3. Déterminer la résistance entre les deux bornes A et B

$$R_{th} = R_2 + \frac{R_1R_3}{R_1+R_3}$$



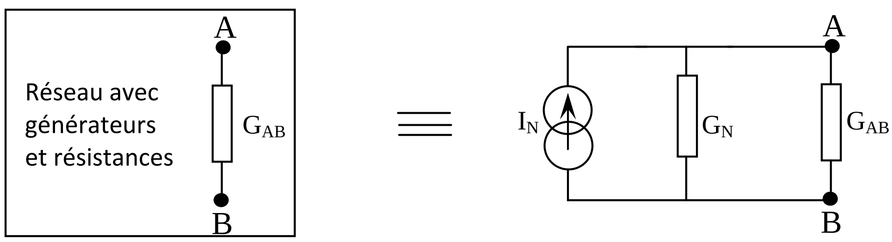
Le circuit équivalent de thevenin apparait comme suit :



$$I_L = \frac{E_{th}}{R_L+R_{th}}$$

$$I_L = \frac{E\,\frac{R_3}{R_1+R_3}}{R_2+\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+R_L} = \frac{E\ \ R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1+R_L(R_1+R_3)}$$

VI.3. Théorème de Norton



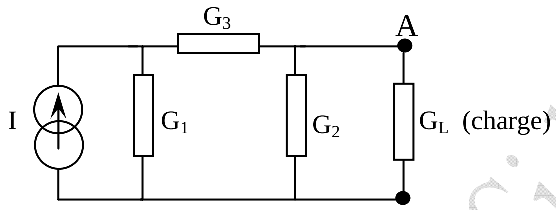
Le circuit de Norton est tel que :

I : courant de norton, est le courant du court-circuit entre les bornes AB, courant équivalent entre AB si ces points étaient reliés par un conducteur parfait.

G : conductance de norton, est la conductance entre les bornes A et B avec ces bornes ouvertes (élément G_{AB} débranché), toutes les sources étant éteinte.

__Exemple__

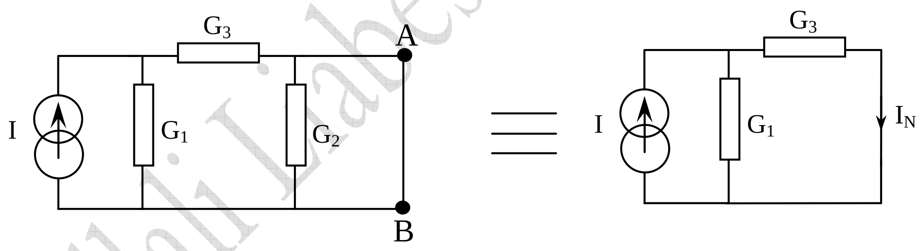
Donner le circuit équivalent de Norton du circuit suivant :



a. *__Courant de Norton I_N__*

Pour obtenir ce courant, on procède de la façon suivante

- Court-circuiter G_L
- Déterminer le courant dans court-circuit

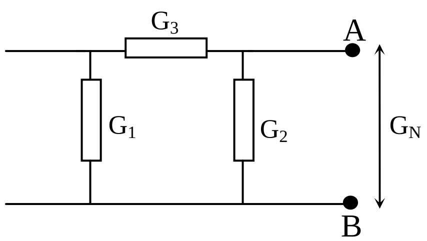


$$I_N = \frac{G_3}{G_1+G_3} I$$

b. *__Conductance de Norton__*

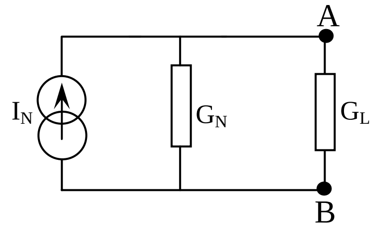
Pour obtenir la conductance de Norton G_N, on suit les étapes suivantes :

- Débrancher G_L entre A et B
- Eteindre la source I
- Déterminer la conductance entre les bornes A et B



$$G_N = G_2 + \frac{G_1 G_3}{G_1+G_3}$$

- Le circuit équivalent de Norton est donné par :

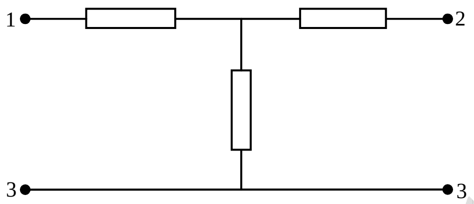


$$I_L = \frac{G_L}{G_L+G_N} I_N = I\,\frac{G_3}{G_1+G_3}\,\frac{G_L}{G_L+G_N} = I\,\frac{G_3}{G_1+G_3}\,\frac{G_L}{G_L+G_2+\frac{G_1G_3}{G_1+G_3}}$$

$$I_L = \frac{G_3 G_L \;\; I}{G_1G_2+G_2G_3+G_1G_3+G_L(G_1+G_3)}$$

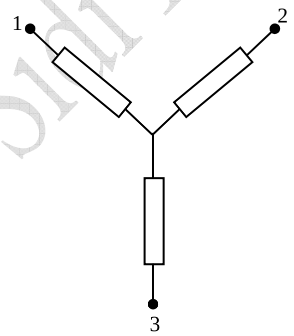
VI.4. Transformations T $\leftrightarrow$ π, Etoile $\leftrightarrow$ Triangle

a. <u>Réseau en T, π (étoile, triangle)</u>

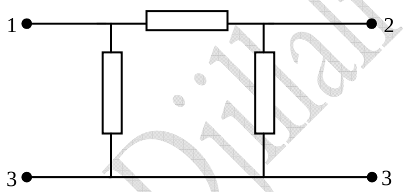


Réseau en T

$\equiv$

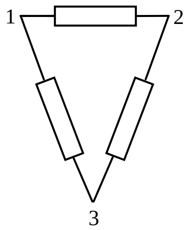


Réseau en étoile ou en Y



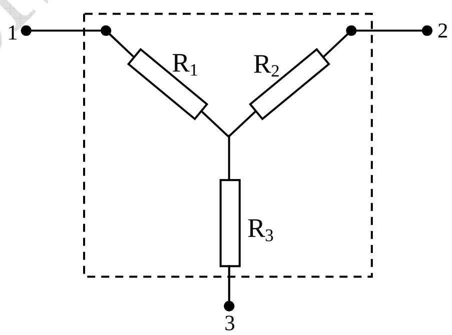
Réseau en π

$\equiv$

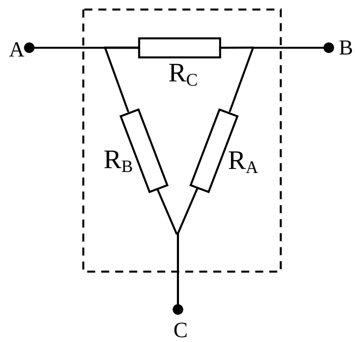


Réseau en triangle ou en Δ

b. <u>Equivalence</u>



$\equiv$



Les conditions d'équivalence sont :

Résistance entre 1 et 2 = Résistance entre A et B

Résistance entre 2 et 3 = Résistance entre B et C

Résistance entre 3 et 1 = Résistance entre C et A

On obtient :

$$R_1 + R_2 = (R_A + R_B) \,//\, R_C = \frac{R_A R_C + R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} \qquad (1)$$

$$R_2 + R_3 = (R_B + R_C) \,//\, R_A = \frac{R_A R_B + R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} \qquad (2)$$

$$R_1 + R_3 = (R_A + R_C) \,//\, R_B = \frac{R_A R_B + R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} \qquad (3)$$

c. <u>Transformation en de π en T</u>

En faisant (1) + (2) + (3), on aura :

$$2(R_1 + R_2 + R_3) = \frac{2(R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C)}{R_A + R_B + R_C}$$

$$(R_1 + R_2 + R_3) = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} \qquad (4)$$

(4)-(2) $\Longrightarrow$ $R_1 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$ (5)

(4)-(3) $\Longrightarrow$ $R_2 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}$ (6)

(4)-(1) $\Longrightarrow$ $R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$ (7)

d. <u>Transformation en de T en π</u>

A partir des relations (5), (6) et (7) on peut avoir,

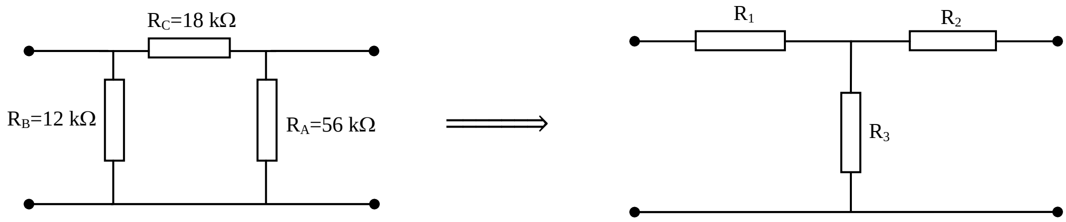
$$R_A = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

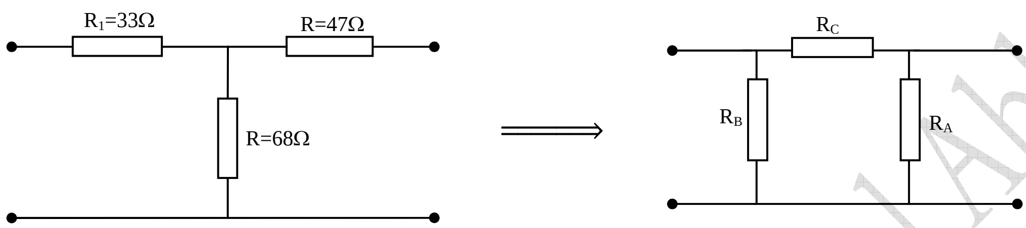
$$R_C = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

<u>Exemples</u>

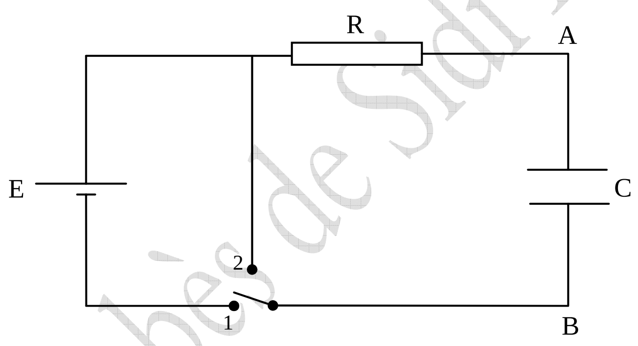
a. Transformer le réseau en π en réseau en T



b. Transformer le réseau en T en son équivalent en π



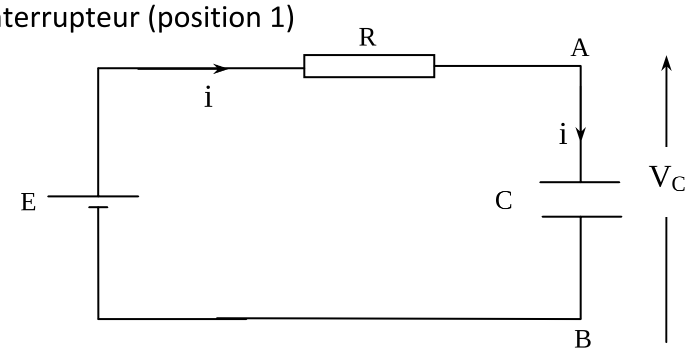
VII. Charge et décharge d'un condensateur



VIII. 1. Charge d'un condensateur

Initialement, on suppose que la ddp aux bornes du condensateur est nulle de même que sa charge

- A t=0, on ferme l'interrupteur (position 1)



Appliquons au circuit la loi d'ohm à un instant quelconque :

$E = R\,i + V_C$

Avec $i = \frac{dq}{dt}$ et $V_C = \frac{q}{C}$

Donc

$$E = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à variables séparées qu'on peut résoudre en tenant compte des conditions initiales :

t=0 q= 0

t=∞ $q=Q_0=CE$

solution :

$$E = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R}\left(E - \frac{q}{c}\right) = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{CE - q}{RC} = \frac{dq}{dt}$$

Il vient $\frac{dq}{CE-q} = \frac{dt}{RC} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{q-CE} = -\frac{dt}{RC}$

Donc

$$\ln(q - CE) = -\frac{t}{RC} + k$$

Or à t=0, q=0

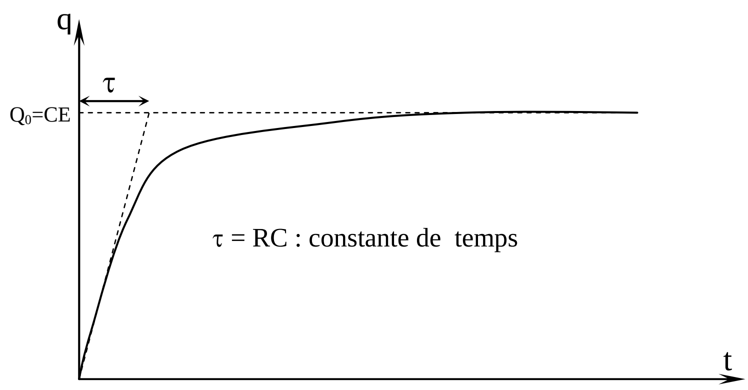
$$\ln(-CE) = k$$

$$\Rightarrow \quad \ln(q - CE) = -\frac{t}{RC} + \ln(-CE)$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{q - CE}{-CE}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{CE - q}{CE} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

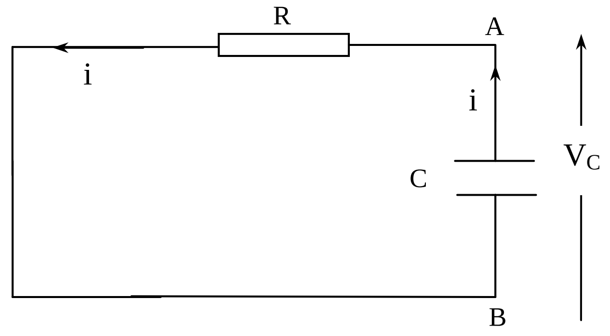
$$\Longrightarrow \quad q = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



Courbe de la charge du condensateur

VII. 2. Décharge d'un condensateur

Interrupteur en position 2



On considère qu'à t=0, $V_C=V_0=E$ et $Q_0=CV_0=CE$

$R\,i + V_c=0$

$\Rightarrow \quad R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{q}=-\frac{dt}{RC} \quad \Rightarrow \ln q=-\frac{t}{RC}+constante$

Il vient

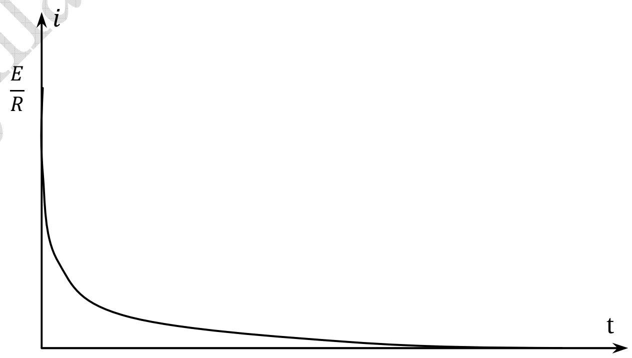
$q=k\ e^{-\frac{t}{RC}}$ k : constante

Or à t=0 $q=Q_0=CV_0=CE$,

On obtient donc

$$q=CV_0\,e^{-\frac{t}{RC}}=CE\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

d'où $i=-\frac{dq}{dt}=\frac{CV_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad i=\frac{dq}{dt}=\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$

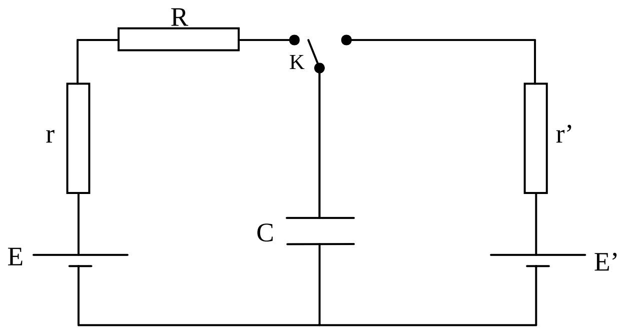


VIII. Application

Exercice

Soit le circuit la figure ci-dessous. L'interrupteur K est initialement en position 0 et le condensateur C initialement déchargé.

On donne E=6 V, E'=3 V, R=r=r'=500 Ω et C=1μF.



1. A l'instant t=0, on met l'interrupteur K en position 1.
   a. Quelle est l'équation différentielle donnant la ddp V_C aux bornes du condensateur.
   b. Quelle est la constante de temps τ du circuit ?
   c. Donner l'expression de V_C en fonction du temps.
   d. Calculer V_C pour $t=0$, τ, 2τ, 3τ, 4τ et 5τ.
   e. Représenter l'allure de la tension $V_C(t)$.
2. En réalité, à l'instant $t_1=2\tau$, on met l'interrupteur K en position 2.
   a. Quelle est l'équation différentielle donnant la ddp V_C aux bornes du condensateur ?
   b. Quelle est la nouvelle constante de temps τ' du circuit ?
   c. Donner l'expression de V_C en fonction du temps.
   d. Calculer V_C pour $(t-t_1)=0$, τ', $2\tau'$, $3\tau'$, $4\tau'$ et $5\,\tau'$.
   e. Représenter la variation de V_C au cours du temps sur le même graphe qu'en 1-e.
   f. Dans quel sens circule le courant ?