Chapitre 4

Travail et puissance

4.1 Travail d'une force

4.1.1 Définition

En physique, le travail est une notion liée aux *forces* et aux *déplacements* de leurs points d'application.

Considérons une force constante $\vec{F}$ dont le point d'application subit un déplacement rectiligne de A vers B. Nous allons, tout d'abord, définir le travail dans deux cas particuliers.

- Le travail W d'une force $\vec{F}$ orientée dans la direction et dans le sens du déplacement (figure 4.1) est défini par l'expression :

$$W(\vec{F}) = F\,AB.$$

L'unité du travail est le *joule* (J) : $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m}$.

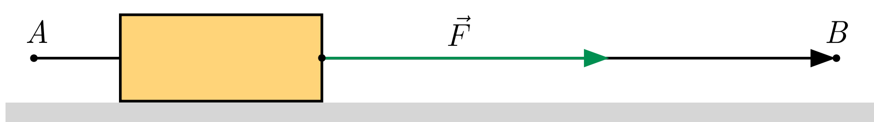


FIGURE 4.1 – Force parallèle au déplacement

- Une force perpendiculaire à la direction du déplacement ne travaille pas.

Lorsque la force $\vec{F}$ n'est ni parallèle, ni perpendiculaire au déplacement, il faut la décomposer en une composante tangentielle $\vec{F_T}$ et une composante normale $\vec{F_N}$ au déplacement (figure 4.2).

D'après la définition ci-dessus, ce n'est que la composante $\vec{F_T}$ qui travaille. Le travail de la force $\vec{F}$ lors du déplacement de A vers B est :

$$W_{AB}(\vec{F}) = F_T\,AB = F\,AB\,\cos\alpha.$$

L'expression $F\,AB\,\cos\alpha$ représente le produit scalaire des vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$.

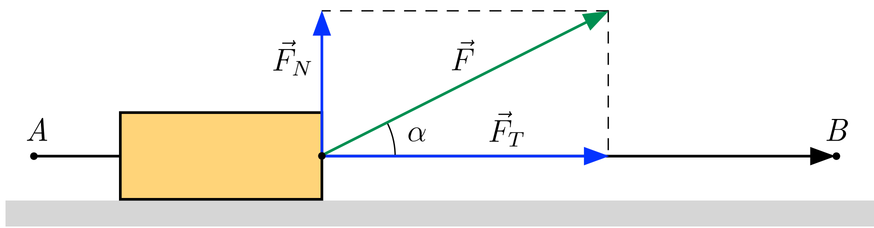


FIGURE 4.2 – Décomposition d'une force

Définition *Le travail d'une force constante $\vec{F}$ pour un déplacement rectiligne $\overrightarrow{AB}$ de son point d'application est égal au produit scalaire des vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$:*

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F\,AB\,\cos\alpha} \tag{4.1}$$

où α est l'angle formé par les deux vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Remarque : on retrouve bien la définition du travail dans le cas particulier $\alpha = 0$.

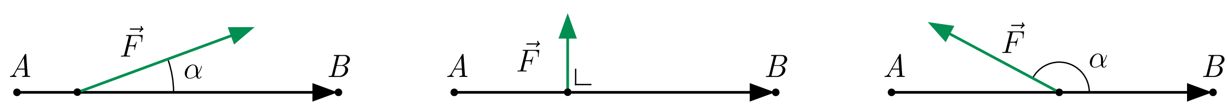
4.1.2 Le travail est une grandeur algébrique

Selon la valeur de l'angle α, avec $0 \leq \alpha \leq 180°$, le travail d'une force est positif, négatif ou nul :

$\alpha < 90°$: $\cos\alpha > 0 \Longrightarrow W_{AB}(\vec{F}) > 0$ (figure 4.3a).
La force $\vec{F}$ favorise le mouvement, son travail est dit *moteur*.

$\alpha = 90°$: $\cos\alpha = 0 \Longrightarrow W_{AB}(\vec{F}) = 0$ (figure 4.3b).
La force $\vec{F}$ ne travaille pas.

$\alpha > 90°$: $\cos\alpha < 0 \Longrightarrow W_{AB}(\vec{F}) < 0$ (figure 4.3c).
La force $\vec{F}$ s'oppose au mouvement, son travail est dit *résistant*.



(a) travail moteur (b) travail nul (c) travail résistant

FIGURE 4.3 – Signe du travail d'une force

Exemple 4.1 Un solide descend un plan incliné de longueur d. Il est soumis à trois forces : son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ du plan incliné et la force de frottement $\vec{f}$ (figure 4.4).

Le travail du poids est moteur, le travail de la réaction est nul et le travail de la force de frottement est résistant :

$$W(\vec{f}) = f\,d\,\cos 180° = -f\,d.$$

Cette expression est valable pour toute force de frottement constante en intensité, indépendamment de la trajectoire.

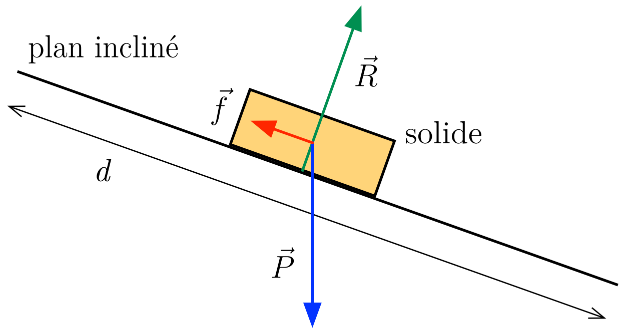


FIGURE 4.4 – Descente sur un plan incliné

Exemple 4.2 Un solide de masse m peut glisser sans frottement sur une piste horizontale. Le solide est accéléré du repos à la vitesse v sous l'action d'une force constante $\vec{F}$ (figure 4.5).

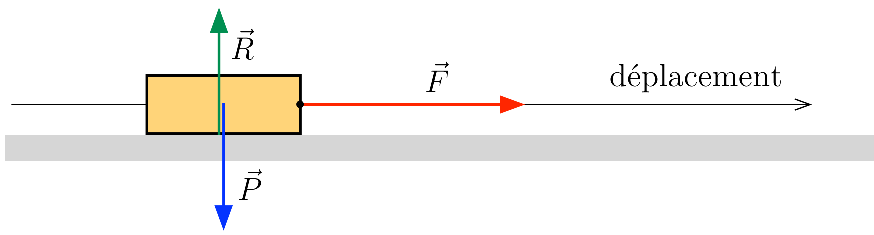


FIGURE 4.5 – Accélération sur une piste horizontale

Les forces $\vec{P}$ et $\vec{R}$ ne travaillent pas. Le travail de la force $\vec{F}$ est moteur et s'écrit :

$$W(\vec{F}) = F\,d$$

où d est la distance parcourue pour atteindre la vitesse v. Comme la force est constante, le mouvement est rectiligne et uniformément accéléré :

$$d = \tfrac{1}{2}\,a\,t^2.$$

L'expression du travail devient :

$$W(\vec{F}) = F\,\tfrac{1}{2}\,a\,t^2.$$

L'accélération et la force sont reliées par la deuxième loi de Newton :

$$F = m\,a$$

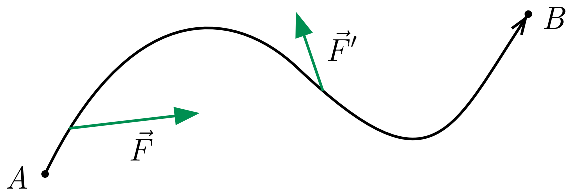
d'où :

$$W(\vec{F}) = m\,a\,\tfrac{1}{2}\,a\,t^2 = \tfrac{1}{2}\,m\,(a\,t)^2$$

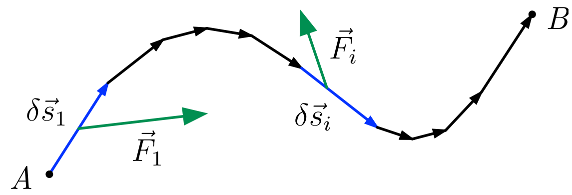
et avec $v = a\,t$:

$$\boxed{W(\vec{F}) = \tfrac{1}{2}\,m\,v^2} \tag{4.2}$$

Le travail ne dépend que de la valeur finale de la vitesse et de la masse du solide. L'expression reste valable même si la force n'est pas constante.



(a) Trajectoire réelle



(b) Déplacements élémentaires

FIGURE 4.6 – Force variable et trajectoire curviligne

4.1.3 Force variable sur une trajectoire curviligne

Rappelons que la définition (4.1) du travail ne s'applique qu'au cas d'une force constante dont le point d'application se déplace sur une trajectoire rectiligne.

Considérons le cas le plus général d'une force qui varie le long d'une trajectoire curviligne (figure 4.6a). Pour calculer le travail de la force entre A et B, nous divisons la trajectoire en « très petits » *déplacements élémentaires* rectilignes $\delta\vec{s}_i$ (figure 4.6b) de sorte que la force puisse être assimilée à une force constante $\vec{F}_i$ le long d'un tel déplacement.

L'expression du *travail élémentaire* δW_i effectué par la force sur le i^{e} déplacement élémentaire s'écrit :

$$\delta W_i = \vec{F}_i \cdot \delta\vec{s}_i.$$

Le travail total est la somme des travaux élémentaires :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \sum_i \delta W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{s}_i. \tag{4.3}$$

Remarques :

- Le choix des déplacements élémentaires dépend de la variation de la force et de la courbure de la trajectoire.
- Le nombre de termes dans la somme est d'autant plus grand que la longueur moyenne des déplacements élémentaires est petite. Dans la limite où cette longueur tend vers zéro, la somme est remplacée par une intégrale.

4.1.4 Force constante sur une trajectoire curviligne

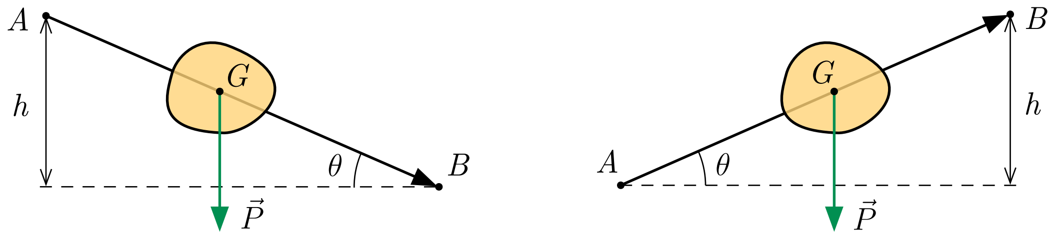
Travail du poids

Considérons le travail du poids d'un solide lors du déplacement rectiligne de son centre de gravité G de A vers B (figure 4.7).

Comme le poids est une force constante et que le déplacement est rectiligne, nous pouvons appliquer la définition (4.1) du travail.

Lorsque le centre de gravité du solide descend (figure 4.7a), le travail du poids est moteur :

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{P}) &= P\,AB\,\cos(90^\circ - \theta) = P\,AB\,\sin\theta \\ &= P\,h. \end{aligned}$$



(a) travail moteur (b) travail résistant

FIGURE 4.7 – Travail du poids sur un plan incliné

Le travail est résistant lorsque le centre de gravité monte (figure 4.7b) :

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{P}) &= P\,AB\,\cos(90^\circ + \theta) = -P\,AB\,\sin\theta \\ &= -P\,h. \end{aligned}$$

Dans le cas général d'un déplacement curviligne du centre de gravité, nous divisons la trajectoire en N déplacements élémentaires (figure 4.8). En utilisant le repère de la figure, le travail du poids sur le ie déplacement élémentaire s'écrit :

$$\delta W_i = P\,h_i = P\,(z_i - z_{i+1}).$$

On vérifie que le travail élémentaire est moteur si l'altitude z diminue et qu'il est résistant si z augmente.

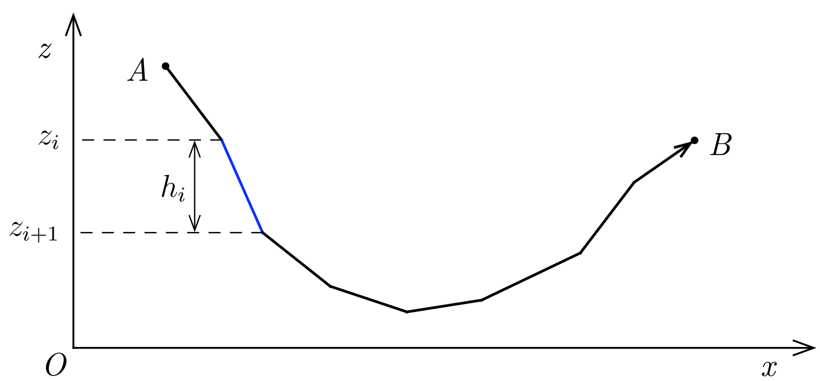


FIGURE 4.8 – Travail du poids sur une trajectoire curviligne

Le travail total du poids entre A et B est alors, avec $z_0 = z_A$ et $z_N = z_B$:

$$W_{AB}(\vec{P}) = \sum_{i=0}^{N-1} \delta W_i = \sum_{i=0}^{N-1} P\,(z_i - z_{i+1}) = P\,\sum_{i=0}^{N-1}(z_i - z_{i+1})$$

En écrivant la somme de façon explicite :

$$W_{AB}(\vec{P}) = P\,(z_0 - z_1 + z_1 - z_2 + z_2 \cdots - z_{N-1} + z_{N-1} - z_N)$$

et finalement :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{P}) = P\,(z_A - z_B)} \tag{4.4}$$

Une trajectoire différente joignant les mêmes points A et B conduit au même résultat.

Travail du poids *Lorsque le centre de gravité G d'un solide se déplace d'un point A d'altitude z_A à un point B d'altitude z_B, le travail du poids de ce solide est indépendant de la trajectoire suivie par G entre A et B. Il est égal au produit de l'intensité P de ce poids par la diminution d'altitude $z_A - z_B$.*

On aboutit au même résultat en utilisant l'expression (4.3) et la distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition vectorielle :

$$W_{AB}(\vec{P}) = \sum_i \vec{P} \cdot \delta\vec{s}_i = \vec{P} \cdot \sum_i \delta\vec{s}_i.$$

La somme vectorielle des déplacements élémentaires $\delta\vec{s}_i$ est égale au vecteur déplacement résultant $\overrightarrow{AB}$:

$$\boxed{W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB}} \tag{4.5}$$

Travail du poids *Lorsque le centre de gravité G d'un solide se déplace d'un point A à un point B, le travail du poids de ce solide est indépendant de la trajectoire suivie par G entre A et B. Il est égal au produit scalaire du poids $\vec{P}$ et du déplacement $\overrightarrow{AB}$.*

Généralisation

Le raisonnement qui a conduit à la relation (4.5) reste valable pour toute force constante.

Le travail d'une force constante $\vec{F}$ dont le point d'application M passe d'un point A à un point B ne dépend pas de la trajectoire suivie par M entre A et B. Il est donné par l'expression :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

4.1.5 Force variable sur une trajectoire rectiligne

Méthode de l'aire

Nous allons nous limiter au cas d'une force parallèle au déplacement. Prenons x comme abscisse de son point d'application sur l'axe du déplacement. La seule coordonnée non nulle de la force est F_x. Le travail est :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \sum F_x \, \delta x.$$

Le travail peut être évalué l'aide de la méthode de « l'aire ». Représentons F_x en fonction de x (figure 4.9).

L'aire du rectangle élémentaire de largeur δx et de longueur F_x est $F_x \, \delta x$. Cette aire est égale au travail de la force sur le déplacement élémentaire δx. Le travail total entre A et B, avec $x_A < x_B$, est égal à l'aire de la surface colorée entre x_A et x_B.

Le calcul du travail revient donc à déterminer l'aire de la surface délimité par la courbe représentant la force en fonction de la position de son point d'application.

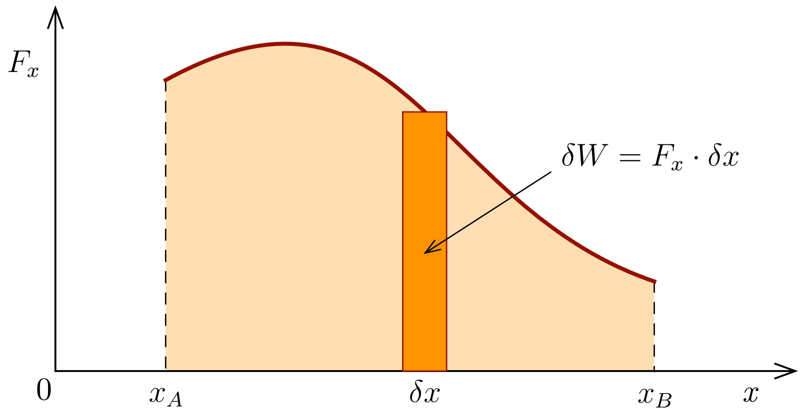


FIGURE 4.9 – Représentation de la force en fonction de la position

Travail tenseur

Considérons un ressort de raideur k sur lequel on exerce à son extrémité libre une force $\vec{F}$. Le point d'application de cette force se déplace sur l'axe x dont l'origine correspond au ressort détendu (figure 4.10). La seule coordonnée non nulle de la force est F_x, avec :

$$F_x = k\,x.$$

Elle est positive si le ressort est allongé (figure 4.11).

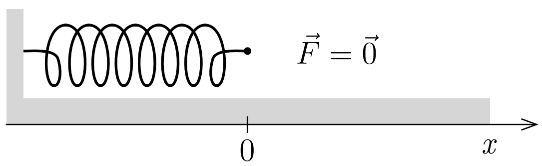


FIGURE 4.10 – Ressort détendu avec $F_x = 0$

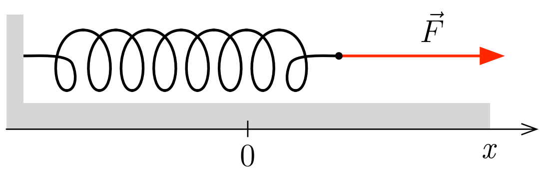


FIGURE 4.11 – Ressort allongé avec $F_x > 0$

Comme l'intensité de la force n'est pas constante, nous allons utiliser la méthode de « l'aire » pour calculer son travail. D'après la loi de Hooke, la représentation de F_x en fonction de x donne une droite passant par l'origine (figure 4.12).

Lorsque le point d'application de la force se déplace de A en B, avec $x_A < x_B$, le travail qu'elle effectue est égal à l'aire du trapèze délimité par la droite entre x_A et x_B :

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{F}) &= \tfrac{1}{2}\,(F_{xA} + F_{xB})\,(x_B - x_A) \\ &= \tfrac{1}{2}\,(k\,x_A + k\,x_B)\,(x_B - x_A) = \tfrac{1}{2}\,k\,(x_A + x_B)\,(x_B - x_A). \end{aligned}$$

Le produit de la somme et de la différence est égale à la différence de deux carrés :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \tfrac{1}{2}\,k\,({x_B}^2 - {x_A}^2)} \tag{4.6}$$

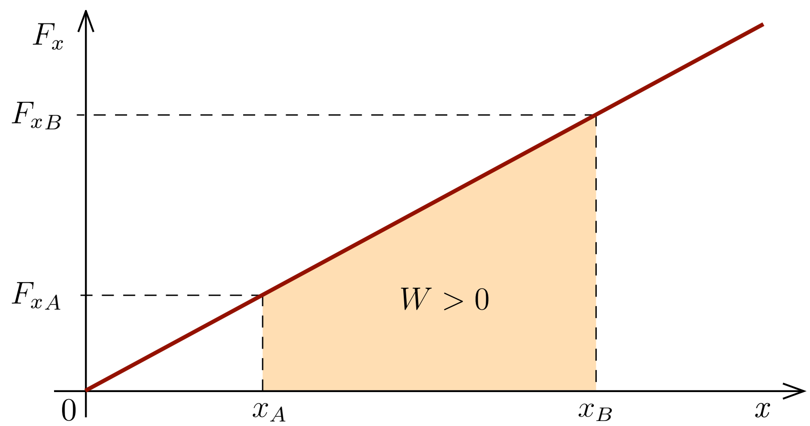


FIGURE 4.12 – Représentation de la force en fonction de l'allongement

Le travail de la force $\vec{F}$ est positif. L'expression reste valable lorsque le ressort est comprimé. Pour allonger de x un ressort initialement détendu, l'expression du travail devient :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \tfrac{1}{2}\,k\,x^2.$$

4.1.6 Forces conservatives

Nous avons montré que le travail d'une force constante est indépendant du trajet suivi. Parmi les forces variables, certaines présentent également cette propriété.

Définition *Une force est dite conservative lorsque le travail de cette force entre deux points A et B est indépendant de la trajectoire suivie par son point d'application pour passer de A à B. Dans le cas contraire, la force est dite non conservative.*

Le travail d'une force conservative sur une trajectoire fermée est nul. En effet, le travail étant indépendant de la trajectoire, il est égal au travail pour un déplacement nul.

Exemples :

- Le poids et la tension d'un ressort sont des forces conservatives.
- Toute force de frottement est non conservative.

4.2 Puissance d'une force

4.2.1 Puissance moyenne d'une force

Définition *La puissance moyenne P_m d'une force est le quotient du travail qu'elle effectue entre les points A et B par la durée Δt correspondante :*

$$\boxed{P_\mathrm{m}(\vec{F}) = \frac{W_{AB}(\vec{F})}{\Delta t}}$$

L'unité SI de la puissance est le *watt* (W) : $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J/s}$.

4.2.2 Puissance instantanée d'une force

Lorsque la force varie au cours du déplacement ou quand le mouvement de son point d'application n'est pas rectiligne et uniforme, il est utile de considérer la puissance instantanée à une certaine date t.

Exemple 4.3 La puissance instantanée du moteur d'une voiture varie au cours d'un déplacement. Elle dépend du nombre de tours du moteur et de la position de l'accélérateur.

Soit δW le travail élémentaire effectué par la force $\vec{F}$ entre les dates t et $t + \delta t$. La puissance instantanée à la date t est :

$$P = \frac{\delta W}{\delta t}.$$

Avec $\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{s}$ on a :

$$P = \frac{\vec{F} \cdot \delta\vec{s}}{\delta t} = \vec{F} \cdot \frac{\delta\vec{s}}{\delta t}.$$

L'expression $\dfrac{\delta\vec{s}}{\delta t}$ est la vitesse instantanée $\vec{v}$ du point d'application de la force $\vec{F}$ à la date considérée.

Puissance instantanée *Lorsque le point d'application d'une force $\vec{F}$ se déplace à la vitesse $\vec{v}$, la puissance instantanée P de cette force est égale au produit scalaire des vecteurs force $\vec{F}$ et vitesse instantanée $\vec{v}$:*

$$\boxed{P(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}} \tag{4.7}$$

Le *cheval-vapeur* (ch) est une ancienne unité de puissance introduite par James Watt pour mesurer la puissance de ses moteurs à vapeur. Elle correspond à la puissance fournie par un cheval qui soulève une charge de masse 75 kg à la vitesse 1 m/s. L'application de l'expression (4.7) donne $1\,\mathrm{ch} = 736\,\mathrm{W}$.

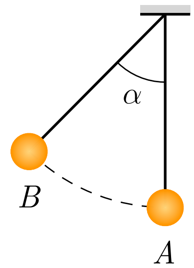
4.3 Exercices

Exercice 4.1 Montrer que les expressions (4.4) et (4.5) pour le travail du poids sont équivalentes.

Exercice 4.2 Une automobile de masse 1100 kg roule à vitesse constante sur un tronçon rectiligne de 2 km, puis monte une pente de 8 % pendant 1500 m. On supposera que les forces de frottement qui s'opposent au déplacement gardent une valeur constante de 1850 N tout au long du trajet.

1. Calculez le travail du poids sur le trajet complet.
2. Calculez le travail de la force de frottement sur le trajet complet.

Exercice 4.3 Un pendule simple est constitué d'une boule de masse 50 g accrochée au bout d'un fil de longueur 30 cm, de masse négligeable. La boule reçoit en A une impulsion qui la fait remonter jusqu'en B, de telle manière que le pendule fait alors un angle $\alpha = 30°$ avec la verticale.



1. Calculez le travail du poids de la boule entre A et B.
2. Quel est le travail entre A et B de la force exercée par le fil sur la boule ? Motivez !
3. Quel serait le travail du poids de la boule, si le pendule faisait un tour complet ? Expliquez !

Exercice 4.4 Une boule de flipper de masse 150 g est lancée à l'aide d'un ressort de raideur 60 N/m, comprimé de 10 cm. La boule quitte le ressort quand la compression s'annule.

1. Calculer le travail effectué par la tension du ressort lors du lancement.
2. En déduire la vitesse de la boule après le lancement.

Exercice 4.5 Calculer la puissance moyenne fournie par une machine qui soulève une caisse de 500 kg à une hauteur de 20 m en 60 s.

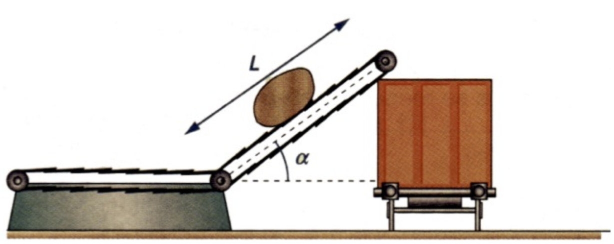
Exercice 4.6 Une voiture de 1000 kg monte une pente de 3 % à 20 m/s. Trouver la puissance nécessaire, sans tenir compte du frottement.

Exercice 4.7 De l'eau coule d'un réservoir avec un débit de 3000 kg/min vers une turbine qui se trouve 120 m plus bas. Si le rendement de la turbine est de 80 %, calculer la puissance fournie par la turbine.

Exercice 4.8 Une voiture de masse 1,5 t roule à la vitesse constante de 108 km/h sur un sol horizontal.

1. Faites le bilan des forces qu'elle subit et précisez quelles forces font un travail moteur, lesquelles un travail résistant, lesquelles un travail nul.
2. La force de frottement vaut 1800 N. Calculez le travail du poids et de la force motrice sur un trajet de 10 km.
3. Calculez la puissance de la voiture.
4. Reprenez l'exercice en supposant que la voiture monte un col avec une pente de 12 %.

Exercice 4.9 Un tapis roulant est utilisé pour charger du minerai dans un wagon. La longueur du tapis est $L = 22{,}5$ m et son inclinaison avec l'horizontale est $\alpha = 35°$.



1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur un bloc de minerai de masse $m = 2\,\mathrm{kg}$ qui est entraîné à vitesse constante sur le tapis roulant.
2. Calculer la valeur de la force de frottement $\vec{f}$ exercée par le tapis roulant sur le bloc de minerai.
3. Calculer le travail de cette force de frottement $\vec{f}$ lorsque le bloc parcourt toute la longueur du tapis roulant.
4. Quelle est la puissance des forces exercées par le tapis sur le minerai transporté si la vitesse de chargement du wagon est de $1{,}55\,\mathrm{t}$ par minute ?

Exercice 4.10 Lorsqu'une voiture roule à vitesse constante sur une route horizontale, le travail fourni par la force motrice sert uniquement à vaincre les frottements. Pour des vitesses assez élevées, le frottement est presque entièrement aérodynamique. La force de frottement de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse.

1. Comparez les valeurs de la puissance motrice aux vitesses $100\,\mathrm{km/h}$ et $130\,\mathrm{km/h}$.
2. Calculer la consommation d'essence à $130\,\mathrm{km/h}$ sachant qu'elle est de $6\,\mathrm{l}$ pour $100\,\mathrm{km}$ à $100\,\mathrm{km/h}$.