# PUISSANCE MOYENNE EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

## I. PUISSANCE MOYENNE EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

### I.1 Rappels

En **convention récepteur**, la **puissance instantanée** reçue par un dipôle s'écrit :

$$\boxed{p(t)=u(t)\times i(t)}$$

À ce stade du raisonnement, il faut raisonner sur les grandeurs instantanées réelles puisqu'on a une opération mathématique non linéaire.

### I.2 Puissance moyenne, puissance exprimée en dB

On prend $u$ et $i$ de la forme : $\begin{cases} u(t)=U_m\cos(\omega t) \\ i(t)=I_m\cos(\omega t-\varphi) \end{cases}$

$\varphi$ représente la phase de $u$ par rapport à $i$ puisque $\arg \underline{U}-\arg \underline{I}=\varphi$.

La puissance moyenne s'obtient en calculant l'intégrale suivante :

$P_{moy}=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t$ que l'on écrit aussi $P_{moy}=\langle p(t)\rangle$

$$P_{moy}=\frac{1}{T}\int_0^T U_m I_m\cos(\omega t)\cos(\omega t-\varphi)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T U_m I_m\frac{1}{2}\big(\cos(\varphi)+\cos(2\omega t-\varphi)\big)\,\mathrm{d}t$$

$P_{moy}=\dfrac{U_m I_m}{2T}\left[\cos(\varphi)t+\dfrac{\sin(2\omega t-\varphi)}{2\omega}\right]_0^T$. On obtient donc :

$$P_{moy}=\frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi)$$

**Unités : watt (symbole W)**

**cos($\varphi$) : facteur de puissance ; $U_m$ et $I_m$ amplitudes de *u* et de *i*.**

**$\varphi$ est la phase[1] de *u* par rapport à *i*.**

**On définit la puissance exprimée en dB :** $P_{dB}=10\log\left(\dfrac{P_{moy}}{P_0}\right)$ **avec $P_0$ = 1 W.**

*Remarque : Le coefficient $P_0$ est indispensable pour l'homogénéité de la formule…*

### I.3 Tension efficace, intensité efficace

*a) Valeur moyenne du carré du cosinus*

On a très souvent besoin de calculer la valeur moyenne de la fonction $\cos^2(\omega t+\psi)$ sur une période *T*.

$$\langle\cos^2(\omega t+\psi)\rangle=\frac{1}{T}\int_{t=0}^T\cos^2(\omega t+\psi)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{t=0}^T\frac{1+\cos\big(2(\omega t+\psi)\big)}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\frac{T}{2}$$

$\langle\cos^2(\omega t+\psi)\rangle=\dfrac{1}{2}$. **On a aussi** $\langle\cos^2(\omega t)\rangle=\dfrac{1}{2}$ **et** $\langle\sin^2(\omega t)\rangle=\dfrac{1}{2}$

[1] Remarque : le cosinus étant une fonction paire, la relation est encore valable si on appelle $\varphi$ la phase de *i* par rapport à *u*.

*b) Définition de la valeur efficace*

On définit l'intensité efficace et la tension efficace par :

$$I = I_{eff} = \sqrt{\langle i^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

$$U = U_{eff} = \sqrt{\langle u^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

On note l'intensité efficace $I_{eff}$ ou $I$.

En régime sinusoïdal forcé, on a : $U^2 = \left\langle U_m{}^2 \cos^2(\omega t)\right\rangle = U_m^2 \frac{1}{2}$ d'après le résultat précédent.

**En régime sinusoïdal forcé, $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ et $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$.**

**Attention : ce résultat est faux si le signal n'est pas sinusoïdal forcé (voir TP)**

## I.4 Puissance apparente

- On a une autre expression de la puissance moyenne : $P_{moy} = U_{eff}\, I_{eff} \cos\varphi = UI\cos\varphi$. $P_{moy}$ est aussi appelé puissance active.
- On définit la puissance apparente : $P_{app} = U_{eff}\, I_{eff} = U\,I$. **Attention** : elle s'exprime[1] en **voltampères** (symbole **VA**).

*Compléments hors programme : On définit en électrotechnique la puissance réactive :* $P_{\text{réactive}} = UI\sin\varphi$ en VAR.

## I.5 Méthode générale pour trouver une relation entre les valeurs efficaces

**Pour trouver la relation entre $U$ et $I$, la méthode générale est d'utiliser les amplitudes complexes.**
En effet, les théorèmes généraux (loi des nœuds, loi des mailles, diviseur de tension, diviseur de courant, théorème de Millman…) sont valables avec les impédances complexes et les amplitudes complexes.
Après avoir trouvé une relation entre $\underline{U}$ et $\underline{I}$, il suffit de prendre le module et de diviser par $\sqrt{2}$ pour avoir la relation voulue entre $U$ et $I$.

*Remarque : on peut écrire* $\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2}$ *mais c'est faux d'écrire dans le cas général :* $\cancel{I = I_1 + I_2}$.

## I.6 Expressions très utiles de la puissance moyenne

*a) Expression en fonction de l'impédance complexe*

$P_{moy} = U\,I\cos\varphi$. On cherche à exprimer la puissance moyenne en fonction de $I$ et de l'impédance.

On a $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX = |\underline{Z}|\exp(j\varphi)$. On en déduit : $\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}} = \frac{R}{|\underline{Z}|}$.

On a donc : $P_{moy} = U\,I\frac{R}{|\underline{Z}|}$. Or $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$, donc $|\underline{I}| = \left|\frac{\underline{U}}{\underline{Z}}\right|$, soit en divisant par $\sqrt{2}$, $I = \frac{U}{|\underline{Z}|}$.

On a donc : $P_{moy} = RI^2 = \mathrm{Re}(\underline{Z})I_{eff}^2$.

**La puissance moyenne s'écrit aussi :**

$$P_{moy} = \mathrm{Re}(\underline{Z})I_{eff}^2$$

*b) Expression en fonction de l'admittance complexe*

$P_{moy} = U\,I\cos\varphi$. On cherche à exprimer la puissance moyenne en fonction de $U$ et de l'admittance.

On a $\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = G + jY = |\underline{Y}|\exp(-j\varphi)$. On en déduit : $\cos\varphi = \frac{G}{\sqrt{G^2+Y^2}} = \frac{G}{|\underline{Y}|}$.

On a donc : $P_{moy} = U\,I\frac{G}{|\underline{Y}|}$. Or $\underline{U} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}}$, d'où $U = \frac{I}{|\underline{Y}|}$.

On a donc : $P_{moy} = GU^2 = \mathrm{Re}(\underline{Y})U_{eff}^2$.

**La puissance moyenne s'écrit aussi :**

[1] Si l'énoncé indique : $P = 3$ VA, $P$ désigne la puissance apparente. Si l'énoncé indique : $P = 3$ W, $P$ désigne alors la puissance moyenne.

$$P_{moy} = \mathrm{Re}(\underline{Y})U_{eff}^2$$

### I.7 Puissance moyenne consommé par des dipôles dans un circuit

*a) Puissance moyenne consommée par des dipôles en série*

Soit le dipôle constitué de l'association série de $n$ dipôles. Ils sont donc parcourus par le même courant. L'impédance équivalente du dipôle vaut $\underline{Z} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z_k}$ . Soit $P_k$ la puissance moyenne reçue dans le dipôle $k$.

Or $P_{moy} = \mathrm{Re}(\underline{Z})I^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(\underline{Z_k})I^2 = \sum_{k=1}^{n} P_k$

*b) Puissance moyenne consommée par des dipôles en parallèle*

Soit le dipôle constitué de l'association parallèle de $n$ dipôles. Ils ont donc la même tension à leurs bornes. L'admittance équivalente du dipôle vaut $\underline{Y} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y_k}$ . Soit $P_k$ la puissance moyenne reçue dans le dipôle $k$.

Or $P_{moy} = \mathrm{Re}(\underline{Y})U^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(\underline{Y_k})U^2 = \sum_{k=1}^{n} P_k$

*c) Puissance moyenne consommée par des dipôles dans un circuit*

La puissance moyenne reçue par les dipôles dans un circuit est la somme des puissances moyenne reçue par chacun des dipôles constituant le circuit :

$$P_{moy} = \sum P_k \,.$$

Ce dernier résultat constitue le théorème de Boucherot.

## II. CALCUL DE PUISSANCES MOYENNES POUR QUELQUES DIPÔLES

### II.1 Résistance

$u$ et $i$ sont en phase, donc $\varphi = 0$. Avec les amplitudes complexes, on a : $\underline{U} = R\,\underline{I}$ . En prenant le module et en divisant par $\sqrt{2}$ , on obtient : $U = R\,I$ .

On a donc :

$$P_{moy} = U_{eff}\, I_{eff} = R\, I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{R} \,.$$

On a une expression identique à celle obtenue en courant continu.

*Interprétation physique de I : La résistance dissiperait la même puissance si elle était parcourue par un courant continu de valeur I.*

### II.2 Bobine

$\underline{U} = jL\omega \underline{I} \Rightarrow \arg \underline{U} = \frac{\pi}{2} + \arg \underline{I}$ . $u$ est donc en quadrature avance sur $i$ : $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$P_{moy} = 0$$

Ce résultat se généralise pour tout signal périodique de période $T$, en effet :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\mathrm{i}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}Li^2\right]_0^T = 0$$

**Une bobine ne consomme pas de puissance électrocinétique en moyenne.**

### II.3 Condensateur

$\underline{U} = \frac{1}{jC\omega}\underline{I} \Rightarrow \arg \underline{U} = -\frac{\pi}{2} + \arg \underline{I}$ . $u$ est donc en quadrature retard sur $i$ : $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$P_{moy} = 0$$

Ce résultat se généralise pour tout signal périodique de période $T$, en effet :

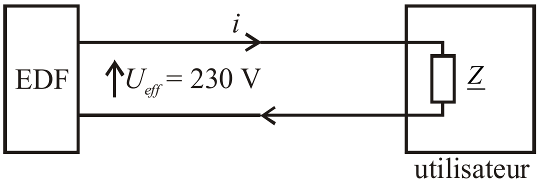
$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T u\,C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right) = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}Cu^2\right]_0^T = 0$$

**Un condensateur ne consomme pas de puissance électrocinétique en moyenne.**

## III. REMARQUES TRÈS GÉNÉRALES CONCERNANT L'UTILISATION DES COMPLEXES

**De façon générale, on n'utilise pas les complexes quand on a le produit de deux fonctions sinusoïdales : puissance en électrocinétique, intensité efficace, vecteur de Poynting (cours de deuxième année), puissance volumique dissipée par effet Joule…**

## IV. FACTEUR DE PUISSANCE ET PERTES EN LIGNE




On considère un particulier qui est alimenté par EDF avec une tension efficace de 230 V et une fréquence de 50 Hz.
On appelle $\underline{Z}$ l'impédance équivalente de l'installation. On a $\underline{Z} = R + jX$ avec $X > 0$ pour un particulier : effet inductif à cause des bobines des moteurs.
On appelle $\varphi = \arg \underline{Z}$ .
La puissance moyenne consommée par l'utilisateur est $P_{moy} = U_{eff}\, I_{eff} \cos\varphi$ .
L'utilisateur paye à EDF l'énergie consomme = $P_{moy}$ × durée d'utilisation de l'appareil.
L'intensité $i$ qui circule dans la ligne électrique de résistance $r$ entre le transformateur et l'utilisateur a pour valeur efficace :

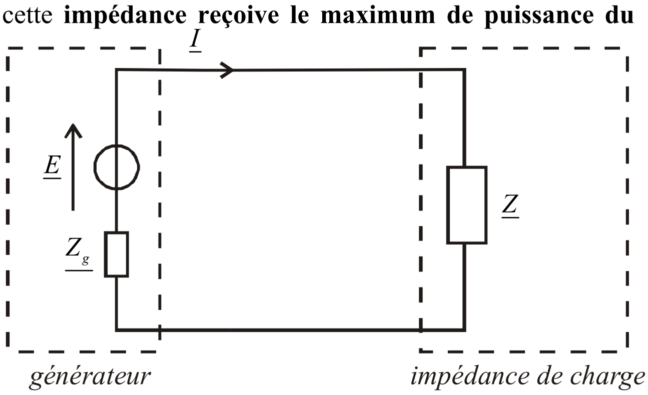
$$I_{eff} = \frac{P_{moy}}{U_{eff} \cos\varphi}$$

EDF cherche à réduire cette intensité $I_{eff}$. En effet, de la puissance est dissipée par effet Joule le long de la ligne électrique. La puissance $rI_{eff}^2$ est perdue et à la charge d'EDF.

- Diminuer $P_{moy}$. Un appareil donné a besoin d'une puissance pour fonctionner. Exemple : lave-linge 2 300 W. On ne peut pas réduire $P_{moy}$ à moins d'utiliser des appareils qui consomment moins.
- Augmenter $U_{eff}$. On utilise des lignes à haute tension (63 000 V), à très haute tension (400 000 V). Il y a donc de nombreux transformateurs permettant d'abaisser la tension jusqu'à 230 V ou 400 V pour le triphasé.
- **Augmenter $\cos\varphi$, c'est-à-dire augmenter le facteur de puissance. EDF pénalise les utilisateurs qui ont un $\cos\varphi$ trop petit (0,9 par exemple). On relève le facteur de puissance en plaçant à l'entrée de l'utilisateur un condensateur en parallèle. Celui-ci ne modifie pas la tension (car il est en parallèle) et ne modifie pas la puissance moyenne $P_{moy}$ (car un condensateur ne consomme pas de puissance en moyenne).**

## V. TRANSFERT MAXIMAL DE PUISSANCE D'UN GÉNÉRATEUR VERS UNE IMPÉDANCE DE CHARGE. NOTION DE CHARGE ADAPTÉE EN PUISSANCE.

On considère le circuit suivant où un générateur modélisé par le théorème de Thévenin (association série d'un générateur parfait et d'une impédance complexe dans le cas général) alimente une impédance de charge.
On cherche la condition sur l'impédance de charge pour que cette **impédance reçoive le maximum de puissance du générateur**. On dit que la **charge est adaptée** en puissance.



On pose $\underline{Z}_G = R_G + jX_G$ et $\underline{Z} = R + jX$

La puissance moyenne dans l'impédance de charge vaut donc : $P_{moy} = \mathrm{Re}(\underline{Z}) I^2 = RI^2$.

Pour calculer $I$, il faut utiliser l'amplitude complexe. Or $\underline{I} = \dfrac{\underline{E}}{\underline{Z}_G + \underline{Z}}$, en prenant le module au carré et en divisant par 2 pour avoir le carré de la valeur efficace de l'intensité , on obtient : $I^2 = \dfrac{E_m^2}{2} \dfrac{1}{\left[(R_G+R)^2 + (X_G+X)^2\right]}$

D'où $P_{moy} = \dfrac{E_m^2}{2} \dfrac{R}{\left[(R_G+R)^2 + (X_G+X)^2\right]}$. On cherche la condition sur $R$ et $X$ pour que $P_{moy}$ soit maximale. Il faut que les dérivées partielles de $P_{moy}$ par rapport à $R$ et $X$ soient simultanément nulles.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial P_{moy}}{\partial R}\right)_X = \dfrac{E_m^2}{2} \dfrac{\left[(R_G+R)^2 + (X_G+X)^2\right] - \left[2R(R_G+R)\right]}{\left[(R_G+R)^2 + (X_G+X)^2\right]^2} \\ \left(\dfrac{\partial P_{moy}}{\partial X}\right)_R = \dfrac{E_m^2}{2} \dfrac{R\left(-2(X_G+X)\right)}{\left[(R_G+R)^2 + (X_G+X)^2\right]^2} \end{cases}$$

$$\left(\dfrac{\partial P_{moy}}{\partial X}\right)_R = 0 \Rightarrow X = -X_G .$$

En remplaçant $Y$ par ($-Y_G$) dans la première dérivée partielle puisque les deux relations doivent être vérifiées simultanément, on a :

$$\left(\dfrac{\partial P_{moy}}{\partial R}\right)_X = \dfrac{E_m^2}{2} \dfrac{\left[(R_G+R)^2\right] - \left[2R(R_G+R)\right]}{(R_G+R)^4} = \dfrac{E_m^2}{2} \dfrac{(R_G+R)(R_G+R-2R)}{(X_G+X)^4} \Rightarrow R = R_G$$

**La charge est adaptée** en puissance pour : $\begin{cases} R = R_G \\ X = -X_G \end{cases} \Leftrightarrow \underline{Z} = \underline{Z}_G{}^*$.

La puissance moyenne vaut alors : $P_{moy} = \dfrac{R}{2} \dfrac{E_m{}^2}{4R_G^2} = \dfrac{E_m{}^2}{8R_G}$.

**La charge est adaptée en puissance si :**

$$\underline{Z} = \underline{Z}_G{}^*$$