Chapitre 5 La puissance en régime sinusoïdal forcé

5.1. Les grandeurs instantanée, moyenne et efficace

Les signaux étudiés dans ce chapitre sont des courants ou des tensions sinusoïdaux $i(t)$ et $u(t)$. Ce sont donc des signaux variables dans le temps mais de manière périodique ; la période est notée T. L'étude se limite au régime établi ; toute étude de régime transitoire est ici exclue.

5.1.1. La grandeur instantanée

La grandeur instantanée par exemple du courant $i(t)$ est la valeur de cette grandeur à un instant précis. Par exemple, le courant instantané à $t = t_1$ est tout simplement la valeur $i(t = t_1)$.

On peut faire l'analogie avec une photo qui serait faite à un instant t_1 précis : l'image obtenue est une représentation instantanée.

5.1.2. La valeur moyenne

5.1.2.1. Moyenne d'un signal quelconque

Considérons un phénomène discret : un ensemble de notes, par exemple, dont on veux calculer la moyenne.

Soit $N_1, N_2 ... N_n$ l'ensemble des n notes. La moyenne se calcule de la manière suivante :

$$N_{moy} = \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k}{n}.$$

Si l'on souhaite calculer la moyenne des températures d'une journée, la même procédure peut être suivie. La température est mesurée toutes les heures, et la somme des 24 mesures est divisée par 24. C'est la moyenne discrète. Toutefois, si l'on veux un calcul plus précis, les mesures de température pourraient être effectuées toutes les minutes, ou , idéalement, tous les dt (durée entre deux mesures successives) en faisant tendre dt vers 0 (le nombre de mesures tend alors vers l'infini). C'est la moyenne continue d'un signal (la température évolue continuellement et est définie à tout instant). Cette moyenne s'écrit alors :

$$T_{moy} = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{n}, \tag{1}$$

avec n le nombre de mesures. Le nombre de mesures est $n = (t_{fin} - t_{début})/dt$, t_{fin} étant la fin de la journée, et $t_{début}$ le début. Si l'on fait tendre le nombre de mesures vers l'infini, le calcul (1) devient alors :

$$T_{moy} = \int_{t_{début}}^{t_{fin}} \frac{T(t)}{(t_{fin} - t_{début})} dt.$$

L'intégrale est une somme discrète.

5.1.2.2. Moyenne d'un signal périodique

Le signal étudié ici est périodique. La moyenne de ce signal est défini comme étant la moyenne du signal sur une période T. Par exemple, la moyenne de la tension $u(t)$, notée $\langle u \rangle_t$ est :

$$\langle u \rangle_t = \int_0^T \frac{u(t)dt}{T}. \tag{2}$$

Ce calcul (2) de la valeur moyenne est valable non seulement pour un signal sinusoïdal, mais plus généralement **pour tout signal périodique**.

5.1.3. La valeur efficace

Soit une grandeur $u(t)$ fonction du temps. La valeur efficace de $u(t)$ est **par définition** :

$$u_{eff} = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle}.$$

Remarque 5.1 *Attention!!* $\sqrt{\langle u^2(t) \rangle_t} \neq \sqrt{\langle u(t) \rangle_t^2}$!!

$\sqrt{\langle u(t) \rangle^2}$ *est en réalité la valeur absolue de la moyenne, qui n'a rien à voir avec la valeur efficace.*

L'ordre des opérations a une grande importance. Par calculer une valeur efficace, il faut d'abord mettre le signal au carré, calculer ensuite la valeur moyenne, puis enfin reprendre la racine carrée du résultat.

Dans le cas présent, pour un signal purement sinusoïdal :

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

La valeur moyenne de ce signal est :

$$\begin{aligned} \langle u(t) \rangle_t &= \langle u_0 \cos(\omega t + \varphi) \rangle_t \\ &= u_0 \langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle_t \\ &= u_0 \int_0^T \cos(\omega t + \varphi) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal est nulle.

La valeur efficace du signal sinusoïdal est :

$$u_{eff} = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle},$$

avec

$$u^2(t) = u_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi),$$

donc

$$\begin{aligned} u^2(t)\rangle_t &= u_0^2 \ \cos^2(\omega t+\varphi)\rangle_t \\ &= u_0^2\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

soit finalement

$$u_{eff} = \sqrt{\langle u^2(t)\rangle} = \frac{u_0}{\sqrt{2}}.$$

La valeur efficace d'un signal sinusoïdal est donc sa valeur maximale u_0 (appelée aussi amplitude du signal) divisée par $\sqrt{2}$.

5.1.4. Valeurs moyennes et efficaces de divers signaux périodiques non sinusoïdaux

Ces exemples sont traités en classe (en cours et TD) :
- tension redressé monoalternance ;
- signal créneau ;
- signal triangulaire ;
- en TP : touche AC/DC.

5.2. La puissance

Les calculs de puissance effectués dans ce paragraphe sont limités aux signaux sinusoïdaux.

5.2.1. La puissance instantanée

Soit un dipôle D.

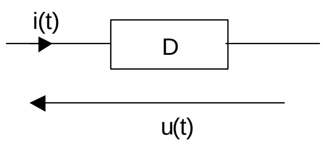

Fig.5.1.

La tension aux bornes de ce dipôle est :

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

et le courant circulant dans ce dipôle est :

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi_2)\,.$$

Si l'on prend des conventions récepteurs (u et i orientés comme sur la figure 5.1), la puissance instantanée reçue par le dipôle D est :

$$p(t) = u(t)i(t).$$

On a alors, pour un signal sinusoïdal :

$$p(t) = u_0 i_0 \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2) \,. \tag{3}$$

Remarque 5.2 *La définition $p(t) = u(t)i(t)$ est toujours valable, même pour des signaux non périodiques.*

Remarque 5.3 *Les conventions choisies pour orienter u et i sont les conventions récepteur. On peut alors dire que :*
- $p(t) > 0$ si le dipôle reçoit effectivement de l'énergie du reste du circuit ;
- $p(t) < 0$ si le dipôle donne de l'énergie au reste du circuit.

5.2.2. La puissance moyenne et le facteur de puissance

5.2.3. Expression de la puissance moyenne

Dans le cas d'un signal sinusoïdal, la puissance instantanée reçue est exprimée par la relation (3) :

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = u_0 i_0 \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= \frac{u_0 i_0}{2} \left[\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right]. \end{aligned}$$

Le premier terme $(u_0 i_0/2)\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)$ est la partie variable dans le temps de la puissance, et le second terme $(u_0 i_0/2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ la partie constante.

La puissance moyenne est :

$$\begin{aligned} P &= \frac{u_0 i_0}{2} \langle \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) \rangle_t + \frac{u_0 i_0}{2} \langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle_t \\ &= 0 \quad + \quad \frac{u_0 i_0}{2} \cos\varphi \end{aligned}$$

en notant $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ le déphasage entre la tension et le courant dans le dipôle.

La puissance moyenne est donc :

$$P = \frac{u_0 i_0}{2} \cos\varphi = u_{eff} i_{eff} \cos\varphi.$$

$\cos\varphi$ s'appelle le **facteur de puissance**.

5.2.3.1. Expressions du facteur de puissance

En notations complexes :

$$\underline{u} = u_0 \exp(j\varphi_1) \exp(j\omega t) \,;$$

$$\underline{i} = i_0 \exp(j\varphi_2) \exp(j\omega t) \,.$$

Sachant que

$$\underline{u} = \underline{Zi},$$

il vient

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= |\underline{Z}|\exp\left(j\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right)=|\underline{Z}|\exp\left(j\varphi\right)\\ &= R+jX\end{aligned}$$

donc le facteur de puissance s'écrit :

$$\cos\varphi=\frac{\mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right)}{|\underline{Z}|}=\frac{R}{|\underline{Z}|}=\frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}}.$$

En conclusion, si l'on veut augmenter le facteur de puissance, il faut que la partie imaginaire de l'impédance $|\underline{Z}|$ soit la plus faible possible : $\underline{Z}$ doit se rapprocher d'une simple résistance.

5.2.3.2. Autres expressions de la puissance moyenne

Nous avons démontré

$$P=\frac{u_0 i_0}{2}\cos\varphi=u_{eff}i_{eff}\cos\varphi.$$

Or $\underline{u}=\underline{Zi}$, donc en prenant la partie réelle de cette expression : $u_0=\underline{|Z|}i_0$ ou $u_{eff}=\underline{|Z|}i_{eff}$. La puissance peut alors s'écrire

$$\begin{aligned}P &= \left(|Z|\cos\varphi\right)i_{eff}^2\\ P &= Ri_{eff}^2=\frac{1}{2}Ri_0^2,\end{aligned}$$

avec $R=\mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right)$.

On peut montrer de même (démonstration donnée en classe) :

$$P=Gu_{eff}^2=\frac{1}{2}Gu_0^2,$$

avec $G=\mathrm{Re}\left(\underline{Y}\right)=\mathrm{Re}\left(1/\underline{Z}\right)$.

Remarque 5.4 *Attention ! $\underline{Y}=1/\underline{Z}$ mais $G\neq 1/R$! ! (Cf explication en classe)*

5.3. Applications

5.3.1. Relèvement d'un facteur de puissance

5.3.1.1. Nécessité de relever le facteur de puissance

Considérons un appareil électrique domestique à alimenter. Cet appareil consomme une puissance déterminée. Sachant que $P=u_{eff}i_{eff}\cos\varphi$, que P est imposée par l'appareil et que u_{eff} est fixée à $220V$ par EDF, le courant i_{eff} alimentant l'appareil est d'autant plus important que le $\cos\varphi$ est faible. Or le courant doit être transporté sur de grandes distances de l'usine de production au domicile. Les pertes dans cette ligne sont égales à Ri_{eff}^2, R étant la résistance de la ligne électrique. Ces pertes par effet Joule ne sont pas payées directement par le consommateur concerné. Or pour un même appareil et une même consommation domestique, le courant i_{eff} est plus ou moins important suivant le $\cos\varphi$ de la maison. Il est donc important, pour **limiter au maximum les pertes par effet Joule lors du transport, que le $\cos\varphi$ de la maison soit le plus grand possible**. EDF impose $\cos\varphi > 0,9$ sous peine d'amende. En pratique, pour limiter le $\cos\varphi$ d'un domicile, il suffit d'augmenter le $\cos\varphi$ de chaque appareil électrique, ce qui est imposé aux constructeurs.

5.3.1.2. Exemples de relèvement de facteur de puissance

Considérons un appareil électroménager d'impédance $|\underline{Z}|$. On peut écrire $\underline{Z} = R + jX$ avec R et X réels. R est nécessairement positif ; X peut être négatif (on dit alors que l'appareil est de type inductif) ou positif (l'appareil est de type capacitif).

Envisageons dans un premier temps un appareil de type inductif. Pour le rendre conforme aux normes, nous voulons augmenter son facteur de puissance. Pour cela , une capacité est introduite en parallèle ou en série de l'appareil électroménager.

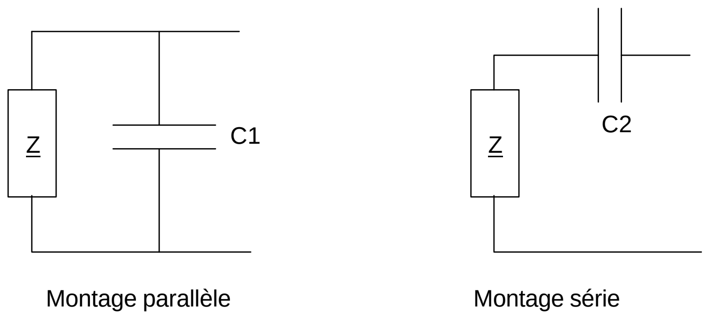

Fig.5.2. Pour relever le facteur de puissance, un condensateur est placé en série ou en parrallèle de l'appareil d'impédance Z

La question qui se pose ici est de savoir quelle valeur donner à C_1 ou C_2 pour obtenir un $\cos\varphi$ maximum (égal à 1).

Etudions le montage parallèle.

L'inductance $\underline{Z}'$ équivalente à $\underline{Z}//C_1$ est :

$$\begin{aligned}
Z' &= Z//C_1 = \frac{(R+jX)\frac{1}{jC_1\omega}}{R+jX+\frac{1}{jC_1\omega}} \\
&= \frac{R+jX}{jRC_1\omega - C_1X\omega + 1} = \frac{(R+jX)(1-C_1X\omega - jRC_1\omega)}{(1-C_1X\omega + jRC_1\omega)(1-C_1X\omega - jRC_1\omega)} \\
&= \frac{R + j\left(X - C_1X^2\omega - R^2C_1\omega\right)}{(1-C_1X\omega)^2 + (RC_1\omega)^2}.
\end{aligned}$$

$\cos\varphi = 1$ correspond à une partie imaginaire nulle :

$$X - C_1X^2\omega - R^2C_1\omega = 0$$

soit

$$C_1 = \frac{X}{\omega\,(R^2+X^2)} = \frac{X}{\omega\,|\underline{Z}|^2}.$$

Compte tenu du résultat obtenu, on peut remarquer que la valeur C_1 à donner dépend de la pulsation ω du signal, ce qui n'est pas très gênant car la pulsation du signal fourni par EDF est constante et connue.

Envisageons ensuite le montage série.

$$Z' = \frac{1}{jC_2\omega} + R + jX = R + j\left(X - \frac{1}{C_2\omega}\right).$$

$\cos\varphi = 1$ correspond à une partie imaginaire nulle :

$$C_2 = \frac{1}{\omega X}.$$

Les deux montages pourraient en pratique être utilisés. Toutefois, le montage parallèle est préféré au montage série. En effet, la totalité du courant électrique alimentant l'appareil doit traverser le condensateur en série (contrairement au montage parallèle), ce qui risque de l'endommager.

Application numérique

Un moteur de puissance de $10kW$ utilisant des champs électro-magnétiques (donc ayant un fort effet inductif) et vérifiant $\cos\varphi = 0,7$ est alimenté par le secteur. Quelle est la capacité C à mettre en parallèle pour corriger le facteur de puissance ? Quelle sera alors l'économie réalisée lors du transport de l'électricité ?

Les caractéristiques du secteur sont les suivantes : $f = 50Hz$; $u_{eff} = 220V$.

On a $P = u_{eff} i_{eff} \cos\varphi$ donc $i_{eff} = P/\left(u_{eff}\cos\varphi\right) = 64,9A$. De plus $|\underline{Z}| = u_{eff}/i_{eff} = 3,39$ et $X = |\underline{Z}|\cos\varphi = |\underline{Z}|\sqrt{1-\sin^2\varphi} = 2,42$.

Finalement : $C = X/\left(\omega\,|\underline{Z}|^2\right) = 670\mu F$. Cette valeur est très importante : plusieurs condensateurs seront mis en parallèle pour ajouter leur valeur (batterie de condensateurs).

Sachant que $P = u_{eff} i_{eff} \cos\varphi$, et que maintenant $\cos\varphi = 1$, le courant i'_{eff} nécessaire n'est plus que de $45,4A$, au lieu de $64,9A$ avant correction. Les pertes par effet Joule lors du transport sont baissées relativement de :

$$\frac{R_{fil} i_{eff}^2 - R_{fil} i_{eff}'^2}{R_{fil} i_{eff}'^2} = \frac{i_{eff}^2 - i_{eff}'^2}{i_{eff}'^2} \simeq 50\%!$$

Les pertes sont diminuées de 50%, ce qui est considérable !