

Filtrage en traitement d'image

avec quelques applications

Éric Busvelle



<http://monge.u-bourgogne.fr/ebusvelle/MasterEVA.php>

Intitulé : Techniques de filtrage pour l'image

Langue dans laquelle est dispensée le cours : français

Crédits ECTS : 6

Durées :

Cours	20h
TDs	14h
TPs	16h

Compétences acquises : Ce module permettra aux étudiants d'acquérir ou de revoir les notions de base du traitement d'image, Il est principalement orienté vers le filtrage et les algorithmes de base. Il permettra de mieux aborder le module de traitement avancé des images.

Contenu, programme :

- Rappels sur l'analyse de Fourier en 2D
- Ondelettes 1D et 2D
- Méthodes standard de traitement d'image (segmentation au sens des régions, des contours).
- Problème inverse en traitement d'image
- Filtre de Kalman appliqué à l'image
- Modèle de Markov

Responsables : Johel Mitéran, Éric Busvelle

Introduction

Rappels de probabilités

Estimateurs

Champs de Markov et champs de Gibbs

Morphomaths

Filtre de Kalman

Applications

Sommaire

Programme

Maquette EVA

Table des matières

Introduction

Probas

Estimateurs

Champs aléatoires

Morphomaths

Filtre de Kalman

Applications

Qu'est-ce qu'une image ?

C'est

- ▶ une matrice $I \in \mathcal{M}_{(n,n)}$
- ▶ un champ de vecteurs $F(x, y)$
- ▶ un signal en 2D $S(x, y)$
- ▶ une fonction de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans \mathbb{Z}
- ▶ un ensemble de pixels allumés

suivant le contexte.

Objectifs : image en
tant que capteur

- ▶ une position
- ▶ un déplacement
- ▶ un déformation

Jeu de dé

Exemple introductif

Variable aléatoire

Probabilité et fonction de
répartition

Espérance mathématique

Généralisation

Probabilité et mesure

Formule des probabilités
totales

Formule de Bayes

Dénombrement

Permutations

Classement

Combinaison

Arrangement

Variables aléatoires

Définition

Espérance et variance : cas
discret

Espérance et variance : cas
continu

Lois discrètes

Loi uniforme discrète

$\mathcal{U}(a, a + n)$

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Loi hypergéométrique

$\mathcal{H}(N, p, n)$



Large extrait du bassin aux nymphéas de Claude Monet

On s'intéresse au lancé de deux dés.

On appelle **expérience** l'action de lancer les dés et résultat de l'expérience les points marqués sur les deux dés.

On note Ω l'ensemble des **issues possibles** de l'expérience. Par exemple, si on lance deux dés, l'ensemble Ω est

$$\Omega = \{(\square, \square), (\square, \square), (\square, \square), (\square, \square), \dots, (\square, \square)\}$$

On remarque que $\text{card}(\Omega) = 36$ et que chaque issue de Ω devrait avoir même probabilité (on dit que les issues sont équiprobables).

On veut calculer la probabilité d'obtenir une somme égale à 7.
 On note A l'ensemble des issues pour lesquelles la somme est 7.
 Cet ensemble s'appelle un évènement, c'est un sous ensemble de Ω .

$$A = \{(\square_1, \square_2), (\square_2, \square_1), (\square_3, \square_4), (\square_4, \square_3), (\square_5, \square_6), (\square_6, \square_5)\}$$

Puisque les issues sont équiprobables

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

On peut considérer la variable aléatoire X qui à une issue associe la somme.

X est une fonction de Ω dans \mathbb{R} .

$$X(\left(\begin{smallmatrix} \square & \cdot \\ \square & \cdot \\ \square & \cdot \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix}\right)) = 7$$

$$\mathbb{P}(\{X = 7\}) = \mathbb{P}(\{\omega; X(\omega) = 7\}) = \mathbb{P}(A)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X = 2\}) &= \frac{1}{36} & \mathbb{P}(\{X = 3\}) &= \frac{2}{36} & \mathbb{P}(\{X = 4\}) &= \frac{3}{36} \\ \mathbb{P}(\{X = 5\}) &= \frac{4}{36} & \mathbb{P}(\{X = 6\}) &= \frac{5}{36} & \mathbb{P}(\{X = 7\}) &= \frac{6}{36} \\ \mathbb{P}(\{X = 8\}) &= \frac{5}{36} & \mathbb{P}(\{X = 9\}) &= \frac{4}{36} & \mathbb{P}(\{X = 10\}) &= \frac{3}{36} \\ \mathbb{P}(\{X = 11\}) &= \frac{2}{36} & \mathbb{P}(\{X = 12\}) &= \frac{1}{36} & & \end{aligned}$$

de sorte que $\sum_{k=2}^{12} \mathbb{P}(\{X = k\}) = 1$

Il y a deux façons de calculer l'espérance de X . La première est en général déconseillée :

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\omega) \\
 &= \frac{1}{36} (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 3 + 4 + \dots + 11 + 12) \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

L'autre méthode est nettement moins fastidieuse et utilise la loi de X :

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(\{X = x\}) \\
 &= 2\mathbb{P}(\{X = 2\}) + 3\mathbb{P}(\{X = 3\}) + \dots + 12\mathbb{P}(\{X = 12\}) \\
 &= \frac{1}{36} (2 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \\
 &\quad \times 5 + 7 \times 6 + 8 \times 5 + 9 \times 4 + 10 \times 3 + 11 \times 2 + 12) \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

et on voit bien que cette somme n'est qu'une réorganisation de la précédente.

Il y a en fait une bien meilleure méthode. Si on pose X_1 le résultat du premier dé et X_2 celui du second dé, alors $X = X_1 + X_2$ donc $E[X] = E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = 7$.

Une probabilité peut-être vue au premier abord comme une "mesure" (longueur, surface, volume...) sur un ensemble Ω dont la mesure totale serait 1. Ainsi, on a les formules

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \text{ si } A \text{ et } B \text{ sont disjoints } (A \cap B = \emptyset) \end{aligned}$$

En terme de probabilités, $A \cap B$ signifie "A et B" puisque les éléments qui sont dans A et B sont ceux de $A \cap B$. Plus généralement, on a le tableau d'équivalences

notations

ensembliste

probabiliste

ω

point de Ω

issue possible

A

sous-ensemble

événement

$\omega \in A$

ω appartient à Ω

A est réalisé

$A \subset B$

A est contenu dans B

A implique B

$A \cup B$

réunion de A et B

disjonction : A ou B

$A \cap B$

intersection de A et B

conjonction : A et B

\bar{A}

complémentaire de A

contraire de A

\emptyset

ensemble vide

événement impossible

$A \cap B = \emptyset$

A et B disjoints

A et B incompatibles

Une formule souvent utile, qui est elle-aussi très géométrique (et donc simple) :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A / B_1) \mathbb{P}(B_1) + \dots + \mathbb{P}(A / B_n) \mathbb{P}(B_n)$$

où B_1, B_2, \dots, B_n sont des évènements disjoints de Ω dont la réunion est Ω . Par exemple, pour $n = 2$,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A / B) \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A / \bar{B}) \mathbb{P}(\bar{B})$$

L'*indépendance* est une notion très différente, plus complexe, qui n'a plus d'interprétation en terme de mesure.

Formule de Bayes

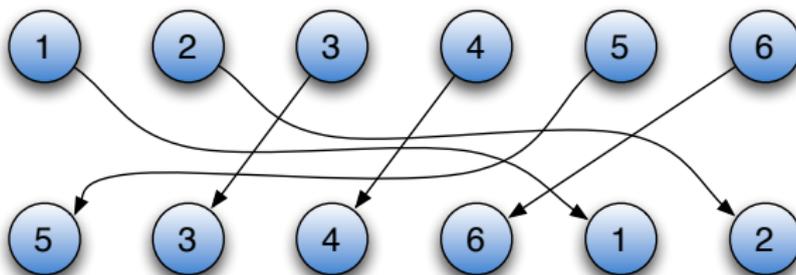
$$\mathbb{P}(A / B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

qui est aussi souvent très utile dans l'autre sens,

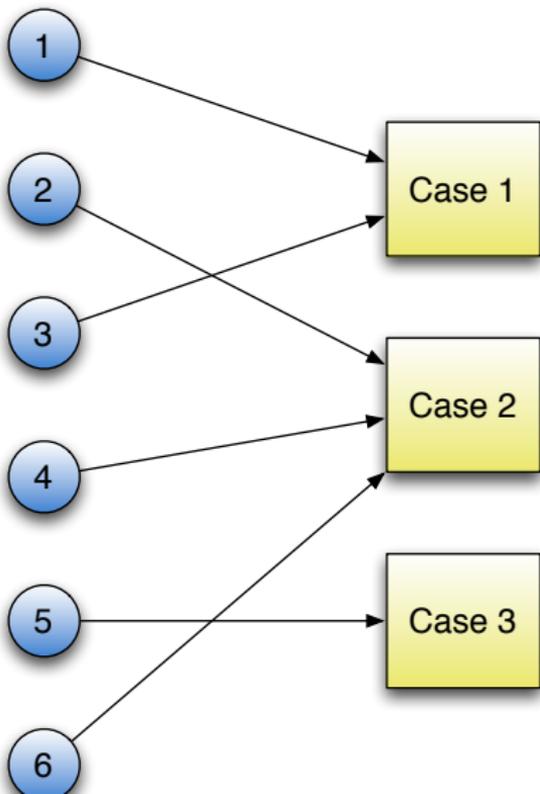
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A / B) \mathbb{P}(B).$$

Règle de dénombrement

Le nombre de permutations de n objets est $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$.



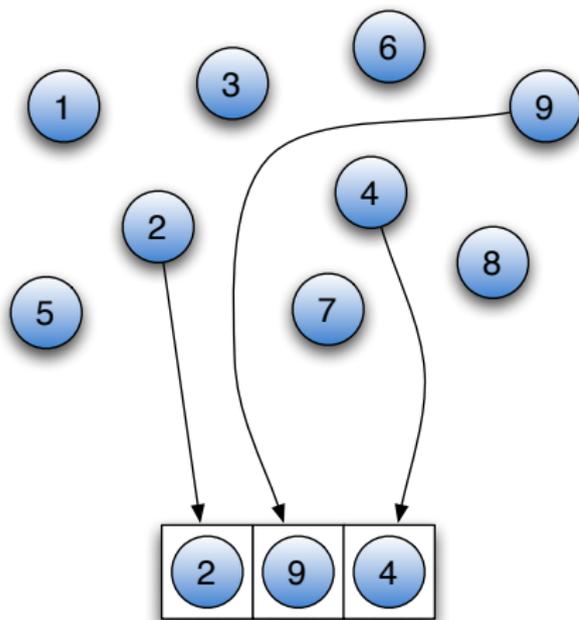
$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times \dots \times 2$$



Règle de dénombrement

Le nombre de façons de classer k objets dans p classes différenciées est p^k .

3^6



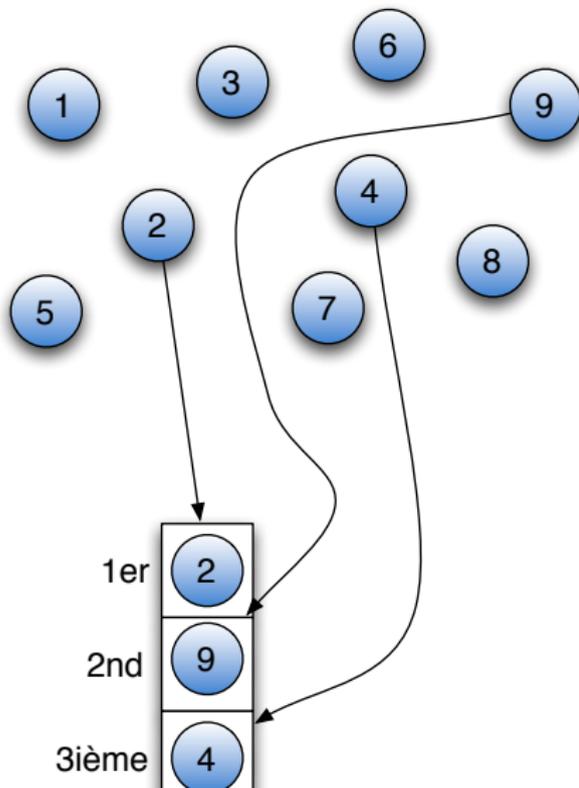
Règle de dénombrement

Le nombre de façon de choisir p objets parmi n est le célèbre terme de *combinaison*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

qu'il faut savoir calculer avec votre calculette.

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$



Règle de dénombrement

Le nombre de façon de choisir, en les ordonnant, p objets classés parmi n est un *arrangement*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

Une variable aléatoire est une application de X dans \mathbb{N} ou \mathbb{R} .

Fonction de répartition

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

C'est une application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, croissante, qui va de $F(-\infty) = 0$ à $F(\infty) = 1$. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a < X \leq b) &= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Pour une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , dite variable aléatoire discrète, la fonction de répartition est une application constante par paliers.

Pour une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} , que l'on appelle variable aléatoire réelle (v.a.r.), on définit la *densité de probabilité* par

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Dans ce cas, on a

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

En probabilités, la moyenne est appelée espérance. La variance est le carré de l'écart-type (disponible sur les calculettes et très utilisé en statistiques). La variance se définit à partir de l'espérance, et peut s'écrire sous deux formes équivalentes :

$$\begin{aligned}\text{var}(X) &= E \left[(X - E[X])^2 \right] \\ &= E[X^2] - (E[X])^2\end{aligned}$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - E[X])^2 \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) - (E[X])^2 \end{aligned}$$

$$E[X] = \int_a^b x f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \int_a^b (x - E[X])^2 f(x) dx \\ &= \int_a^b x^2 f(x) dx - (E[X])^2 \end{aligned}$$

L'*écart-type* est la racine carrée de la variance $\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$.
L'*écart-type* mesure une sorte d'écart moyen à la moyenne, c'est un
facteur qui estime la dispersion des données autour de la moyenne.
Soit X et Y deux variables aléatoires (discrètes ou réelles) et λ un
nombre réel fixé.

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[\lambda X] = \lambda E[X]$$

Si de plus X et Y sont **indépendantes** alors

$$E[X Y] = E[X] E[Y]$$

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$$

$$\text{var}(\lambda X) = \lambda^2 \text{var}(X)$$

$X \sim \mathcal{U}(a, a + n) = \mathcal{U}(\{a, a + 1, a + 2, \dots, a + n - 1\})$ si pour tout $k \in \{a, a + 1, a + 2, \dots, a + n - 1\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

C'est la loi des évènements équiprobables, qui se calculent en divisant le nombre des cas possibles par le nombre des cas favorables, obtenus par dénombrement.

$$E[X] = a + \frac{n-1}{2} \text{ et } \text{var}(X) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}$$

$X \sim \mathcal{B}(p)$ si X vaut 0 ou 1 avec

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \text{ (et donc } \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p)$$

C'est le résultat d'une expérience "tout ou rien". Par extension, on appellera aussi variable de Bernouilli toute variable aléatoire dont le résultat est binaire : pile ou face, oui ou non, ...

$$E[X] = p \text{ et } \text{var}(X) = p(1 - p)$$

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

C'est typiquement le nombre de réalisations de n expériences aléatoires indépendantes de type Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

$$E[X] = np \text{ et } \text{var}(X) = np(1 - p)$$

Quand $np(1 - p) > 9$ et $\frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}$, la loi binomiale s'approxime par la loi normale (cf plus bas) :

$$\mathbb{P}(X = k) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1 - p)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(k - np)^2}{np(1 - p)}}$$

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, si pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

C'est la loi qui décrit le nombre d'apparitions d'un évènement pendant un laps de temps donné.

$$E[X] = \lambda \text{ et } \text{var}(X) = \lambda$$

$X \sim \mathcal{H}(N, p, n)$, $0 \leq p \leq 1$, si pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_{Np}^k C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}$$

C'est un peu l'analogie sans remise de la loi Binomiale.

Typiquement, si on dispose de N pièces dont une proportion p sont défectueuses (donc Np pièces défectueuses) alors la loi hypergéométrique décrit la loi du nombre de pièces défectueuses quand on en tire n .

$$E[X] = np \text{ et } \text{var}(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$$

Si N est très grand, le fait de faire un tirage avec ou sans remise importe peu et la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, p, n)$ s'approxime par la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

$X \sim \mathcal{U}(a, b)$ si la densité de X est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on a

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \text{ et } \text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$, si la densité de X est

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on a

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

La loi exponentielle se caractérise par une propriété qui permet souvent de l'identifier : l'absence de postaction, *i.e.*

$$\mathbb{P}(X > t + s \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

C'est la loi qui régit le temps d'attente d'un évènement qui peut se produire à tout instant avec une probabilité constante. Par exemple, c'est la loi de la désintégration du carbone 14.

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si la densité de X est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}$$

et on a naturellement

$$E[X] = m \text{ et } \text{var}(X) = \sigma^2$$

Cette loi de probabilité est très connue en raison du *théorème central limite*. C'est un principe qui dit qu'une somme de petites erreurs indépendantes se comporte toujours comme une variable aléatoire qui suit une loi normale.



$E = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ désigne l'ensemble des $n + 1$ premiers entiers naturels.

Chaque entier $i \in E$ s'appelle état et E s'appelle espace d'état.

Une chaîne de Markov est un processus aléatoire $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E .

Définition

$(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de probabilité initiale p et de probabilité de transition Π sur E si

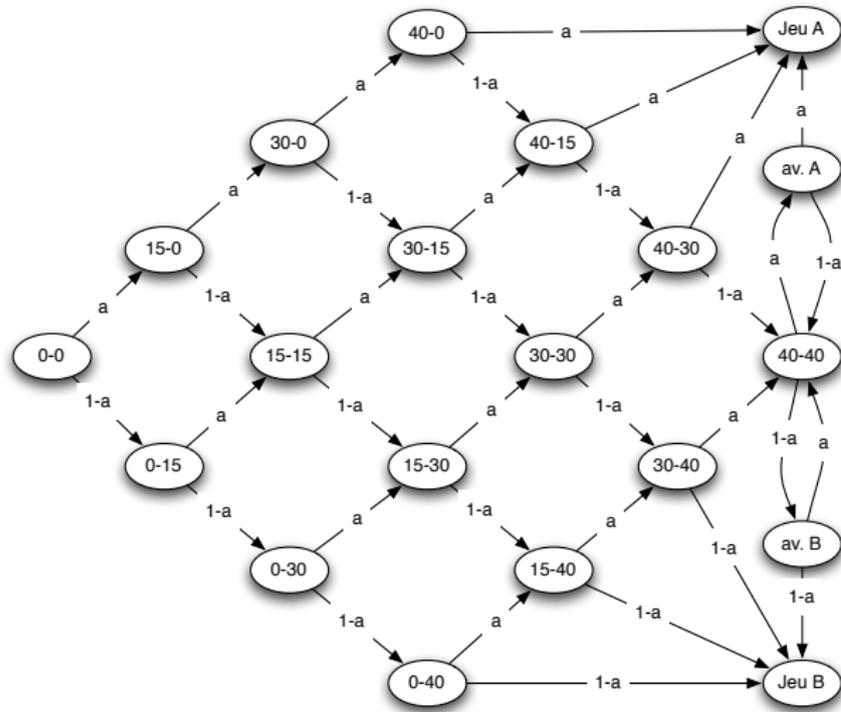
- ▶ Pour tout k , X_k est une variable aléatoire à valeur dans E ;
- ▶ La suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie la **propriété de Markov**

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{k+1} = i_{k+1} / X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k) \\ &= \mathbb{P}(X_{k+1} = i_{k+1} / X_k = i_k) \end{aligned}$$

On notera $p_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$ et $\Pi_{i,j} = \mathbb{P}(X_{k+1} = j / X_k = i)$

Chaines de Markov

Exemple



$\mathbb{P}(\text{"A gagne"})$?

Sommaire

Introduction

Probas

Jeu de dé

Exemple introductif

Variable aléatoire

Probabilité et fonction de répartition

Espérance mathématique

Généralisation

Probabilité et mesure

Formule des probabilités totales

Formule de Bayes

Dénombrement

Permutations

Classement

Combinaison

Arrangement

Variables aléatoires

Définition

Espérance et variance : cas discret

Espérance et variance : cas continu

Lois discrètes

Loi uniforme discrète

$\mathcal{U}(a, a + n)$

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Loi hypergéométrique

$\mathcal{H}(N, p, n)$

Π ne dépendant pas de k , cette chaîne de Markov est dite stationnaire.

Π est une matrice $(n + 1)$ -lignes $(n + 1)$ -colonnes. Par convention, les indices sont numérotés de 0 à n .

Théorème

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k) = p_{i_0} \Pi_{i_0, i_1} \Pi_{i_1, i_2} \cdots \Pi_{i_{k-1}, i_k}$$

C'est une conséquence de la formule de Bayes. Par exemple :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1) &= p_{i_0} \Pi_{i_0, i_1} \Pi_{i_1, i_2} \\ &= \mathbb{P}(X_0 = i_0) \mathbb{P}(X_1 = i_1 / X_0 = i_0) \end{aligned}$$

L'écriture matricielle a des avantages. Elle permet d'écrire (et de calculer) la probabilité d'atteindre l'état j partant de l'état i :

$$\mathbb{P}(X_k = j / X_0 = i) = (\Pi^k)_i, j$$

et celle d'atteindre l'état j :

$$\mathbb{P}(X_k = j) = (p\Pi^k)_j$$

Définition

Une chaîne de Markov est dite irréductible si pour tout i et j dans E , il existe k tel que

$$\mathbb{P}(X_k = j / X_0 = i) > 0$$

Définition

Un état est récurrent si, partant de cet état, la probabilité d'y retourner ultérieurement est égale à 1. Sinon, il est dit transitoire.

Sommaire

Introduction

Probas

Jeu de dé

Exemple introductif

Variation aléatoire

Probabilité et fonction de répartition

Espérance mathématique

Généralisation

Probabilité et mesure

Formule des probabilités totales

Formule de Bayes

Dénombrement

Permutations

Classement

Combinaison

Arrangement

Variables aléatoires

Définition

Espérance et variance : cas discret

Espérance et variance : cas continu

Lois discrètes

Loi uniforme discrète

$\mathcal{U}(a, a + n)$

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Loi hypergéométrique

$\mathcal{H}(N, p, n)$

Théorème

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov, alors il existe une probabilité μ sur E telle que si on note $\mu(i) = \mu_i$, le vecteur $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_n)$ est solution de

$$\mu \Pi = \mu$$

μ s'appelle probabilité invariante (ou stationnaire) et vérifie $\mathbb{P}(X_k = i) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mu_i$

Cette probabilité invariante n'est pas nécessairement unique.

Sommaire

Introduction

Probas

Jeu de dé

Exemple introductif

Variable aléatoire

Probabilité et fonction de répartition

Espérance mathématique

Généralisation

Probabilité et mesure

Formule des probabilités totales

Formule de Bayes

Dénombrement

Permutations

Classement

Combinaison

Arrangement

Variables aléatoires

Définition

Espérance et variance : cas discret

Espérance et variance : cas continu

Lois discrètes

Loi uniforme discrète

$\mathcal{U}(a, a + n)$

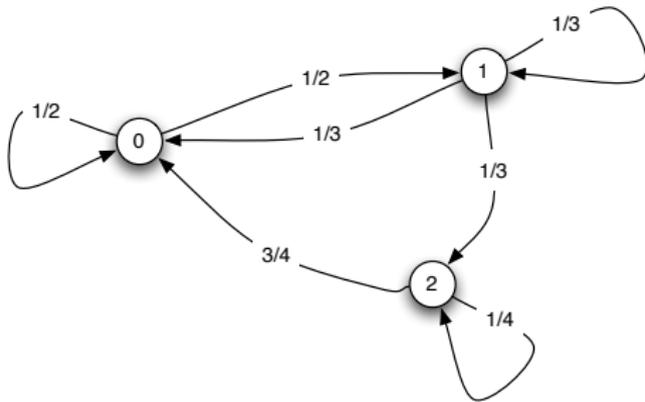
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Loi hypergéométrique

$\mathcal{H}(N, p, n)$



La probabilité de transition associée à cette chaîne de Markov est la matrice suivante

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

La probabilité invariante se déduit de l'équation $\mu\Pi = \mu$, en cherchant la solution non nulle, normalisée :

$$\mu = \left(\frac{12}{25} \quad \frac{9}{25} \quad \frac{4}{25} \right)$$

Cela signifie par exemple que le processus passera en moyenne 48% de son temps dans l'état 0 et seulement 16% de son temps dans l'état 2.

Soit $a > 0$, on considère la suite de variables aléatoires $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ indépendantes et de même loi géométrique

$$\mathbb{P}(S_k = r) = a(1 - a)^{r-1}$$

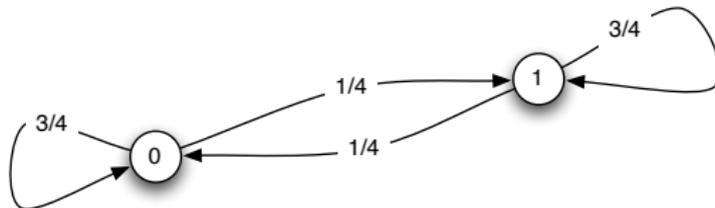
Ce sont des variables aléatoires à valeurs dans $\{1, 2, \dots\}$.

Notons $T_{k+1} = S_{k+1} - S_k$ pour $k \in \mathbb{N}$ de sorte que

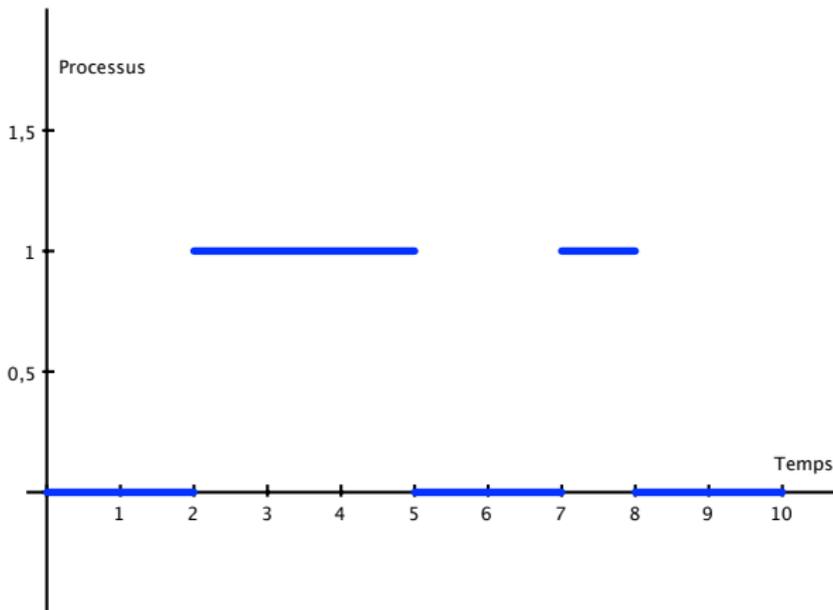
$0 < T_1 < T_2 < \dots < T_k < \dots$ constitue une suite d'entiers

positifs aléatoires. Les variables aléatoires $(T_k)_{k \geq 1}$ modélisent des temps aléatoires auxquels peuvent se produire certains événements aléatoires : arrivée d'un client dans une file d'attente, désintégration d'un atome d'uranium, arrivée d'un bus dans une ville complètement désorganisée...

On utilise souvent le processus $(T_k)_{k \geq 1}$ dans une chaîne de Markov, pour spécifier les temps de sauts d'un état à un autre. Ainsi, dans la chaîne de Markov ci-dessous, les temps de sauts suivent la loi géométrique précédente, de paramètre $a = 1/4$.



Simulation de la chaine de la figure ??



Sommaire

Introduction

Probas

Jeu de dé

Exemple introductif

Variable aléatoire

Probabilité et fonction de répartition

Espérance mathématique

Généralisation

Probabilité et mesure

Formule des probabilités totales

Formule de Bayes

Dénombrement

Permutations

Classement

Combinaison

Arrangement

Variables aléatoires

Définition

Espérance et variance : cas discret

Espérance et variance : cas continu

Lois discrètes

Loi uniforme discrète

$\mathcal{U}(a, a + n)$

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Loi hypergéométrique

$\mathcal{H}(N, p, n)$

Remarque

Le processus $(T_k)_{k \geq 1}$ est parfaitement adapté pour modéliser l'arrivée de clients dans une file d'attente :

1. Si $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$, les variables $T_{t_2} - T_{t_1}$, $T_{t_3} - T_{t_2}, \dots, T_{t_k} - T_{t_{k-1}}$ sont indépendantes : on dit que $(T_k)_{k \geq 1}$ est un processus à accroissements indépendants.
2. Si $s < t$, la loi de $T_t - T_s$ ne dépend que de $t - s$.

La loi géométrique est l'analogue discret de la loi exponentielle :

Exercice

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ .
Soit n entier, $\Delta = \frac{1}{n}$ et X_n une variable aléatoire de loi géométrique
de paramètre $\Delta\lambda$.

$$\mathbb{P}(\Delta X_n > a) \approx \mathbb{P}(X > a)$$

pour n grand.

Ce théorème exprime la similitude, en terme de loi ou de fonction
de répartition, de X et de ΔX_n où Δ est dont un intervalle de
temps petit (une pulsation d'horloge).



Monumenta 2012 : *Excentrique(s)* de Daniel Buren,
Grand Palais, Paris

Le problème s'écrit vectoriellement

$$Y = CX + V$$

où

- ▶ X est inconnu, $X \in \mathbb{R}^n$;
- ▶ V est un bruit blanc, $V \in \mathbb{R}^p$;
- ▶ Y est la mesure, $Y \in \mathbb{R}^p$.

C est une matrice connue (le modèle).

Une version avec entrée est équivalente :

$$y = Cx + Du + w$$

- ▶ u est une entrée, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$.

On pose simplement $y' = y - Du$.

On suppose *a priori* que X suit une loi $\mathcal{N}(x_0, P_0)$.

On suppose que V suit une loi $\mathcal{N}(0, R)$.

On va calculer la loi de X conditionnellement à Y en partant de

$$f_X(x) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(x - x_0)^t P_0^{-1}(x - x_0)\right)$$

$$f_Y^{X=x}(y) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(y - Cx)^t R^{-1}(y - Cx)\right)$$

et en appliquant la loi de Bayes :

$$\begin{aligned} f_X^{Y=y}(x) &= \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{1}{f_Y(y)} f_Y^{X=x}(y) f_X(x) \end{aligned}$$

$$f_X^{Y=y}(x) \propto \exp \left(-\frac{1}{2} \left((x - x_0)^t P_0^{-1} (x - x_0) + (y - Cx)^t R^{-1} (y - Cx) \right) \right)$$

$\propto \dots$

$$\propto \exp \left(-\frac{1}{2} \left((x - \hat{x})^t P^{-1} (x - \hat{x}) + \dots \right) \right)$$

où

$$P = (C^t R^{-1} C + P_0^{-1})^{-1}$$

et

$$\hat{x} = P(C^t R^{-1} y - P_0^{-1} x_0)$$

On en déduit

$$\mathbb{E}[X | Y] = \hat{x} = (C^t R^{-1} C + P_0^{-1})^{-1} (C^t R^{-1} y - P_0^{-1} x_0)$$

et l'estimateur dans le cas important $P_0 = +\infty$ (pas d'idée *a priori*):

$$\hat{x} = (C^t R^{-1} C)^{-1} C^t R^{-1} y$$

Si $R = r Id$, on a la simplification :

$$\hat{x} = (C^t C)^{-1} C^t y$$

N.B. Ce calcul est aussi la base du filtre de Kalman.

Exemple

On considère une image binarisée formée de pixels supposés représenter un cercle. Trouver le centre et le rayon de ce cercle (*problème élémentaire issu d'une étude réalisée pour le CEA à Valduc*).

En exercice...

A noter plusieurs raffinements possibles :

- ▶ *A priori* : Filtrage des pixels isolés par une méthode isotropique : morphomaths, markovienne, ...
- ▶ *A posteriori* : Itérations par suppression des pixels aberrants (*outliers*)

On considère une famille de probabilités $\mathbb{P}_X^{\theta=a}(x)$ sur un espace \mathbf{X} paramétrée par $\theta \in \Theta$.

L'espace Θ est lui même un espace probabilisé par $\mathbb{P}_\theta(a)$.

La loi produit s'écrit :

$$\mathbb{P}_{(X,\theta)}(x, a) = \mathbb{P}_X^{\theta=a}(x)\mathbb{P}_\theta(a)$$

et s'il y a des densités :

$$f_{(X,\theta)}(x, a) = f_X^{\theta=a}(x)f_\theta(a)$$

On se donne une fonction de profit :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \Theta \times \Theta &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\theta, \theta_0) &\longmapsto \mathcal{C}(\theta | \theta_0) \end{aligned}$$

(profit lorsqu'on estime θ_0 par θ)

L'estimateur Bayésien de θ est l'estimateur $\hat{\theta}^*(X)$ qui maximise

$$\mathbb{E}[\mathcal{C}(\hat{\theta}(X) \mid \theta)]$$

Pour une loi avec densité et pour $X = x$, on a donc

$$\hat{\theta}^*(x) = \arg \max_{\hat{\theta} \in \Theta} \int_{\Theta} \mathcal{C}(\hat{\theta} \mid a) f_X^{\theta=a}(x) f_{\theta}(a) da$$

Si $\mathcal{C}(\hat{\theta} \mid a) = \delta(\hat{\theta} - a)$ alors

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^*(x) &= \arg \max_{\hat{\theta} \in \Theta} f_X^{\theta=\hat{\theta}}(x) f_{\theta}(\hat{\theta}) \\ &= \arg \max_{\hat{\theta} \in \Theta} \left(\ln f_X^{\theta=\hat{\theta}}(x) + \ln f_{\theta}(\hat{\theta}) \right) \end{aligned}$$

Si on n'a pas d'idée *a priori* sur θ , on prend une mesure équiprobable sur Θ et donc :

$$\hat{\theta}^*(x) = \arg \max_{\hat{\theta} \in \Theta} \left(\ln f_X^{\theta=\hat{\theta}}(x) \right)$$

C'est l'estimateur du **maximum de vraisemblance**.

Exemple

Un procédé de fabrication produit des pièces dont une caractéristique est uniformément répartie entre a et b . On observe un échantillon de taille n de ces pièces, ayant pour caractéristiques x_1, \dots, x_n . Construire une estimation de a et b .

Chaque pièce suit la loi $\mathcal{U}(a, b)$ de densité

$$f_{(a,b)}(x) : \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a,b]}(x)$$

La loi de l'échantillon est donc

$$f_{(a,b)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(b-a)^n} \mathbb{I}_{[a,b]^n}(x_1, \dots, x_n)$$

qui vaut 0 si l'un des $x_i \notin [a, b]$.

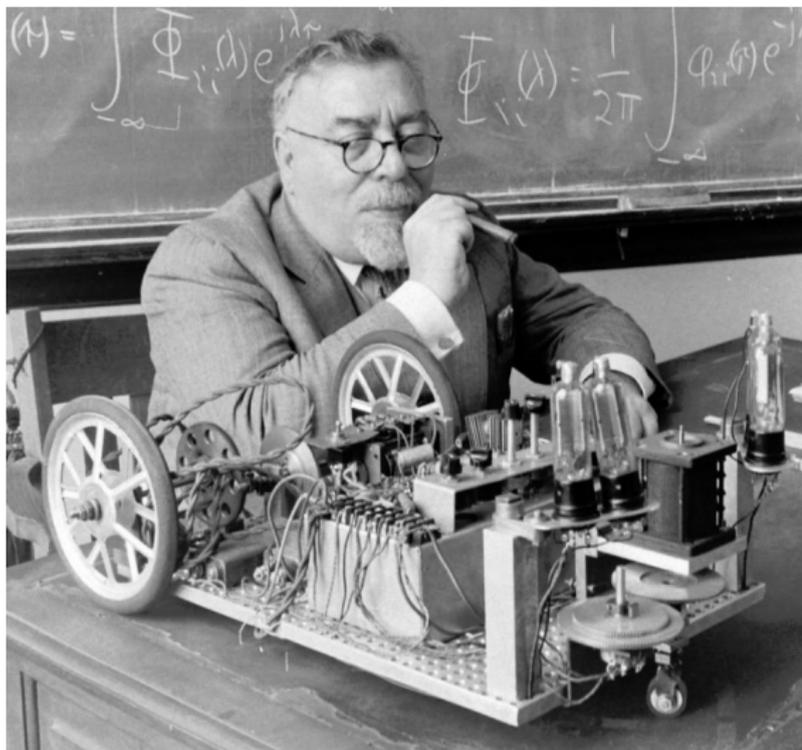
$f_{(a,b)}(x_1, \dots, x_n)$ est maximum si tous les x_i sont dans $[a, b]$ **et** que $b-a$ est minimum. On en déduit

$$a = \inf_{i=1, \dots, n} (x_i)$$

$$b = \sup_{i=1, \dots, n} (x_i)$$

(simple, mais optimal !)

Norbert Wiener
(1894–1964)
Mathématicien
américain.
Il étudie le
contrôle,
découvre le
principe du
feedback, explore
les aspects
stochastiques des
signaux, étudie le
bruit en télécom-
munications,
il est le père de la
cybernétique.



Sommaire

Introduction

Probas

Estimateurs

Moindres carrés

Le problème

La solution

Résultats

Exemple

Identification d'un cercle

Maximum a posteriori

Approche Bayésienne

log-vraisemblance

Max. de vraisemblance

Un exemple

Filtre de Wiener (1D)

Filtrage, prédiction,
lissage...

Equations de Wiener-Hopf

Exemple

Domaine fréquentiel

Calcul spectral

Calcul de la DSP

Filtre de Wiener (2D)

Extension en 2D

Le résultat du filtrage...

Champs aléatoires

Morphomaths

Filtre de Kalman

On considère un processus stationnaire $(Y(n))_{n \in \mathbb{N}}$ du second ordre centré (wlog).

On suppose que θ est une variable aléatoire – liée à Y – de variance finie que l'on veut estimer linéairement à partir des $p + 1$ dernières valeurs du processus Y :

$$\hat{\theta} = a_0 Y(n) + a_1 Y(n-1) + \dots + a_p Y(n-p)$$

- ▶ Si $\theta = Y_n$, c'est un problème de filtrage,
- ▶ si $\theta = Y_k$, $k > n$, c'est un problème de prédiction,
- ▶ si $\theta = Y_k$, $k < n$, c'est un problème de lissage,
- ▶ sinon, c'est un problème d'estimation.

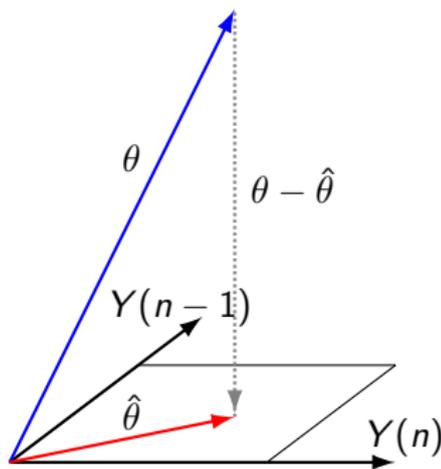
On note

- ▶ $\Gamma_Y(k) = \mathbb{E}[Y(n)Y(n-k)]$
l'autocovariance de Y ;
- ▶ $\Gamma_{Y\theta}(k) = \mathbb{E}[\theta Y(n-k)]$ la
covariance entre Y et θ .

On exprime mathématiquement

$$\mathbb{E}[(\theta - \hat{\theta})Y(n-k)] = 0$$

pour $k = 0, \dots, p$.



$$\begin{pmatrix} \Gamma_Y(0) & \Gamma_Y(1) & \cdots & \Gamma_Y(p) \\ \Gamma_Y(1) & \Gamma_Y(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \Gamma_Y(1) \\ \Gamma_Y(p) & \cdots & \Gamma_Y(1) & \Gamma_Y(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{Y\theta}(0) \\ \Gamma_{Y\theta}(1) \\ \vdots \\ \Gamma_{Y\theta}(p) \end{pmatrix}$$

Sommaire

Introduction

Probas

Estimateurs

Moindres carrés

Le problème

La solution

Résultats

Exemple

Identification d'un cercle

Maximum a posteriori

Approche Bayésienne

log-vraisemblance

Max. de vraisemblance

Un exemple

Filtre de Wiener (1D)

Filtrage, prédiction,
lissage...

Equations de Wiener-Hopf

Exemple

Domaine fréquentiel

Calcul spectral

Calcul de la DSP

Filtre de Wiener (2D)

Calculons

Annulation d'écho/anti-larsen : On mesure

$$Y(n) = X(n) + \rho X(n - d) + \sigma V(n)$$

- où
- ▶ $X(n)$ est le signal utile, supposé être un bruit blanc d'autocovariance s^2 ;
 - ▶ $V(n)$ est un bruit blanc ;
 - ▶ ρ et σ sont des paramètres d'amplitude ;
 - ▶ d est le retard du à l'écho.

On veut estimer $\theta = X(n)$ (filtrage).



(système d'annulation d'écho ATEIS)

$$\Gamma_{Y\theta}(k) = \mathbb{E}[X(n)Y(n-k)] = \begin{cases} s^2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Gamma_Y(k) = \mathbb{E}[Y(n)Y(n-k)] = \begin{cases} s^2(1 + \rho^2) + \sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \varphi & \text{si } k = 0 \\ \rho s^2 & \text{si } k = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi & 0 & s^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi & 0 & s^2 & 0 \\ s^2 & 0 & \varphi & 0 & s^2 \\ 0 & s^2 & 0 & \varphi & 0 \\ 0 & 0 & s^2 & 0 & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(d = 2 \text{ et } p = 4)$$

Le problème de filtrage peut aussi s'écrire

$$Y = H * X + V$$

où $*$ est le produit de convolution

$$(H * V)(i) = \sum_k H(i - k)X(k)$$

- ▶ X est le signal réel, mais inconnu ;
- ▶ H est la réponse impulsionnelle du filtre ;
- ▶ V est un bruit blanc ;
- ▶ Y est le signal mesuré.

On cherche un filtre de déconvolution G de sorte que l'on puisse estimer X par

$$\hat{X} = G * Y$$

On note

- ▶ x , y , g et h les transformées de Fourier de X , Y , G et H ;
- ▶ s la densité spectrale de puissance du signal X ;

$$s(\omega) = \mathbb{E}[|x(\omega)|^2]$$

- ▶ n la densité spectrale de puissance du bruit V .

$$n(\omega) = \mathbb{E}[|v(\omega)|^2]$$

On cherche à minimiser

$$\mathbb{E}[|x(\omega) - \hat{x}(\omega)|^2]$$

où \hat{x} est la transformée de Fourier de $\hat{X} = G * Y$.

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[|x(\omega) - \hat{x}(\omega)|^2] \\
 &= \mathbb{E}[|x(\omega) - g(\omega)y(\omega)|^2] \\
 &= \mathbb{E}[|x(\omega) - g(\omega)(h(\omega)x(\omega) + v(\omega))|^2] \\
 &= \dots \\
 &= (1 - g(\omega)h(\omega))\overline{(1 - g(\omega)h(\omega))}s(\omega) \\
 &\quad + g(\omega)\overline{g(\omega)}n(\omega) \\
 &= \left| g(\omega) - \frac{\overline{h(\omega)}s(\omega)}{|h(\omega)|^2s(\omega) + n(\omega)} \right|^2 (|h(\omega)|^2s(\omega) + n(\omega)) + \dots
 \end{aligned}$$

d'où

$$g(\omega) = \frac{\overline{h(\omega)}s(\omega)}{|h(\omega)|^2s(\omega) + n(\omega)}$$

En posant

$$\text{snr}(\omega) = \frac{s(\omega)}{n(\omega)}$$

le rapport signal sur bruit ("*signal over noise ratio*")

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{\overline{h(\omega)}}{|h(\omega)|^2 + \frac{n(\omega)}{s(\omega)}} \\ &= \frac{1}{h(\omega)} \left[\frac{|h(\omega)|^2}{|h(\omega)|^2 + \frac{1}{\text{snr}(\omega)}} \right] \end{aligned}$$

- ▶ Le premier terme est le terme d'inversion ;
- ▶ Le second terme est le terme de filtrage.

<p>Transformée de Fourier :</p>	<p>Densité spectrale de puissance (DSP) :</p>
$f_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T F(t) e^{-i\omega T} dt$	$DSP(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f_T(\omega) ^2]$
<p>Transformée de Fourier discrète :</p>	<p>Densité spectrale de puissance discrète :</p>
$f(j) = \sum_{k=0}^{n-1} F(k) e^{-\frac{2i\pi}{n} jk}$	$DSP(j) = \frac{1}{N} f(j) ^2$
<p>Code Matlab :</p>	
<p><code>x = fft(X,N)</code></p>	<p><code>DSP = x.*conj(x)/N</code></p>

La généralisation en traitement d'image est immédiate :

$$g(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{h(\omega_1, \omega_2)} \left[\frac{|h(\omega_1, \omega_2)|^2}{|h(\omega_1, \omega_2)|^2 + \frac{1}{\text{snr}(\omega_1, \omega_2)}} \right]$$



Image originale



Flou de bougé

Filtre de Wiener (2D)

Le résultat du filtrage...



Bougé + bruit



Image restaurée (Thanks Wiener!)

Sommaire

Introduction

Probas

Estimateurs

Champs aléatoires

Définitions

Champs de Markov

Champs de Gibbs

Exemples

Modèle d'Ising

Modèle de Potts

Champs de Gibbs

caractéristique locale

Méthode de Monte-Carlo

Simulation

Estimation

Exemple

Caractéristique locale
conditionnelle

Hello Kitty!

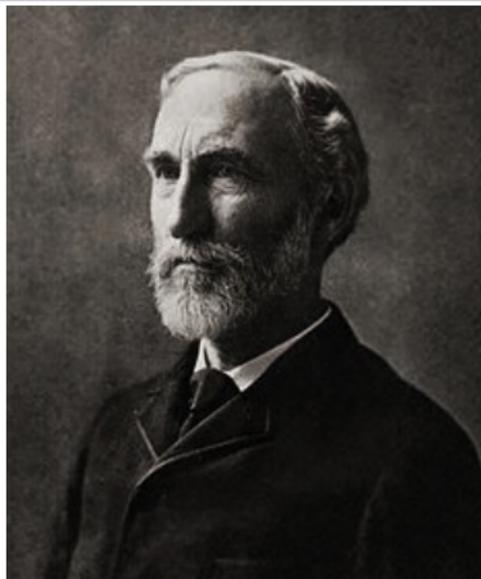
Morphomaths

Filtre de Kalman

Applications



Vue de Delft, Johannes Vermeer



Josiah Willard GIBBS
(USA, 1839-1903)



Les pixels d'une image forment une grille de sites

$$\mathbf{S} = \{s = (i, j) ; 1 \leq i, j \leq n\}$$

Un champ aléatoire est un vecteur aléatoire indicé par \mathbf{S}

$$(X_{i,j})_{(i,j) \in \mathbf{S}}$$

tel que chaque variable aléatoire $X_{i,j}$ est à valeurs dans l'ensemble des intensités possibles (éventuellement de dimension 3 pour une image couleur).

On notera $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$ la densité de probabilité de X .
 Une réalisation de X est une image :

$$X(\omega) = \left(\begin{array}{cccccccc} \text{[Grid of colored pixels]} \end{array} \right)$$

La loi $p(x)$ représente la probabilité d'une image plutôt qu'une autre.

On notera aussi $p_s(x) = \mathbb{P}(X_s = x_s)$, la loi d'un pixel.

Exemple

Une unité de fabrication produit des panneaux de particule pour un fabricant de meubles. Chaque panneau est percé suivant un plan prédéfini, à des emplacements donnés. En cas de rupture d'un forêt de perçage, la source de l'image X est différente. De plus, la texture peut influencer.



L'image finale Y est prise par une caméra ayant elle aussi des caractéristiques qui influent directement sur le rendu.

Exemple

L'application de la loi de Bayes donne

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\mathbb{P}(X = x)}{\sum_{\xi} \mathbb{P}(Y = y \mid X = \xi)\mathbb{P}(X = \xi)}$$

où

- ▶ $\mathbb{P}(Y = y \mid X = \xi)$ est la loi de probabilité de la prise de vue ;
- ▶ $\mathbb{P}(X = \xi)$ est la loi de probabilité *a priori* de la source.

Il reste, par exemple, à prendre $x = \arg \max_{\xi} \mathbb{P}(X = \xi \mid Y = y)$.

Sommaire

Introduction

Probas

Estimateurs

Champs aléatoires

Définitions

Champs de Markov

Champs de Gibbs

Exemples

Modèle d'Ising

Modèle de Potts

Champs de Gibbs

caractéristique locale

Méthode de Monte-Carlo

Simulation

Estimation

Exemple

Caractéristique locale
conditionnelle

Hello Kitty!

Morphomaths

Filtre de Kalman

Applications

Le *voisinage* d'un pixel $s = (i, j)$ est défini par

$$V_s = \{t = (k, l) \in G ; 0 < (i - k)^2 + (j - l)^2 \leq r\}$$

$$= \{t \in G ; 0 < d(s, t)^2 \leq r\}$$

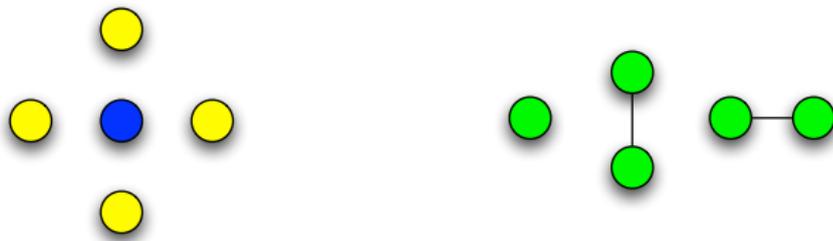
où r est une constante fixée.

On a noté $d(s, t)$ la distance $\sqrt{(i - k)^2 + (j - l)^2}$.

Définition

Un sous-ensemble \mathbf{C} de \mathbf{S} est une clique si toute paire d'éléments de \mathbf{C} sont des voisins. On notera \mathcal{C} l'ensemble des cliques de \mathbf{S} .

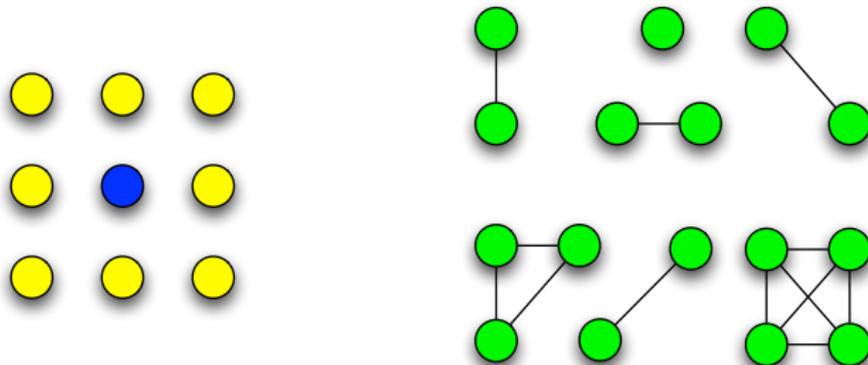
On appellera trace de x sur \mathbf{C} et on notera $x|_{\mathbf{C}} = \{x_s \mid x \in \mathbf{C}\}$



Voisinage-4 et ses cliques (liste exhaustive).

$r = 1$ dans $V_{i,j} = \{(k, l) \in G ; 0 < (i - k)^2 + (j - l)^2 \leq 1\}$.

Quand $r = 2$, on obtient des voisinages de 8 pixels...



Voisinage-8 et quelques unes de ses cliques.

Définition

Un champ aléatoire est un champ *de Markov* si ses marginales vérifient la condition de Markov :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{i,j} = x_{i,j} \mid X_{k,l} = x_{k,l}, (i,j) \neq (k,l)) \\ &= \mathbb{P}(X_{i,j} = x_{i,j} \mid X_{k,l} = x_{k,l}, (k,l) \in V_{i,j}) \end{aligned}$$

La valeur d'un pixel dépend de ses voisins. Il en découle une factorisation sur les cliques

$$\mathbb{P}(X = x) = p(x) = \prod_{C \in \mathcal{C}} \psi_C(x)$$

où $\psi_C(x)$ ne dépend que de la trace de x sur \mathbf{C} .

En utilisant la propriété de Markov et la loi de Bayes, on obtient en dimension 1 : $\mathbb{P}(X_0, \dots, X_n) = (\prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{k+1}/X_k)) \mathbb{P}(X_0)$

Définition

Un *champ de Gibbs* est caractérisé par sa densité de probabilité

$$p(x) = \frac{\exp(-H(x))}{\sum_{\xi} \exp(-H(\xi))} = \frac{1}{Z} \exp(-H(x))$$

où

$$H(x) = \sum_{\mathbf{C} \in \mathcal{C}} J_{\mathbf{C}}(x)$$

- ▶ $H(x)$ s'appelle *fonction d'énergie*;
- ▶ $J_{\mathbf{C}}(x)$ s'appelle *potentiel* de la clique \mathbf{C} et ne dépend que de la trace de x sur \mathbf{C} , c.à.d. de $x|_{\mathbf{C}}$.

La constante Z est pratiquement impossible à calculer.

Modèle ferro-magnétique où $x_s = +1$ ou -1 suivant l'orientation magnétique du spin en s .

Dans ce modèle, on utilise les 4 voisins et

$$H(x) = -h \sum_s x_s - \beta \sum_{d(s,t)=1} x_s x_t$$

- ▶ $h > 0$ est la force du champ magnétique extérieur ;
- ▶ $\beta > 0$ est la constante de couplage entre les spins.

Il existe des variantes

- ▶ 8 plus proches voisins ;
- ▶ champ anisotropique :

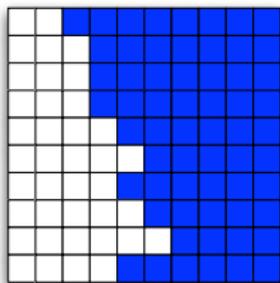
$$H(x) = -h \sum_s x_s - \beta_1 \sum_{|s-t|=(1,0)} x_s x_t - \beta_2 \sum_{|s-t|=(0,1)} x_s x_t$$

Le modèle de Potts est un modèle d'Ising

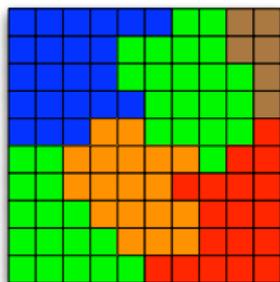
- ▶ sans champ magnétique extérieur ;
- ▶ généralisé à $K > 2$ valeurs de spins ;

$$H(x) = -\beta_1 \sum_{|s-t|=(1,0)} \delta(x_s - x_t) - \beta_2 \sum_{|s-t|=(0,1)} \delta(x_s - x_t)$$

où $\delta(x_s - x_t) = 1$ si $x_s = x_t$ et 0 sinon.



Modèle d'Ising



Modèle de Potts

La propriété de Markov d'un champ de Gibbs indique que les interactions entre pixels sont **locales**. On note $x^{(s)} = \{x_t \mid t \neq s\}$, de sorte que par exemple, la propriété de Markov s'écrit

$$p_s(x \mid x^{(s)}) = p_s(x \mid x_{|V_s})$$

On appelle *caractéristique locale du champ* l'ensemble des lois conditionnelles

$$\mathcal{D} = \{p_s(\bullet \mid x^{(s)}) ; s \in \mathbf{S}\}$$

La caractéristique locale du champ caractérise complètement le champ de Gibbs.

$$p_s(x_s | x^{(s)}) = \frac{\exp(-\sum_{C \ni s} J_C(x_s, x^{(s)}))}{\sum_j \exp(-\sum_{C \ni s} J_C(x_s, x^{(s)}))}$$

Cette formule compliquée est pratiquement explicitement calculable.

Par exemple, les caractéristiques locales du modèle d'Ising s'écrivent :

$$p_s(+1 | x^{(s)}) = \frac{e^{h+\beta v_s}}{e^{h+\beta v_s} + e^{-(h+\beta v_s)}}$$

$$p_s(-1 | x^{(s)}) = \frac{e^{-(h+\beta v_s)}}{e^{h+\beta v_s} + e^{-(h+\beta v_s)}}$$

en notant v_s la somme des 4 valeurs des quatre voisins de x_s .

[Sommaire](#)
[Introduction](#)
[Probas](#)
[Estimateurs](#)
[Champs aléatoires](#)

Définitions

[Champs de Markov](#)
[Champs de Gibbs](#)

Exemples

[Modèle d'Ising](#)
[Modèle de Potts](#)
[Champs de Gibbs](#)
caractéristique locale
[Méthode de Monte-Carlo](#)
[Simulation](#)
[Estimation](#)

Exemple

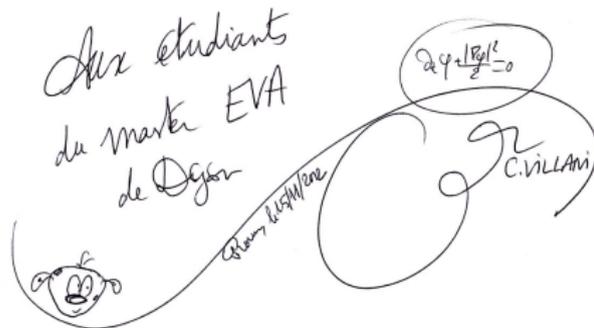
[Caractéristique locale](#)
[conditionnelle](#)
[Hello Kitty!](#)
[Morphomaths](#)
[Filtre de Kalman](#)
[Applications](#)

Calculons

Dans les années 1950, une révolution scientifique s'est produite quand on a compris que, pour explorer un système trop riche en possibles, il est souvent préférable de s'y déplacer au hasard, plutôt que de le quadriller méthodiquement ou d'y choisir des échantillons successifs de manière parfaitement aléatoire. C'est l'algorithme de Metropolis-Hastings, c'est aujourd'hui tout le domaine des MCMC, les *Monte Carlo Markov Chains*, dont l'efficacité déraisonnable en physique, en chimie, en biologie, n'a toujours pas été expliquée. Ce n'est pas une exploration déterministe, ce n'est pas non plus une exploration complètement aléatoire, c'est une exploration par marche au hasard.

Cédric Villani(*)

Théorème vivant, 2012



(*) Médaille Fields 2010

Il faut pouvoir mener les calculs explicitement...

On utilise la méthode de Monte-Carlo, qui consiste à simuler un échantillon de la loi. Soit \mathbb{P} une probabilité, X une variable aléatoire de loi \mathbb{P} et (x_1, x_2, \dots, x_n) un n -échantillon de X .

$$E[\varphi(X)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)$$

Cette méthode est parfois utilisée pour calculer numériquement une intégrale multiple.

Nous l'utiliserons (dans un premier temps) pour simuler un champs de Gibbs.

On construit une suite de champs $(x(0), x(1), \dots, x(k))$ de la façon suivante :

1. $x(0)$ est un champ initial ;
2. $x(j)$ étant donné, on choisit un site $s = (i, j)$ au hasard et on génère une valeur x_s suivant la loi $p_s(x_s \mid x(j)^{(s)})$;
3. $x(j + 1) = (x_s, x^{(s)})$;

Alors, la valeur finale $x(k)$ est une réalisation (approchée) de la loi $p(x)$.

Ce type de résultat (simulation en boucle ouverte d'une chaîne de Markov) peut être utilisé en synthèse d'image et de texture.

Soit X un champ de Gibbs de loi

$$\mathbb{P}(X = x) = \pi(x) = \frac{1}{Z} \exp(-H(x))$$

et Y un champ de Gibbs de loi

$$\mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = p(y \mid x) = \prod_{s \in S} p(y_s \mid x_s)$$

où $p(y_s \mid x_s) = \exp(c y_s x_s)$ (c'est l'exemple que nous choisirons).

- ▶ X représente une image théorique ;
- ▶ Y est l'image formée, à partir de X , via une acquisition numérique.

On veut estimer (pour maximiser) $p(x \mid y) = \mathbb{P}(X = x \mid Y = y)$.

A l'aide de Bayes :

$$\begin{aligned}
 p(x | y) &= \frac{p(x, y)}{p(y)} = \frac{p(y | x)p(x)}{p(y)} \\
 &= \frac{1}{p(y)} \pi(x) \prod_{s \in \mathbf{S}} p(y_s | x_s) \\
 &= \frac{1}{p(y)} \pi(x) \exp(\ln \prod_{s \in \mathbf{S}} p(y_s | x_s)) \\
 &= \frac{1}{p(y)} \frac{1}{Z} \exp(-H(x)) \exp\left(\sum_{s \in \mathbf{S}} \ln p(y_s | x_s)\right) \\
 &= \frac{1}{Z'(y)} \exp(-H'(x))
 \end{aligned}$$

où $H'(x) = H(x) - \sum_{s \in \mathbf{S}} \ln p(y_s | x_s)$

Le champs de Gibbs conditionnel est encore un champs de Gibbs.
Un algorithme pour estimer X à partir de Y consiste donc à

1. Modéliser le champs de Gibbs de formation de l'image X (choisir h et β);
2. Modéliser la loi produit de l'observation Y (choisir c);
3. Calculer la caractéristique locale du champs de Gibbs conditionnel;
4. Prendre $x(0) = y$ et calculer $x(k)$ pour k grand suivant la loi conditionnelle 3., par la méthode de Monte-Carlo;
5. Recommencer 4. jusqu'à obtenir un échantillon assez grand;
6. Calculer la moyenne de l'échantillon

Décrivons un exemple très utilisé en pratique.

Dans cet exemple, on suppose que l'image est binaire, on utilise un modèle d'Ising (niveau -1 pour le noir et $+1$ pour le blanc) et 4 voisins.

La loi de X est donc

$$p(x) = \frac{1}{C_{te}} \exp(-H(x))$$

avec

$$H(x) = -h \sum_s x_s - \beta \sum_{d(s,t)=1} x_s x_t$$

On utilise une loi produit de Bernouilli pour $Y | X$:

$$p(y | x) = \begin{cases} p & \text{si } x = y \\ 1 - p & \text{sinon} \end{cases}$$

si bien que $p(y | x) = \frac{1}{\text{Cte}} \exp(c x y)$ avec $c = \ln \frac{p}{\sqrt{p(1-p)}}$.

On en déduit la caractéristique locale conditionnelle :

$$p(x | y) = \frac{1}{\text{Cte}} \exp(-H'(x))$$

avec

$$H'(x) = -h \sum_s x_s - \beta \sum_{d(s,t)=1} x_s x_t - c \sum_s x_s y_s$$

Exemple Hello Kitty!



Hello Kitty!

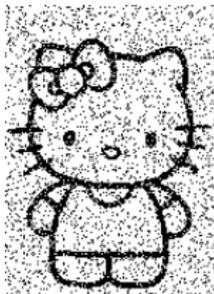


Image bruitée



Image restaurée



[Sommaire](#)

[Introduction](#)

[Probas](#)

[Estimateurs](#)

[Champs aléatoires](#)

[Définitions](#)

[Champs de Markov](#)

[Champs de Gibbs](#)

[Exemples](#)

[Modèle d'Ising](#)

[Modèle de Potts](#)

[Champs de Gibbs](#)

[caractéristique locale](#)

[Méthode de Monte-Carlo](#)

[Simulation](#)

[Estimation](#)

[Exemple](#)

[Caractéristique locale
conditionnelle](#)

Hello Kitty!

[Morphomaths](#)

[Filtre de Kalman](#)

[Applications](#)

La jeune fille à la perle
(ou jeune fille au turban),
de Johannes Vermeer



- ▶ Fondamentalement **non-linéaire** ;
- ▶ Par nature **bidimensionnelle** (géométrique) ;
- ▶ Basée sur la **théorie des ensembles**,
pas sur du **traitement du signal** ;
- ▶ Intuitive, assez proche des raisonnements humains ;
- ▶ Basée sur quelques *primitives* puissantes ;
- ▶ Rapide : permet des pré-traitements (*isoler des défauts, supprimer des artefacts, ...*) ;
- ▶ Adaptable sur des images binarisées ou en niveau de gris.

On étudiera seulement les primitives de base, et quelques une de leurs applications, le tout sur des images binarisées.

- ▶ Image couleur $I : \{0, \dots, n_I - 1\} \times \{0, \dots, n_C - 1\} \longrightarrow R^3$
- ▶ Image N&B $I : \{0, \dots, n_I - 1\} \times \{0, \dots, n_C - 1\} \longrightarrow R$

où R est un ensemble, typiquement $[0, 1]$ ou $\{0, \dots, 255\}$.

On binarise I , typiquement par seuillage :

$$I_b(i, j) = 1 \text{ ssi } |I(i, j)| > \text{seuil (0 sinon)}$$

L'image est codée par l'ensemble de ses pixels blancs ("1") :

$$A \subset \{0, \dots, n_I - 1\} \times \{0, \dots, n_C - 1\} \stackrel{\text{def.}}{=} E$$

- ▶ A est l'image, de taille habituelle (grande) ;
- ▶ S est l'élément structurant (imagette).

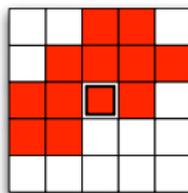
$$A \cup S = \{c ; c \in A \text{ ou } S\}$$

$$A \cap S = \{c ; c \in A \text{ et } S\}$$

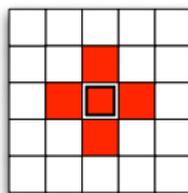
$$A^c = \{a ; a \notin A\}$$

$$\check{A} = \{-a ; a \in A\}$$

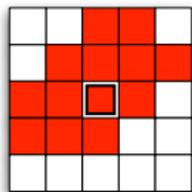
(ce dernier représente le symétrique de A)



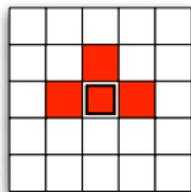
A



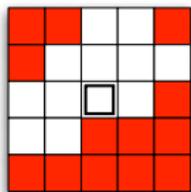
S



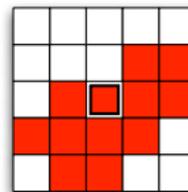
$A \cup S$



$A \cap S$



A^c



\check{A}

Définition

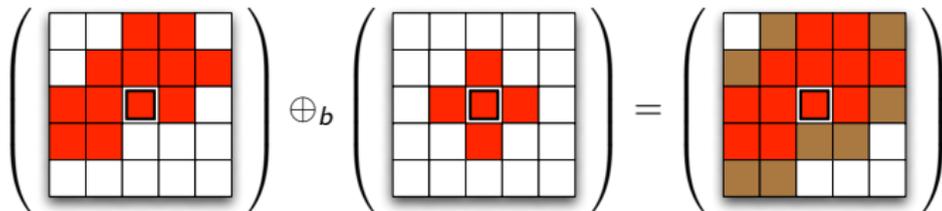
La translation de A par $s \in E$ est définie par

$$(A)_s = \{b \in E \mid b = a + s ; a \in A\}$$

L'addition de Minkowski (dilatation) est définie par

$$A \oplus_b S = \{a + s ; a \in A, s \in S\} = \bigcup_{s \in S} (A)_s$$

Exemple ((0,0) au centre, quadrant positif en bas à droite) :



Quelques propriétés :

1. Si $(0, 0) \in S$ alors $A \subset A \oplus_b S$
2. \oplus_b est commutative : $A \oplus_b B = B \oplus_b A$
3. \oplus_b est associative : $(A \oplus_b B) \oplus_b C = A \oplus_b (B \oplus_b C)$
4. \oplus_b est invariante par translation : $(A)_s \oplus_b B = (A \oplus_b B)_s$
5. $(A)_s \oplus_b B_{-s} = A \oplus_b B$
6. \oplus_b est croissante : si $A \subset B$ alors $A \oplus_b C \subset B \oplus_b C$
7. $(A \cap B) \oplus_b C \subset (A \oplus_b C) \cap (B \oplus_b C)$
8. \oplus_b est distributive par rapport à l'union :
 $(A \cup B) \oplus_b C = (A \oplus_b C) \cup (B \oplus_b C)$

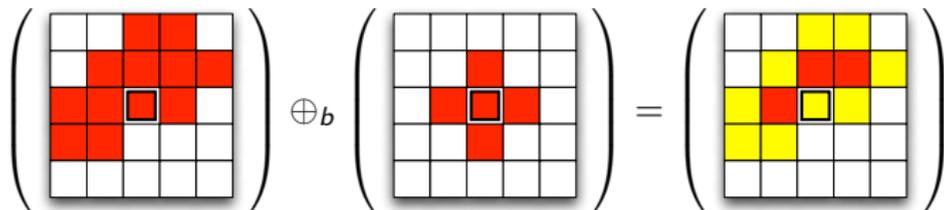
Définition

L'opérateur d'érosion est défini par

$$A \ominus_b S = \{x ; x + s \in A, \forall s \in S\} = \bigcap_{s \in S} (A)_{-s}$$

Attention, il diffère de la définition usuelle de la soustraction de Minkowski, d'un signe de s .

Exemple (seul les pixels en rouge constituent $A \ominus_b S$) :



Propriétés de l'érosion :

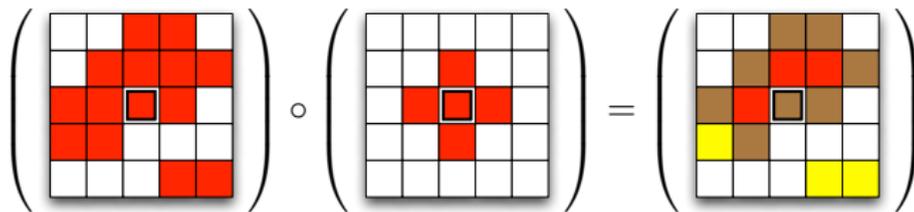
1. Si $(0, 0) \in S$ alors $A \ominus_b S \subset A$
2. $(A \ominus_b B) \ominus_b C = A \ominus_b (B \oplus_b C)$
3. $A \oplus_b (B \ominus_b C) \subset (A \oplus_b B) \ominus_b C$
4. \ominus_b est invariante par translation : $(A)_s \ominus_b B = (A \ominus_b B)_s$
5. \ominus_b est croissante : si $A \subset B$ alors $A \ominus_b C \subset B \ominus_b C$
6. \ominus_b est distributive par rapport à l'intersection :
 $(A \cap B) \ominus_b C = (A \ominus_b C) \cap (B \ominus_b C)$
7. $(A \cup B) \ominus_b C \supset (A \ominus_b C) \cup (B \ominus_b C)$
8. $A \ominus_b (B \cup C) = (A \ominus_b B) \cap (A \ominus_b C)$
9. $A \ominus_b (B \cap C) \supset (A \ominus_b B) \cap (A \ominus_b C)$
10. Érosion et dilatation sont duales par passage au complémentaire : $(A \ominus_b B)^c = A^c \oplus_b B^c$ et
 $(A \oplus_b B)^c = A^c \ominus_b B^c$

Définition

L'ouverture de A par un élément structurant S est

$$A \circ S = (A \ominus S) \oplus S$$

Exemple :



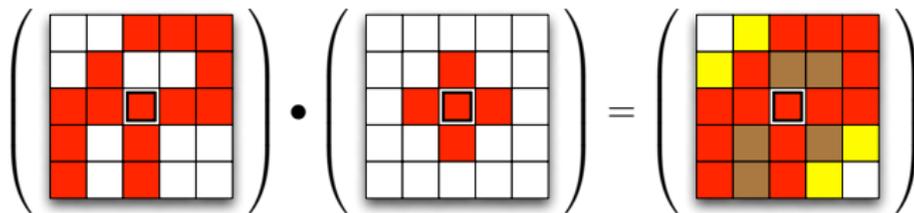
Suivant S , cette opération supprime les pixels isolés, les isthmes et les caps.

Définition

La fermeture de A par un élément structurant S est

$$A \bullet S = (A \oplus S) \ominus S$$

Exemple :



Cette opération bouche les estuaires et les "petits lacs".

Les définitions suivantes seraient équivalentes :

$$A \circ S = \bigcup_{S_b \in A} S_b \qquad A \bullet S = \bigcap_{\check{S}_b \cap A = \emptyset} \check{S}_b^c$$

- $A \circ S \subset A \subset A \bullet S$
- $A \oplus_b S = (A \oplus_b S) \circ S = (A \bullet S) \oplus_b S$
- $A \ominus_b S = (A \ominus_b S) \bullet S = (A \circ S) \ominus_b S$
- \circ est croissante : si $A \subset B$ alors $A \circ S \subset B \circ S$
- \bullet est croissante : si $A \subset B$ alors $A \bullet S \subset B \bullet S$
- \circ est idempotente : $(A \circ S) \circ S = A \circ S$
- \bullet est idempotente : $(A \bullet S) \bullet S = A \bullet S$
- \circ et \bullet sont duales par passage au complémentaire :
 $(A \bullet S)^c = A^c \circ \check{S}$

Soit $D(0, r)$ un disque (pixélisé) de rayon r .

- ▶ Filtre passe-bas

$$A \circ D(0, r)$$

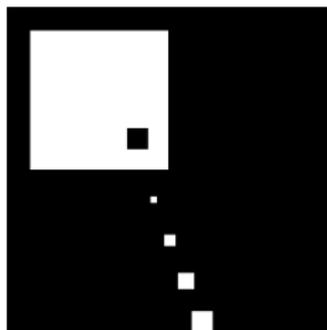
- ▶ Filtre passe-haut

$$A - (A \circ D(0, r))$$

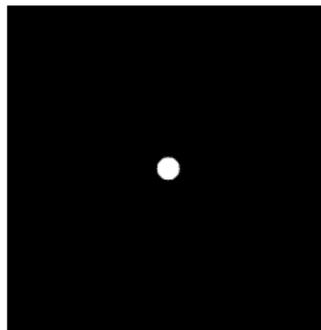
- ▶ Filtre passe-bande

$$(A \circ D(0, r_1)) - (A \circ D(0, r_2))$$

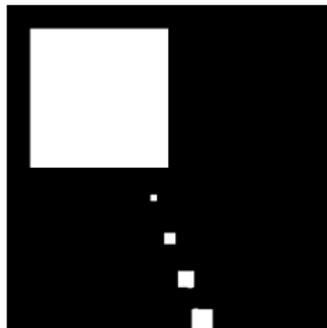
où $r_1 < r_2$.



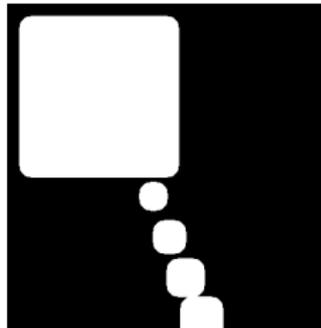
$A \ 400 \times 400$



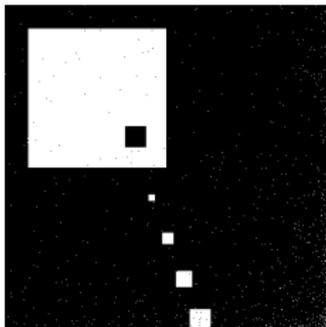
S (disque de diamètre 14)



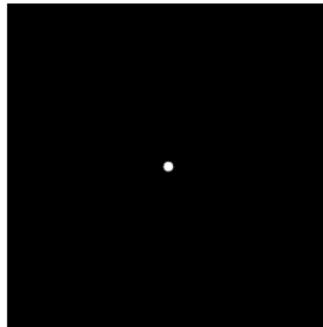
$A \bullet S$



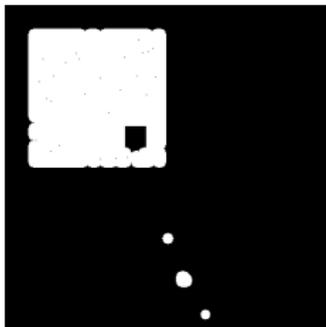
$A \oplus S$



$A + \text{bruit}$ 400×400



S (disque de diamètre 6)

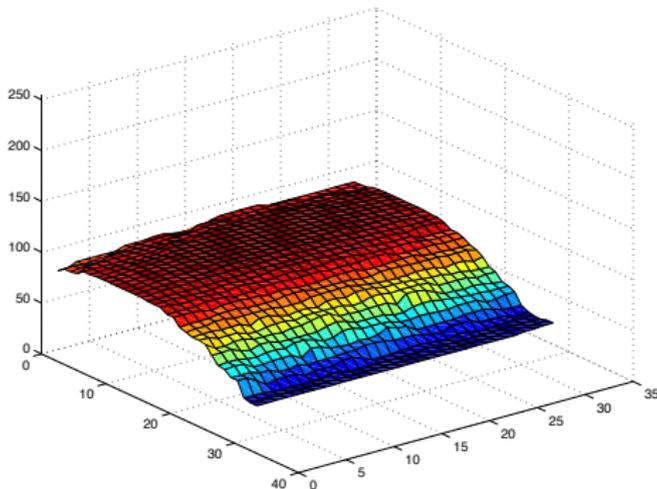
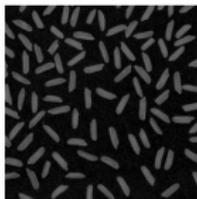
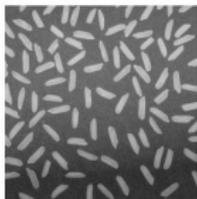


$A \circ S$



$A \ominus S$

```
rice = imread('rice.png');  
background = imopen(rice, strel('disk',15));  
riceminusback = rice - background;
```



L'opérateur "hit-or-miss" permet de trouver des motifs dans une image.

On utilise deux éléments structurants S_1 et S_2 disjoints.

Il est défini par

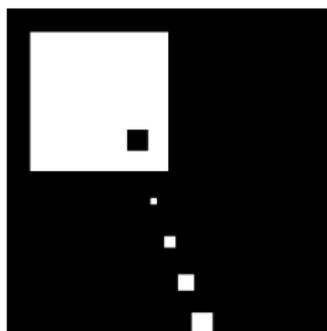
$$A \odot (S_1, S_2) = (A \ominus S_1) \cap (\bar{A} \ominus S_2)$$

Les pixels préservés seront ceux qui correspondent au motif S_1 et tels que S_2 tombe dans le fond.

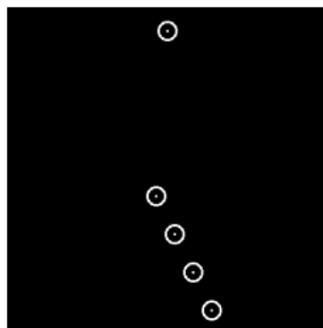
Prenons par exemple

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui va permettre de localiser les coins supérieurs droits :



A



$A \odot (S_1, S_2)$

(la seconde image est en fait une dilatation de $A \odot (S_1, S_2)$ par \odot)

- ▶ Le modèle :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k)$$

où

- ▶ $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $\mathbf{x}(0) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_0)$;
 - ▶ $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est une entrée connue (perturbation, contrôle,...) ;
 - ▶ $\mathbf{w}(k)$ est un bruit blanc de loi $\mathcal{N}(0, \mathbf{Q})$
 - ▶ $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ et $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n \times n_u}$ sont les matrices du modèle ;
- ▶ Les observations :

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k)$$

où

- ▶ $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des mesures ;
- ▶ $\mathbf{v}(k)$ est un bruit blanc de loi $\mathcal{N}(0, \mathbf{R})$
- ▶ $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{p \times n}$ et $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_{p \times n_u}$ sont les matrices qui modélisent les mesures ;

Exemple

Stabilisation temps réel d'une séquence d'images prises en travelling latéral. Le modèle doit représenter le déplacement de la caméra, et les observations seront donc obtenues des images.

Le modèle devrait s'écrire

$$x(k+1) = x(k) + \Delta t v_x(k) + w_1(k)$$

$$v_x(k+1) = v_x(k) + w_2(k)$$

$$y(k+1) = y(k) + \Delta t v_y(k) + w_3(k)$$

$$v_y(k+1) = v_y(k) + w_4(k)$$

Le bruit $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ représente l'erreur de modélisation, car le travelling n'est peut-être pas parfaitement rectiligne uniforme.

L'état du système est $\mathbf{x} = (x, v_x, y, v_y)$.

Les observations sont données par

$$x_m(k) = x(k) + v_1(k)$$

$$y_m(k) = y(k) + v_2(k)$$

Cette fois, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ représente le bruit de mesure (vibrations). Les observations sont donc $\mathbf{y} = (x_m, y_m)$. Elles sont déduites de l'image par calcul du flot optique entre le fond des deux images.

Le but du problème est d'estimer \mathbf{x} et en particulier. Cela permettra de recalibrer la séquence d'image sur un travelling parfaitement rectiligne uniforme.

Exemple

Débruitage d'une séquence d'images. On filme un plan-séquence, on veut supprimer au maximum les perturbations (bruit électronique, variations de luminosité,...).

On peut raisonner pixel par pixel. Pour chaque pixel, le modèle est simplement :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)$$

où $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^3$ est la couleur du pixel et $\mathbf{w}(k)$ est un bruit blanc de variance $\sigma_w^2 Id$ qui représente la variabilité de chaque pixel.

On pourrait raffiner le modèle (utiliser un modèle du second ordre, ou un processus ARMA par exemple..., utiliser un modèle ou des entrées pour le déplacement de la caméra,...).

Les observations sont directes :

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)$$

où v est un bruit blanc de variance σ_v^2 Id On veut estimer $\mathbf{y}(k)$ à partir de \mathbf{x} entre 0 et k .

Pour un plan statique et une image noir et blanc, le filtre de Kalman donnera

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = (1 - K(k))\hat{\mathbf{x}}(k-1) + K(k)y(k)$$

où

$$K(k) = \frac{\sigma^2(k-1) + \sigma_w^2}{\sigma^2(k-1) + \sigma_w^2 + \sigma_v^2}$$

$$\sigma(k)^2 = (1 - K)\sigma(k-1)^2 + \sigma_w(k)^2$$

comme on le verra plus tard.

Exemple

Poursuite d'un objet, d'une personne,... ("tracking problem")

On souhaite repérer la position d'une cible en déplacement dans une séquence d'images. La position de l'objet est calculée pour chaque image mais entachée de petites erreurs de positionnement ou de grandes erreurs (confusion de cible, masquage temporaire de la cible,...)

Pour illustrer le problème, prenons le cas d'un oscillateur harmonique amorti soumis à une perturbation connue (en 1D) :

$$\ddot{x}(t) + k_f \dot{x}(t) + k x(t) = u(t)$$

que l'on discrétise et transforme en système du premier ordre :

$$x(k+1) = x(k) + \Delta t v(k) + w_1(k)$$

$$v(k+1) = v(k) + \Delta t (-k_f v(k) - k x(k) + u(k)) + w_2(k)$$

Les mesures donnent la position 1D de l'objet

$$y(k) = x(k) + \eta(k)$$

où η désigne le bruit.

Dans cet exemple, on peut même considérer que l'état est $\mathbf{x} = (x, v, k, k_f)$. En ajoutant $\dot{k} = \dot{k}_f = 0$ dans le modèle, on pourra estimer $x(k)$ mais aussi k et k_f .

Le filtre de Kalman permet :

- ▶ de filtrer un signal d'après un modèle (exemple 2)
- ▶ de réconcilier des données entre elles (exemple 1)
- ▶ d'estimer des paramètres ou des variables dynamiques (exemple 3)

Reprenons le système :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k)$$

avec $\mathbf{x}(0) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_0)$, $\mathbf{w}(k) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q})$ et $\mathbf{v}(k) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R})$.

On notera $\hat{\mathbf{x}}(0 | 0) = \mathbf{x}_0$ l'estimation initiale et $\mathbf{P}(0 | 0) = \mathbf{P}_0$.

Le filtre de Kalman s'écrit

Étape de
prédiction

$$\hat{\mathbf{x}}(k | k-1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1 | k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1)$$

$$\mathbf{P}(k | k-1) = \mathbf{A}^t \mathbf{P}(k-1 | k-1) \mathbf{A} + \mathbf{Q}$$

$\hat{\mathbf{x}}(k | j)$ signifie $\hat{\mathbf{x}}$ au temps k quand on a mesuré \mathbf{y} entre 0 et j .

Étape de correction

$$\hat{\mathbf{x}}(k | k) = \hat{\mathbf{x}}(k | k - 1) + \mathbf{K}(k)(\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k | k - 1))$$

$$\mathbf{P}(k | k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C})\mathbf{P}(k | k - 1)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k | k - 1)\mathbf{C}^t(\mathbf{C}\mathbf{P}(k | k - 1)\mathbf{C}^t + \mathbf{R})^{-1}$$

- ▶ Le filtre de Kalman nécessite donc
 - ▶ un modèle dynamique et un modèle d'observation (**A**, **B**, **C** et **D**)
 - ▶ des matrices de réglage (**P**₀, **Q** et **R**)
- ▶ En retour, il fournit un estimateur optimal de l'état, robuste aux bruits.

Il existe de nombreux "raffinements" :

- ▶ une version avec des matrices dépendant de k (facile) ;
- ▶ une version avec gain statique (exécution plus rapide) ;
- ▶ des versions adaptatives ;
- ▶ une version non linéaire (filtre de Kalman étendu).

La preuve de ce résultat repose sur

- ▶ un peu de calcul de probabilité, similaire aux calculs des moindres carrés

On notera les deux densités importantes (gaussiennes dans le cas présent) :

$$\Pi_k(\xi, x) = f_{X_k}^{X_{k-1}=\xi}(x)$$

$$\varphi_k(x, y_k) = f_{Y_k}^{X_k=x}(y)$$

Lemme

En notant $p_k(x) = f_{X_k}^{Y^k=y^k}(x)$

$$p_k(x) = \frac{1}{D_k} \varphi_k(x, y_k) \int_{\mathbb{R}^n} p_{k-1} \Pi_k(\xi, x)(\xi) d\xi$$

(équation de Zakaï discrète)

La preuve de ce résultat repose aussi sur

- ▶ un peu de calcul matriciel, en particulier le lemme suivant (dit lemme d'inversion matricielle) :

Lemme

Si la matrice $CPC^t + R$ est inversible, alors $P^{-1} + C^tR^{-1}C$ est inversible et

$$(P^{-1} + C^tR^{-1}C)^{-1} = P - PC^t(CPC^t + R)^{-1}CP$$

Dans ce type de problème (suivi de cible), il est souvent utile de calculer les vitesses de déplacements entre deux *frames*. On supposera dans la suite que l'image est en nuances de gris (*wlog*).

On supposera que

Hypothèse

L'illumination d'une région est constante au cours de son déplacement sur un bref laps de temps

Cela permet d'écrire

$$I(x, y, t) = I(x + \delta x, y + \delta y, t + \delta t)$$

où

- ▶ $\delta p = (\delta x, \delta y)$ désigne le déplacement ((x, y) est une position)
- ▶ δt désigne un laps de temps (entre deux *frames*)

Par un développement de Taylor à l'ordre 1, on a

$$I(x, y, t) = I(x, y, t) + \frac{\partial I}{\partial x} \delta x + \frac{\partial I}{\partial y} \delta y + \frac{\partial I}{\partial t} \delta t + O^2(\delta x, \delta y, \delta t)$$

$$\sim I(x, y, t) + \nabla I \cdot \delta p + \frac{\partial I}{\partial t} \delta t$$

en notant $\nabla I = \left(\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y} \right)$.

On en déduit l'équation

$$\nabla I \cdot v = -\frac{\partial I}{\partial t}$$

Malheureusement, cette équation scalaire ne permet pas de déduire le vecteur à deux inconnues $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

Pour calculer le flot optique, il faut ajouter des contraintes qui dépendent du contexte :

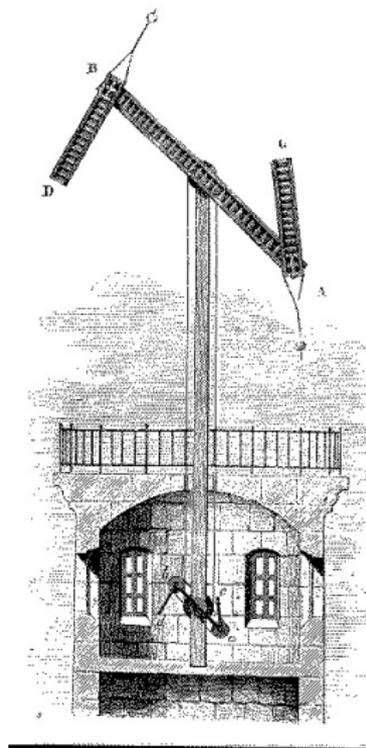
1. si on suit un objet qui se déplace et qui est aisément classifiable, on peut supposer que la vitesse de cet objet est constante
2. si on s'intéresse au déplacement de la caméra elle même, on peut supposer que le flot optique est constant sur l'image (correction de vibrations)
3. si on s'intéresse à des déformations lisses, on peut minimiser une fonctionnelle

$$\iint \left(\nabla I \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial I}{\partial t} \right)^2 + \lambda^2 \|\Delta \mathbf{v}\|^2 dx dy$$

4. *etc...*

Claude Chappe (1763-1805)

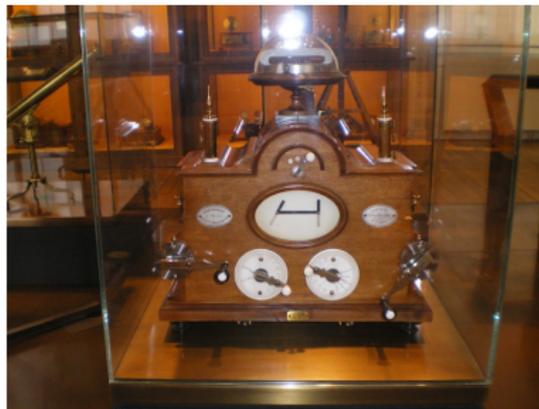
Premier entrepreneur des
télécommunications



La tour d'Annoux, dans l'Yonne (89), parfaitement entretenue et fonctionnelle



Le télégraphe de Chappe au
musée du Centre National des
Arts et Métiers, à Paris



Sommaire

Introduction

Probas

Estimateurs

Champs aléatoires

Morphomaths

Filtre de Kalman

Applications

Le télégraphe de Chappe

Le principe

$$n = 25 p + 5 g + d + 1$$

Indications

Image et art contemporain

Dénombrement et suivi

Détection de défauts

basse fréquence

haute fréquence

Une petite balle

Ball and plate

Travail personnel

DM, noté

Rapport

La fête de la science à Auxerre,
reconstitution d'un "chat"
historique...



Sommaire

Introduction

Probas

Estimateurs

Champs aléatoires

Morphomaths

Filtre de Kalman

Applications

Le télégraphe de Chappe

Le principe

$$n = 25 p + 5 g + d + 1$$

Indications

Image et art contemporain

Dénombrement et suivi

Détection de défauts

basse fréquence

haute fréquence

Une petite balle

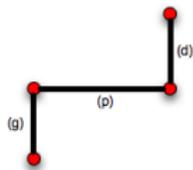
Ball and plate

Travail personnel

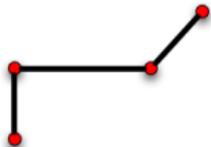
DM, noté

Rapport

$$n = 25p + 5g + d + 1$$



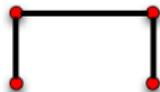
$$p = 0, g = 0, d = 0, n = 1$$



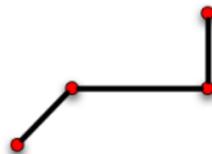
$$p = 0, g = 0, d = 1, n = 2$$



$$p = 0, g = 0, d = 2, n = 3$$



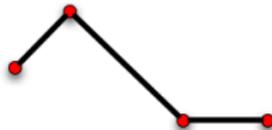
$$p = 0, g = 0, d = 4, n = 5$$



$$p = 0, g = 1, d = 0, n = 6$$



$$p = 1, g = 0, d = 0, n = 26$$



$$p = 1, g = 0, d = 1, n = 27$$



$$p = 3, g = 4, d = 4, n = 100$$

$$n = 25p + 5g + d + 1$$



Illustrons le calcul :

$$p = 1$$

$$g = 2$$

$$d = 4$$

$$n = 25 + 2 \times 5 + 4 + 1 = 40$$

Exercice

Trouver et implémenter une méthode qui reconnait avec le maximum de réussite l'ensemble des configurations possibles. On testera cette méthode sur une base d'image téléchargeable ici : <http://monge.u-bourgogne.fr/ebusvelle/RDF.php>

- ▶ Le problème est de nature purement géométrique : on pourra binariser l'image sans perdre d'information ;
- ▶ Le télégraphe est en position fixe, on pourra localiser des zones d'intérêt *a priori* ;
- ▶ Matlab comporte des instructions puissantes, citons :
 - ▶ `bwlabel` qui permet de déterminer les composantes connexes d'une image binaire ;
 - ▶ `regionprops` qui permet de trouver les propriétés géométriques (taille, orientation, ...) des composantes connexes d'une image.



Philippe Boissonnet : Le désenchantement d'Atlas

Oeuvre d'art interactive : détection et localisation de personnes dans l'environnement d'une oeuvre à base de projections et d'hologrammes : stéréovision, lumière infrarouge, ultrasons...



Philippe Boissonnet est un artiste franco-qubécois et professeur d'art contemporain à l'université Trois-Rivières, Canada.

Sommaire

Introduction

Probas

Estimateurs

Champs aléatoires

Morphomaths

Filtre de Kalman

Applications

Le télégraphe de Chappe

Le principe

$n = 25 p + 5 g + d + 1$

Indications

Image et art contemporain

Dénombrement et suivi

Détection de défauts

basse fréquence

haute fréquence

Une petite balle

Ball and plate

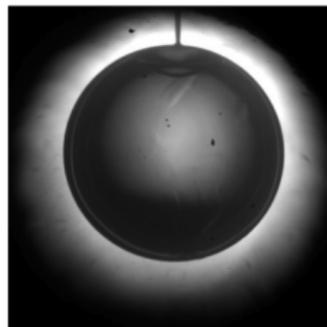
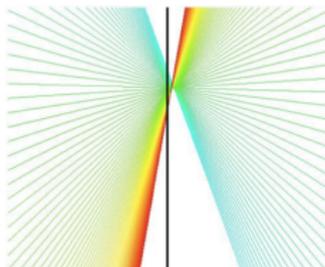
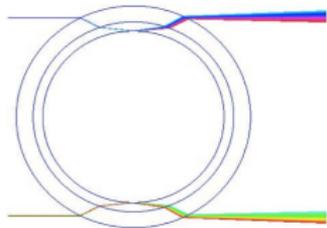
Travail personnel

DM, noté

Rapport

Contrôle d'épaisseur de la couche DT dans un microballon (thèse
d'Alexandre Choux)

Reconstruction 3D avec très peu d'information.



Sommaire

Introduction

Probas

Estimateurs

Champs aléatoires

Morphomaths

Filtre de Kalman

Applications

Le télégraphe de Chappe

Le principe

$n = 25 p + 5 g + d + 1$

Indications

Image et art contemporain

Dénombrement et suivi

Détection de défauts

basse fréquence

haute fréquence

Une petite balle

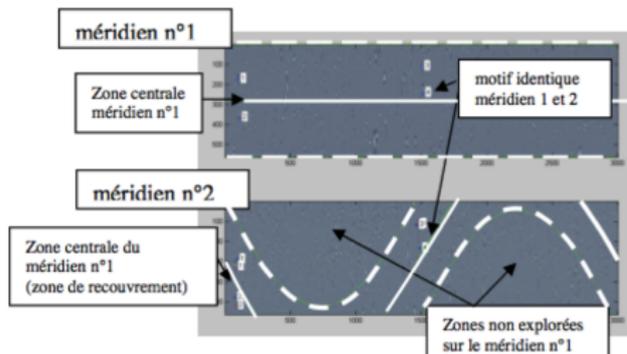
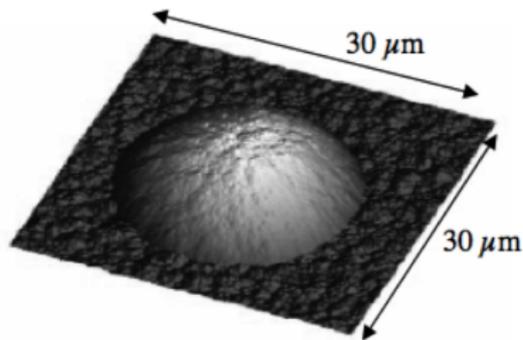
Ball and plate

Travail personnel

DM, noté

Rapport

Caractérisation de surface d'un
 microballon par holographie.



Projet d'un étudiant de master (Kenneth Sebesta)

- ▶ localiser la boule à partir d'une caméra : datation, précision, rapidité !
- ▶ agir sur l'inclinaison du plateau pour stabiliser la boule (avec deux servo-moteurs)



<http://www.eissq.com/BallandPlate/index.html>

Sommaire

Introduction

Probas

Estimateurs

Champs aléatoires

Morphomaths

Filtre de Kalman

Applications

Le télégraphe de Chappe

Le principe

$n = 25p + 5g + d + 1$

Indications

Image et art contemporain

Dénombrement et suivi

Détection de défauts

basse fréquence

haute fréquence

Une petite balle

Ball and plate

Travail personnel

DM, noté

Rapport

Vous choisirez **une application** illustrant l'un des thèmes abordés en cours :

- ▶ Filtres de Wiener 2D ;
- ▶ Champs de Markov/de Gibbs ;
- ▶ Morphologie mathématique ;
- ▶ Filtre de Kalman ;
- ▶ Flot optiques.

à partir de sources diverses : articles scientifiques, livres techniques, revues spécialisées, ... que vous traiterez **en vous référant aux éléments du cours** et en **écrivant, vous-même, un petit programme de démonstration**. Le programme que vous écrirez peut être restreint à un cas très simple s'il illustre bien le thème.

Votre travail sera évalué sur la base d'un rapport :

- ▶ Les sources bibliographiques doivent être citées, le texte repris sans être référencé sera considéré comme un plagiat ;
- ▶ Le rapport doit se présenter sous la forme d'un unique fichier au format PDF contenant texte et programmes en annexe ;
- ▶ Le rapport fera quelques pages typiquement :
 - ▶ Introduction (choix du thème, justification de l'application...);
 - ▶ Description de l'application/du problème ;
 - ▶ Méthodologie, solution et résultats commentés ;
 - ▶ Conclusion (sur la méthode, sur l'application...);
 - ▶ Bibliographie (exhaustive !)
 - ▶ Annexe : listings

Le rapport est à envoyer à busvelle@u-bourgogne.fr le 31 janvier 2013 au plus tard !