

éthode13.338

Ondelettes: Théorie et Applications

Andrei Doncescu

Table des matières

I	Théorie	3
1	Ondelettes	5
1.1	Introduction	5
1.2	La transformée en ondelettes continue unidimensionnelle	6
1.2.1	Propriétés fondamentales	8
1.2.2	Exemples d'ondelettes	10
1.3	La transformée en ondelettes continue bidimensionnelle	10
1.3.1	Propriétés fondamentales	11
1.3.2	Exemples d'ondelettes bidimensionnelles	11
1.3.3	Applications	12
1.4	Discrétisation de la transformée continue	12
2	Les bancs de filtres	15
2.0.1	Extension des signaux de longueur finie	19
2.1	Les algorithmes pyramidaux	21
2.1.1	Mise en oeuvre des algorithmes pyramidaux	22
3	La multirésolution	25
3.1	Construction de la base orthonormée d'ondelettes	28
3.2	L'équivalence entre analyse multirésolution et les QMF	30
3.3	Représentation de la fonction ϕ et ψ	35
3.4	Exemple d'ondelettes	37
3.5	Les ondelettes biorthogonales	41
4	La transformée en ondelettes discrète multidimensionnelle	43
4.1	Algorithmes pyramidaux et ondelettes $2D$	43
4.2	L'implémentation de la transformée en ondelettes $2D$ discrète et rapide . .	44
II	Applications	47
1	Application de la transformée en ondelettes 2D à la compression d'images	49

III Bibliographie**51**

Première partie

Théorie

Chapitre 1

Ondelettes

1.1 Introduction

Le parcours menant aux ondelettes était long et imprévisible. Au départ les mathématiciens s'intéressaient aux outils pour approximer des fonctions, mais ils se sont rendus compte que le cadre d'approximation devait aussi être développé. Nous arrivons dans le cadre de l'analyse fonctionnelle, les espaces vectoriels se diversifient pour caractériser les propriétés des différentes fonctions [61].

En 1807, J. Fourier démontra qu'une fonction 2π périodique $f(x)$ est la somme $\sum c_k e^{ikx}$ de sa série Fourier, avec pour coefficients de Fourier c_k :

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (1.1)$$

Dans la littérature, la transformée en ondelettes discrète est associée à la transformée en ondelettes orthogonale, ce qui n'est pas toujours le cas. Pour cela, une présentation de la discrétisation de la transformée continue est présentée avant l'introduction de la multirésolution.

L'évolution des ondelettes dans le monde mathématique se fait en cherchant à caractériser les différents espaces fonctionnels. Si les mathématiciens ont développé de nouveaux concepts pour les espaces linéaires, les physiciens sont parvenus à une transformation temps-fréquence. Quant à Gabor, il décompose le signal en fréquences, intervalle par intervalle. Cela revient à comparer un segment de signal à des morceaux de courbes oscillantes de différentes fréquences. Les physiciens, travaillant dans le domaine du traitement du signal, représentent des phénomènes physiques par des sommes de translatés [2].

Morlet remplace la gaussienne de Gabor par une petite onde, "ondelette", de taille variable, dans l'analyse de Fourier à fenêtre [35].

Le pas majeur dans le développement est l'introduction de la multirésolution par Mallat [53]. Il relie la famille des ondelettes orthogonales à des filtres miroirs en quadrature introduits par Galland pour l'amélioration de la transmission téléphonique. Pour obtenir une

fonction d'échelle, donc un résumé, il utilise un filtre passe-bas et pour obtenir les détails, la partie de signal qui change l'allure, il utilise un filtre passe-haut. Cette méthode permet, comme il le remarque, "une interprétation de l'image qui ne varie pas avec l'échelle".

La multirésolution, telle qu'elle est énoncée par Meyer et Mallat, présente les propriétés suivantes :

1. la construction d'une fonction d'échelle est orthogonale à ses translatés par des entiers,
2. le signal à une résolution donnée contient toute l'information du signal aux résolutions grossières,
3. la fonction 0 est le seul objet commun à tous les espaces V_i ,
4. n'importe quel signal peut être approximé avec une précision arbitraire.

Nous pouvons donner une définition empirique des ondelettes : les ondelettes sont des fonctions qui respectent certains critères d'orthogonalité nécessaires pour la construction d'une analyse multirésolution. Cette définition se réduit à la multirésolution en oubliant les autres champs théoriques de la transformée, mais l'expérience historique montre qu'à partir des travaux de Mallat et de Meyer, les chercheurs sont parvenus à un grand nombre d'applications à base d'ondelettes.

Malvar repart de l'analyse de Fourier à fenêtre adaptative en utilisant des fonctions qui ne sont pas des ondelettes, mais permettant d'obtenir des algorithmes rapides à base de fonctions orthogonales. Il va plus loin en utilisant des ondelettes multipliées par des fonctions trigonométriques *les paquets d'ondelettes* pour la compression d'image, il arrive ainsi à une analyse temps-fréquence-échelle [57].

Mallat, propose un nouvel algorithme de segmentation des signaux. Il construit une gaussienne de taille variable, modulée par des sinusodes variables en fréquence et développe ainsi l'algorithme *matching pursuits* de type temps-fréquence-échelle [54].

1.2 La transformée en ondelettes continue unidimensionnelle

La transformée en ondelettes est définie comme le résultat d'un opérateur intégral qui transforme une fonction d'énergie finie $f(x) \in L^2(R)$ en utilisant un ensemble de fonctions ψ_{ab} . Elle est décrite par le produit scalaire entre la fonction ondelette mère ψ_{ab} et une fonction réelle ou complexe $f(x)$ [35].

$$WT_{f,\psi}(a, b) = \langle f | \psi_{ab} \rangle \quad (1.2)$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit scalaire.

Cette transformation modifie l'espace $L^2(\mathbb{R})$ de fonctions complexes d'énergie finie à un espace à deux dimensions : l'espace des coefficients d'ondelettes.

D'après cette interprétation, nous pouvons représenter un signal temporel monodimensionnel $f(x)$ (ou une fonction) sous forme d'un champ à deux dimensions $WT(b, a)$; en faisant varier b (homogène à un temps), et a (homogène à une échelle). Le résultat est une représentation temps-échelle de $f(x)$.

La famille des ondelettes construite par dilatation-translation à partir de l'ondelette mère est définie sous la forme:

$$\psi_{ab}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (1.3)$$

avec $a \neq 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$, ainsi, toutes les ondelettes ont la même énergie.

La transformée continue s'écrit :

$$WT_{f,\psi}(a, b) = \langle f | \psi_{ab} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int f(x) \bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (1.4)$$

où $\bar{\psi}$ désigne le complexe conjugué de ψ .

Pour un signal, une formulation équivalente de WT est donnée à partir des transformées de Fourier de f et ψ [38], si on utilise l'identité de Parseval.

$$2\pi WT_{f,\psi}(a, b) = \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ab} \rangle \quad (1.5)$$

dans laquelle la transformée Fourier de ψ_{ab} est :

$$\hat{\psi}_{ab}(\omega) = \sqrt{|a|} e^{-j\omega b} \hat{\psi}(a\omega) \quad (1.6)$$

L'ondelette mère doit vérifier :

1. la continuité : être absolument intégrable et de carré intégrable (énergie finie).
2. l'analyticité : sa transformée de Fourier doit être nulle pour $\omega < 0$.
3. l'admissibilité : ce qui induit un comportement de filtre passe-bande.

Si ψ est intégrable, la première condition implique que le moment d'ordre 0 de l'ondelette s'annule :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0 \quad \text{ou} \quad \hat{\psi}(0) = 0 \quad (1.7)$$

La condition d'admissibilité établit aussi :

1. que le $\hat{\psi}(\omega)$ décroît suffisamment au voisinage de 0

2. que $\hat{\psi}(\omega)$ peut être interprétée comme un filtre passe-bande et la transformée en ondelettes comme une convolution avec ce filtre.
3. de plus, $\psi(x)$ oscille d'où le nom d'ondelette.

La transformée inverse

Pour la transformée inverse, trois formules d'inversion sont utilisées en fonction du contexte [90]. Les trois formules de reconstruction sont définies en fonction de :

1. l'ondelette qui possède des propriétés de symétrie dans l'espace des fréquences,
2. l'ondelette qui ne possède pas de fréquences négatives,
3. l'introduction de dilatation négative.

La transformée inverse est donnée dans le troisième cas par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{R^* \times R} WT_{f,\psi}(a, b) \psi_{ab}(x) \frac{dad b}{a^2} \quad (1.8)$$

où C_ψ est une constante définie par :

$$0 < C_\psi = 2\pi \int_R |\hat{\psi}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{|\omega|} < \infty \quad (1.9)$$

Remarque

La transformée en ondelettes continue transforme un signal à une dimension en une fonction du demi-plan. Il y a redondance dans l'information présentée par les coefficients d'ondelettes.

1.2.1 Propriétés fondamentales

Conservation de l'énergie

La condition d'admissibilité permet de conclure que la transformée en ondelettes est une isométrie : le carré de la longueur de \hat{f} est égal au carré de la longueur de f . Ce qui se traduit par :

Si ψ est admissible et réelle et $f \in H^2(R)$ l'espace de Hardy (sous-espace vectoriel de $L^2(R)$ contenant les fonctions donc la transformée de Fourier s'annule pour les fréquences négatives), l'égalité suivante est vérifiée :

$$\frac{1}{C_\psi} \int \int |WT_{f,\psi}(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} = \int |f(x)|^2 dt \quad (1.10)$$

L'information contenue dans le signal est conservée dans le passage de f à ses coefficients d'ondelettes.

La transformée inverse permet la reconstruction de la fonction f en sommant toutes les contributions de la transformée directe dans le plan $a \times b$.

Linéarité, invariance par dilatation et translation

La transformée en ondelettes est une application linéaire. Une des propriétés importantes est le principe de superposition qui est respecté.

Dans le domaine du traitement du signal, l'invariance de la transformée sous l'effet de dilatation ou de translation est une propriété importante. Si $WT_{f,\psi}(a, b)$ est la transformée en ondelettes de $f(x)$, alors $WT_{f,\psi}(a, b - x_0)$ est la transformée de $f(x - x_0)$ et $WT_{f,\psi}(a/\lambda, b/\lambda)$ la transformée de $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}f(x/\lambda)$.

Cette propriété n'est pas valable dans le cas de la transformée en ondelettes discrète.

Localisation temps-échelle

La localisation d'ondelettes dans le temps et dans les fréquences permet de représenter la zone d'influence dans le demi-plan temps-échelle $R \times R$ d'un événement se produisant à l'instant x pour le signal f .

Supposons que l'ondelette $\psi(x)$ et sa transformée de Fourier $\hat{\psi}(\omega)$ sont centrées en \bar{x} respectivement $\bar{\omega}$ et leur variance Δ_x^2 et respectivement Δ_ω^2 sont finies, où :

$$\bar{x} = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int x |\psi(x)|^2 dx \quad (1.11)$$

$$\Delta_x^2 = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int (x - \bar{x})^2 |\psi(x)|^2 dx \quad (1.12)$$

(similaire pour $\bar{\omega}$ et Δ_ω), alors nous remarquons, d'après la définition de la transformée en ondelettes, qu'une analyse est réalisée en temps (x) dans l'intervalle $[b + a\bar{x} - a\Delta_x, b + a\bar{x} + a\Delta_x]$ et en fréquence ($\omega = 2\pi\xi$) dans l'intervalle $[(\bar{\omega} - \Delta_\omega)/a, (\bar{\omega} + \Delta_\omega)/a]$. Ces deux intervalles délimitent une fenêtre temps-fréquence déterminée par a et b avec une aire constante et égale à $4\Delta_x\Delta_\omega$.

Dfinition 1.1 *Le principe d'incertitude de Heisenberg énonce que si $\int_R |f(x)|^2 dx = 1$, $|f(x)|^2$ est considéré comme une densité de probabilité, $|f(\xi)|^2$ est aussi une densité de probabilité, alors le produit de la variance de x pour $|f(x)|^2$ et de la variance de ξ pour $|f(\xi)|^2$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{16\pi^2}$.*

Donc, conformément au principe de Heisenberg cette fenêtre est supérieure à 1 [86].

L'avantage de la transformée en ondelettes est de bénéficier d'une localisation temporelle modeste, donc meilleure en fréquence [64].

1.2.2 Exemples d'ondelettes

1) Les conditions présentées pour les ondelettes ne sont pas rigoureusement respectées par toutes les ondelettes, comme l'exemple de l'ondelette de Morlet (gaussienne modulée) :

$$\psi_{morlet}(x) = e^{jcx} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} \quad \alpha, c \in \mathbb{R} \quad (1.13)$$

Par contre, ces conditions sont respectées si une très faible erreur est acceptée pour $c \simeq 5, \alpha \simeq 1$.

2) Le chapeau mexicain qui est la dérivée seconde de la gaussienne.

$$\psi_{mexicain}(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2} \quad (1.14)$$

Cette ondelette est largement utilisée, surtout en fractal par Arneodo [3]. Toutes les dérivées d'ordre supérieur ou égal à 1 de la gaussienne peuvent être considérées

$$\psi(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (1.15)$$

comme ondelettes.

1.3 La transformée en ondelettes continue bidimensionnelle

L'idée est de construire un microscope mathématique permettant la mise en évidence d'une direction privilégiée pour des fonctions bidimensionnelles. Pour cela, la nécessité de l'introduction d'un paramètre, l'angle θ , dans la construction de la famille d'ondelettes, permet de définir une famille d'ondelettes, bien localisées dans l'espace de Fourier, sous la forme [63] :

$$\psi_{ab\theta} = \frac{1}{a} \psi(a^{-1}R^{-1}(\vec{x} - \vec{b})) \quad (1.16)$$

où :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

avec $\theta \in [0, 2\pi]$. La famille d'ondelettes est définie par trois variables : le facteur d'échelle, la position et l'angle.

La transformée en ondelettes est donnée par :

$$WT_{f,\psi}(a, \vec{b}, R) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{x}) \bar{\psi}(a^{-1}R^{-1}(\vec{x} - \vec{b})) d^2\vec{x} \quad (1.17)$$

La formule d'inversion est notée :

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{c_g} \int \int \int WT_{f,\psi}(a, \vec{b}, R)\psi(a^{-1}R^{-1}(\vec{x} - \vec{b}))\frac{da}{a^4}dRd^2\vec{b} \quad (1.18)$$

où dR est la mesure de Haar sur le groupe des rotations.

La transformée continue $2D$ se généralise facilement pour la dimension n .

1.3.1 Propriétés fondamentales

Les propriétés de la transformée en ondelettes en dimension 2 sont identiques à celles en dimension 1, dont la conservation de l'énergie.

L'utilisation de la transformée en ondelettes bidimensionnelle à base des transformées de Fourier est préférable aux formules précédentes parce qu'elle est plus simple.

Dans ce cas, la transformée en ondelettes est une isométrie de $L^2(R^2)$ dans l'ensemble de fonctions définies dans le groupe de dilatation-rotation-translation.

1.3.2 Exemples d'ondelettes bidimensionnelles

En général les ondelettes $2D$ peuvent être obtenues à partir des ondelettes $1D$ par une rotation autour de l'axe y .

Morlet-2D

Un exemple d'ondelettes est la généralisation de l'ondelette de Morlet [72]:

$$\hat{\psi}(\vec{k}) = e^{-\frac{|\vec{k}-\vec{k}_0|^2}{2}} \quad (1.19)$$

où \vec{k}_0 est une direction spécifiée.

Le chapeau mexicain

Le chapeau mexicain radial est obtenu de la gaussienne en dérivant deux fois :

$$\hat{\psi}(\vec{k}) = -||\vec{k}||^2 e^{-\frac{\vec{k}\vec{k}}{2}} \quad (1.20)$$

Ondelettes d'Airy

Elles dérivent des ondelettes de Shannon à une dimension [18].

Ondelettes Halo

Halo est construite sans direction spécifiée [18], elle est donnée par :

$$\hat{\psi}(\vec{k}) = e^{-\frac{|\vec{k}| - |\vec{k}_0|}{2}} \quad (1.21)$$

1.3.3 Applications

La transformée en ondelettes bidimensionnelle s'est développée dans de nombreux domaines en traitement de la parole, applications de type radar/sonar, musique [74], traitement d'image pour la détection de contour [36], analyse d'images ou comme outil pour les fractals non-isotropes [18]. Les travaux d'Arneoldo ont permis la construction d'un formalisme multifractal [4]. En mécanique quantique ou théorie quantique des champs, la transformée en ondelettes continue apparat aussi.

1.4 Discrétisation de la transformée continue

Dans la formule d'inversion, le signal est reconstruit à partir de tous les coefficients d'ondelettes $C_{a,b}$ où les paramètres a, b varient continuellement dans R . Pour l'implémentation de l'algorithme, une discrétisation de ces paramètres est nécessaire [64].

$$a = 2^{m-v/V} \quad b = k2^m \quad (1.22)$$

avec :

- $k \in Z$ représente la position
- $m \in Z$ représente l'indice de l'octave
- $V \geq 1$ représente le nombre de voies par octave
- $0 \leq v \leq V - 1$ représente l'indice de la voie

Plusieurs méthodes de discrétisation sont utilisées :

1. l'algorithme "dyadique"

Les ondelettes élémentaires s'écrivent alors :

$$\psi_{m,v,k} = 2^{-(m-v/V)/2} \psi(2^{-(m-v/V)}x - k) \quad (1.23)$$

et les coefficients d'ondelettes sont obtenus par :

$$C_{m,v,k}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi_{m,v,k}(x)dx \quad (1.24)$$

Entre le signal reconstruit par les coefficients en ondelettes et le signal original, existe l'égalité, à une constante multiplicative près, dans le sens de la conservation de l'énergie. La formule de reconstruction est obtenue en additionnant toutes les contributions élémentaires.

$$\bar{s}(x) = K_{\psi} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{V-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{m,v,k}(s)\psi_{m,v,k}(x)dx \quad (1.25)$$

$K_{\psi} \in \mathbb{R}$.

La redondance entre les différentes voies permet la reconstruction à partir d'une voie : la voie 0.

$$\bar{s}(x) = K'_{\psi} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{m,k}(s)\psi_{m,k}(x)dx \quad (1.26)$$

avec $C_{m,k}(s) = C_{m,0,k}(s)$ et $\psi_{m,k} = \psi_{m,0,k}(x)$.

Remarque

Nous avons vu qu'il est possible de simplifier l'algorithme grce à l'approximation utilisée mais le calcul des coefficients d'ondelettes reste encore un handicap majeur de la transformée en ondelettes continue.

Nous remarquons aussi que le support temporel de l'ondelette double lorsque il y a une diminution d'une octave. Une méthode éliminant cet inconvénient est l'algorithme à "trous".

2. l'algorithme à "trous"

Le principe de cet algorithme à trous est de "sous-échantillonner" le signal à chaque fois que l'on descend d'une octave [65]. Théoriquement, ce principe est en accord avec le théorème de Shannon. En descendant d'une octave, la bande de fréquence analyse décroît, elle, de moitié. Donc, conserver un échantillon sur deux nous permet de représenter le signal sans perte d'information. En réalité, la bande passante de l'ondelette n'est pas parfaite, de l'information est perdue. En conséquence, la réalisation d'un préfiltrage passe-bande avant de sous-échantillonner le signal est nécessaire.

L'avantage de l'algorithme à trous réside dans la possibilité d'utilisation d'une seule ondelette par voie, quelle que soit l'octave.

3. l'algorithme récursif

Une autre méthode est proposée par Barrat et Lepetit [49]. Ils cherchent une ondelette proche de celle de Morlet mais possédant une transformée en Z , ce qui ramène les calculs des coefficients à des relations de récurrence.

La fonction mère choisie par Barrat et Lepetit est de la forme :

$$\psi(x) = (1 + \sigma|x|)e^{-\sigma|x|}e^{ic'x} \quad (1.27)$$

avec $\sigma = 1.5$ et $c' = 8$, cette fonction mère ne remplit pas complètement les conditions mathématiques.

L'avantage de cet algorithme est la possibilité d'accès à tous les coefficients pour une complexité de calcul globale comparable avec l'approximation dyadique.

Chapitre 2

Les bancs de filtres

La transformée en ondelettes discrète a été mise en oeuvre à l'aide de deux techniques :

1. les bancs de filtres pour la transformée en ondelettes $1D$,
2. les algorithmes pyramidaux pour la transformée en ondelettes $2D$.

Les bancs de filtres sont obtenus à partir des différentes techniques numériques permettant de répartir le calcul sur un ensemble de filtres, ce qui représente un avantage considérable. L'intérêt de cette méthode est la possibilité de déterminer les propriétés statistiques du signal dans chaque bande de fréquence pour permettre une meilleure reconstruction [9].

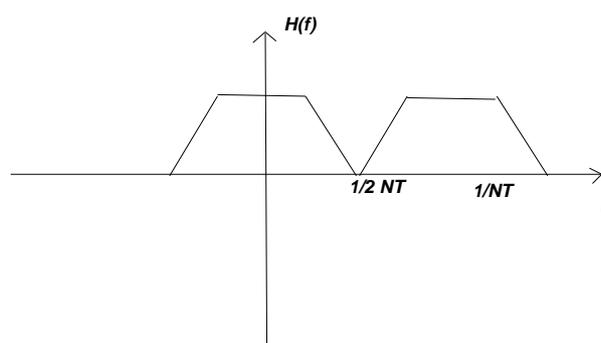


FIG. 2.1 - Construction des bancs de filtres.

Dfinition 2.1 *Un banc de filtres est un ensemble de N filtres couvrant la bande $[0, f_s]$, où f_s est la fréquence d'échantillonnage. Il est obtenu par la translation en fréquence d'un filtre de base de la forme $m f_s / N$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $2 \leq N$. [44].*

Remarque

Le principe de base d'un banc de filtres consiste à décomposer un signal discret $x[n]$ dans le domaine fréquentiel en un nombre quelconque de bandes fréquentielles consécutives, pour que chaque "sous-signal" $x_k[n]$ puisse se traiter de façon indépendante.

La partie analyse utilise un décimateur $M \downarrow$ qui produit à partir d'une séquence $x[n]$ une séquence $y[n]$ telle que :

$$y[n] = x[Mn] \quad (2.1)$$

où $M = 2, 3, 4, \dots$

La séquence $y[n]$ ainsi obtenue est une version contractée de la séquence $x[n]$ dont $M - 1$ échantillons ont été retirés.

Il faut remarquer qu'un décimateur n'est pas un système invariant par translation dans le temps, même s'il est linéaire. En conséquence, il ne peut pas se représenter par une fonction de transfert.

La partie synthèse utilise un interpolateur $M \uparrow$ qui insère $M - 1$ zéros entre les échantillons adjacents du signal initial. Le résultat de cette opération est une contraction dans le domaine fréquentiel.

Cas particulier, un banc de filtres à deux canaux utilise 2 filtres d'analyse et 2 filtres de synthèse qui permettent l'introduction des filtres miroirs en quadrature.

Soient H_0 et H_1 les filtres d'analyse (H_0 est un filtre passe-bas et H_1 est un filtre passe-haut), G_0 et G_1 les filtres de synthèse ; la relation entre le signal d'entrée $X(\omega)$ et le signal de sortie $\hat{X}(\omega)$, en fonction de la transformée de Fourier d'un signal $x[n]$ permet d'écrire :

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega)[H_0(\omega)G_0(\omega)+H_1(\omega)G_1(\omega)]+\frac{1}{2}X(\omega+\pi)[H_0(\omega+\pi)G_0(\omega)+H_1(\omega+\pi)G_1(\omega)] \quad (2.2)$$

Le premier terme représente les distorsions introduites par le système phase et amplitude, le deuxième représente l'aliasing.

Les recherches dans ce domaine s'efforcent à améliorer la phase d'analyse et de synthèse en éliminant les effets :

1. d'aliasing ou de repliement de spectre (ceci en annulant le deuxième terme),
2. la reconstruction exacte (ceci en imposant le premier terme égal à $2e^{-j\omega n}$.

Deux type de filtres sont proposés :

Les filtres miroirs en quadrature - QMF

Les *QMF* sont obtenus en imposant aux filtres H_0, H_1, G_0, G_1 les conditions suivantes [29] :

$$H_1(\omega) = H_0(\omega + \pi) \quad (2.3)$$

$$G_0(\omega) = H_0(\omega) \quad (2.4)$$

$$G_1(\omega) = -H_0(\omega + \pi) \quad (2.5)$$

Les filtres *QMF* s'écrivent en fonction de la transformée en Z :

$$H_0(z) = |H_0(z)|z^{-\frac{N-1}{2}} \quad (2.6)$$

$$G_0(z) = |G_0(z)|z^{-\frac{N-1}{2}} \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

La relation entre les deux est : l'un sera l'image miroir de l'autre par rapport à la fréquence $\frac{1}{4}$.

$$G_0(z) = H_0(-z) \quad (2.9)$$

$$g_0(n) = (-1)^n h_0(n) \quad (2.10)$$

pour une fonction de transfert de :

$$T(z) = \frac{1}{2} [|H_0(z)|^2 - (-1)^{N-1} |G_0(z)|^2] z^{-(N-1)} \quad (2.11)$$

Remarque :

Les filtres *FIR - QMF* sont des filtres de type analyse/synthèse avec une distorsion d'aliasing nulle, mais comprenant des petites distorsions d'amplitude. La distorsion de phase est éliminée.

Les filtres conjugués en quadrature - CQF

Smith et Barnwell réalisent une nouvelle famille de bancs de filtres les *Conjugate Mirror Filters (CQF)* capables d'éliminer l'aliasing et les distorsions de spectre. Pour cela, ils sacrifient la linéarité de phase [83].

Pour deux bandes, les deux filtres sont H_0 et H_1 , le premier est un filtre passe-bas et le deuxième un filtre passe-haut. Les deux filtres sont symétriques conjugués autour de la fréquence centrale.

Les filtres conjugués en quadrature satisfont les conditions suivantes :

$$H_1(\omega) = -\overline{H_0(\omega + \pi)}e^{-jn\omega} \quad (2.12)$$

$$G_0(\omega) = H_1(\omega + \pi) \quad (2.13)$$

$$G_1(\omega) = -H_0(\omega + \pi) \quad (2.14)$$

La relation entre les deux est : l'un sera l'image symétrique de l'autre par rapport à la fréquence $\frac{1}{4}$.

$$G_0(z) = -H_0(-z^{-1})z^{-(N-1)} \quad (2.15)$$

$$g_0(n) = (-1)^{n+1}h_0(N-1-n) \quad (2.16)$$

pour une fonction de transfert de :

$$T(z) = \frac{1}{2}[H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1})]z^{-(N-1)} \quad (2.17)$$

Remarque Les filtres *CQF* permettent la reconstruction exacte avec une phase approximativement linéaire et forment une famille de filtres orthogonaux.

Remarque :

Les filtres H_1, G_0 et G_1 se déduisent du seul H_0 , par transformation ou modulation des relations ci-dessus. Il est clair que si H_0 est défini, les trois autres fonctions sont déduites telles que :

$$G_1(\omega) = -H_0(\omega + \pi) \quad (2.18)$$

et si :

1. $H_1(\omega) = H_0(\omega + \pi)$ avec $G_0(\omega) = H_0(\omega)$ un banc de filtres *QMF* est obtenu
2. $H_1(\omega) = -\overline{H_0(\omega + \pi)}e^{-jn\omega}$ avec $G_0(\omega) = H_1(\omega + \pi)$ un banc de filtres *CQF* est obtenu.

L'obtention de filtres causaux, à réponse impulsionnelle finie et (ou) symétrique, passe par des coefficients de filtres nuls pour des indices négatifs (réponse impulsionnelle finie) et (ou) la relation suivante (propriété de symétrie) [?] :

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{k=2p+1} h_k e^{ik\omega} \quad (2.19)$$

avec $h_{p+k+1} = h_{p-k}$ pour $k = 1 \dots p$.

2.0.1 Extension des signaux de longueur finie

L(c)application de bancs de filtres sur un signal fini produira des effets de bord, dus à l'impossibilité de tronquer le signal à la longueur de sous-bandes.

Cet effet peut être éliminé en appliquant une extension périodique ou une extension symétrique [67].

Extension périodique Une convolution entre le signal de longueur N avec une suite d(c)impulsions de Dirac situées en $n = mN$ est à réaliser [93]. Le signal étendu $\tilde{x}[n]$ est :

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - Nm] \quad (2.20)$$

Cette méthode proposée par Woods et O(c)Neill est équivalente à l(c)implémentation de filtres d(c)analyse par convolution circulaire.

Extension symétrique Nous avons quatre méthodes d'implémentation :

1. le signal est rendu symétrique autour de $n = -\frac{1}{2}$. Dans ce cas, le signal est périodique de période $2N$.

$$x[n] = \begin{cases} x[n] & \text{si } 0 \leq n < N \\ x[-n - 1] & \text{si } N - 1 \leq n \end{cases}$$

2. l(c)extension symétrique est obtenue sans la duplication des valeurs de bord et le signal est périodique de période $2N - 2$ [67].

$$x[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n < N \\ x[-n] & -N + 2 \leq n < 0 \end{cases}$$

3. dans ce cas, les valeurs de bord sont dupliquées avec une longueur égale au signal [66]

$$x[n] = \begin{cases} x[0] & n < 0 \\ x[n] & 0 \leq n < N \\ x[N - 1] & N \leq n \end{cases}$$

4. c'est une méthode de zéro padding, dans laquelle des zéros sont introduits

$$x[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

5. Karlsson et Vetterli proposent une double symétrie [40], le signal est retourné en temps et en amplitude en impliquant la continuité de premier ordre.

$$x[n] = \begin{cases} 2x[0] - x[-n] & n < 0 \\ x[n] & 0 \leq n < N \\ 2x[N-1] - x[2(N-1) - n] & n \geq N \end{cases}$$

Dans la figure suivante, une représentation des 5 méthodes est donnée en partant d'un signal échantillonné :

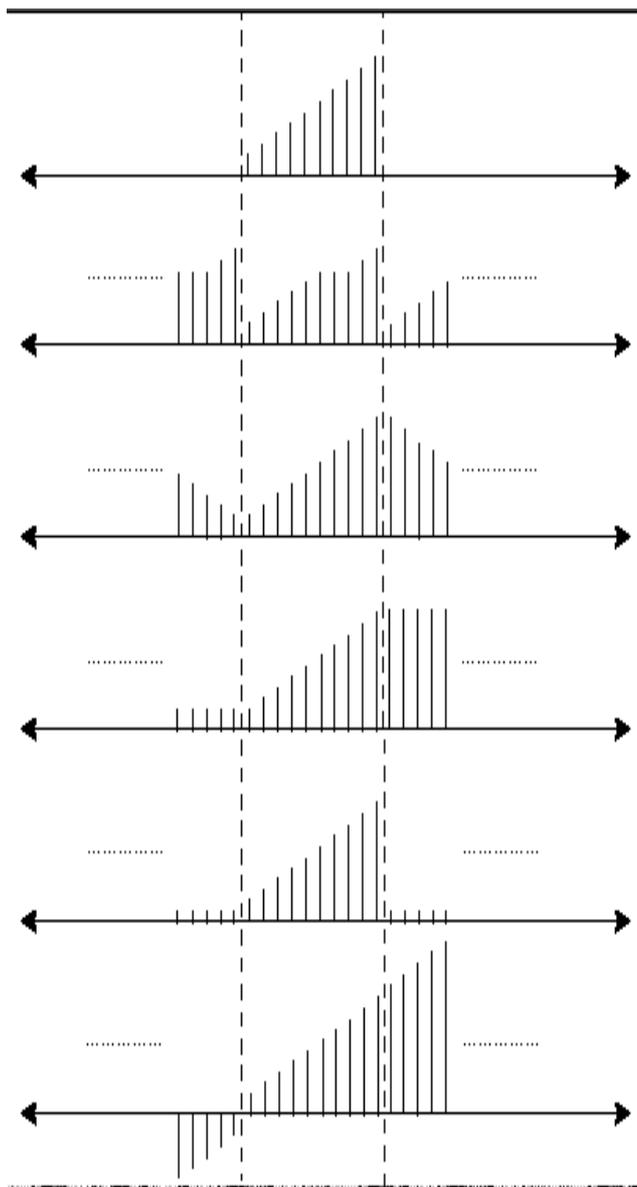


FIG. 2.2 - Les différentes méthodes d'extension d'un signal.

2.1 Les algorithmes pyramidaux

Depuis des années, les chercheurs travaillent sur différentes possibilités de compression d'image et sur l'information pouvant être extraite entre deux échantillons d'une image. Les algorithmes pyramidaux ont été implémentés par Burt et Adelson avant que Mallat ne développe le concept d'analyse multirésolution. Ils partent de la supposition qu'un signal échantillonné contient une information cachée par les échantillons, qui sont corrélés. Pour décrire cette corrélation, les spécialistes en traitement du signal ont appliqué la convolution par des signaux bien localisés en fréquence.

Les algorithmes recherchés doivent contenir le moins de calculs possibles. Le laplacien pyramidal répond à cette exigence par un algorithme de faible complexité.

Cet algorithme peut être appliqué pour les signaux unidimensionnels ou pour les images. Par une suite de filtrages passe-bas et de sous-échantillonnages successifs, le signal d'entrée est transformé en une suite de sous-signaux ordonnés sous forme d'une pyramide.

Soit le produit de convolution :

$$c_n = \sum_k h_{n-k} s_k \quad (2.21)$$

Si le signal h_n est tel que le support de sa transformée Fourier soit concentré dans $[-\pi/2, \pi/2]$, la transformée Fourier de ce produit de convolution est une fonction 2π périodique de même support que la transformée de Fourier de h_n .

Donc, si c_n est sous-échantillonné d'un facteur modulo 2 le produit :

$$s_n^1 = \sum_k h_{2n-k} s_k^0 = H * s^0 \quad (2.22)$$

est un signal basse-fréquence lissé dans lequel le même traitement peut être appliqué et ainsi de proche en proche :

$$s_n^j = \sum_k h_{2n-k} s_k^{j-1} = H * s^{j-1} \quad (2.23)$$

Pour revenir au signal initial, il faut insérer des zéros aux points intermédiaires et la convolution se fait par un filtre H^* qui est l'adjoint de l'opérateur de convolution précédent. La reconstruction par des méthodes de zéro padding produit des phénomènes de flou pour les images et une perte significative d'information pour les signaux unidimensionnels.

$$\tilde{s}_n^j = \sum_k h_{n-k}^* s_k^{j+1} = H^* s^{j+1} \quad (2.24)$$

La solution est de récupérer la différence entre deux niveaux successifs de la pyramide :

$$d_n^j = s_n^{j-1} - \tilde{s}_n^{j-1} = (1 - H^* H) s^{j-1} \quad (2.25)$$

L'idée de Burt et Adelson était de caractériser un signal par son résumé à une résolution donnée obtenue comme un filtrage passe-bas et les détails à chaque niveau de la pyramide.

$$s_0 = H^* s_1 + d_1 = H^{*2} s_2 + H^* d_2 + d_1 = H^{*L} s_2 + H^{*L-1} + \dots + H^* d_2 + d_1 \quad (2.26)$$

L'algorithme est en cascade comme la *FFT* et le nom de pyramidal vient du fait qu'à chaque niveau de décomposition, la taille de notre signal est diminuée [45].

Pour la reconstruction, la pyramide est inversée.

La complexité de l'algorithme pour un niveau égal à L dans le cas d'un signal monodimensionnel est :

$$N + \frac{N}{2} + \dots + \frac{N}{2^L} = 2N(1 - 2^{-1-L}) \quad (2.27)$$

et dans le cas d'un signal bidimensionnel :

$$N \times N + \frac{N}{2} \times \frac{N}{2} + \dots + \frac{N}{2^L} \times \frac{N}{2^L} = N \times N(1 + \dots + \frac{1}{2^{2L}}) \approx \frac{4}{3}(N \times N) \quad (2.28)$$

2.1.1 Mise en oeuvre des algorithmes pyramidaux

La construction de filtre passe-bas utilisable dans l'algorithme décrit, impose les conditions suivantes [12],[5] :

1. H est un filtre réel, discret.
2. La réponse impulsionnelle est finie, donc le support est de taille impaire $2M + 1$.

$$h_n = 0, \quad |n| \geq M \quad (2.29)$$

3. "symétrie pour la linéarité de la phase ou la nullité de la phase", cette condition garantit une réponse impulsionnelle réelle mais aussi les conditions nécessaires à l'élimination d'effet de bord.

$$h_n = h_{-n} \quad \forall n \quad (2.30)$$

4. la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas à bande passante égale ou inférieure à une octave évite l'aliasing d à la décimation.
5. les filtres sont normalisés pour la conservation de la dynamique et aussi pour l'homogénéité des calculs.

$$\sum_n h_n = 1 \quad (2.31)$$

6. l'équi-contribution : la contribution de chaque pixel de l'image originale à une image quelconque de la pyramide doit être identique à tous les niveaux.

$$\sum_n h_{2n} = \sum_n h_{2n+1} \quad (2.32)$$

Le système résume les conditions présentées :

$$h_n = h_{-n} \quad (2.33)$$

$$\sum_n h_n = 1 \quad (2.34)$$

$$\sum_n h_{2n} = \sum_n h_{2n+1} \quad (2.35)$$

Si a est pris comme paramètre une solution pour le filtre H est :

$$h_0 = a \quad (2.36)$$

$$h_{-1} = h_1 = 0.25 \quad (2.37)$$

$$h_{-2} = h_2 = 0.25 - 0.5a \quad (2.38)$$

Les différentes valeurs pour a sont : $a \in \{3/8, 1/2, 0.6, 0.7, 0.8, 1\}$

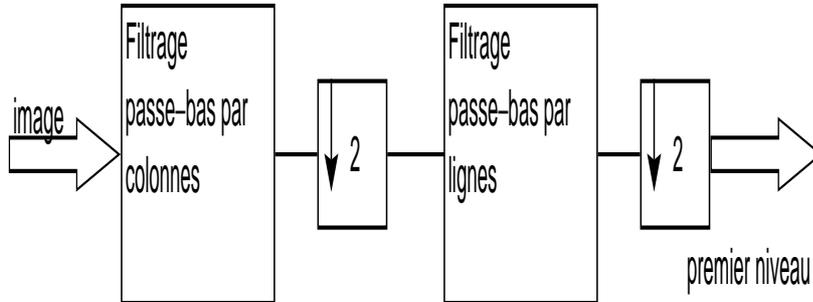


FIG. 2.3 - Construction de la pyramide passe-bas.

L'algorithme pyramidal présente l'avantage d'être rapide sans être capable de bien justifier le choix de filtres passe-bas utilisés.

Si dans l'algorithme pyramidal deux suites sont considérées :

$$\sum_k h_{n-k} s_k \quad \text{et} \quad \sum_k g_{n-k} s_k \quad (2.39)$$

où h_n et g_n sont deux filtres numériques, un premier filtre passe-bas et un second filtre passe-haut, nous pouvons décimer 1 sur 2 et remplacer la valeur obtenue par un 0.

Chapitre 3

La multirésolution

Une introduction intéressante est donnée par Burke qui prend l'exemple de précision de cette opération algébrique donne des informations conformes à nos applications. Nous pouvons considérer une approximation 12.5 et des détails 0.07 ou 0.0714.

La notion de *résolution* a déjà été utilisée par Marr [58] pour la représentation de l'information à des échelles différentes (multirésolution), puisqu'une image est constituée des structures de tailles très différentes.

Les décompositions utilisées en traitement d'image (Haar, splines cubiques...) ont employé une fonction d'échelle qui permet de faire varier la résolution.

La définition de l'analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ énoncée par Y. Meyer est une généralisation de la notion de résolution utilisée [79].

Dfinition 3.1 *On appelle analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ une suite croissante V_j , $j \in \mathbb{Z}$ de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes :*

1. $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}$
2. $\bigcap_{j=-\infty}^{j=\infty} V_j = 0$ $\bigcup_{j=-\infty}^{j=\infty} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$
3. $\forall j \in \mathbb{Z} f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$
4. $\forall k \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_0 \iff f(x - k) \in V_0$
5. Il existe une fonction $\phi(x) \in V_0$ telle que :
 - (a) l'intégrale de cette fonction est différente de zéro.
 - (b) $(\phi(x - k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$ est une base de Riesz de V_0

La condition 1 exprime que le signal, à une résolution donnée, contient toutes les informations du signal aux résolutions plus grossières, donc l'espace V_0 est contenu dans V_1 .

La condition 2 donne la fonction qui est le seul objet commun à tous les espaces V_j .

La condition 3 fournit le facteur de compression entre deux résolutions.

Les conditions 4 et 5 conduisent à la construction de la fonction d'échelle devant être orthogonale à ses translatés par des entiers. Nous pouvons remarquer que l'invariance par échelle des ondelettes continues est remplacée par l'invariance par translation.

La définition de la multirésolution implique une relation simple $V_j \subset V_{j+1}$, donc $\exists W_j$ telle que :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (3.1)$$

W_j est dit complément de V_j dans V_{j+1} . L'espace V_j contient l'approximation à la résolution j et l'espace W_j les détails. Si les équations sont écrites de manière récursive, nous obtenons :

$$V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots = L^2(\mathbb{R}) \quad (3.2)$$

Thorme 3.1 *Si $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est une analyse multirésolution alors il existe une fonction $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ qui s'appelle fonction d'échelle, telle que, la famille de fonctions*

$$\phi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k) \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

est une base orthonormée de V_j . [53]

Dfinition 3.2 *Une fonction ψ s'appelle ondelette si la collection de fonctions $\psi(x-l) | l \in \mathbb{Z}$ est une base de Riesz de W_0 . La collection de fonctions $\{\psi_{j,l} = \sqrt{2^j} \psi(2^j x - l) | l, j \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz. En sachant que ψ est aussi un élément de V_1 , la fonction peut être décomposée d'après la base orthogonale ϕ donc :*

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2x - k) \quad (3.4)$$

Une propriété importante de la multirésolution réside dans la possibilité d'approximer arbitrairement une fonction. L'opérateur de projection P_j dans l'espace V_j appliqué à la fonction f est [88] :

$$P_j f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} \quad (3.5)$$

Exemples d'analyse multirésolution :

1. **Analyse de Haar** : les espaces de fonctions V_j sont les fonctions en escaliers. La fonction ϕ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, 1)$.
2. **Analyse de Shannon** : avec des fonctions $\phi = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$.
3. **Analyse de LittleWood-Paley** comme une correction du cas précédent avec des fonctions ϕ qui appartiennent à la classe de Schwartz.

3.1 Construction de la base orthonormée d'ondelettes

La multirésolution permet d'introduire une fonction $\phi \in V_0 \subset V_1$, et une suite $h_k \in L^2(\mathbb{Z})$ qui permettent de satisfaire :

$$\phi(x) = 2 \sum_k h_k \phi(2x - k) \quad (3.6)$$

Cette équation s'appelle l'équation de dilatation normalisée et si devant cette équation à la place de 2 nous mettons $\sqrt{2}$, l'équation s'appelle *équation de dilatation*. Si l'équation est intégrée puis divisée par l'intégrale de ϕ nous avons [88] :

$$\sum h_k = 1 \quad (3.7)$$

$$\int \phi(x) dx = 1 \quad (3.8)$$

L'approximation des fonctions simples, comme les constantes, impose une condition sur les fonctions ϕ :

$$\sum_k \phi(x - k) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

La transformée Fourier appliquée sur l'équation d'échelle donne :

$$\hat{\phi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.10)$$

où :

$$H(\omega) = \sum_k h_k e^{-jk\omega} \quad (3.11)$$

Définition 3.3 Une fonction filtre est une fonction H élément de $L^2(\mathbb{T})$, espace des fonctions π -périodique de carré intégrable sur $[0, 1]$. A H est associée bijectivement une suite $h(n)$ de $l^2(\mathbb{Z})$ vérifiant :

$$H(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-jn\omega} \quad (3.12)$$

Donc, H est une fonction filtre.

Sachant que $\hat{\phi}(0) = 1$, une formule récursive pour la fonction $\hat{\phi}$ peut être déduite :

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\omega) \quad (3.13)$$

Cette construction est intéressante par la facilité de la construction de ϕ à partir des coefficients h_k .

En regardant les équations précédentes nous nous rendons compte que la condition d'approximation d'une constante est réalisée si :

$$H(0) = 1 \text{ ou } \sum_k h_k = 1 \quad (3.14)$$

Thorme 3.2 Soit $\phi(x)$ une fonction d'échelle d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ et H , un filtre discret de réponse impulsionnelle $h_n = \langle \phi_{10}, \phi_{0n} \rangle$ avec $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$ [53]. Considérons $H(\omega)$ la série Fourier définie par :

$$H(\omega) = \sum_k h_k e^{-jk\omega} \quad (3.15)$$

alors $H(\omega)$ satisfait les deux propriétés suivantes :

$$|H(0)| = 1 \quad (3.16)$$

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (3.17)$$

Réciproquement, soit $H(\omega)$ une série Fourier, satisfaisant les conditions précédentes, telle que :

$$|H(\omega)| \neq 0, \forall \omega \in [0, \pi/2]$$

alors la fonction définie par :

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} H(2^{-p}\omega)$$

est la transformée de Fourier de la fonction d'échelle d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$.

ce qui implique :

$$H(\pi) = 0 \text{ ou } \sum_k (-1)^k h_k = 0 \quad (3.18)$$

Thorme 3.3 Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$, $\phi(x)$ la fonction d'échelle et H , le filtre associé. L'ondelette est donnée par [53] :

$$\hat{\psi}(2\omega) = G(\omega) \hat{\phi}(\omega) \quad (3.19)$$

$$G(\omega) = e^{j\omega} \overline{H(\omega + \pi)} \quad (3.20)$$

Si l'on note $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$, alors $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_j . [53].

3.2 L'équivalence entre analyse multirésolution et les QMF

Les définitions de la multirésolution et de la fonction de filtrage ont été présentées. Entre les deux il existe une équivalence qui nous permet d'associer aux deux fonctions ψ et ϕ deux fonctions filtres m_0 et m_1 . Le résultat est important au niveau de la construction des algorithmes multirésolutions :

Condition nécessaire :

Soit une analyse multirésolution de fonction d'échelle ϕ et d'ondelette ψ et H et G de réponses impulsionnelles $h(n)$ et $g(n)$, deux fonctions filtres associées à ϕ et ψ , telles que :

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_j h_j \phi(2x - j) \quad (3.21)$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_k h_k e^{-jk\omega/2} \right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.22)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_j g_j \psi(2x - j) \quad (3.23)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_k g_k e^{-jk\omega/2} \right) \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.24)$$

posons :

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_k h_k e^{-jk\omega} \right) \quad (3.25)$$

$$m_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_k g_k e^{-jk\omega} \right) \quad (3.26)$$

ayant les transformées de Fourier données par les équations d'échelles et d'ondelettes :

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \right] \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{\phi}(0) \prod_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right] \quad (3.27)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.28)$$

donc, $m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_0(\omega)$ et $m_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_0(\omega)$, alors les relations suivantes existent en utilisant les relations présentées dans ce chapitre :

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (3.29)$$

$$|m_1(\omega)|^2 + |m_1(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (3.30)$$

$$m_0(\omega) \bar{m}_1(\omega) + m_0(\omega + \pi) \bar{m}_1(\omega + \pi) = 0 \quad (3.31)$$

$$m_0(0) = 1 \quad (3.32)$$

la dernière relation est déterminée par la relation 4.34 . Les quatre conditions signifient que m_0 et m_1 sont des **filtres miroirs en quadrature** [72].

Nous pouvons remarquer que les propriétés :

$$m_0(0) = 1 = m_1(\pi) \implies m_0(\pi) = 0 = m_1(0) \quad (3.33)$$

indiquent que $m_0(\omega)$ est une fonction filtre passe-bas et $m_1(\omega)$ une fonction filtre passe-haut.

Condition suffisante :

Soit m_0 une fonction π périodique vérifiant les conditions suivantes :

$$m_0(0) = 1 \quad (3.34)$$

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (3.35)$$

Ces conditions ne sont pas suffisantes pour que la fonction ϕ définie par les formules de récurrence engendre une analyse multirésolution.

Une condition suffisante est donnée par Mallat :

Thorme 3.4

$$\forall \omega, \exists \rho > 0 \text{ t.q. } |\omega| < \frac{\pi}{2} \implies |m_0(\omega)| > \rho \quad \forall \omega \quad (3.36)$$

Condition nécessaire et suffisante :

Daubechies donne une condition différente ajoutée aux conditions nécessaires [22] :

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1 + e^{j\omega}}{2}\right)^N m(\omega) \text{ avec } \sup_{\omega} |m(\omega)| \leq 2^{N-\frac{1}{2}} \quad (3.37)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour m_0 déterminant une analyse multirésolution est donnée par Cohen [16]. Le théorème de Cohen peut se traduire par une relation plus facile à tester en utilisant la matrice A de coefficients a_{jk} :

$$a_{jk} = \sum_{n=0}^N h_n \bar{h}_{k-2j-n} \quad (3.38)$$

$|j|, |k| \leq N - 1$ ne doit pas avoir la valeur propre 1 dégénérée.

Conclusion

Le filtre H associé à la fonction d'échelle est de type passe-bas et il satisfait les propriétés suivantes :

$$H_0(0) = \sqrt{2} \quad H_0(\pi) = 0 \quad (3.39)$$

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (3.40)$$

Les équations présentées se traduisent par les relations suivantes entre les coefficients des filtres :

$$H_0(0) = \sqrt{2} \Rightarrow \sum_k h_k = \sqrt{2} \quad (3.41)$$

$$g_j = (-1)^j \overline{h_{1-j}} \quad (3.42)$$

$$\sum_k g_k = 0 \quad (3.43)$$

$$\sum_k h_k \overline{h_{k+2m}} = \delta_{0m} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (3.44)$$

G_0 est un filtre passe-haut :

$$G_0(\omega) = -e^{-j\omega} \overline{H_0(\omega + \pi)} \quad (3.45)$$

$$G_0(\pi) = \sqrt{2} \quad G_0(0) = 0 \quad (3.46)$$

Remarque

$$\int \psi(x) dx = 0 \quad (3.47)$$

$$\int \phi(x) dx = 1 \quad (3.48)$$

Les relations présentées conduisent à la construction d'un banc de filtre à partir de la transformée en ondelettes. Celle-ci est reliée à deux bases orthogonales constituées des fonctions ψ_h et ϕ_k . Si les fonctions sont absentes ou leur formulation mathématique est difficile, les filtres associés H et G sont utilisés [22]. La théorie des bancs de filtres offre une solution pour l'implémentation de la transformée en ondelettes mais sert aussi de point de départ à la partie théorique de la transformée.

Si nous avons une séquence d'entrée x_i filtrée par un filtre en quadrature h_k, g_k , les séquences de sortie obtenues par le filtre passe-bas et le filtre passe-haut sont :

$$y_i = \sum_k h_k x_{2i-k} \quad (3.49)$$

$$z_i = \sum_k g_k x_{2i-k} \quad (3.50)$$

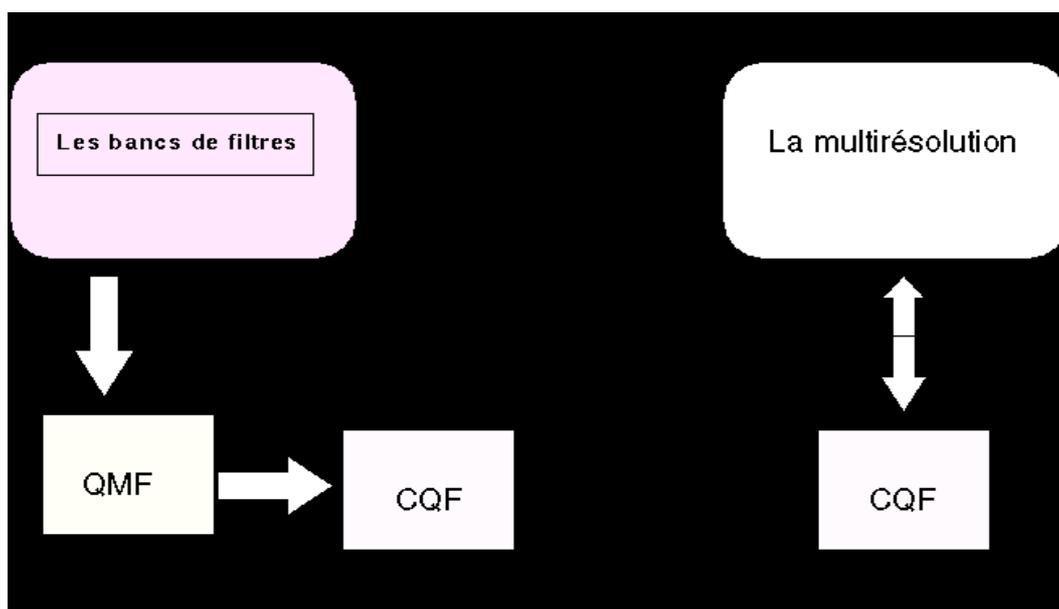


FIG. 3.1 - La comparaison entre les bancs de filtres et la multirésolution.

Sous la forme matricielle :

$$y = Hx \quad (3.51)$$

$$z = Gx \quad (3.52)$$

où la forme matricielle H est obtenue à partir de la matrice de convolution, où les lignes sont décalées de deux pour assurer l'échantillonnage

$$H = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ \dots & & & & & & & \end{pmatrix}$$

et G est défini de façon similaire à partir des coefficients g_k .

Comme nous avons vu, le filtre H est un filtre passe-bas et G un filtre passe-haut, ce qui implique que le filtre H lissera et le filtre G récupérera les détails de notre signal.

La reconstruction du signal x_i est obtenue :

$$x_i = \sum_k h_{i-2k} y_k + g_{i-2k} z_k \quad (3.53)$$

sous la forme matricielle, elle devient :

$$x = H^T y + G^T z \quad (3.54)$$

où H^T et G^T sont les matrices transposées.

Les conditions sur les filtres peuvent s'écrire sur la forme matricielle :

$$H^T H + G^T G = I_d \quad (3.55)$$

$$GH^T = HG^T = 0 \quad (3.56)$$

$$GG^T = HH^T = I_d \quad (3.57)$$

Pour un signal de longueur 2^N la décomposition en ondelettes est réalisée par un algorithme de type bancs de filtres. Pour chaque niveau, le signal est divisé par 2. Les coefficients obtenus par le filtre H sont appelés coefficients d'échelles et ceux obtenus par le filtre G les coefficients d'ondelettes.

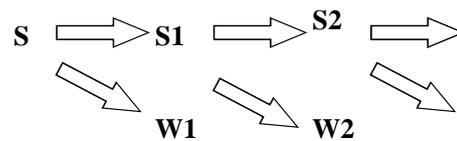


FIG. 3.2 - L'algorithme de décomposition en ondelettes de type multirésolution.

3.3 Représentation de la fonction ϕ et ψ

Pour tracer la fonction d'échelle et la fonction en ondelette nous avons la possibilité d'utiliser trois algorithmes :

1. Algorithme en cascade
2. Calcul à partir des valeurs entières
3. Calcul à partir de la transformée Fourier

1. Algorithme en cascade

Pour passer d'une résolution $i+1$ à une résolution i nous avons la relation de récurrence [23] :

$$\phi_{i,0}(x) = \sum_j h_j \phi_{i+1,j}(x) \quad (3.58)$$

qui peut se généraliser sous la forme :

$$\phi_{i,k}(x) = \sum_j h_j \phi_{i+1,2k+j}(x) = \sum_j h_{j-2k} \phi_{i+1,j}(x) \quad (3.59)$$

Cette relation de récurrence peut s'appliquer pour la construction de la fonction ϕ si nous utilisons l'algorithme pyramidal.

Partant de l'expression :

$$x_0 = \dots 000010000\dots, \quad (3.60)$$

pouvant être perçu comme un signal de Dirac $\delta_{0,k}$, le produit scalaire $\langle \phi, \phi_{j,k} \rangle$ est appliqué. La convergence est assurée conformément à Daubechies [24] et une bonne approximation est obtenue si j est élevé. Nous pouvons appliquer la forme matricielle de la transformée en ondelettes :

$$x_{i+1} = \sqrt{2} H^T x_i \quad (3.61)$$

et obtenir ainsi l'allure de la fonction d'échelle. Pour la fonction ondelette :

$$x_1 = \sqrt{2} G^T x_0 \quad (3.62)$$

puis :

$$x_{i+1} = \sqrt{2} H^T x_i \quad (3.63)$$

pour $i \geq 1$.

2. Calcul à partir des valeurs entières

Le deuxième algorithme s'utilise si la fonction ϕ est connue dans les points 2^k , $n, k \in \mathbb{N}$. La relation entre $\phi(x)$ et $\phi(2x)$ permet de retrouver la relation :

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_j h_j \phi(2x - j) \quad (3.64)$$

Pour déterminer les valeurs entières de $\phi(0), \phi(1) \dots \phi(n)$ où n est la longueur de notre séquence, il est nécessaire de tronquer la matrice $H[n \times n]$:

$$x_{i+1} = \sqrt{2} H^T x_i \quad (3.65)$$

en une matrice $[n-1] \times [n-1]$, composée de $\sqrt{2} h_{2i-j} : i, j = 1, \dots, n-1$ et normalisée par $\sqrt{2}$. Le calcul des vecteurs propres correspondant à la valeur propre 1 conduit aux valeurs entières de $\phi(0), \phi(1) \dots \phi(n)$ [76].

3. Calcul à partir de la transformée Fourier

La dernière méthode utilise la transformée de Fourier décrite dans le chapitre sur la multirésolution. En itérant l'équation [52] :

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2) \quad (3.66)$$

la relation suivante est obtenue pour le calcul de la transformée Fourier de ϕ :

$$\hat{\phi}_\infty(\omega) = \prod_1^\infty m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad (3.67)$$

3.4 Exemple d'ondelettes

Ondelettes de Haar

L'exemple classique de base orthogonale dans laquelle les fonctions ϕ sont :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et les fonctions ψ sont définies :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq x < 0.5 \\ -1 & \text{pour } 0.5 \leq x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La relation entre ψ et ϕ est :

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1) \quad (3.68)$$

Les filtres de Haar présentent une forme moins sélective dans les hautes fréquences mais une réponse impulsionnelle finie, de plus la base de Haar est plus rapide en temps de calcul.

L'inconvénient de la base de Haar est que l'ondelette associée n'est pas continue.

Les flatlets

La généralisation des fonctions Haar produit les flatlets [?]. Ce sont des fonctions constantes dans l'intervalle $[0, 1]$, utilisées en radiosité [?].

Ondelettes à support compact de Daubechies

Daubechies [24] créa les premières ondelettes orthogonales à support compact utilisant des itérations. C'est un processus itératif qui ne peut pas être créé à partir de formules analytiques.

Pour la construction de cette base, Daubechies applique la somme trigonométrique :

$$P_N(t) = 1 - c_N \int_0^t \sin^{2N-1} u du \quad (3.69)$$

où $c_N > 0$ est choisi de sorte que $P_N(\pi) = 0$. Il existe une somme trigonométrique dans laquelle les coefficients h_k qui la constituent sont réels et représentent la réponse impulsionnelle d'un filtre.

La fonction $\phi(x)$ est la solution de l'équation fonctionnelle :

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_0^{2N-1} h_k \phi(2x - k) \text{ et } \int \phi(x) dx = 1 \quad (3.70)$$

Décomposition de la fonction d'échelle

$$\phi(x) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \phi(2x) + \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \phi(2x - 1) + \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \phi(2x - 2) + \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \phi(2x - 3) \quad (3.71)$$

Décomposition de la fonction d'ondelette

$$\psi(x) = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}\phi(2x + 2) - \frac{3 - \sqrt{3}}{4}\phi(2x + 1) + \frac{3 + \sqrt{3}}{4}\phi(2x) - \frac{1 + \sqrt{3}}{4}\phi(2x - 1) \quad (3.72)$$

Les principaux avantages de cette base sont le support compact et la construction facile. L'inconvénient est causé par la réponse non symétrique qui provoque une interprétation difficile au niveau spatial.

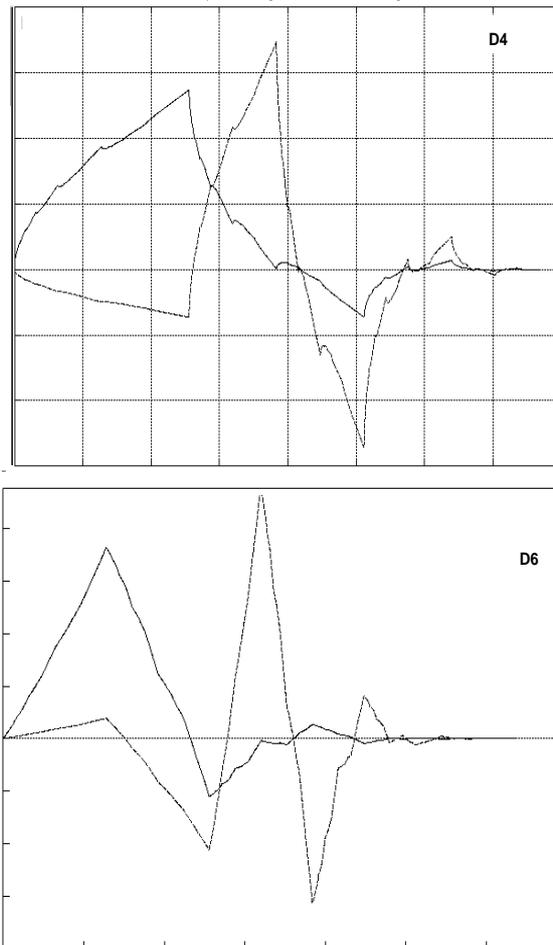


FIG. 3.3 - $D_4 + D_6$

La fonction d'échantillonnage de Shannon

L'ondelette de Shannon est définie par :

$$\psi_{Shannon}(x) = \frac{\sin(2\pi\omega_2 x)}{\pi x} - \frac{\sin(2\pi\omega_1 x)}{\pi x} \quad (3.73)$$

qui possède une décroissance insatisfaisante à l'infini. Cette fonction est rarement utilisée à cause de sa faible régularité et sa lente diminution.

Par contre la fonction :

$$\phi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (3.74)$$

est employée comme fonction interpolatrice [38].

B-spline

En général les B-splines sont définies par le produit de convolution :

$$N_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en rest} \end{cases}$$

$$N_m(x) = \int N_{m-1}(x-t)N_1(t)dt = \int_0^1 N_{m-1}(x-t)dt \quad (3.75)$$

Il faut remarquer que $N_1(x)$ est la fonction d'échelle de Haar.

Les propriétés des fonctions d'échelles N_m :

1. support compact
2. $N_m(x) > 0$ pour $0 < x < m$
3. $\sum_k N_m(x-k) = 1$
4. la symétrie :

$$N_m\left(\frac{m}{2} + x\right) = N_m\left(\frac{m}{2} - x\right) \quad \forall x \quad (3.76)$$

5. la récursivité :

$$N_m(x) = \frac{x}{m-1}N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1}N_{m-1}(x-1), \quad (3.77)$$

Construction des fonctions ondelettes

La forme générale est :

$$\psi_m(x) = \sum_{k=0}^{3m-2} q_k N_m(2x-k) \quad (3.78)$$

avec :

$$q_k = (-1)^k 2^{1-m} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} N_{2m}(k+1-l) \quad (3.79)$$

Les propriétés des fonctions ondelettes B-splines

1. le support compact :

$$\text{supp}\{\psi_m\} = [0, 2m - 1] \text{ pour } m = 1, 2, \dots \quad (3.80)$$

2. la symétrie pour les fonctions paires et l'anti-symétrie pour les fonctions impaires :

$$\psi_m(x) = \psi_m(2m - 1 - x) \text{ pour } m = 2k \quad (3.81)$$

$$\psi_m(x) = -\psi_m(2m - 1 - x) \text{ pour } m = 2k + 1 \quad (3.82)$$

3. les moments nuls :

$$\int \psi_m(x) x^i dx = 0 \quad (3.83)$$

4. les ondelettes B-splines sont orthogonales aux différentes échelles

$$\langle \psi_m(2^{j_1}x - k_1), \psi_m(2^{j_2}x - k_2) \rangle = 0 \text{ si } j_1 \neq j_2 \quad (3.84)$$

et semi-orthogonales à la même échelle :

$$\langle \psi_m(2^jx - k_1), \psi_m(2^jx - k_2) \rangle \neq 0 \text{ si } m \neq 1 \quad (3.85)$$

Décomposition de la fonction d'échelle :

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\phi(2x) + \phi(2x - 1) + \frac{1}{2}\phi(2x - 2) \quad (3.86)$$

Décomposition de la fonction d'ondelettes :

$$\psi_2(x) = \frac{1}{12}N_2(2x) - \frac{1}{2}N_2(2x - 1) + \frac{5}{6}N_2(2x - 2) - \frac{1}{2}N_2(2x - 3) + \frac{1}{12}N_2(2x - 4) \quad (3.87)$$

Il faut mentionner les B-splines quadratiques à base des polynômes de deuxième degré et les B-splines cubiques à base des polynômes de troisième degré [47].

Le principal inconvénient des fonctions splines est le support non-fini des fonctions et par conséquent, les filtres associés h et g qui sont à réponse impulsionnelle infinie. Comparés à la base de Haar, les filtres associés séparent mieux les canaux des hautes et basses fréquences [6].

Les ondelettes de Battle-Lemarié

Ces ondelettes sont construites par l'orthogonalisation des fonctions *B-spline* [8].

3.5 Les ondelettes biorthogonales

Si la notion d'orthogonalité est bien définie, la construction d'ondelettes orthogonales symétriques et support compact reste réduite (la base de Haar) d'où la nécessité d'introduire des ondelettes plus flexibles. L'inconvénient lié aux ondelettes orthogonales est l'asymétrie, donc :

1. la fonction $\phi(x)$ doit être paire :

$$\phi(x) = \phi(-x) \quad (3.88)$$

2. la fonction $\psi(x)$ doit être symétrique :

$$\psi(1-x) = \psi(x) \quad (3.89)$$

L'idée est de construire quatre sous-espaces $V_j, W_j, \tilde{V}_j, \tilde{W}_j$ ayant comme propriétés [32] :

$$\tilde{V}_j \perp W_j \text{ et } V_j \perp \tilde{W}_j \quad (3.90)$$

On peut considérer quatre familles de fonctions orthogonales $\phi, \tilde{\phi}, \psi, \tilde{\psi}$ avec les conditions :

$$\langle \tilde{\phi}, \psi(x-l) \rangle = \langle \tilde{\psi}, \phi(x-l) \rangle = 0 \quad (3.91)$$

$$\langle \tilde{\psi}, \psi(x-l) \rangle = \delta_l \quad (3.92)$$

$$\langle \tilde{\phi}, \phi(x-l) \rangle = \delta_l \quad (3.93)$$

et la possibilité de définir une analyse multirésolution sous la forme :

$$\tilde{\phi}(x) = 2 \sum_k \tilde{h}_k \tilde{\phi}(2x-k) \quad (3.94)$$

$$\tilde{\psi}(x) = 2 \sum_k \tilde{g}_k \tilde{\phi}(2x-k) \quad (3.95)$$

Les relations présentées nous permettent d'écrire les relations entre les filtres $h(\omega), \tilde{h}(\omega), g(\omega), \tilde{g}(\omega)$ pour tous les ω :

$$\tilde{h}(\omega)\bar{h}(\omega) + \tilde{h}(\omega+\pi)\bar{h}(\omega+\pi) = 1 \quad (3.96)$$

$$\tilde{g}(\omega)\bar{g}(\omega) + \tilde{g}(\omega+\pi)\bar{g}(\omega+\pi) = 1 \quad (3.97)$$

$$\tilde{g}(\omega)\bar{h}(\omega) + \tilde{g}(\omega+\pi)\bar{h}(\omega+\pi) = 0 \quad (3.98)$$

$$\tilde{h}(\omega)\bar{g}(\omega) + \tilde{h}(\omega+\pi)\bar{g}(\omega+\pi) = 0 \quad (3.99)$$

La détermination des filtres h, g , à partir de \tilde{h}, \tilde{g} ou l'inverse, passe par la résolution du système :

$$\tilde{h}(\omega)h(\bar{\omega}) + \tilde{g}(\omega)g(\bar{\omega}) = 1 \quad (3.100)$$

$$\tilde{h}(\omega + \pi)h(\bar{\omega}) + \tilde{g}(\omega + \pi)g(\bar{\omega}) = 0 \quad (3.101)$$

La décomposition d'une fonction s'écrit comme une projection dans l'espace des fonctions $\phi, \tilde{\phi}$ et $\psi, \tilde{\psi}$

$$P_{\phi_j} f(x) = \langle f, \tilde{\phi}_{j,l} \rangle \phi_{j,l}(x) \quad (3.102)$$

$$P_{\psi_j} f(x) = \langle f, \tilde{\psi}_{j,l} \rangle \psi_{j,l}(x) \quad (3.103)$$

ce qui nous permet de décomposer la fonction f :

$$f = \sum_{j,l} \langle f, \tilde{\psi}_{j,l} \rangle \psi_{j,l} \quad (3.104)$$

Applications

Similaires aux ondelettes orthogonales, les ondelettes biorthogonales ont conduit à d'excellents résultats en compression d'images, mais aussi en tant qu'outil de résolution d'équations différentielles [88] ainsi qu'en synthèse d'image pour la subdivision et la compression des surfaces 3D [?].

Chapitre 4

La transformée en ondelettes discrète multidimensionnelle

Andrei Doncescu

4.1 Algorithmes pyramidaux et ondelettes $2D$

La décomposition d'un signal bidimensionnel est réalisée à l'aide de la fonction d'échelle définie par :

$$\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y) \quad (4.1)$$

et du produit tensoriel entre une ondelette monodimensionnelle et une fonction d'échelle [53] :

$$\Psi^H(x, y) = \phi(x)\psi(y) \quad (4.2)$$

$$\Psi^V(x, y) = \psi(x)\phi(y) \quad (4.3)$$

$$\Psi^D(x, y) = \psi(x)\psi(y) \quad (4.4)$$

$$(4.5)$$

où les indices H, V, D représentent les détails conformément à la direction privilégiée.

L'utilisation des filtres de type ondelettes permet un contrôle du spectre de fréquence et de l'orientation, conséquence liée aux propriétés de localisation fréquentielle et d'orthogonalité qui caractérisent les ondelettes.

4.2 L'implémentation de la transformée en ondelettes $2D$ discrète et rapide

Dans le cas bidimensionnel, au lieu de décomposer sur N_d niveaux de chaque ligne, une décomposition unique est réalisée par ligne, par colonne et par niveau. L'opération est renouvelée avec deux fois moins d'échantillons par ligne et par colonne (donc quatre fois moins d'échantillons au total par niveau de décomposition), analogue à l'algorithme pyramidal.

Dans le cas d'une image $2D$ quelconque $m \times n$, la décomposition tient compte des parties entières de m et n .

La figure présentée illustre une $TOD - 2D$, réalisée en fait par deux transformées $1D$ séparées. L'image $f(x, y)$ est d'abord filtrée (avec une paire de filtres QMF) selon la direction x , et fournit alors une image f_B "passe-bas" et une image f_H "passe-haut". Puisque la largeur de bande de f_B et f_H est maintenant la moitié de celle de f , les deux images filtrées peuvent être sous-échantillonnées par un facteur deux, sans perte d'information. Le sous-échantillonnage s'effectue en ignorant un coefficient de la transformée en ondelettes sur deux dans une image filtrée.

Chacune des images f_B et f_H est alors filtrée sur la direction y . Quatre sous-images sont obtenues : $f_{BB}, f_{BH}, f_{HB}, f_{HH}$ qui sont sous-échantillonnées une fois de plus selon l'axe y d'un facteur deux.

Comme illustré ci-dessus, le filtrage $2D$ décompose une image f en un résumé f_{BB} et trois détails : f_{BH} souligne les caractéristiques (contours) horizontales de l'image f d'origine, f_{HB} les caractéristiques verticales et f_{HH} les caractéristiques diagonales. Ces contours sont des plages de fréquence que comporte chaque détail.

La transformée en ondelettes $2D$ est construite à partir de l'algorithme pyramidal en utilisant d'habitude des filtres QMF , mais le principe reste le même pour les CQF ou les ondelettes biorthogonales. Il faut préciser que la décomposition peut être continue sur le résumé f_{BB} , en utilisant le même principe.

4.2. L'IMPLÉMENTATION DE LA TRANSFORMÉE EN ONDELETTES 2D DISCRÈTE ET RAPIDE

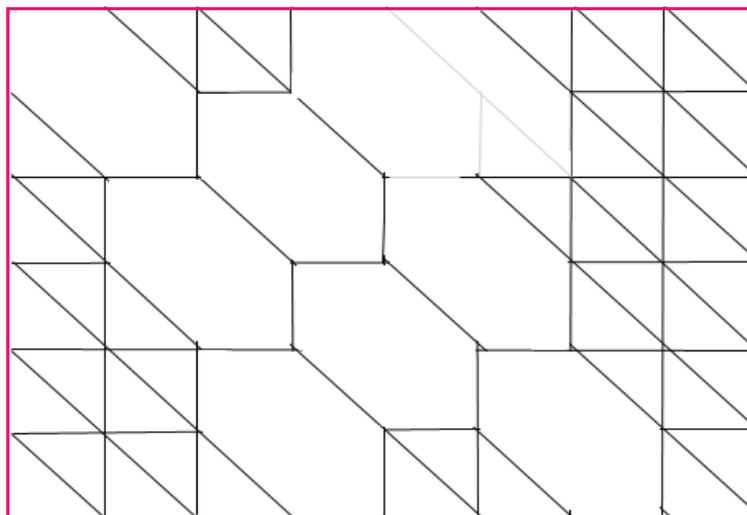
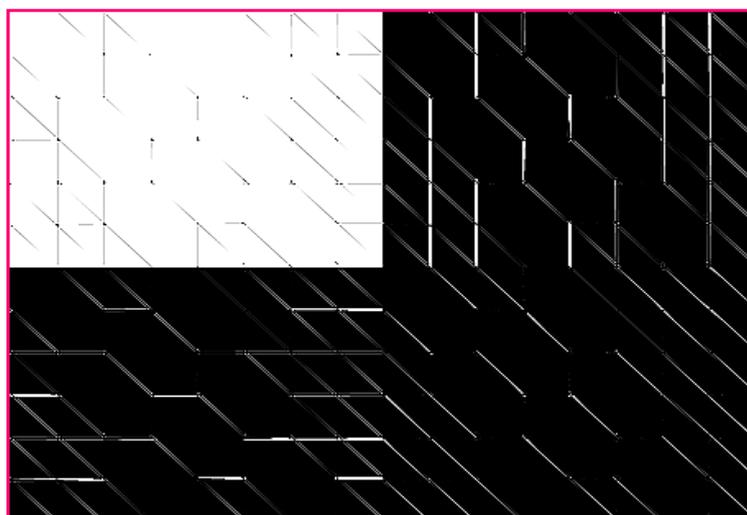


Image de départ



L'image resultat

FIG. 4.1 - Exemple de décomposition d'une image.

Deuxième partie

Applications

Chapitre 1

Application de la transformée en ondelettes 2D à la compression d'images

Si les algorithmes à base de bancs de filtres ont été développés pour des applications 1D en traitement du signal, la transformée 2D a trouvé ses applications en traitement d'image, pour la compression et la segmentation, et la transformée 3D pour la visualisation des objets 3D.

La compression d'images est une application immédiate de la transformée en ondelettes bidimensionnelle. Elle est accomplie en deux étapes :

1. quantification des coefficients d'ondelettes des contours : f_{BH}, f_{HB}, f_{HH} .
2. la phase de codage de ces coefficients quantifiés.

Une transformée en ondelettes appliquée à une image fournit notamment plusieurs détails contenant les contours de cette image. Donc, dans chacune des petites images, une information de l'image d'origine est retrouvée cachée par les coefficients de la transformée. Cette propriété permet de coder les détails sur un nombre réduit de bits.

La propriété d'invariance de l'énergie de la transformée en ondelettes permet de réaliser une compression de bonne qualité. Cette propriété d'invariance de l'énergie énonce que la quantité totale d'énergie d'une image n'est pas modifiée quand la transformée en ondelettes est appliquée. Chaque changement effectué sur les coefficients d'ondelettes provoquera une modification proportionnelle des valeurs des niveaux de gris de l'image reconstruite. Donc, l'élimination (mettre à zéros) de tous les coefficients de faibles amplitudes est possible, sans créer de distorsions significatives au sein de l'image reconstruite. Ainsi, tous les coefficients au-dessus d'un certain seuil sont sauvegardés, pouvant être ajustés pour faire varier le taux de compression.

La qualité de la compression est en général estimée par le calcul d'entropie. Pour cela une représentation de l'histogramme de l'image de départ et celle obtenue par la transformée en ondelettes sont présentées.

La transformée en ondelettes conserve globalement l'histogramme de départ, mais la transformée rendra floue l'image reconstruite si une élimination des détails est réalisée.

Quantification

La quantification est un processus qui permet d'associer à un nombre réel un nombre entier. Deux types de quantification sont en général utilisés :

1. quantification scalaire
2. quantification vectorielle

Pour augmenter le taux de compression, un codage entropique est choisi.

Codage entropique de Fano

Le principal avantage du codage de Fano réside dans sa simplicité. Le code ou dictionnaire est construit de la manière suivante : chaque message émis et sa probabilité d'émission associée sont listés dans un ordre décroissant, en terme de probabilité. Cette liste est alors divisée en deux de manière à former deux groupes de probabilités cumulées égales. Chacun des messages du premier groupe reçoit un 0 comme premier bit de leur mot de code, et les autres messages du deuxième groupe, un 1. Chacun des deux groupes est alors divisé selon la même méthode. Le processus se répète jusqu'à ce que chaque sous-groupe ne contienne qu'un seul message, et donc un mot de code unique. Le codage de Fano produit un code à préfixe minimal.

Troisième partie

Bibliographie

Bibliographie

- [1] M. Antonini et al. Image coding using wavelet transform. *IEEE Trans. on Image Processing* 1,2, pp 205-220, 1992.
- [2] J. Arzac et J.-C. Simon. Représentation d'un phénomène physique par des sommes de translatées. *Annales de Radioelectricit*, XV:216-229, juillet 1960.
- [3] A. Arneodo F. Argoul and alt. Analyse en ondelettes de croissances fractales électrochimiques. *J. Chim. Phys.*, 87(4):1487-1545, 1990.
- [4] A. Arneodo and alt. Ondelettes, multifractales et turbulence de l'ADN aux croissances cristallines. DIDEROT EDITEUR, Paris, 1995.
- [5] N. Baaziz et C. Labit. Transformations pyramidales d'images numériques. *Technical Report 526*, IRISA-Rennes, 1990.
- [6] J. Bremont M. Forthoffer, J.P. Girod. Detection de contours par transformée en ondelettes et reseaux de neurones. *Traitement du signal*, 8(6):431-440, 1992.
- [7] M. Barrat and O. Lepetit. Recursive wavelet transform for 2d signals. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 56(1):106-108, 1994.
- [8] G. Battle. A block spin construction of ondelettes,part. 1: Lemarié functions. *Comm. Math. Phys.*, 110, 1987.
- [9] J. Biemond P. H. Westerink, D. E. Boekee and J. W. Woods. Subband coding of images using vector quantization. *IEEE Trans. on Comm.*, 36(6):713-719, 1988.
- [10] E. Bertin, F. Parazza,J. M. Chassery. Segmentation and measurement based on 3D Voronoi Diagram. *Special Issue of Computerized Medical Imaging and graphics*,vol 17, 3, pp 175-182, 1993.
- [11] G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rokhlin. Fast wavelet transforms and numerical algorithms. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 44:141-183, 1991.
- [12] P. J. Burt and E. H. Adelson. The laplacian pyramid as a compact image code. *IEEE Trans. Commun.*, 31(4):532-540, apr 1983.

- [13] J. M. Chassery, J. Waku Kouomou. Spécification d'une ondelettes pour l'analyse multirésolution d'un contour discret. *Traitement du signal*, 10(3) 231–240, 1993.
- [14] J. M. Chassery, A. Montanvert. Géométrie discrete. Hermes,1991.
- [15] I. Cohen L. Cohen. A finite element method applied to new active contour models and 3d reconstruction from cross sections. *Technical Report 1245*, INRIA, 1990.
- [16] A. Cohen. *Ondelettes, analyses multiresolutions et traitement numérique de l'image*. PhD thesis , 1990.
- [17] P.C. Cosman, R.M. Gray, and M. Vetterli. Vector quantization of image subbands: A review. *IEEE Trans. on Signal Process.*, 5(2):202–225, 1996.
- [18] T. Dallard and G.R. Speeding. 2-d wavelet transform: generalisation of the hardy space and application to experimental studies. *European Journal of Mechanics, B/Fluids*, 12(1):107–134, 1993.
- [19] S. Dahlke and alt. Multiresolution analysis and wavelet on s^2 and s^3 . *Technical Report 104*, RWTH Aachen, 1994.
- [20] J. S. Varré, E. Rivals, M. Dauchet et J. P. Delahaye. Les distances transformationnelles et applications à la phylogenie. *Journées Analyse des sequences genomiques-Ecole Polytechnique*, 1996.
- [21] T. Dallard and G.R. Spedding. 2-d wavelet transform: generalisation of the hardy space and application to experimental studies. *Eur. J. Mech., B/Fluids*, 12(1):107–134, 1993.
- [22] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Appl. Math.*, XLI(41):909–996, nov 1988.
- [23] I. Daubechies. Orthonormal Bases of Wavelets with Finite Support - Connection with Discrete Filters. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [24] I. Daubechies. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 36(5):961–1005, September 1990.
- [25] J. Delahaye. La ressemblance mathématisée. *Pour la science*, (235), 1997.
- [26] D. L. Donoho. De-noising by soft-thresholding. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 1994.
- [27] D. L. Donoho and P. B. Stark. Uncertainty principles and signal recovery. *SIAM J. of Appl. Math.*, 49(3):906–931, June 1989.

- [28] J. P. Dubus, V. Devlaminck, P. Nykyema. Analyse de mouvements par la décomposition en ondelettes de séquence d'images. *20 septembre 1991, Treizieme colloque GRETSI*
- [29] D. Esteban and C. Galand. Applications of quadrature mirror filters to split band voice coding schemes. *ICASSP*, pages 191–195, 1977.
- [30] D. Esteban and C. Galand. Application of quadrature mirror filters to split band voice coding schemes. *IEEE Trans. Commun.*, 31:532–540, avril 1983.
- [31] P. Flandrin, M. Basseville, N. Martin. Méthodes temps-fréquence. *Traitement du signal-supplément*, 9(1):77–149, 1992.
- [32] J. C. Feauveau. *Analyse multiresolution par ondelettes non orthogonales et bases de filtres numériques*. PhD thesis, janvier 1990.
- [33] D. Forsey and R. Bartels. Hierarchical b-spline. *Computer Graphics*, 22(4), 1988.
- [34] M. Forthoffer. *Détection de contours par transformée en ondelettes et réseaux de neurones*. PhD thesis, janvier 1992.
- [35] A. Grossman et J. Morlet. Décomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Analysis*, pages 723–736, 1984.
- [36] A. Grossmann. Wavelet transform and edge detection. *Stochastic Processes in Physics and Engineering*.
- [37] C. Herley, J. Kovacevic, K. Ramachandran, and M. Vetterli. Tilings of the time-frequency plane: Construction of arbitrary orthogonal bases and fast tiling algorithms. *IEEE Trans. on Signal Process.*, 12(41):3341–3359, 1993.
- [38] B. Jawerth and W. Sweldens. An overview of wavelet based multiresolution analyses. *Technical Report 1993:1*, Industrial Mathematics Initiative, Department of Mathematics, University of South Carolina, 1993.
1985.
- [39] A. Juditski. Wavelet estimators: Adapting to unknown smoothness. *Technical Report 815*, IRISA-Rennes, 1994.
- [40] G. Karlsson and M. Vetterli. Extension of finite length signals for subband coding. *Signal Processing*, 17:161–166, 1989.
- [41] A. Kaul and J. Rossignac. Solid-interpolating deformation: construction and animation of pips. *Proceedings of Eurographics '91*, 1991.

- [42] J. Kent, W. Carlson and R. Parent. Shape transformation for polyedral objets. *Proceedings of SIGGRAPH '92*, 1992.
- [43] M. K. Kwong and P.T. Tang. W-matrices, nonorthogonal multiresolution analysis, and finite signals of arbitrary length. *Technical report*, Argone National Laboratory, July 1995.
- [44] M. Kunt coordonateur. Techniques modernes de traitement numerique des signaux. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1992.
- [45] M. Kunt et col. Techniques modernes de traitement numerique des signaux. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1995.
- [46] J. O. Lachaud, A. Montavert. Volumic segmentation using hierarchical representation and triangulated surfaces. *Computer Vision 96*,1996.
- [47] S. Lodha M. Ueda. Wavelets: An elementary introduction and exemples. *Technical Report UCSC-CRL 94-47*, University of California, Santa Cruz, 1995.
- [48] E. Lega and al. . A parallel algorithm for structure detection based on wavelet and segmentation analysis. *Parallel Computing*, (21):265–285, 1995.
- [49] O.Petit M. Barrat. Calcul rapide de la transformée en ondelettes. *Traitement du signal*, 8(1):43–49, 1991.
- [50] S. Mallat. Review of multifrequency channel decompositions of images and wavelet models. *Invited paper to IEEE Trans. on ASSP*.
- [51] S. Mallat. Multiresolution approximations and wavelets. *Technical report*, GRASP Lab, Dept. of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, 1987.
- [52] S. Mallat. Multiresolution approximation and wavelets. *Trans. of American Math. Soc.*, (315):69–88, 1989.
- [53] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. on Pattern and Machine Intelligence*, 11(7):674–693, 1989.
- [54] S. Mallat. Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, pages 2091–2110, Dec. 1992.
- [55] S. Mallat and S. Zhong. Wavelet Transform Maxima and Multiscale Edges. Bartlett and Jones, 1990. eds. Coifman et al.
- [56] H.S. Malvar. Lapped transforms for efficient transform subband coding. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, pages 969–978, 1990.

- [57] H.S. Malvar. Lapped transforms for efficient transform/subband coding. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, pages 969–978, June 1990.
- [58] D. Marr. Vision. W. H. Freeman and Company, 1982.
- [59] K. Mase and A. Pentland. Lipreading by optical flow. *Systems and Computers*, (22), 1991.
- [60] Y. Meyer. Ondelettes et algorithmes concurrents. Hermann, Paris, 1992.
- [61] Y. Meyer. Ondelettes et applications. *Journee Annuelle de la Societe Mathematique de France*, 5 mai 1990.
- [62] S. Muraki. Volume data and wavelet transforms. *IEEE Computer Graphics Application*, 31:50–56, july 1993.
- [63] R. Murenzi. *Ondelettes multidimensionnelles et application a l'analyse d'image*. PhD thesis, janvier 1990.
- [64] J. Morlet et A. Grossman R. Kronland-Martinet. Analysis of sound patterns through wavelet transform. *International J. Pattern Recognition and Artif. Intell.*, 1:273–301, 1987.
- [65] J. Morlet et Ph. Tchamitchian J. Holschneider. A real-time algorithm for signal analysis with help of wavelet transform. Springer Verlag, eds: J.M. Combes, A. Grossman, and Ph. Tchamitchian, 1989.
- [66] L. Mori S.C. Brofferio and D. Raveglia. A subband video coding algorithm and its feasibility on a transputer video coder. 1605:894–905, 1991.
- [67] V. Nuri. *A theory for exactly reconstructing size-limited maximally decimated filter banks*. PhD thesis, may 1993.
- [68] H. J. Nussbaumer and M. Vetterli. Computationally efficient QMF filter banks. *ICASSP*, pages 11.3.1–11.3.4, San Diego, CA, 1984. IEEE.
- [69] B. Payne and A. Toga. Distance field manipulation of surface models. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1992.
- [70] A. Pentland. Fast solution to physical equilibrium and interpolation problems. *The Visual Computer*, 1992.
- [71] A. Pentland. Interpolation using wavelet bases. *IEEE Trans on PAMI*, 1994.
- [72] V. Perrier. *Ondelettes et Simulation numerique*. PhD thesis, 5 fvrier 1991.

- [73] T. Pun. Entropic thresholding, a new approach. *Comput. Graphics Image Process*, 47(3):210–239, 1989.
- [74] E.R. Pearson R. Wilson, A.D. Calway. A generalized wavelet transform for fourier analysis: the multiresolution fourier transform for fourier analysis. *IEEE Trans. Inf. Th.*, 38:674–690, 1992.
- [75] K. Ramchandran and M. Vetterli. Best wavelet packet bases in a rate-distortion sense. *IEEE Trans. on Signal Process.*, 2(2):160–175, 1993.
- [76] L. M. Reissel. Wavelets and their applications in Computers Graphics. *cours SIG-GRAPH*, 1994.
- [77] O. Rioul. On the choice of wavelets filters for still image compression. volume V, pages 550–553, Minneapolis, MN, April 1993. IEEE.
- [78] W. Rudin. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill., 3 edition, 1987.
- [79] W. Rudin. Analyse fonctionnelle. EDISCIENCE international, 1995.
- [80] E. P. Simoncelli E. H. Adelson. Subband image coding with three-tap pyramids. *MIT Media Lab, Picture Coding Symposium, Cambridge MA*, pages 1–2, 1990.
- [81] Schuler S. Laine A. and Girish V. Orthonormal wavelet representations for recognizing complex annotations. *Machine Vision and Applications*, 6, 1993.
- [82] S. E. Sclaroff. *Modal Matching: A Method for Describing, Comparing, and Manipulating Digital Signals*. PhD thesis, MIT, 1995.
- [83] M. J. Smith and T. P. Barnwell. Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders. *IEEE Trans. on Acoust. Signal Speech Process.*, 34:434–441, 1986.
- [84] J.-O. Stromberg. A modified Franklin system as the first orthonormal system of wavelets. *Research Notes in Applied Mathematics-Springer Verlag*, 1992.
- [85] W. Sweldens. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Technical Report 1994:7*, Industrial Mathematics Initiative, Department of Mathematics, University of South Carolina, 1994.
- [86] W. Sweldens and R. Piessens. Asymptotic error expansions of wavelet approximations of smooth functions. *Technical Report TW164*, Department of Computer Science, K.U.Leuven, Belgium, 1992.
- [87] W. Sweldens and R. Piessens. Calculation of the wavelet decomposition using quadrature formulae. *CWI Quarterly*, 5(1):33–52, 1992.

- [88] Wim Sweldens. *The construction and application of wavelets in numerical analysis*. PhD thesis, mar 1994.
- [89] D. Terzopoulos. Image analysis using multigrid relaxation methods. *IEEE Trans on PAMI*, 1986.
- [90] B. Torresani. *Analyse continue par ondelettes*. InterEditions/CNRS, Paris, 1995.
- [91] M. Vetterli and J. Kovacevic. *Wavelets and Subband Coding*. Prentice-Hall PTR, Englewood-Cliffs, New Jersey, 1995.
- [92] Jr. Wells, O. Raymond. Adaptive wave propagation modeling. *Technical Report TR94-10*, Dept. of Math., Rice Univ., Houston, TX 77251-1892, 1994.
- [93] J. W. Woods and S. D. O'Neil. Subband coding of images. *IEEE Trans. on Acoust. Signal Speech Process.*, 34, oct 1986.
- [94] J. W. Woods and S. D. O'Neil. Generalizing symmetric extension: multiple nonuniform channels and multidimensional non-separable iir filter bank. *Proceeding of the IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems*, may 1992.
- [95] Jr. Wells, Raymond O. Adaptive wave propagation modeling. *Technical Report TR94-10*, Dept. of Math., Rice Univ., Houston, TX 77251-1892, 1994.