LA TRANSFORMATION EN ONDELETTES

René Alt

Université Pierre et Marie Curie

4 place Jussieu 75252 Paris Cedex 05

e-mail: Rene.Alt@lip6.fr

Plan du cours

- Introduction: qu'est-ce qu'un signal
- Rappels sur la transformation de Fourier
- La transformation en ondelettes continues
- Les principales ondelettes
- Propriétés des ondelettes
- La transformation discrete en ondelettes
- La transformation en ondelettes pour les images
- Compression à l'aide d'ondelettes
- Notions sur la multirésolution
- Bibliographie

Qu'est-ce qu'un signal

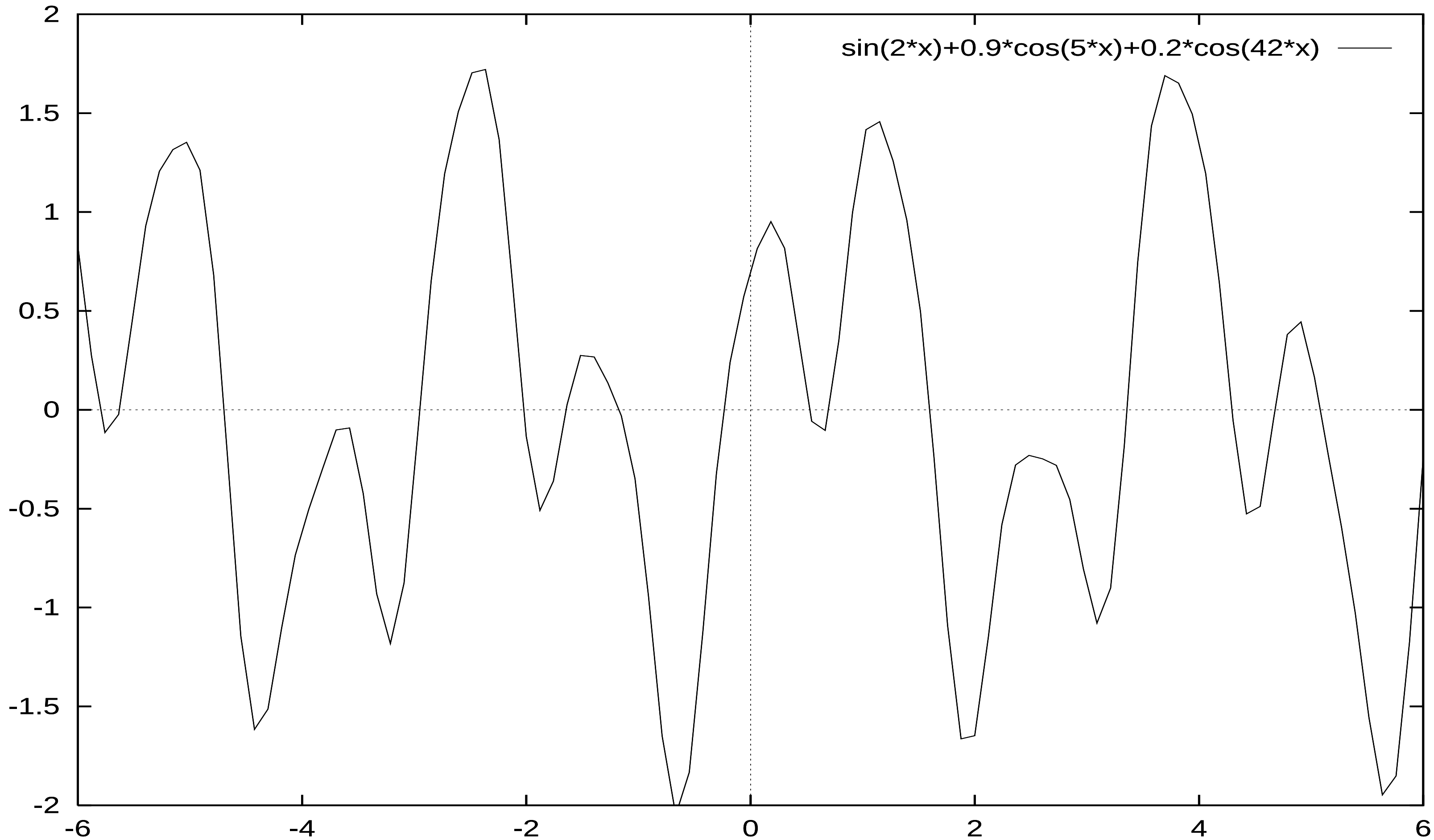


Figure 1: *signal stationnaire*

Qu’est-ce qu’un signal (2)

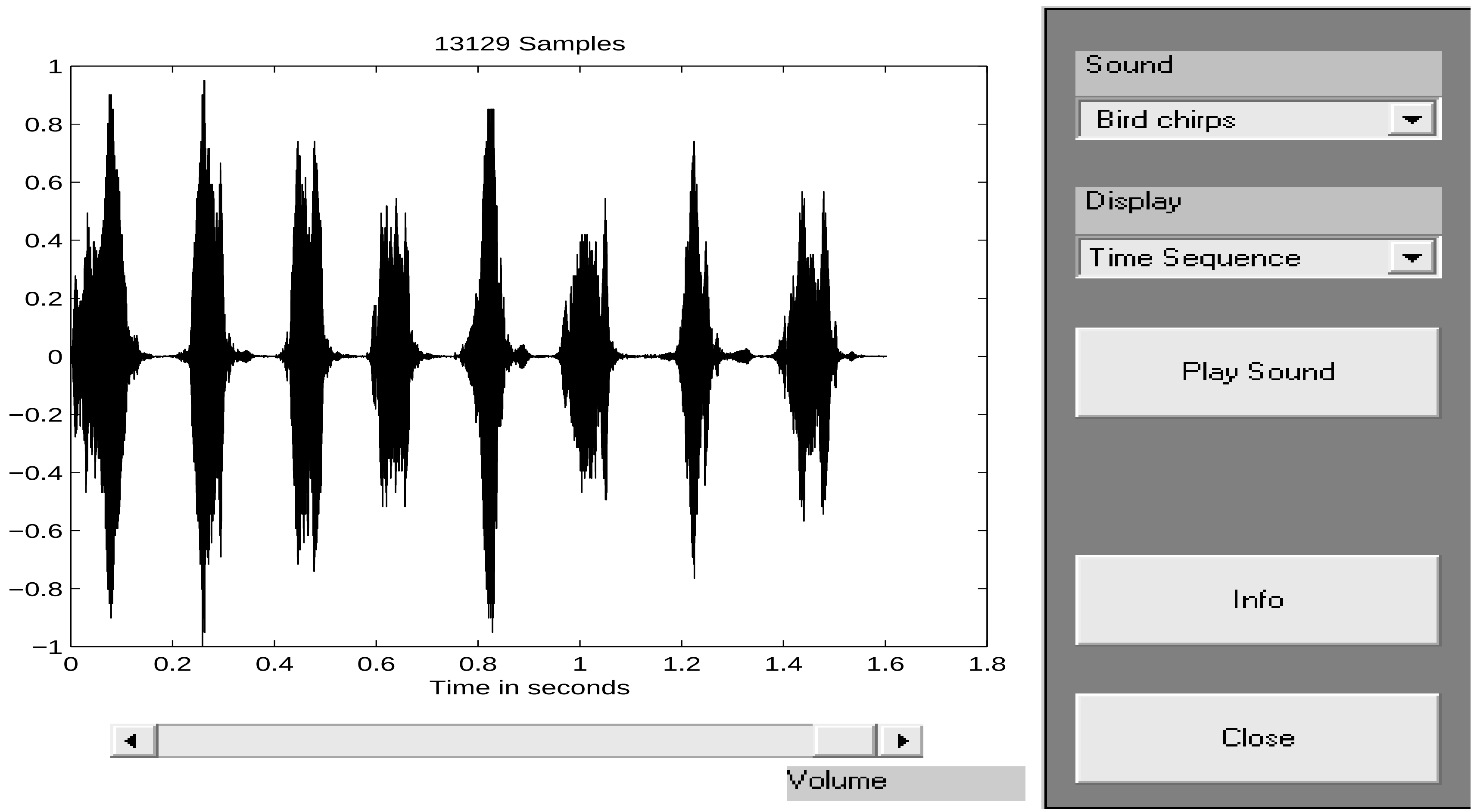


Figure 2: *signal non stationnaire amplitude=x(t)*

Qu’est-ce qu’un signal (3)

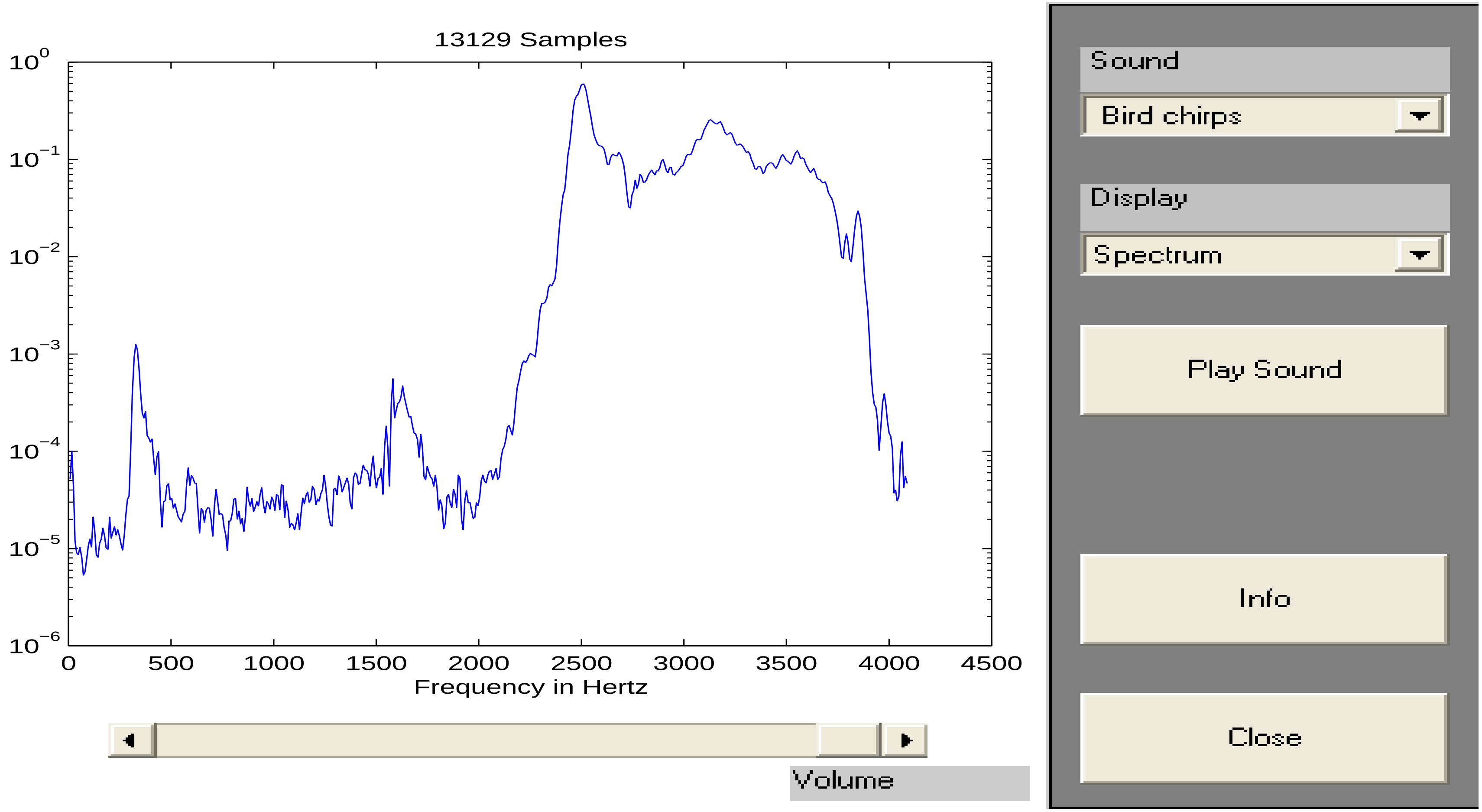


Figure 3: *signal non stationnaire frequence*

Qu’est-ce qu’un signal (4)

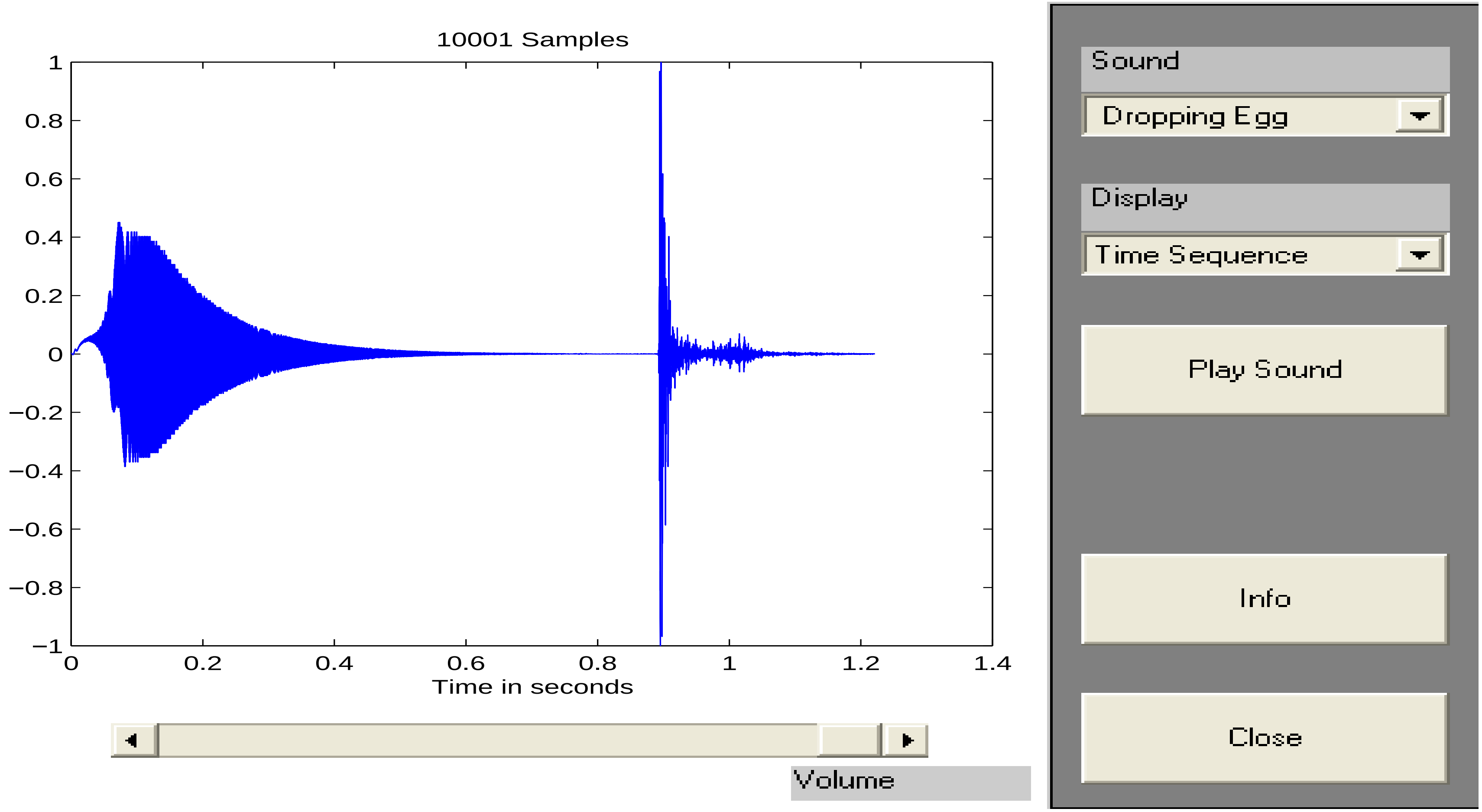


Figure 4: *signal non stationnaire amplitude=x(t)*

Qu'est-ce qu'un signal (5)

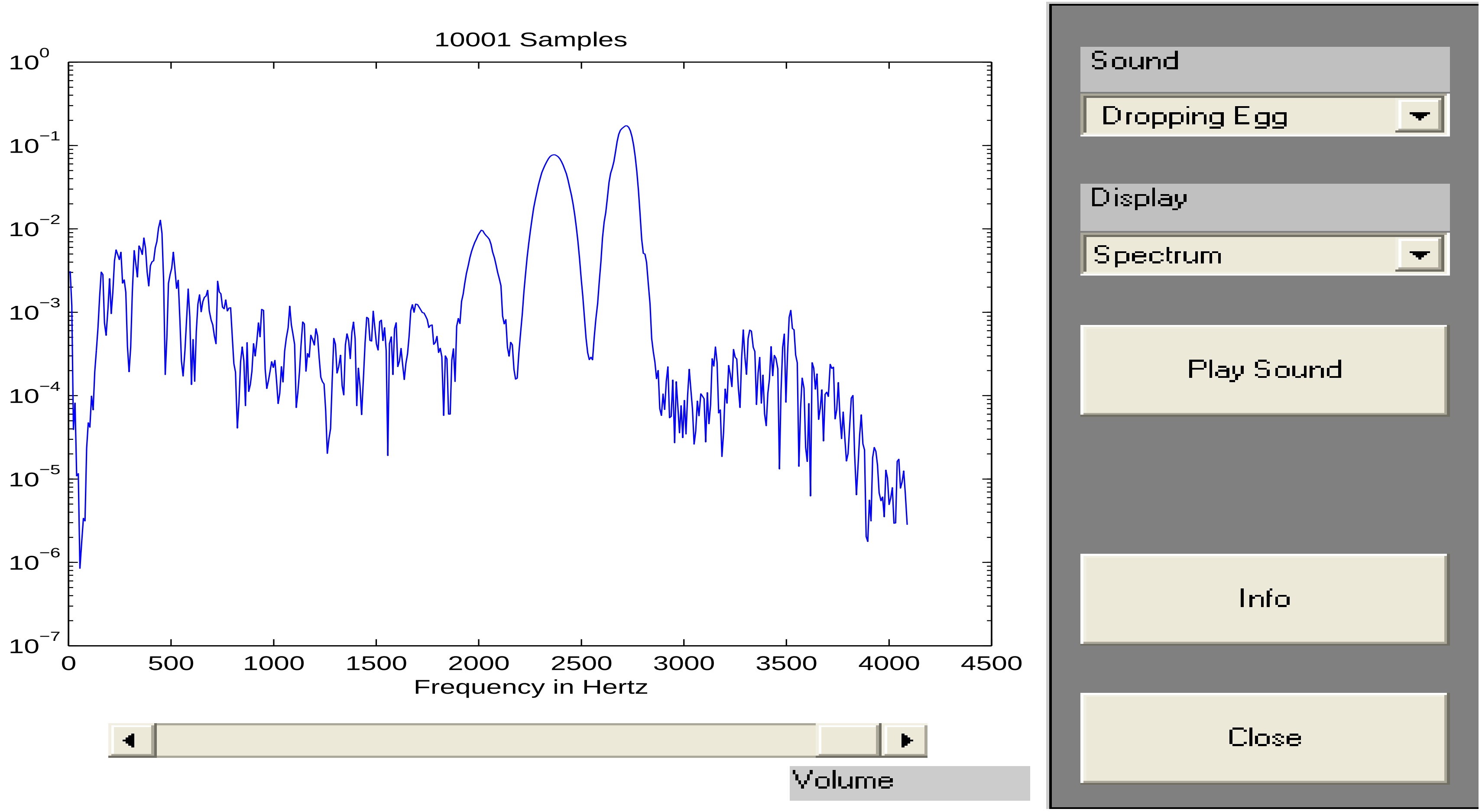


Figure 5: *signal non stationnaire amplitude=x(t)*

Qu'est-ce qu'un signal (6)

- Representation amplitude = f(temps)
- Representation en fréquences : spectre de fréquences
- Signal stationnaire : spectre constant
- Signal non stationnaire : spectre variant en fonction du temps
- La Transformation de Fourier n'est pas adaptée à l'analyse des signaux non stationnaires

Série de Fourier d'une fonction périodiqu

- Si $x(t)$ est une fonction complexe de variable complexe périodique de période 1 on a:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty}(a_k\ cos(2k\pi t) + b_k\ sin(2k\pi t)) \qquad (1)$$

- Les coefficients a_k et b_k sont calculés par:

$$\begin{array}{l} a_k = 2\ \int_0^1 x(t)cos(-2k\pi t)dt \\ b_k = 2\ \int_0^1 x(t)sin(-2k\pi t)dt \end{array} \qquad (2)$$

Série de Fourier (2)

- Si la fonction est périodique de période T on a de même:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty}(a_k\ cos(\frac{2k\pi t}{T}) + b_k\ sin(\frac{2k\pi t}{T})) \qquad (3)$$

- les coefficients a_k et b_k sont calculés par:

$$\begin{aligned} a_k &= \tfrac{2}{T}\ \int_0^T x(t)cos(\tfrac{2k\pi t}{T})dt \\ b_k &= \tfrac{2}{T}\ \int_0^T x(t)sin(\tfrac{2k\pi t}{T})dt \end{aligned} \qquad (4)$$

Série de Fourier (3)

- Ecriture avec amplitude et phase
- Posons $r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$
  θ_k tel que: $cos\ \theta_k = \frac{a_k}{r_k}$ et $sin\ \theta_k = \frac{b_k}{r_k}$,
- La formule (3) devient alors:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{k=\infty} r_k\ cos(\frac{2k\pi t}{T} - \theta_k) \quad (5)$$

Série de Fourier (4)

- Ecriture avec l'exponentielle complexe:
  $exp(iz) = cos(z) + i\ sin(z)$
  $exp(kiz) = \ (cos(z) + i \sin(z))^k = \ cos(kz) + i\ sin(kz)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k\ exp(\frac{2ik\pi t}{T}) \tag{6}$$

avec:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\ exp(\frac{-2i\pi kt}{T})dt \tag{7}$$

Série de Fourier exemple 1

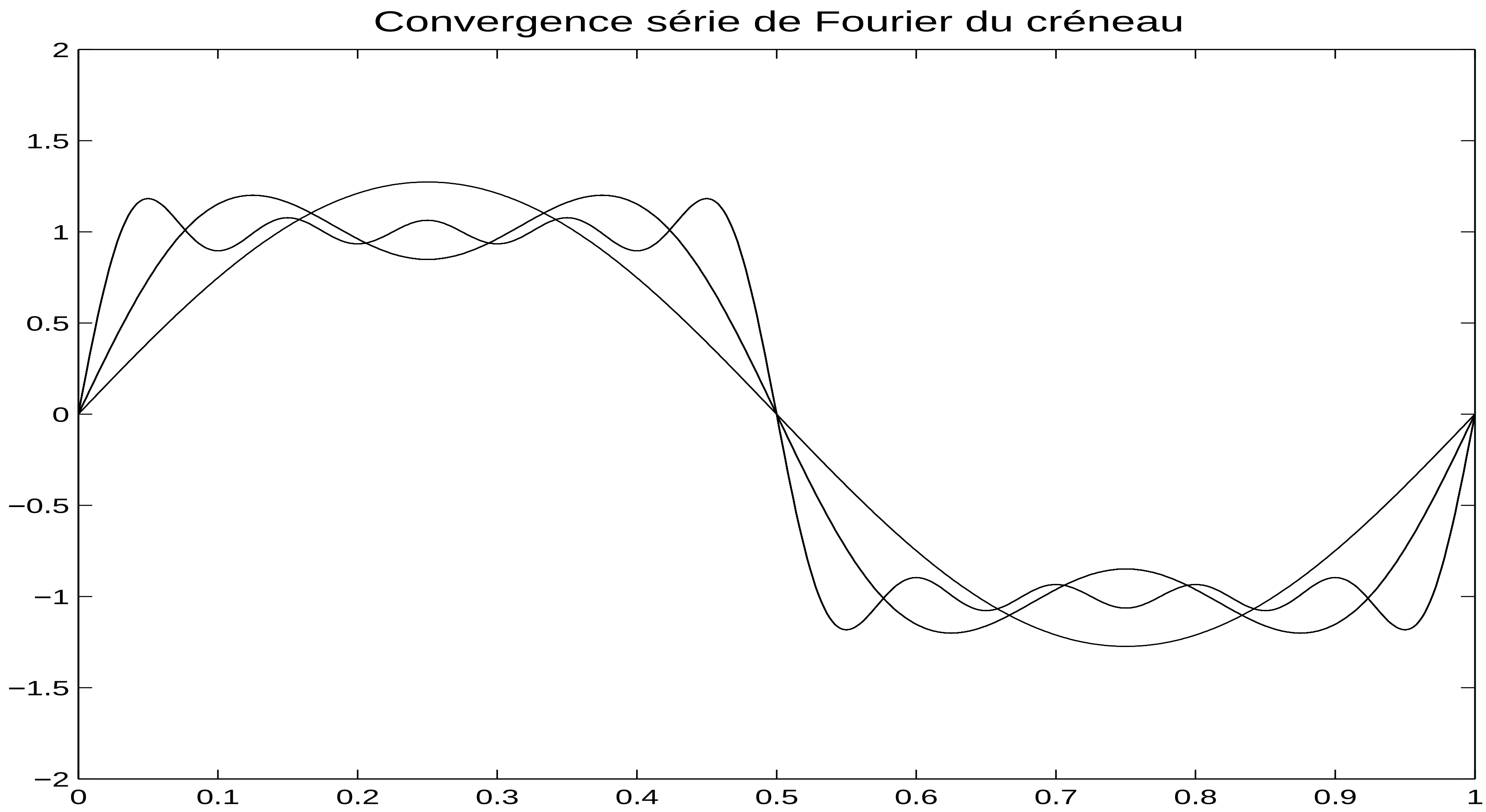


Figure 6: $x(t) = 4/\pi(sin(t) + sin(3t)/3 + sin(5t)/5 + sin(7t)/7 + sin(9t/9))$

Série de Fourier exemple 2

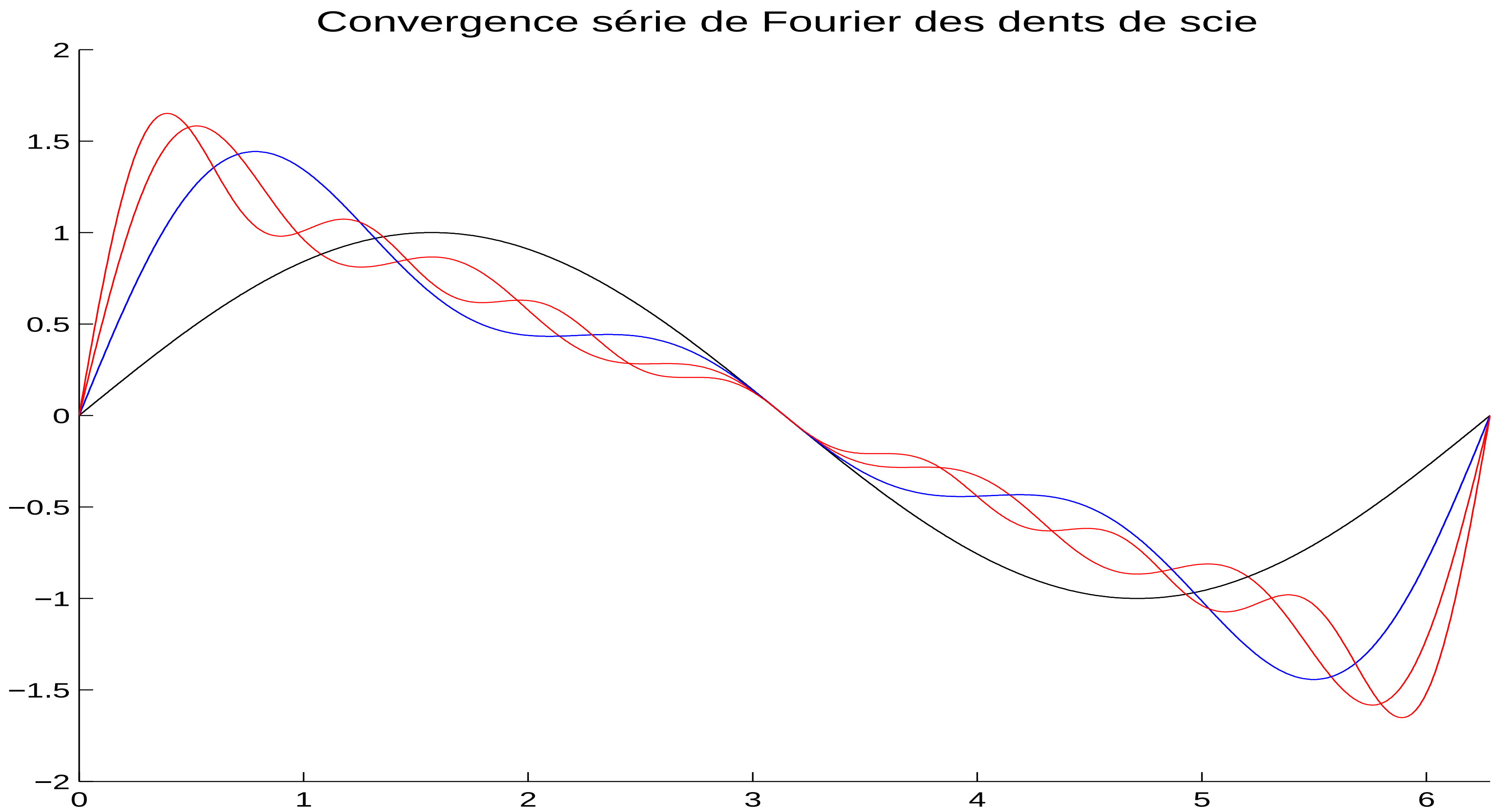


Figure 7: $x(t) = sin(t) + sin(2t)/2 + sin(3t)/3 + sin(4t)/4 + ... + sin(7t)/7$

Cas d'une fonction non périodique

- Si $x(t)$ n'est pas périodique mais est *décroissante suffisamment rapide* il est nécessaire de considérer une infinité de fréquences au lieu des multiples de $\frac{2\pi}{T}$.
- On définit alors les fonctions:

$$\begin{aligned} a(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ cos(-2\pi st)dt \\ b(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ sin(-2\pi st)dt \end{aligned} \tag{8}$$

$$\hat{x}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ exp(-2i\pi st)dt \tag{9}$$

Transformée de Fourier

- La fonction $\hat{x}(s)$ est appelée transformée de Fourier de la fonction $x(t)$ et est à rapprocher de la formule (7) définissant les coefficients de Fourier.
- La transformée de Fourier d'une fonction est donc la généralisation au cas non périodique du calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique.

Inversion de la transformation de Fourier

- De même que la série (6) permet de reconstruire une fonction périodique à partir de ses coefficients de Fourier, on peut reconstruire une fonction $x(t)$ à partir de sa transformée de Fourier $\hat{x}(s)$ et on a:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(s)\ exp(2i\pi st)ds \tag{10}$$

Exemple

- Transformée de Fourier d'une fonction rectangulaire
- $x(t)$ est définie par:
  $x(t) = 1$ si $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$
  $x(t) = 0$ sinon
- Sa transformée de Fourier est:

$$\hat{x}(s) = T\frac{sin(\pi sT)}{\pi sT}$$

- La fonction

$$sinc(z) = \frac{sin(\pi z)}{\pi z} \tag{11}$$

est appelée sinus cardinal et est notée: $sinc(z)$

Signal rectangulaire

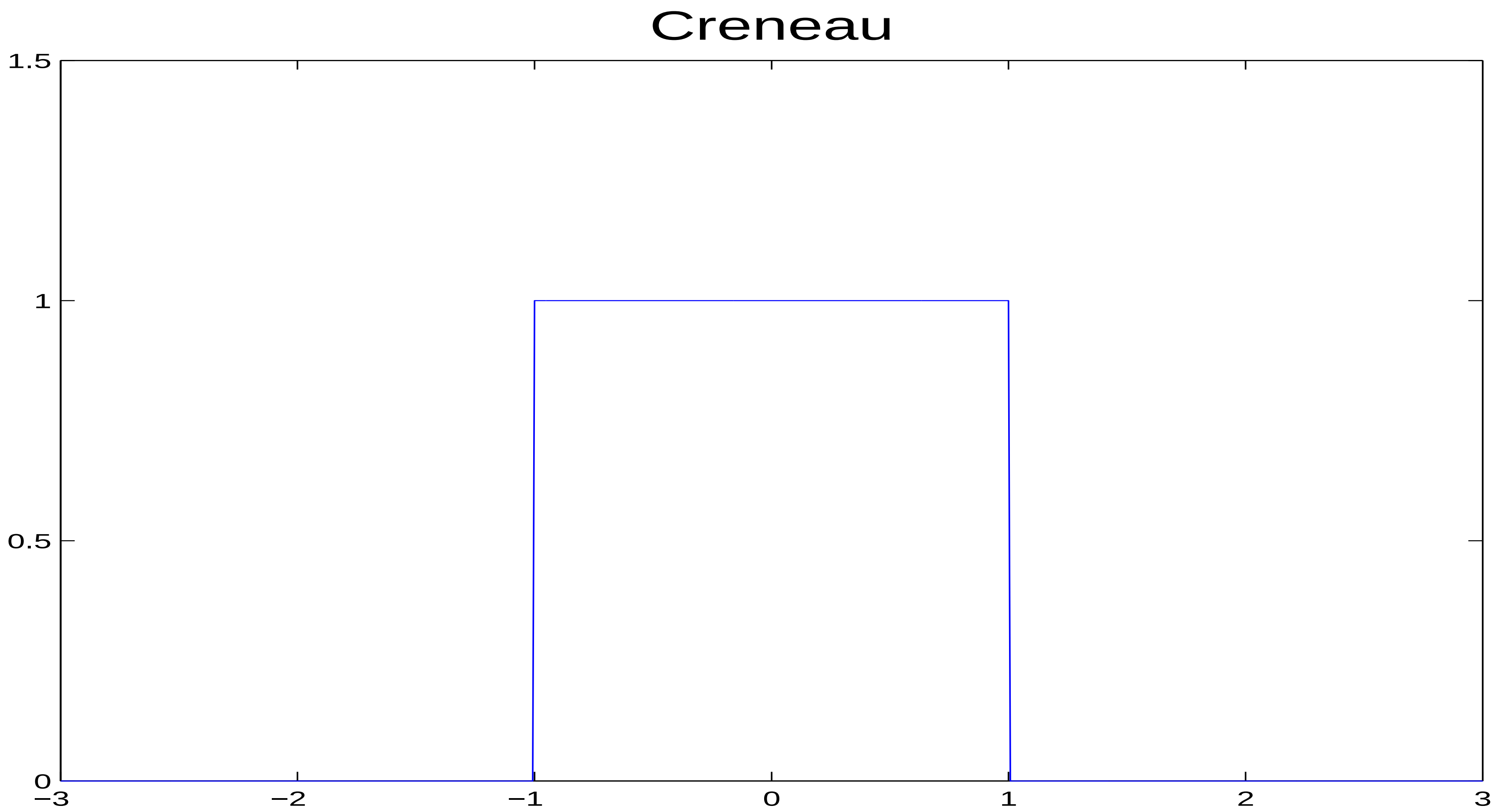


Figure 8: *Signal rectangulaire*

Sinus Cardinal

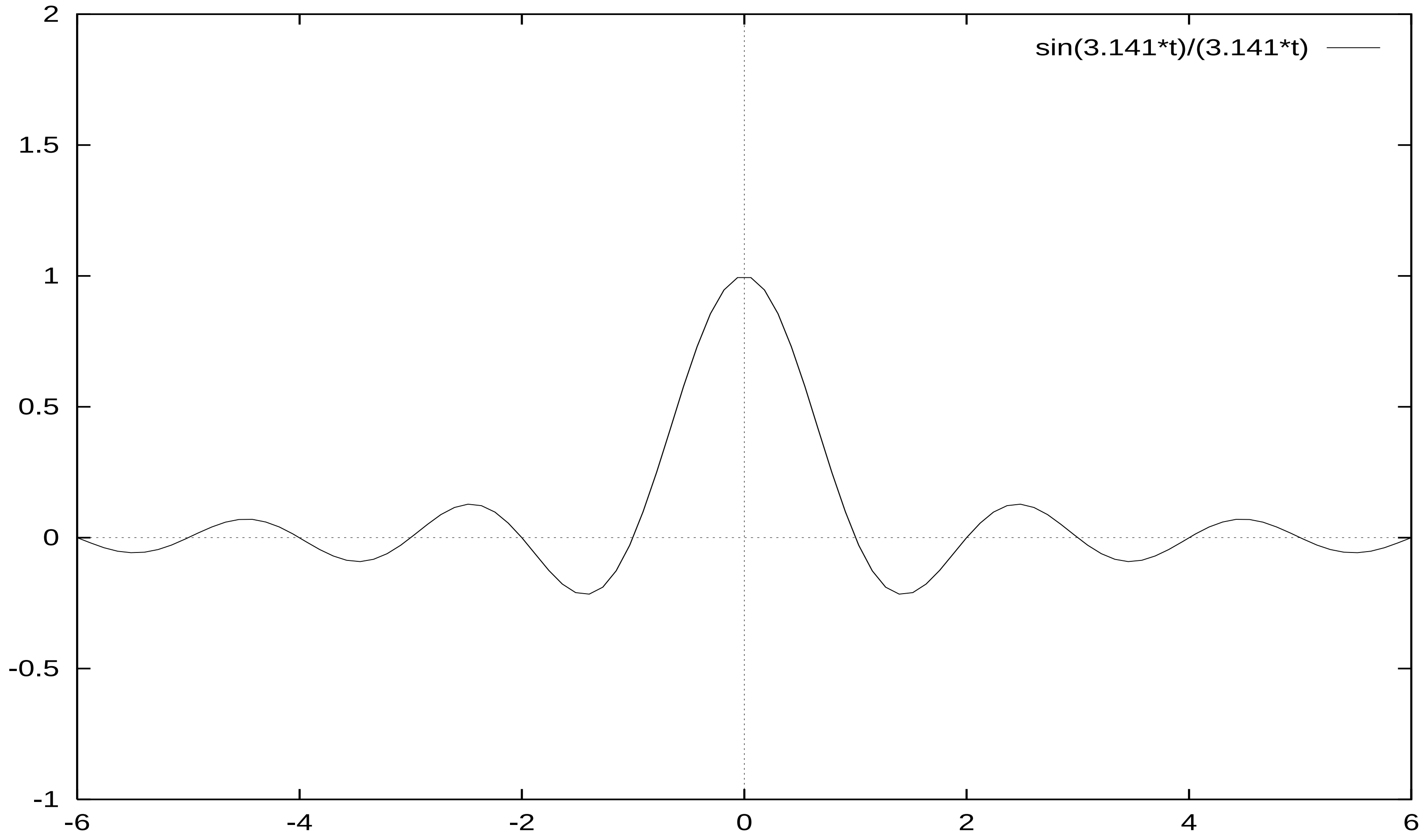


Figure 9: *Sinus cardinal*

Théorème d'échantillonnage (Shannon)

- Pour pouvoir représenter une fonction périodique jusqu'à la fréquence M il est nécessaire et suffisant de connaître ses valeurs en $2M$ points
- En fait, pour une fonction $x(t)$ à bande de fréquence limitée dans un intervalle $[-M,\ M]$ on a la formule explicite de reconstruction de la fonction $x(t)$ à partir de ses valeurs mesurées aux points $t_k = \frac{k}{2M}$:

$$x(t) = \sum_{k=-M}^{k=M} x(t_k)\ sinc(2M(t - t_k)) \tag{12}$$

Transformation de Fourier discrète

- $x(t)$ n'est pas connue analytiquement mais seulement par un certain nombre N de valeurs numériques mesurées:

$$x(t_0), x(t_1), ..., x(t_{N-1})$$

- Par homothétie et translation on peut se ramener au cas ou $t_0 = 0$ et ou l'intervalle est $T = [0, 1]$.
- $t_0, t_1, ..., t_{N-1}$ = $0, 1/N, 2/N, ..., (N-1)/N$
- L'intégrale (9) définissant la transformée de Fourier de $x(t)$ devient donc:

$$\hat{x}(s) = \sum_{t_0}^{t_{N-1}} x(t_k)\ exp(-2i\pi s t_k) dt \qquad (13)$$

TF Discrete (2)

- $\hat{x}(s)$ est aussi calculée en N points $0, 1/N, 2/N, ..., (N-1)/N$.
- $$\begin{aligned} &\hat{x}(s_p) = \sum_{t_0}^{t_{N-1}} x(t_k) exp(-2i\pi s_p t_k) dt \\ &p = 0, 1, ..., N-1 \\ &avec \\ &s_p = p/N \end{aligned} \tag{14}$$
- Cette formule définit la tranformée de Fourier discrète $\hat{x}(s)$ d'une fonction $x(t)$ échantillonnée en N valeurs.

TF Discrete (3)

- Cette même formule (14) aurait put être obtenue à partir de la formule (6) en considérant que la fonction échantillonnée était prolongée de manière périodique et en calculant ses coefficients de Fourier jusqu'à la fréquence $N/2$ en application du théorème de Shannon.
- En fait pour une fonction échantillonnée en N points sur un intervalle T, (7) et (14) sont identiques et l'on a:

$$c_p = \frac{1}{T}\,\hat{x}(\frac{p}{T}) \tag{15}$$

La transformation de Fourier rapide

$$\hat{x}_p = \sum_{k=0}^{k=N-1} x_k \, exp(\frac{-2ikp\pi}{N}) \quad , p = 0, 1, ..., N-1 \qquad (16)$$

Calcul direct d'un vecteur complexe de dimension N: N^2 multiplications et $N(N-1)$ additions complexes.

En pratique: N de 1000 Ĺà 100000 $\Longrightarrow$ temps de calcul très long.
Deux principaux algorithmes de FFT: J.W. Cooley et J.W. Tukey en 1965 [**?**] et W.M.Gentleman et G. Sande en 1966 [**?**]. L'un est le dual de l'autre.

Principe des Algorithmes de FFT

Le nombre de composantes du vecteur à transformer est supposé être une puissance de 2. C'est en effet, dans ce cas que les algorithmes de T.F.R. sont les plus efficaces et bien souvent ce nombre de composantes est un paramètre à la disposition de l'utilisateur.

$$N = 2^m$$

Utilisation de la périodicité

$w_N = \ exp(\frac{-2ip\pi}{N})$

La transformation de Fourier s'écrit matriciellement, si $N = 8$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \\ \hat{x}_6 \\ \hat{x}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_8 & w_8^2 & w_8^3 & w_8^4 & w_5^2 & w_8^6 & w_8^7 \\ 1 & w_8^2 & w_8^4 & w_8^6 & w_8^8 & w_8^{10} & w_8^{12} & w_8^{14} \\ 1 & w_8^3 & w_8^6 & w_8^9 & w_8^{12} & w_8^{15} & w_8^{18} & w_8^{21} \\ 1 & w_8^4 & w_8^8 & w_8^{12} & w_8^{16} & w_8^{20} & w_8^{24} & w_8^{28} \\ 1 & w_8^5 & w_8^{10} & w_8^{15} & w_8^{20} & w_8^{25} & w_8^{30} & w_8^{35} \\ 1 & w_8^6 & w_8^{12} & w_8^{18} & w_8^{24} & w_8^{30} & w_8^{36} & w_8^{42} \\ 1 & w_8^7 & w_8^{14} & w_8^{21} & w_8^{28} & w_8^{35} & w_8^{42} & w_8^{49} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

Périodicité de l'exponentielle: $(W_N)^N = 1$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \\ \hat{x}_6 \\ \hat{x}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_8 & w_8^2 & w_8^3 & w_8^4 & w_8^5 & w_8^6 & w_8^7 \\ 1 & w_8^2 & w_8^4 & w_8^6 & 1 & w_8^2 & w_8^4 & w_8^6 \\ 1 & w_8^3 & w_8^6 & w_8 & w_8^4 & w_8^7 & w_8^2 & w_8^5 \\ 1 & w_8^4 & 1 & w_8^4 & 1 & w_8^4 & 1 & w_8^4 \\ 1 & w_8^5 & w_8^2 & w_8^7 & w_8^4 & w_8 & w_8^6 & w_8^3 \\ 1 & w_8^6 & w_8^4 & w_8^2 & 1 & w_8^6 & w_8^4 & w_8^2 \\ 1 & w_8^7 & w_8^6 & w_8^5 & w_8^4 & w_8^3 & w_8^2 & w_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Cooley et Tukey

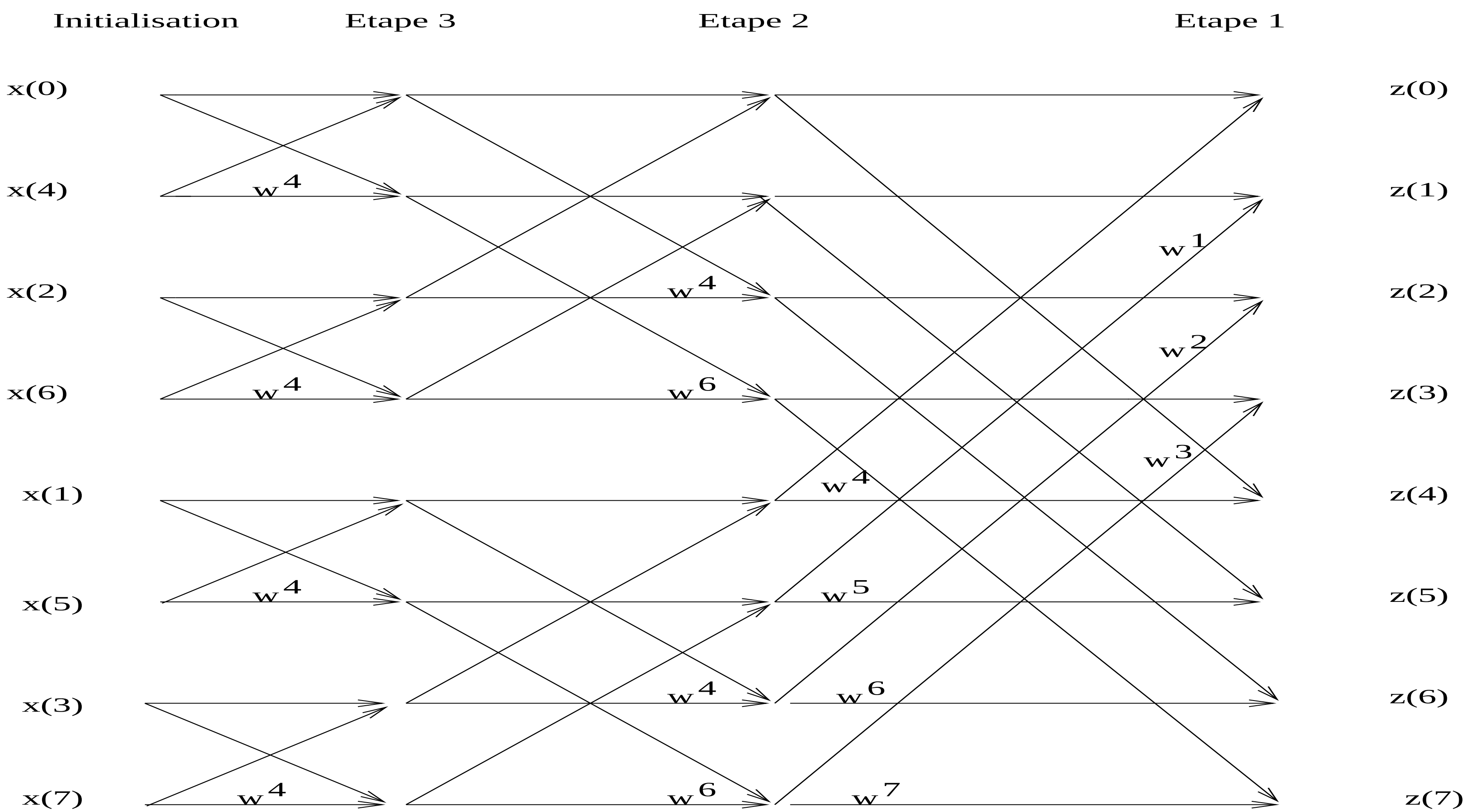


Figure 10: *Algorithme de Cooley et Tukey*

Insuffisance de l'analyse de Fourier

- Signal non périodique $\rightarrow$ intégrale de Fourier
- $\rightarrow$ spectre continu.
- Perte de tous les aspects temporels du signal tels que le début et la fin, l'existence de singularité, etc.
- Nécessité d'analyser le signal en temps et en fréquence.
- Tranformation de Fourier à fenêtre glissante (Créneau, fenêtre triangulaire, fenêtre de Gauss, fenêtre de Hamming.
- $\rightarrow$ Convolution avec la transformée de Fourier de la fonction définissant la fenêtre.

Transformation de Fourier à fenêtre glissan

- $w(t)$ fonction définissant la fenêtre c'est à dire nulle en dehors d'un intervalle donné $[-a, a[$.
- Hypothèse $w \in L_1 \cap L_2; |\hat{w}|$ fonction paire et $||w||_2 = 1$
- $g(s, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\bar{w}(t-b)e^{-2i\pi st}dt$
- $g(s, b)$ permet de connaitre ce qui se passe autour de l'abscisse b et la fréquence s.
- $g(s, b)$ dépend de deux paramètres $\rightarrow$ redondance.
- Conservation de l'énergie
  $\int\int_{\mathbb{R}^2} |g(s, b)|^2 ds dt = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt$
- Inversion (Gabor) $f(t) = \int\int_{\mathbb{R}^2} g(s, b)w(t-b)e^{2i\pi st} ds db$

Naissance des ondelettes

- Morlet en 1983 utilise la transformée de Fourier à fenêtre glissante pour l'analyse de signaux sismiques.
- Méthode insuffisante
- Utilisation d'une fenêtre dont la longueur est dilatée ou contractée
- $\longrightarrow$ Naissance de l'idée des ondelettes

Qu'est-ce qu'une ondelette

- Une petite onde (ou vague) qui a un début et une fin
- Utilisation : Représenter une fonction (ou un signal) comme une somme pondérée de ces petites ondes translatées ou dilatées.
- Possibilités pour représenter un signal :
  - Séries de Fourier
  - Transformation de Fourier avec fenêtre
  - Ondelettes

La transformation en ondelettes

- Si $x(t)$ est une fonction réelle de variable réelle la transformée en ondelettes de f est:

$$g(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{t=-\infty}^{t=\infty} x(t)\ \bar{\psi}_{a,b}(t)\ dt \quad (18)$$

$a \neq 0$ La fonction $\psi_{a,b}(t)$ est obtenue par translation et dilatation d'une fonction particulière appelée ondelette mère:

$$\psi_{a,b}(t) = \Psi(\frac{t-b}{a}) \quad (19)$$

- b détermine la position et a donne l'échelle.
- Cas d'un signal : a est la fréquence et b le temps.

Transformation en ondelettes (2)

- La fonction Ψ doit être oscillante et d'intégrale nulle.
- Ψ doit être de carré intégrable.
- Ψ peut être à valeurs complexes.
- Il existe de nombreuses ondelettes mères Ψ possibles.
- Ainsi définie c'est une transformation continue à rapprocher de la transformation de Fourier continue.
- La transformation en ondelette est une transformation linéaire

Exemple d'ondelette mère

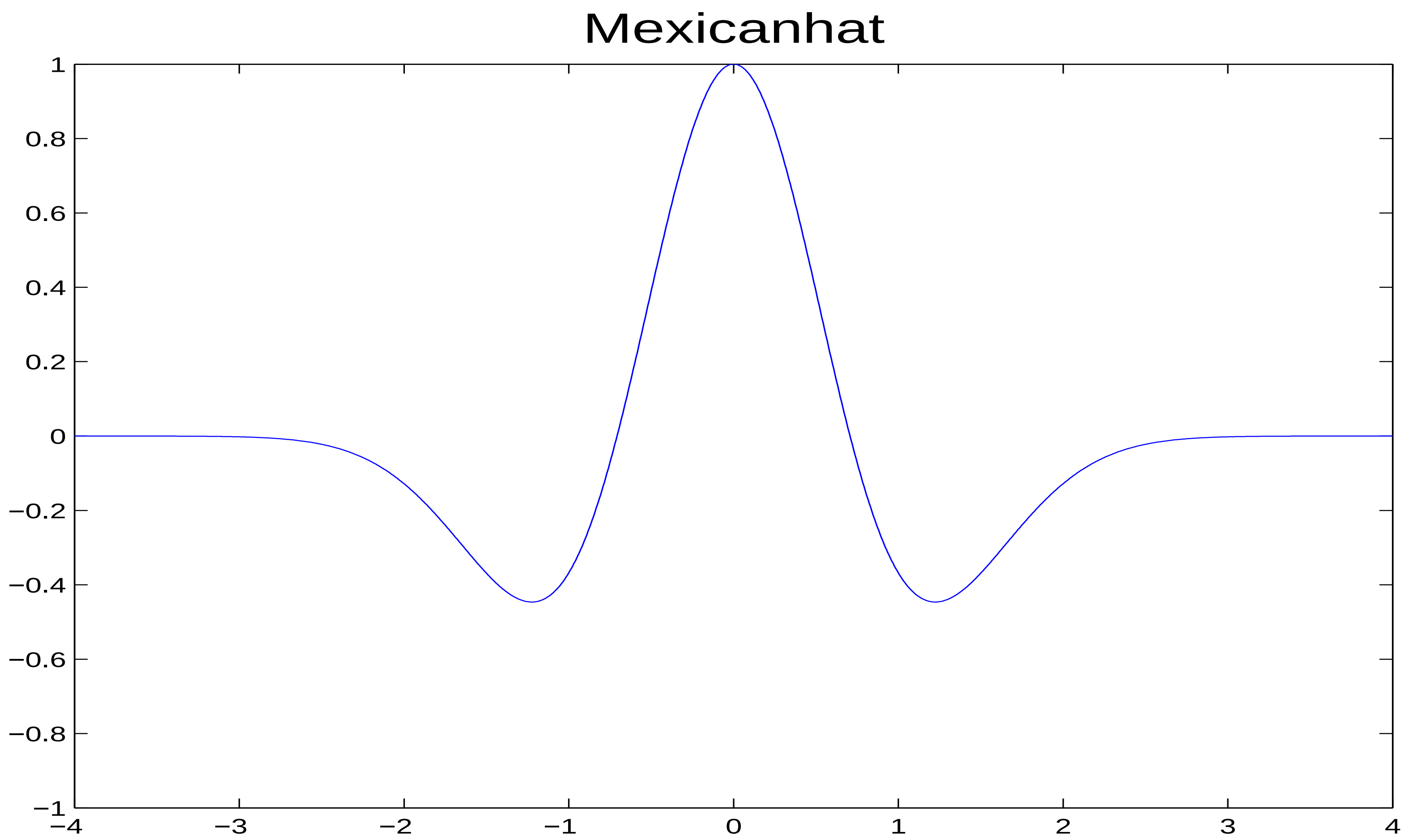


Figure 11: *Ondelette simple: Derivee seconde d'une Gaussienne*

Exemple d'ondelettes mère (2)

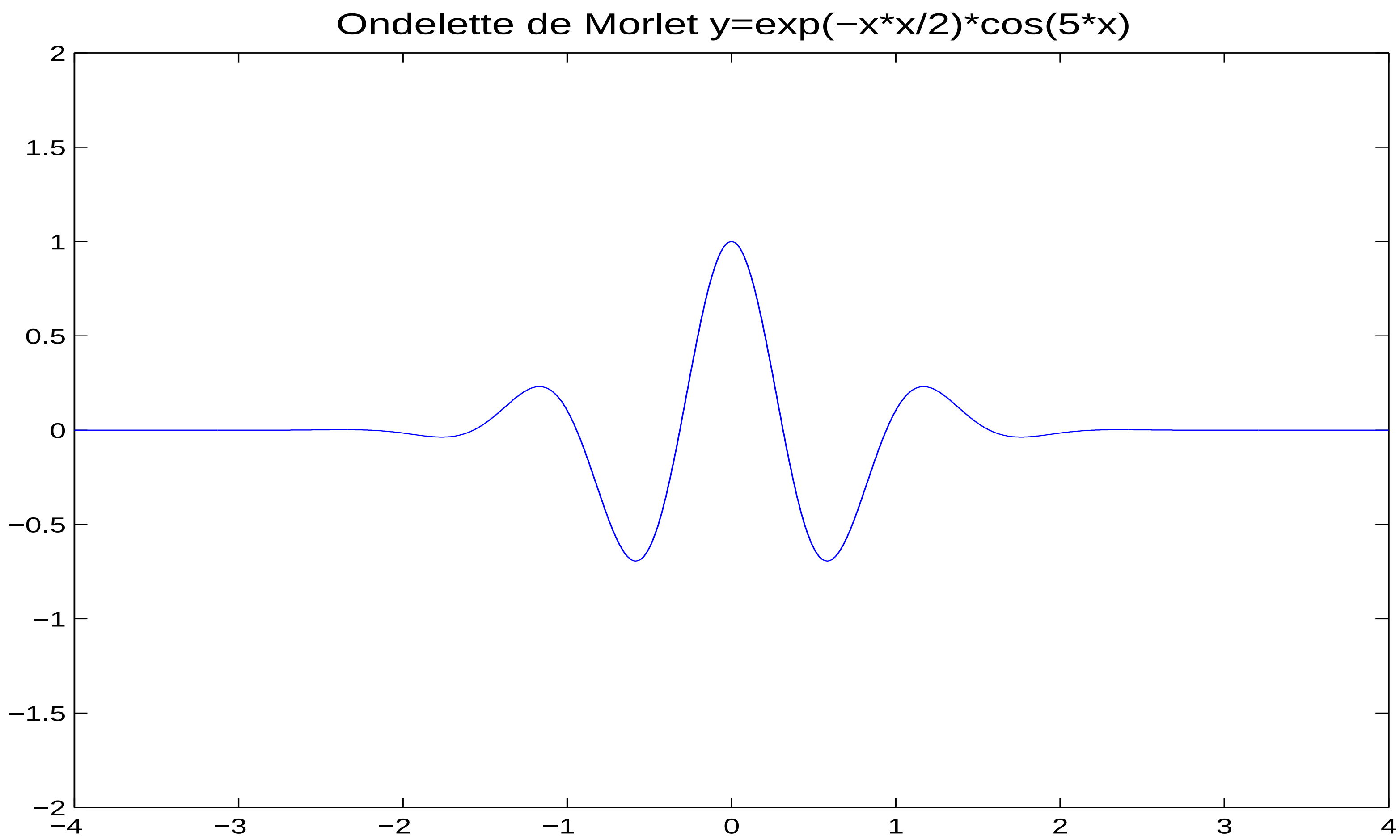


Figure 12: *Ondelette simple: Ondelette de Morlet*

Reconstruction de la fonction originale

- La fonction $x(t)$ peut être reconstruite à partir de $g(a,b)$ par la formule:

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{a=-\infty}^{a=\infty} \int_{b=-\infty}^{b=\infty} \frac{g(a,b)}{a^2}\, \psi_{a,b}(t)\; da\; db \tag{20}$$

  C_ψ est une constante dépendant de l'ondelette $\Psi(t)$ choisie

- La transformation générale en ondelette est surdéterminée
- En fait il suffit de connaitre la fonction $g(a,b)$ en un nombre dénombrable de valeurs pour reconstruire $x(t)$

Transformations dyadiques

- Les fonctions de bases sont dénombrables et générées à partir d'une fonction mère par:
  • Dilatations ou contractions dyadiques par un facteur $a = 2^{-j}$ cf 19
  • Translations binaires: pour une échelle donnée de dilatation 2^{-j} les translations sont $b = k2^{-j}$, k entier.
- Donc:

$$\psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j}\ \Psi(2^j t - k)$$

(21)

$$g(j,k) = \int_{t=-\infty}^{t=\infty} x(t)\ \bar{\psi}_{j,k}(t)\ dt$$

- Pour un j donné les supports des $\psi_{j,k}(t)$ sont disjoints et contigus.

Transformations dyadiques (2)

- Chaque fonction de base $\psi_{j,k}(t)$ est caractérisée par sa largeur (échelle) 2^{-j} et sa position k.
- En représentation (temps, fréquence), chaque fonction de base représente approximativement un rectangle de largeur 2^{-j} en temps et de largeur 2^{j} en fréquence.
- La fonction $x(t)$ peut être reconstruite par:
  $x(t) = \sum_k \sum_p g(j,k)\ \psi_{j,k}(t)$
- ou encore :

$$x(t) = g_0\phi(t) + g_1\psi(t) + \sum_{k>0}\sum_{p\in\mathbb{Z}} g(j,k)\ \psi(2^j t - k) \qquad (22)$$

Ondelettes de Haar

- Considérons une fonction réelle $x(t)$ définie sur $[0,1[$
- $x(t)$ échantillonnée en N points avec $N=2^m$
  x_k =$x(t_k)$ pour $t_k=0,\ \frac{1}{N},...,\ \frac{N-1}{N}$
- On définit la famille de fonctions :
  $\phi(t)=\begin{cases}1 & \text{pour} & 0\leq t<1\\ 0 & \text{autrement}\end{cases}$
  et $\phi_{j,k}(t)=\phi(2^jt-k)$

$$\phi_{j,k}(t)=\begin{cases}1 & \text{pour} & \frac{k}{2^j}\leq t<\frac{k+1}{2^j}\\ 0 & \text{autrement}\end{cases} \tag{23}$$

Ondelettes de Haar (2)

- Reconstruction de $x(t)$:
  $x(t) = \sum_{k=0}^{k=N-1} x_k \ \phi_{m,k}(t)$
- Notation $< f, g > = \int_0^1 x(t) g(t) \ dt$
- $< f, g >$ est un produit scalaire et :
  $< \phi_{j,k}, \phi_{j,k'} >= 0$ pour $k \neq k'$
  $||\phi_{j,k}||^2 =< \phi_{j,k}, \phi_{j,k} >= \frac{1}{2^j}$
- Donc pour chaque j les fonctions $\phi_{j,k}(t)$ forment une base orthogonale engendrant un sous espace vectoriel noté V_j de dimension 2^j de fonctions réelles intégrables sur $[0, 1[$.
- Cette base peut etre orthonormée en multipliant les $\phi_{j,k}(t)$ par $\sqrt{2^j}$.

Ondelettes de Haar (3)

- On définit de même la famille :

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{pour} & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{autrement} & \end{cases}$$

et $\psi_{j,k}(t) = \psi(2^j t - k)$, soit

$$\psi_{j,k}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} & \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \\ -1 & \text{pour} & \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{k+1}} \leq t < \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & \text{autrement} & \end{cases} \tag{24}$$

- Comme la famille (23) les fonctions $\psi_{j,k}(t)$ forment aussi pour chaque j une base du même sous-espace vectoriel de fonctions que le précédent.

Ondelettes de Haar (4)

- La fonction $\phi(t)$ s'appelle fonction d'échelle de Haar.
- Les fonction $\psi_{j,k}(t)$ sont les ondelettes de Haar.
- **Propriètè fondamentale**: La fonction $x(t)$ peut être calculée avec $\frac{N}{2}$ points $t_{2k} = 0, \; \frac{2}{N}, ..., \; \frac{2k}{N}, ..., \; \frac{N-2}{N}$
- c'est à dire avec l'échantillonnage précédent dont on prend un point sur deux.

  $x(t) = \sum_{k=0}^{k=\frac{N}{2}-1} s_{j-1,k} \, \phi_{j-1,2k}(t) + \sum_{k=0}^{k=\frac{N}{2}-1} d_{j-1,k} \, \psi_{j-1,2k}(t)$
- Les coefficients $s_{j,k}$ et $d_{j,k}$ se calculent par récurrence à partir des x_k : $s_{k,m} = x_k \quad , k = 1, ..., (N-1)/2$

$$s_{j-1,k} = \frac{s_{j,2k} + s_{j,2k+1}}{2}; d_{j-1,k} = \frac{s_{j,2k} - s_{j,2k+1}}{2} \qquad (25)$$

Ondelettes de Haar (5)

- Pour une même valeur de j les ondelettes $\psi_{j,k}(t)$ sont orthogonales aux fonctions d'échelles $\phi_{j,k}(t)$
- Pour une même valeur de j les ondelettes $\psi_{j,k}(t)$ sont orthogonales entre elles : $< \psi_{j,k}, \psi_{j,k'} >= 0$ pour $k \neq k'$
- Pour une même valeur de j les ondelettes $\psi_{j,k}(t)$ définissent un espace vectoriel Wj de dimension 2^j et complémentaire de celui (V_j) engendré par les $\phi_{j,k}(t)$
- On a $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$ ou V_{j+1} est l'espace vectoriel de dimension 2^{j+1} engendré par les $\phi_{j+1,k}(t)$

Ondelettes de Haar $\psi_{1,0}$ et $\psi_{1,1}$

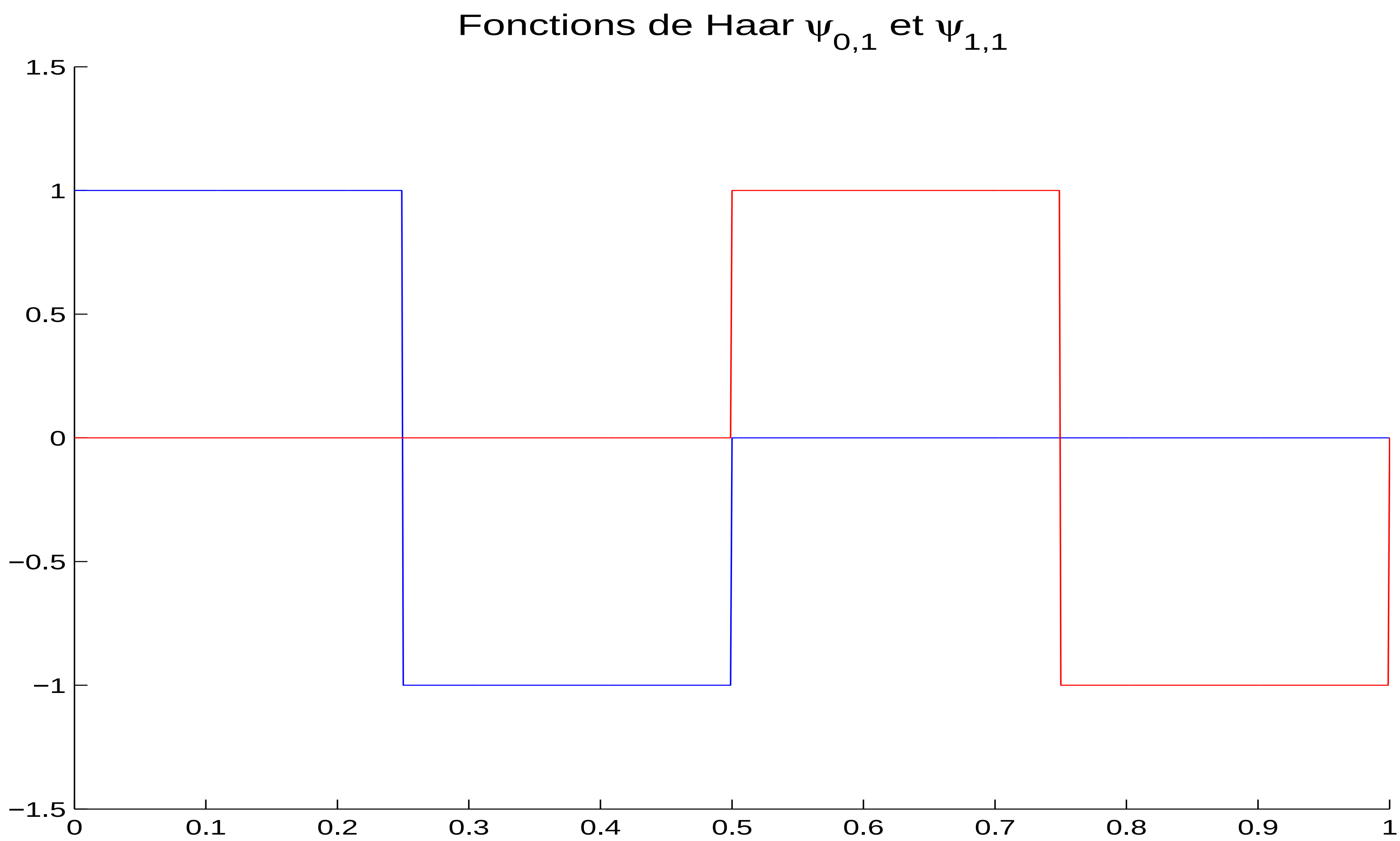


Figure 13: *Ondelettes de Haar*

Ondelettes de Haar (6)

Approche matricielle

- Exemple $N = 4 = 2^2$
- On connait une fonction $x(t)$ aux 4 instants t_0, t_1, t_2, t_3 soit $x_0, x_1, x_2 x_3$
- On désire décomposer cette fonction sur une base de Haar à 4 points.
- Posons $u_0(t) = \phi(t); u_1(t) = \psi(t); u_2(t) = \psi_1, 0(t); u_3(t) = \psi_1, 1(t)$
- On a cf formule (22): $x(t) = c_0 u_0(t) + c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + c_3 u_3(t)$
- En explicitant cette équation pour les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3 en t_0, t_1, t_2, t_3 on obtient:

Ondelettes de Haar (7)

- $$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
- Ou encore :
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$
- Les x_k sont connus, le calcul des c_k peut être fait en résolvant le systeme (inversion de la matrice) ou par la récurrence (25)

Ondelettes de Haar (7)

- Si H_4 est la matrice ci-dessus on a :
  $x = H_4\ c$ et $c = {H_4}^{-1}\ x$
- Cas ou N=8, la matrice H_8 est :

$$H_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Seules les deux premières colonnes sont pleines.

Commentaires sur la décomposition dyadiq

- Cette décomposition appelée multirésolution à pour but d'éviter la redondance inhérente à la formule (20)
- Elle nécessite que le nombre N de points soit une puissance de 2, soit $N = 2^m$
- Elle utilise la décomposition de la fonction $x(t)$ analysée dans des espaces vectoriels emboités :
  $V_0 \subseteq V_1 \subseteq ... \subseteq V_m$
- Les coefficients sur une base d'ondelettes de résolution (échelle) j se font par récurrence à partir de la résolution la plus fine m.
- Lorsque les coefficients ont été calculés ceux-ci permettent de reconstruire la fonction à partir de sa moyenne, niveau de résolution 0, en ajoutant les détails de résolution de niveaux $1, 2, 3, ...$ donc de plus en plus fine.

Principe d'une analyse multirésolution

- Définir une famille de fonctions d'échelle $\phi_{j,k}(t)$ pour $j = 1, ..., m$ à partir d'une fonction mère $\phi(t)$ par $\phi_{j,k}(t) = \phi(2^j t - k)$
- Ce choix définit les espaces emboités $V_0 \subseteq V_1 \subseteq, ..., \subseteq V_m$ et les sous-espaces complémentaires W_j de V_j dans V_{j+1} :$W_j \oplus V_j = V_{j+1}$
- Définir un produit scalaire sur V_m ce qui induit le même produit scalaire sur $V_0, V_1, ..., V_m$.
- Choisir un ensemble d'ondelettes $\psi_{j,k}(t)$ servant de base aux W_j et si possible orthogonales aux $\phi_{j,k}(t)$
- La base ainsi obtenue peut ensuite être normée en divisant chacune des fonctions de base par sa norme.

Equation d'échelle

- Équation d'échelle :
  $\phi(t)$ étant une fonction d'échelle $\phi \in V_0$.
- $\phi(t-k)$ est une base de V_0 et $\phi(2t) \in V_1$ tel que $V_0 \subseteq V_1$
- $\Rightarrow$ $\phi(t)$ et $\phi(2t)$ sont reliées par une équation dite d'échelle :

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\phi(2t-k) \tag{26}$$

  h est le filtre d'échelle associé à ϕ
- De même :

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)\phi(2t-k) \tag{27}$$

Généralisation aux autres ondelettes

- La formule (22) est valable pour toute base d'ondelettes orthogonales.
- Il suffit simplement de pouvoir calculer les valeurs des ondelettes aux points d'abscisses $t_{j,k} = \frac{k}{2^j}$ pour j donné.
- Les ondelettes de Morlet ne permettent pas de construire une base orthogonale.
- Des ondelettes couramment utilisées sont les ondelettes de Daubechies.
- Les ondelettes de Daubechies forment une famille infinie et sont notées $db1$, $db2$, $db3$,... dans la boite à outils de Matlab. Une ondelette de Daubechies dbk utilise $2k$ coefficients et est donc calculée à partir de $2k$ points.

Moments nuls

- Une ondelette a m moments nuls si et seulement si : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t)dt = 0$ pour $k = 1, ..., m$
- Ceci veut dire que $\psi(t)$ est orthogonale à tous les polynomes de degré $\leq m$.
- Ou encore :
  Une ondelette a m moments nuls si et seulement si sa fonction d'échelle restitue le polynômes de degré inférieur ou égal à m.
- Pour les fonctions d'échelle cette propriètè représente les capacités de l'analyse multirésolution à approximer des signaux réguliers
- Pour les ondelettes elle permet de caractériser une propriété "duale", c'est-à-dire l'ordre des singularités d'un signal.

Les ondelettes de Daubechies

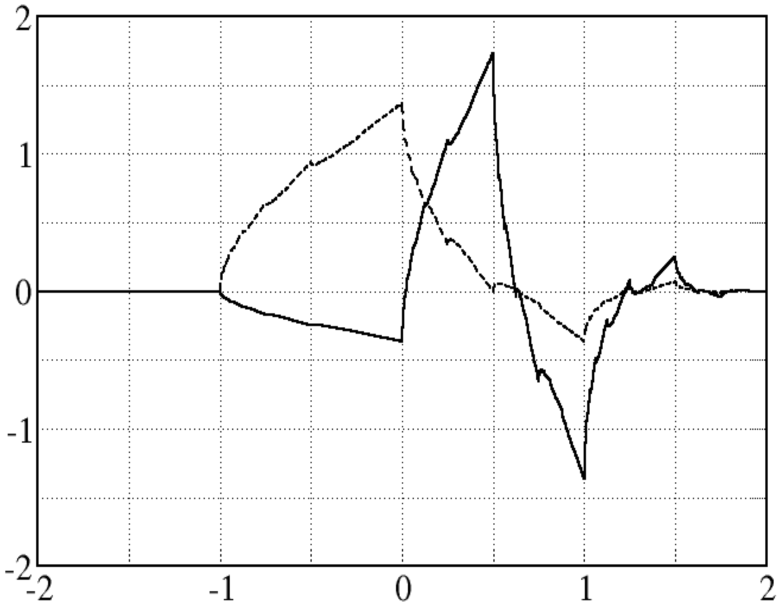
- Ingrid Daubechies a cherché a construire des bases d'ondelettes orthogonales à support compact et à m moments nuls.
- Etude du cas de l'ondelette de Daubechies D_4 ou $db2$ en matlab.
- Signal de longueur 4
- vecteur d'échelle $= (h_0, h_1, h_2, h_3)$
- vecteur d'ondelette $= (g_0, g_1, g_2, g_3) = (h_3, -h_2, h_1, -h_0)$
- Calcul des coefficients h_k

$$\begin{aligned}
< \psi, (1,1,1,1) > \quad &= 0 \rightarrow h_3 - h_2 + h_1 - h_0 = 0 \\
< \psi, (1,2,3,4) > \quad &= 0 \rightarrow h_3 - 2h_2 + 3h_1 - 4h_0 = 0 \\
< \psi(t), \psi(t-1) > \quad &= 0 \rightarrow h_1 h_3 + h_2 h_0 = 0 \\
\int_{-\infty}^{+_infty} \phi(t)\, dt \quad &= 1 \rightarrow h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = 1
\end{aligned}$$

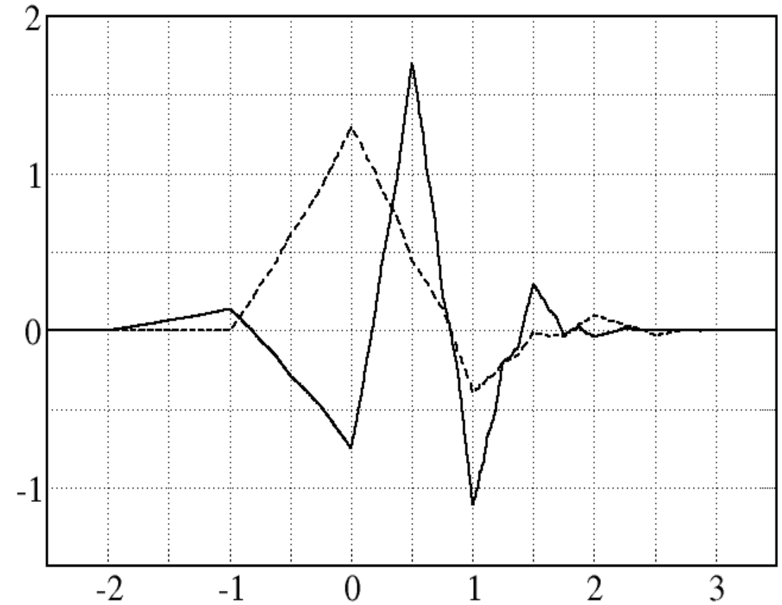
Les ondelettes de Daubechies(2)

- Signal de longueur 4, aprés résolution

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$



Onelette D4 (db2)

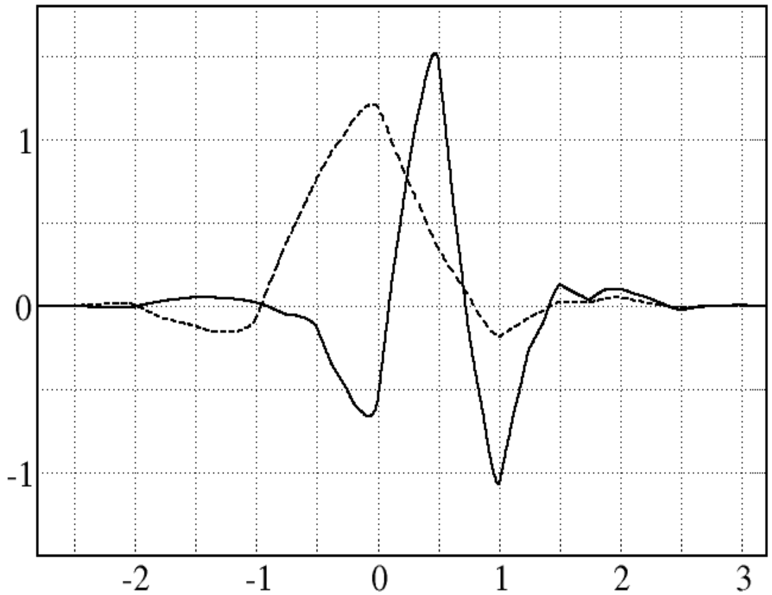


Ondelette D6 (db3)

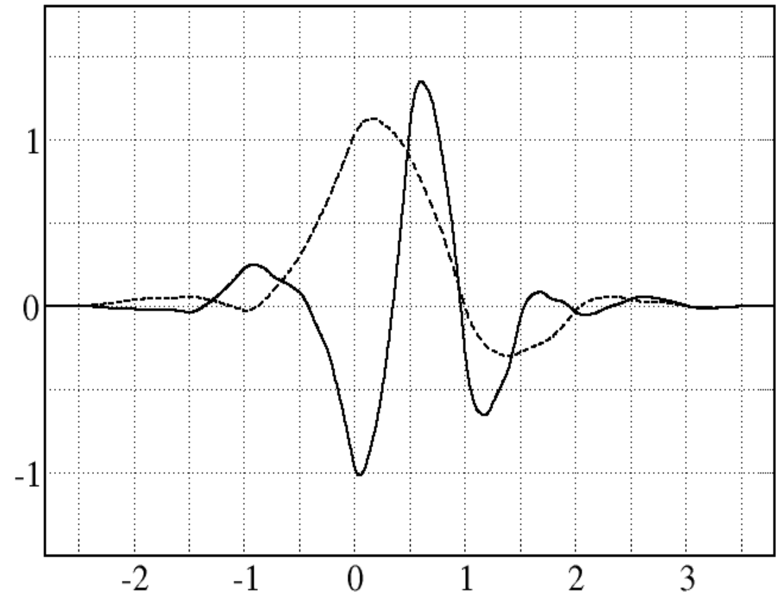
Les symmlets de Daubechies

- Daubechies a construit des ondelettes à support compact les plus symétriques possibles appelées Symmlets; en effet, il n'existe pas d'ondelettes à support compact dans une analyse multiresolution orthogonale qui soient symétriques, exceptées l'ondelette de Haar qui est antisymétrique.
- Les symmlets ont le même nombre m de moments nuls que les ondelettes de Daubechies pour un support donné: on a à nouveau $d = 2m$, et le nombre d'éléments non nuls du filtre est $2m$. Nous les nommerons D6s, D8s, etc, toujours en référence au support des fonctions de base.

Les symmlets de Daubechies



Symmlet ordre 4



Symmlet ordre 6

Généralisation aux images

- Une image est une fonction $z = f(x, y)$ ou x et x sont les coordonnées d'un pixel et z est son niveau de gris.
- Dans l'approche multirésolution on choisit comme bases d'ondelettes des fonctions de formes :

$$2^j\psi(2^jx - k1)\phi(2^jy - k2) \tag{28}$$

$$2^j\phi(2^jx - k1)\psi(2^jy - k2) \tag{29}$$

$$2^j\psi(2^jx - k1)\psi(2^jy - k2) \tag{30}$$

Application au débruitage

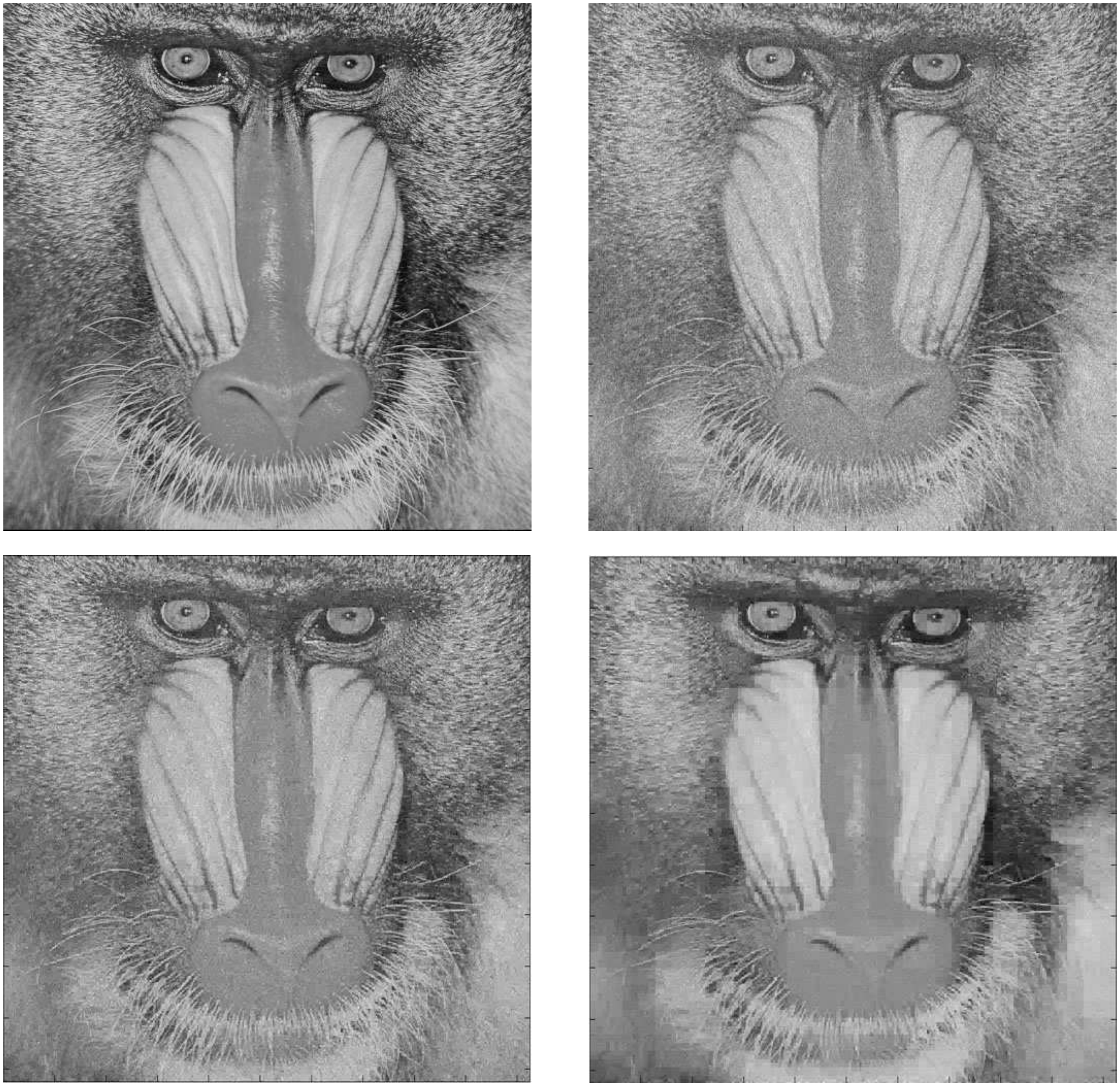
- Les images obtenues par les différentes techniques d'acquisition (radar, satellites, scanner, échographie, etc.) sont souvent très bruitées.
  $Y = X + B$
  Y : image obtenue, X : image de départ inconnue, B : le bruit.
- On cherche alors l'opérateur de débruitage D qui permettra d'estimer l'image dans le bruit B.
- Le seuillage dur est celui qui est le plus "intuitif". On se fixe un seuil $S > 0$. On ne conserve que les coefficients d'ondelettes supérieurs à S et on met à zéro les autres.
- Dans le cas du seuillage doux, on met toujours à zéro les coefficients inférieurs à un seuil S. Par contre, pour ceux supérieurs à S, on atténue l'amplitude des coefficients par la valeur du seuil.

Exemple de débruitage

initiale   bruitée

d. dur   d. doux

Exemple de débruitage



initiale bruitée

d. dur d. doux

Détection de contours

- Transformation en Ondelettes directionnelles (Murenzi 1990)
- $x, t \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (image)
- $W_f(x, a, \theta) = \int\int_{\mathbb{R}^2} \; f(t) \; \frac{1}{a}\psi(R_\theta \frac{t-x}{a})dt$
  avec :
  $$R_\theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$
- Principe : Chercher les points de l'image dans la direction du gradient ou celui-ci est maximum.
- On choisit généralement les ondelettes gaussiennes :
  $\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$

Le tatouage d'images (watermarking)

- Le marquage en filigrane ou tatouage d'image consiste à insérer une marque (logo de société, nom du propriétaire etc.) dans une image pour assurer son authenticité ou de prouver les droits du propriétaire.
- La marque doit etre imperceptible, spécifique et robuste, c'est à dire qu'elle ne doit pas pouvoir etre modifiée ou supprimée par des algorithmes de traitement d'images.
- Le marquage peut être réalisé en effectuant une transformation en ondelettes de l'image et une autre de la marque. On cherche ensuite quels sont les pixels ayant la plus forte salience (importance visuelle) et on ajoute les coefficients d'ondelettes de la marque aux coefficients d'ondelettes de l'image correspondant à ces points.