

Traitement d'Image¹

Valérie Perrier (Valerie.Perrier@grenoble-inp.fr)

Références :

- M. Bergounioux, *Introduction au traitement automatique des images - méthodes déterministes*, Mathématiques et Applications **76**, Springer (2015).
- M. Kunt, G. Granlund, M. Kocher, *Traitement numérique des images*, Traitement de l'information, volume 2, Presses polytechniques et universitaires romandes (1993).

1. Cours Ensimag, MMIS 2A

Organisation du cours

- **Cours/TD** : Valérie PERRIER – Valerie.Perrier@grenoble-inp.fr
11 séances de CM
3 séances de TD
+ permanences (révision, annales pour préparer l'examen)
- **TP** : Michel Desvignes, Amélie Fondevilla
8 séances de TP
TPs à rendre (notés)

Introduction

Les images sont partout : audiovisuel, imagerie satellitaire, médicale, résultats de calculs, etc...

Problèmes actuels :

- Télévision Haute définition : compression, codage (formats), super-résolution (afficher des images de résolution standard sur un écran HD)
- Restauration d'image : problèmes de débruitage, images déformées, Ce type de problème s'exprime souvent comme un problème inverse. Présent dans tous les domaines : satellite, imagerie médicale, ..
- "Inpainting" : l'image est incomplète. Par exemple un objet devant la scène empêche d'avoir l'image globale. Exemple : rebord d'un lit sur une radiographie, nuage sur une image satellite....
- Analyse d'image : points caractéristiques, edges (bords), 'blobs'....(pour la vision par ordinateur)
- Segmentation automatique (partie géométrique/texture, cellules/écoulement,

Plan du cours : Traitement d'image (coté math !)

- P. 1** Généralités. Images analogiques et numériques
Transformée de Fourier d'une image
Exemple d'applications de la TF : Tomographie en imagerie médicale.
- P. 2 Filtrage linéaire d'une image**
- Convolution continue et discrète
- Application au filtrage d'images : détection de bords, rehaussement des contours, lissage, débruitage.
- P. 3 Echantillonnage, sous-échantillonnage d'une image.**
- Echantillonnage : le théorème de Shannon.
- Les problèmes d'impression/numérisation : repliement de spectre, phénomène de Moiré.
- P. 4 Décomposition sur bases des images numériques**
- Base de Fourier, base de Cosinus, base de Haar, ondelettes.
- Algorithmes rapides FFT, DCT, FWT.
- Principe des algorithmes de compression avec perte : JPEG, JPEG 2000

Plan - Partie I

1 Les espaces d'Images

2 Transformée de Fourier d'une image

- Rappels utiles sur la transformée de Fourier 1D
- Transformée de Fourier 2D
- Propriétés de la transformée de Fourier 2D
- Exemples de transformées de Fourier

3 Transformée de Fourier Discrète - TFD/FFT

- Calcul pratique de Transformée de Fourier
- Propriétés de la Transformée de Fourier Discrète
- Application de la TFD : interpolation d'image

Plan

1 Les espaces d'Images

2 Transformée de Fourier d'une image

- Rappels utiles sur la transformée de Fourier 1D
- Transformée de Fourier 2D
- Propriétés de la transformée de Fourier 2D
- Exemples de transformées de Fourier

3 Transformée de Fourier Discrète - TFD/FFT

- Calcul pratique de Transformée de Fourier
- Propriétés de la Transformée de Fourier Discrète
- Application de la TFD : interpolation d'image

Les types d'Images

- **Analogique** : image physique. Modèle mathématique d'une image scalaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow f(x, y)$$

- **Numérique** : image discrète (matrice N^2 codée sur 2^m niveaux de gris).

$$f : \{0, 1, 2, \dots, N\}^2 \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2^m - 1\}$$
$$(i, j) \rightarrow f[i, j]$$

- **Vectorielle** (images couleur, satellite)
Exemple format RGB : $f = \alpha_R f_R(x, y) + \alpha_G f_G(x, y) + \alpha_B f_B(x, y)$

→ On ne traite dans le cours que des images scalaires ("noir et blanc").

Les espaces d'images

- $L^1(\mathbb{R}^2) = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; \int_{\mathbb{R}^2} |f| < \infty\}$

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^2} |f(\vec{x})| d\vec{x}$$

- $L^2(\mathbb{R}^2) = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; \int_{\mathbb{R}^2} |f|^2 < \infty\}$ (espace de la transformée de Fourier)

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\vec{x})|^2 d\vec{x} \right)^{1/2}$$

- $BV(\mathbb{R}^2) = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla f| < \infty\}$ (ensemble des fonctions à variation bornée).

$$\|f\|_{TV} = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla f(\vec{x})| d\vec{x} = \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{(\partial_1 f(\vec{x}))^2 + (\partial_2 f(\vec{x}))^2} d\vec{x}$$

- Différentes représentations des images : spatiale, fréquentielle

Plan

1 Les espaces d'images

2 Transformée de Fourier d'une image

- Rappels utiles sur la transformée de Fourier 1D
- Transformée de Fourier 2D
- Propriétés de la transformée de Fourier 2D
- Exemples de transformées de Fourier

3 Transformée de Fourier Discrète - TFD/FFT

- Calcul pratique de Transformée de Fourier
- Propriétés de la Transformée de Fourier Discrète
- Application de la TFD : interpolation d'image

Rappels utiles sur la transformée de Fourier 1D

- **1D : Transformée de Fourier 1D.** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$$

Se rappeler les propriétés : translation, dilatation, dérivation, ...

- **1D : Transformée de Fourier dans L^2 .** On peut prolonger cette définition pour des fonctions de L^2 par densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 , et on a pour $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\hat{f}(\nu) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$$

On peut inverser la TF dans L^2 , et la TF est une isométrie de L^2 :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu x} d\nu$$

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu \quad (\text{Parseval})$$

Transformée de Fourier 2D

- Transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$: pour $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$,

$$\hat{f}(\vec{\nu}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{x}) e^{-2i\pi\vec{\nu} \cdot \vec{x}} d\vec{x}$$

En notant $\vec{x} = (x_1, x_2)$, la transformée de fourier se réécrit :

$$\hat{f}(\nu_1, \nu_2) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) e^{-2i\pi\nu_1 x_1} dx_1 \right) e^{-2i\pi\nu_2 x_2} dx_2$$

Ceci correspond à faire d'abord une transformée de Fourier 1D sur chaque colonne de l'image, suivie par une transformée de Fourier 1D sur chaque ligne de l'image obtenue (En pratique FFT2D : utilisation de la FFT 1D).

- **Exemple** : calculer la transformée de Fourier d'une image composée d'un carré blanc (=1 sur $[-1/2, 1/2]^2$) sur fond noir (=0).



Transformée de Fourier 2D

- Transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$: pour $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$,

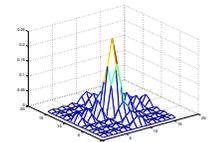
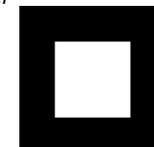
$$\hat{f}(\vec{\nu}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{x}) e^{-2i\pi\vec{\nu} \cdot \vec{x}} d\vec{x}$$

En notant $\vec{x} = (x_1, x_2)$, la transformée de fourier se réécrit :

$$\hat{f}(\nu_1, \nu_2) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) e^{-2i\pi\nu_1 x_1} dx_1 \right) e^{-2i\pi\nu_2 x_2} dx_2$$

Ceci correspond à faire d'abord une transformée de Fourier 1D sur chaque colonne de l'image, suivie par une transformée de Fourier 1D sur chaque ligne de l'image obtenue (En pratique FFT2D : utilisation de la FFT 1D).

- **Exemple** : calculer la transformée de Fourier d'une image composée d'un carré blanc (=1 sur $[-1/2, 1/2]^2$) sur fond noir (=0).



Propriétés de la transformée de Fourier 2D (1)

- **Transformée de Fourier 2D dans L^2** . On peut prolonger cette définition pour des fonctions de L^2 par densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 , et on a pour $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\widehat{f}(\vec{\nu}) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, R]^2} f(\vec{x}) e^{-2i\pi\vec{\nu}\cdot\vec{x}} d\vec{x}$$

- **Inversion de la TF** : on peut inverser la TF de $L^2 \rightarrow L^2$:

$$f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\vec{\nu}) e^{2i\pi\vec{\nu}\cdot\vec{x}} d\vec{\nu}$$

- **Conservation de l'énergie** : la TF est une isométrie de L^2 :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(\vec{x})|^2 d\vec{x} = \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}(\vec{\nu})|^2 d\vec{\nu} \quad (\text{Parseval})$$

Propriétés de la transformée de Fourier 2D (2)

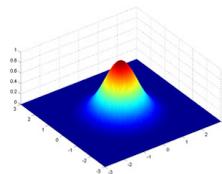
- **Symétrie suivant les axes** : si la fonction 2D f est un produit tensoriel de fonctions 1D : $f(x, y) = h(x)g(y)$, alors il en est de même de sa transformée de Fourier :

$$\widehat{f}(\nu_1, \nu_2) = \widehat{h}(\nu_1)\widehat{g}(\nu_2)$$

(produit tensoriel des transformées de Fourier 1D)

Démonstration : Intégrale à variables séparées (exercice !)

- **Exemple** : Montrer que la transformée de Fourier de la Gaussienne 2D $G(\vec{x}) = e^{-\pi|\vec{x}|^2}$ est elle-même $G(\vec{\nu}) = e^{-\pi|\vec{\nu}|^2}$.



Propriétés de la transformée de Fourier 2D (3)

- **Commutation avec les rotations** : on note l'image tournée d'un angle θ :

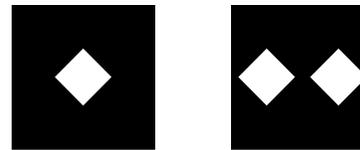
$$R_\theta f(\vec{x}) = f(r_{-\theta}\vec{x}) \quad \text{avec} \quad r_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

On a alors :

$$\mathcal{F} \circ R_\theta = R_\theta \circ \mathcal{F} \quad \widehat{R_\theta f}(\vec{\nu}) = \widehat{f}(r_{-\theta}\vec{\nu})$$

Démonstration : changement de variable dans l'intégrale (exercice !)

- En particulier si l'image est **isotrope** ($f(\vec{x})$ ne dépend que de $|\vec{x}|$), il en est de même de sa transformée de Fourier.
- **Exemple** : calculer la transformée de Fourier des 2 images suivantes



Propriétés de la transformée de Fourier 2D (3)

- **Commutation avec les rotations** : on note l'image tournée d'un angle θ :

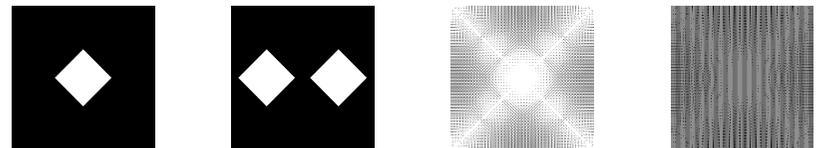
$$R_\theta f(\vec{x}) = f(r_{-\theta}\vec{x}) \quad \text{avec} \quad r_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

On a alors :

$$\mathcal{F} \circ R_\theta = R_\theta \circ \mathcal{F} \quad \widehat{R_\theta f}(\vec{\nu}) = \widehat{f}(r_{-\theta}\vec{\nu})$$

Démonstration : changement de variable dans l'intégrale (exercice !)

- En particulier si l'image est **isotrope** ($f(\vec{x})$ ne dépend que de $|\vec{x}|$), il en est de même de sa transformée de Fourier.
- **Exemple** : calculer la transformée de Fourier des 2 images suivantes



Propriétés de la transformée de Fourier 2D (4)

- Translation ($\vec{\tau} \in \mathbb{R}^2$)

$$\mathcal{F}(f(\vec{x} - \vec{\tau}))(\vec{\nu}) = e^{-2i\pi\vec{\tau}\cdot\vec{\nu}} \hat{f}(\vec{\nu})$$

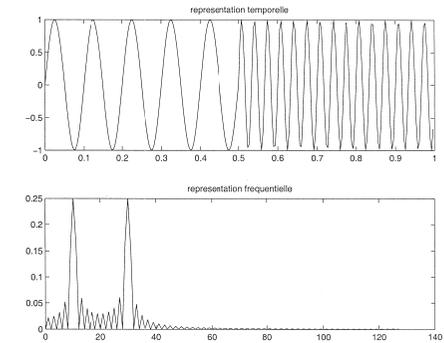
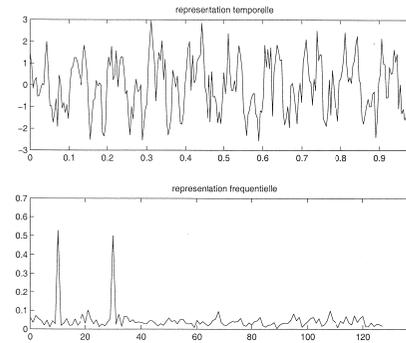
- Dilatation ($a > 0$)

$$\mathcal{F}(f(a\vec{x}))(\vec{\nu}) = \frac{1}{a^2} \hat{f}\left(\frac{\vec{\nu}}{a}\right)$$

- Dérivation

$$\mathcal{F}(\partial_k f)(\vec{\nu}) = 2i\pi\nu_k \hat{f}(\vec{\nu})$$

$$\mathcal{F}(\Delta f)(\vec{\nu}) = -4\pi^2|\vec{\nu}|^2 \hat{f}(\vec{\nu})$$



Exemples de transformées de Fourier 1D, 2D

- 1D, quelques TF distributions

$$\hat{\delta} = 1 \quad \hat{1} = \delta$$

$$\mathcal{F}(\delta(x - a))(\nu) = e^{-2i\pi\nu a} \quad \mathcal{F}(e^{2i\pi kx})(\nu) = \delta(\nu - k)$$

- 2D Fourier d'une raie lumineuse

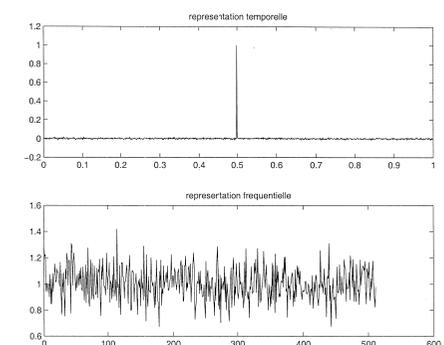
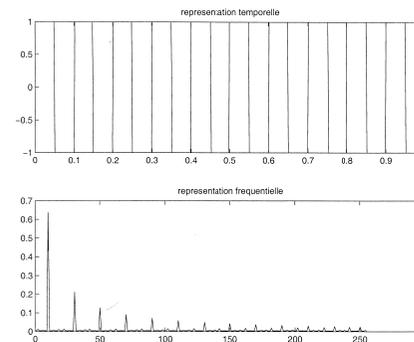
$$f(\vec{x}) = \delta(x_1) \quad \hat{f}(\vec{\nu}) = \delta(\nu_2)$$

- Fonction périodique 1D (période T)

$$\hat{f}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

avec

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-2\pi i \frac{n}{T} x} dx$$



Ex : $f(x) = 1$ sur $[0, \frac{1}{2}[$; $f(x) = -1$ sur $[\frac{1}{2}, 1[$; $c_n(f) = \frac{1 - (-1)^n}{2i\pi n}$

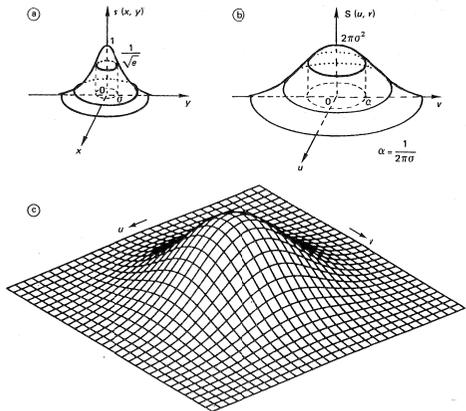
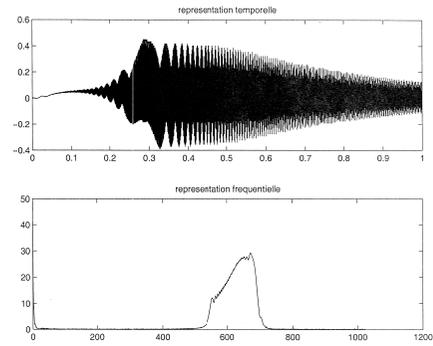
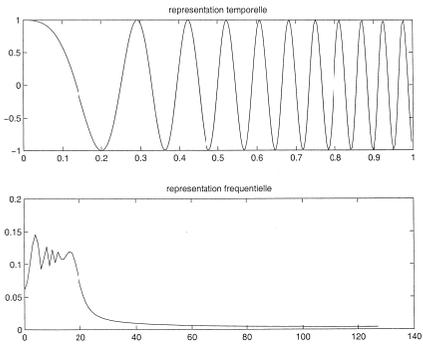


Fig. 1.34 - a) Signal gaussien de révolution, de méridienne $e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ où r est le rayon ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$), b) et c) : la transformée de Fourier est également une gaussienne de révolution, de méridienne $2\pi\sigma^2 e^{-\frac{r_0^2}{2\sigma^2}}$ où r_0 est le rayon ($r_0 = \sqrt{u^2 + v^2}$) et où $\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha}$.

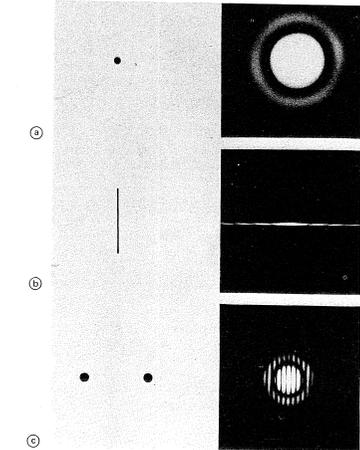


Fig. 1.35 - Objets à deux dimensions et leurs spectres de Fourier : a) petit disque (cf. figure 1.33), b) ligne selon Oy , de spectre aligné selon Ox , c) deux petits disques symétriques par rapport à l'origine : on peut les considérer comme résultant de la convolution (voir chapitre II) d'un disque centré à l'origine comme en a) avec deux signaux de Dirac (points lumineux) placés aux centres des disques, ce qui explique l'allure du spectre obtenu : produit d'un spectre du type a) par une fonction centrale (d'après R.C. Gonzalez et P. Wintz), [1].

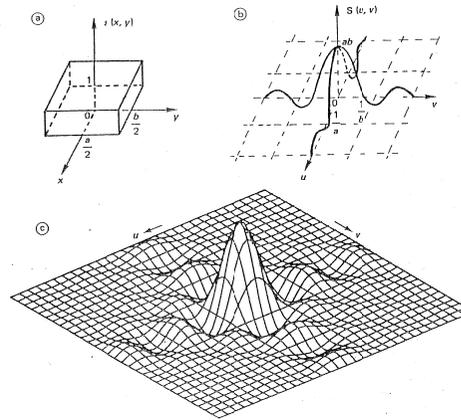


Fig. 1.32 - a) Rectangle lumineux d'intensité unité, de côtés a et b selon Ox et Oy respectivement, b) et c) : la transformée de Fourier est le produit de deux fonctions en $\frac{\sin u}{u}$ et $\frac{\sin v}{v}$: $S(u, v) = ab \operatorname{sinc} \pi u \operatorname{sinc} \pi v$.

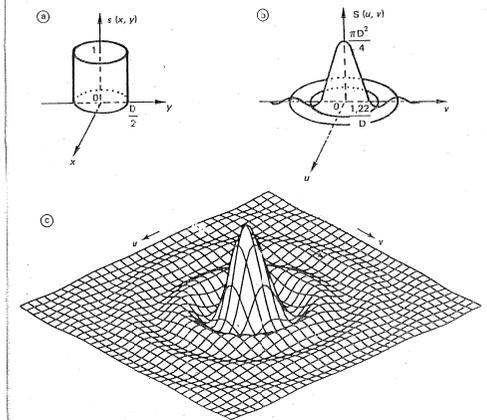


Fig. 1.33 - a) Disque lumineux de diamètre D et d'intensité unité (objet à symétrie circulaire), b) et c) : la transformée de Fourier, également à symétrie circulaire, a pour méridienne la fonction $\frac{2J_1(\pi D \rho)}{\pi D \rho}$ où ρ est le rayon ($\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$) et où J_1 est la fonction de Bessel de première espèce.

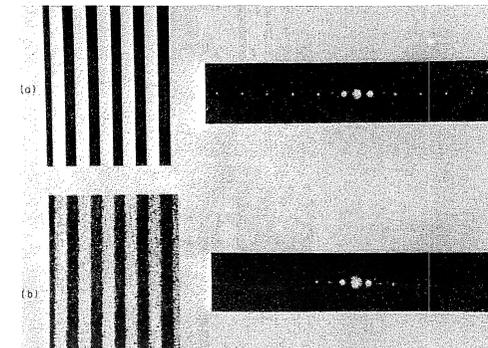
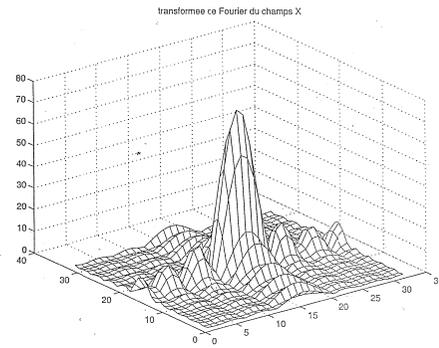
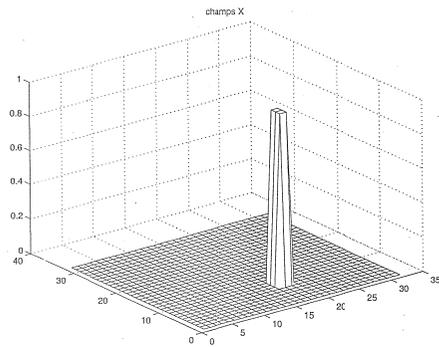


Fig. 1.26 - a) Mire périodique formée de traits noirs sur fond blanc (objet d'intensité lumineuse variant en créneau selon Ox et constante selon Oy) et son spectre de Fourier constitué de points lumineux d'intensité décroissante alignés selon Ou , b) cope de la mire sur film à gros grain et spectre de Fourier correspondant : l'arrondissement du bord des traits dû à la réponse du film se traduit sur le spectre par la diminution de l'intensité des hautes fréquences ; l'irrégularité du fond due à la granularité du film se manifeste sur l. spectre par l'élargissement de la tache de fréquence zéro (d'après J.C. Dainty et R. Shaw), [8].



Plan

- 1 Les espaces d'images
- 2 Transformée de Fourier d'une image
 - Rappels utiles sur la transformée de Fourier 1D
 - Transformée de Fourier 2D
 - Propriétés de la transformée de Fourier 2D
 - Exemples de transformées de Fourier
- 3 Transformée de Fourier Discrète - TFD/FFT
 - Calcul pratique de Transformée de Fourier
 - Propriétés de la Transformée de Fourier Discrète
 - Application de la TFD : interpolation d'image

Transformée de Fourier d'une image

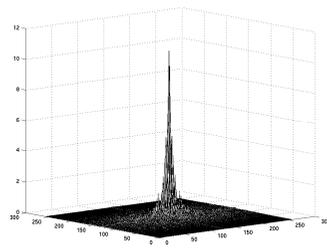


Image originale ("Lenna") et sa transformée de Fourier.

Calcul pratique de Transformée de Fourier (1)

• 1D - Relation avec la transformée de Fourier Discrète (TFD)

Soit f à support compact $[0, T]$. On note \tilde{f} sa périodisée sur \mathbb{R} , que l'on peut décomposer en série de Fourier :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - nT) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\tilde{f}) e^{2i\pi \frac{n}{T} x}$$

Alors la transformée de Fourier distribution de \tilde{f} est :

$$\mathcal{F}(\tilde{f})(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\tilde{f}) \delta(\nu - \frac{n}{T})$$

$$c_n(\tilde{f}) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{f}(x) e^{-2i\pi \frac{n}{T} x} dx = \frac{1}{T} \hat{f}(\frac{n}{T}) \quad (f = \tilde{f} \text{ sur }]0, T[)$$

Approximation de l'intégrale par somme de Riemann : N points sur $[0, T]$,

$$\begin{aligned} c_n(\tilde{f}) &\approx \frac{1}{T} \sum_{r=0}^{N-1} f\left(\frac{rT}{N}\right) e^{-2i\pi nr \frac{T}{N}} \\ &\approx \frac{1}{N} \text{FFT}(f)[n] \end{aligned}$$

Calcul pratique de Transformée de Fourier (2)

- **Passage continu/discret** : soit f une image à support compact dans $[0, T]^2$ et \tilde{f} sa périodisée, alors :

$$\hat{f}(\vec{\nu}) = \int_{[0, T]^2} f(\vec{x}) e^{-2i\pi\vec{\nu}\cdot\vec{x}} d\vec{x}$$

$$C_{k,\ell}(f) = \frac{1}{T^2} \int_{[0, T]^2} f(\vec{x}) e^{-2i\pi\frac{kx_1 + \ell x_2}{T}} d\vec{x} = \hat{f}\left(\frac{k}{T}, \frac{\ell}{T}\right)$$

On discrétise f sur une grille $N \times N \rightarrow f[n, p] = f\left(\frac{nT}{N}, \frac{pT}{N}\right)$.

- **TFD 2D** : La transformée de Fourier discrète des valeurs $f[n, p]$ est :

$$FFT2(f)[k, \ell] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} f[n, p] e^{-2i\pi\frac{nk+p\ell}{N}} \quad \text{pour } k, \ell = 0, N-1$$

- Approximation par somme de Riemann quand N est grand :

$$C_{k,\ell}(f) \approx \frac{1}{N^2} FFT2(f)[k, \ell]$$

FFT 2D : N FFT 1D sur les lignes puis N FFT 1D sur les colonnes des N lignes précédentes.

Propriétés de la Transformée de Fourier Discrète

$$FFT2(f)[k, \ell] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} f[n, p] e^{-2i\pi\frac{nk+p\ell}{N}} \quad \text{pour } k, \ell = 0, N-1$$

- **Symétries** : si l'image f est réelle,

$$FFT2(f)[k, -\ell] = \overline{FFT2(f)[-k, \ell]}, \quad FFT2(f)[-k, -\ell] = \overline{FFT2(f)[k, \ell]}$$

$$FFT2(f)[0, 0] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} f[n, p] \in \mathbb{R}$$

- **Inversion** ($IFFT2(f)[n, p]$)

$$f[n, p] = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} FFT(f)[k, \ell] e^{2i\pi\frac{nk+p\ell}{N}} \quad \text{pour } n, p = 0, N-1$$

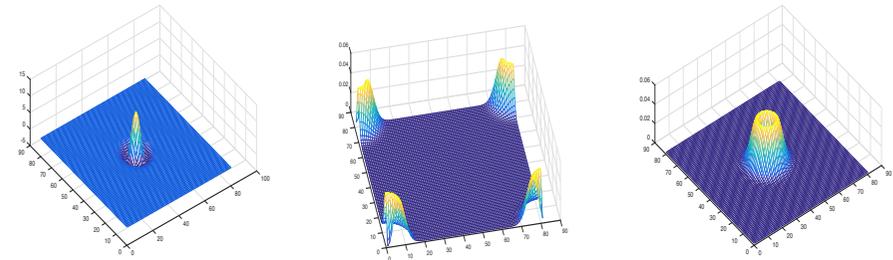
- **Conservation de l'énergie**

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} |f[n, p]|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} |FFT(f)[k, \ell]|^2$$

Exemple d'utilisation de la Transformée de Fourier Discrète

Calcul de la FFT2 sur matlab :

$$-\Delta G = -\Delta e^{-\pi|\vec{x}|^2} = (4\pi - 4\pi^2|\vec{x}|^2)e^{-\pi|\vec{x}|^2}$$



- Laplacien de Gaussienne, sa FFT2 (symétries), et sa FFT2 après fftshift

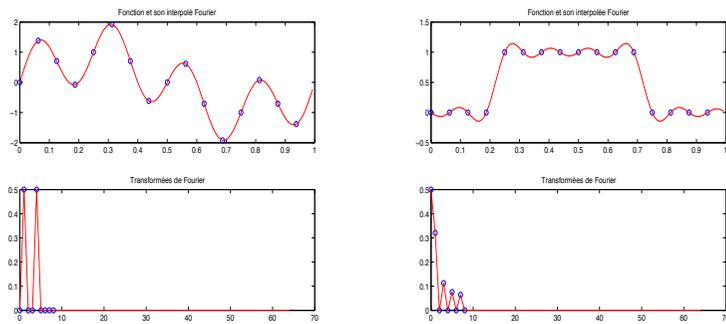
Application de la TFD : interpolation d'image par FFT

- **Exercice** Soit $(F[n, m])_{0 \leq n, m \leq N-1}$ une image numérique (réelle) de taille $N \times N$. On souhaite "agrandir" cette image en doublant sa taille et sa résolution. On imagine alors la méthode suivante :

- 1 Décomposition de l'image F sur la base de Fourier discrète 2D, en utilisant l'algorithme de FFT 2D. On obtient alors une matrice de coefficients \hat{F} de taille N^2 .
- 2 Plongement de la matrice \hat{F} dans une matrice \hat{G} de taille $4N^2$ en ajoutant des zéros correspondant à des coefficients de haute fréquence.
- 3 FFT 2D inverse de la matrice \hat{G} pour obtenir une image G de taille $4N^2$.

- (i) Décrire complètement l'étape 1 et donner l'expression des coefficients \hat{F} .
- (ii) En utilisant les symétries de la TFD d'une image réelle, expliquer exactement comment doit être construite la matrice \hat{G} .
- (iii) Donner la relation entre G et F et vérifier que la méthode utilisée est une méthode permettant d'interpoler l'image F .

Interpolation de fonctions par FFT



A gauche, interpolation sur 128 valeurs d'une fonction régulière tabulée sur 16 points. A droite, interpolation d'une fonction discontinue : apparition d'oscillations (Gibbs)

Interpolation d'images par FFT



Image originale 64×64 (à gauche) interpolée sur 512^2 valeurs (centre) et sa transformée de Fourier (à droite).

Interpolation d'images par FFT

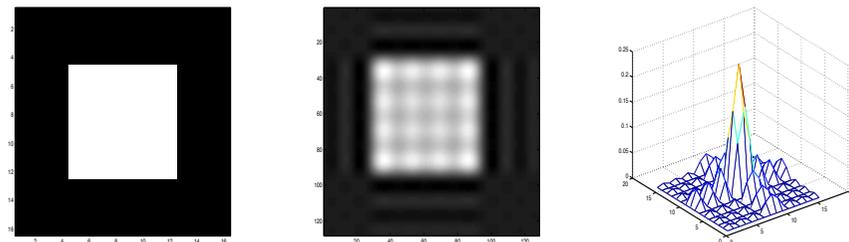


Image originale 16×16 (à gauche) interpolée sur 128^2 valeurs (centre) et sa transformée de Fourier (à droite).

Interpolation d'images par FFT



Image originale 256×256 (à gauche) interpolée sur 1024^2 valeurs (centre) et sa transformée de Fourier (à droite).

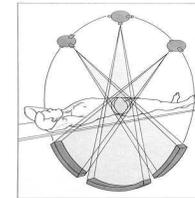
Programme Matlab

```
% Trace de la TF d'une image et interpolation
im=ReadImage('Lenna');
[N/M]=size(im)
ND=N/2
K=4;
N2=K*N;
% Calcul de la transformée de Fourier
fim=fft2(im)/(N*N);
mesh(fftshift(abs(fim)));
% ajout de zeros dans la TF
fim2=zeros(K*N,K*N);
fim2(1:ND,1:ND)=fim(1:ND,1:ND);
fim2((K-1)*N+ND+1:K*N,1:ND)=fim(ND+1:N,1:ND);
fim2(1:ND,(K-1)*N+ND+1:K*N)=fim(1:ND,ND+1:N);
fim2((K-1)*N+ND+1:K*N,(K-1)*N+ND+1:K*N)=fim(ND+1:N,ND+1:N);
% reconstruction de l'image agrandie
im2=(K*N*K*N)*(ifft2(fim2));
imagesc(real(im2));colormap('Gray')
```

Imagerie scanner : reconstruction d'objets à partir de données tomographiques

Scanner médical : tomodensitométrie par rayons X

Godfrey N. Hounsfield, ingénieur en électronique et Allan M. Cormack, mathématicien : prix Nobel de Médecine 1979.



Scanner et illustration de son principe de fonctionnement : mesures radiologiques effectuées tout autour du patient, qui permettent, après calcul, de donner une image de la section irradiée.

Exercice

Soit $f(x, y)$ une fonction radiale, i.e. il existe une fonction F telle que :

$$f(x, y) = F(r) \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Expliquez pourquoi la transformée de Fourier de f est une fonction radiale, notée $G(\rho)$, où $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$.
- Montrer, en utilisant les coordonnées polaires du plan, que $\hat{f}(u, v)$ s'écrit :

$$\hat{f}(u, v) = G(\rho) = 2\pi \int_0^{+\infty} r F(r) J_0(2\pi\rho r) dr \quad \text{avec} \quad \rho = \sqrt{u^2 + v^2}$$

et où J_0 est la fonction de Bessel de 1^{ère} espèce définie par :

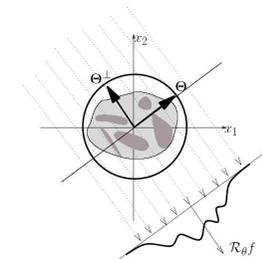
$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \theta} d\theta \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Calculer la transformée de Fourier dans \mathbb{R}^2 de la fonction

$$F(r) = \frac{1}{r}$$

(on admettra que $\int_0^{+\infty} J_0(x) dx = 1$)

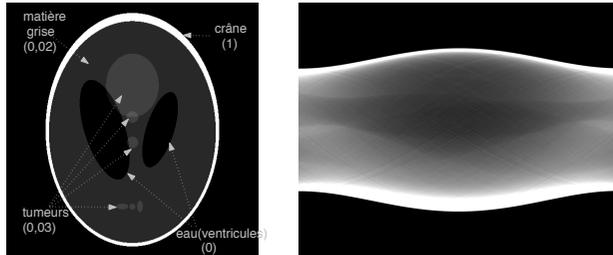
Coupes radiologiques en géométrie parallèle 2D



Ces coupes correspondent mathématiquement à la transformée de Radon de la fonction d'atténuation $f(x)$, mesurée sur chaque détecteur de direction $\vec{\theta} = (\cos \theta, \sin \theta)$, correspondant à la moyenne de f le long de droites $L_{\theta,s}$ de directions $\vec{\theta}^\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)$:

$$\mathcal{R}_\theta f(s) = \int_{L_{\theta,s}} f(x) dl = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\vec{\theta} + t\vec{\theta}^\perp) dt$$

Transformée de Radon sur l'ensemble des détecteurs : sinogramme



Le fantôme de Shepp et Logan et son sinogramme

Démonstration de FBP (exercice)

$$\mathcal{R}_\theta f(s) = \int_{L_{\theta,s}} f(x) dl = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\vec{\theta} + t\vec{\theta}^\perp) dt$$

Question 1) On fixe θ . Montrer que la transformée de Fourier (1D) de $\mathcal{R}_\theta f$ vérifie :

$$\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\nu) = \hat{f}(\nu \cos \theta, \nu \sin \theta) \quad , \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$$

où \hat{f} désigne la transformée de Fourier 2D de f .

Question 2) En déduire la formule de rétro-projection filtrée, par application de la transformée de Fourier inverse 2D :

$$f(x) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) |\omega| e^{2i\pi\omega x \cdot \vec{\theta}} d\omega d\theta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Question 3) Décrire un algorithme utilisant la FFT, permettant de calculer f à partir de Rf .

Inversion de la transformée de Radon en utilisant la transformée de Fourier

$$\mathcal{R}_\theta f(s) = \int_{L_{\theta,s}} f(x) dl = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\vec{\theta} + t\vec{\theta}^\perp) dt$$

Formule de **rétro-projection filtrée** (FBP) :

$$f(x) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) |\omega| e^{2i\pi\omega x \cdot \vec{\theta}} d\omega d\theta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

(où \hat{g} désigne la transformée de Fourier 1D d'une fonction g).

En pratique, cette formule est discrétisée sur les angles θ , et sur les abscisses s des différents détecteurs.

Dans la toolbox *image processing* de matlab, on dispose des commandes :

`Rf=radon(f)`

`f=iradon(Rf)`