

***UNIVERSITE DE TUNIS***

**INSTITUT SUPERIEUR DE L'EDUCATION ET DE LA  
FORMATION CONTINUE**

**DEPARTEMENT DES SCIENCES PHYSIQUES  
ET TECHNIQUES**

***COURS D'ELECTROSTATIQUE***

**GE 106**

**PROPOSE PAR : *JEBALI TAOUFIK***

# TABLE DES MATIÈRES

|  |    |
|--|----|
| CHAPITRE PREMIER. Charges et champ électrostatique.....  | 1  |
| 1.1. Charges électriques.....  | 1  |
| 1.2. Conducteurs et isolants.....  | 1  |
| 1.3. Notion de champ électrique.....   | 2  |
| 1.4. Définition quantitative du champ.....   | 3  |
| 1.5. Loi de Coulomb.....   | 5  |
| 1.6. Calcul des champs créés par des charges<br>ponctuelles.....                               | 6  |
| 1.7. Distributions continues de charges.....   | 8  |
| Remarques complémentaires.....   | 9  |
| CHAPITRE 2. Potentiel électrostatique.....   | 11 |
| 2.1. Existence d'un potentiel électrostatique.....   | 11 |
| 2.2. Expressions de la fonction potentiel.....   | 12 |
| 2.3. Travail d'une force électrostatique.....  | 15 |
| 2.4. Relations entre champ et potentiel.....   | 16 |
| Remarques complémentaires.....   | 19 |
| CHAPITRE 3. Flux électrostatique. Théorème de Gauss.....                                       | 22 |
| 3.1. Définitions.....  | 22 |
| 3.2. Flux du champ créé par une charge<br>ponctuelle à travers une surface $S$ non fermée..... | 23 |
| 3.3. Flux à travers une surface fermée $S$ .<br>Théorème de Gauss.....                         | 24 |
| 3.4. Les équations de Poisson et de Laplace.....   | 27 |
| 3.5. Caractère « conservatif » du flux<br>du champ électrique.....                             | 30 |
| Remarques complémentaires.....   | 31 |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>CHAPITRE 4. Propriétés des conducteurs en équilibre.....</b>                                   | <b>34</b> |
| 4.1. Conducteur en équilibre.....   | 34        |
| 4.2. Propriétés d'un conducteur en équilibre.....   | 34        |
| 4.3. Champ au voisinage immédiat d'un conducteur<br>en équilibre. Théorème de Coulomb.....        | 37        |
| 4.4. Pression électrostatique.....  | 40        |
| 4.5. Répartition des charges sur un conducteur.....   | 41        |
| 4.6. La terre comme conducteur.....   | 44        |
| <b>Remarques complémentaires.....</b>   | <b>44</b> |
| <b>CHAPITRE 5. Influence électrostatique.....</b>   | <b>46</b> |
| 5.1. Expériences fondamentales.....   | 46        |
| 5.2. Théorème des « éléments correspondants ».....  | 47        |
| 5.3. Influence totale.....  | 48        |
| <b>Remarques complémentaires.....</b>   | <b>50</b> |
| <b>CHAPITRE 6. Etude mathématique de l'équilibre d'un<br/>        système de conducteurs.....</b> | <b>52</b> |
| 6.1. Position du problème.....  | 52        |
| 6.2. Solution théorique du problème.....  | 52        |
| 6.3. Superpositions des états d'équilibre.....  | 53        |
| 6.4. Images électriques.....  | 54        |
| 6.5. Effet d'écran.....   | 55        |
| <b>Remarques complémentaires.....</b>   | <b>57</b> |
| <b>CHAPITRE 7. Capacité. Condensateurs.....</b>   | <b>59</b> |
| 7.1. Capacité d'un conducteur isolé dans l'espace.....  | 59        |
| 7.2. Coefficients de capacité et d'influence d'un<br>système de conducteurs.....                  | 60        |
| 7.3. Condensateurs.....   | 61        |
| 7.4. Calcul de la capacité d'un condensateur.....   | 62        |
| 7.5. Association de condensateurs.....  | 64        |
| <b>Remarques complémentaires.....</b>   | <b>67</b> |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>CHAPITRE 8. Energie et forces en électrostatique.....</b>        | <b>71</b> |
| 8.1. Energie d'une charge ponctuelle dans un champ.....             | <b>70</b> |
| 8.2. Energie mutuelle d'un ensemble de charges<br>ponctuelles.....  | <b>70</b> |
| 8.3. Energie d'une distribution continue de charges.....            | <b>73</b> |
| 8.4. Localisation de l'énergie électrostatique.....                 | <b>74</b> |
| 8.5. Forces électrostatiques s'exerçant sur des<br>conducteurs..... | <b>76</b> |
| <b>Remarques complémentaires.....</b>                               | <b>78</b> |

# 1. Charges et champ électrostatique

## 1.1. Charges électriques

La matière est formée de corpuscules dont certains ont la propriété de s'attirer ou de se repousser mutuellement; on dit que ces corpuscules portent une charge. Parmi ces corpuscules « chargés » figurent essentiellement les électrons qui forment la partie extérieure des atomes et les protons qui se trouvent dans les noyaux des atomes.

Par convention, nous qualifions de **négative** la charge d'un électron atomique et de **positive** celle d'un proton. L'expérience enseigne que **des charges de même signe se repoussent** et que **des charges de signe contraire s'attirent**.

La charge la plus petite qui puisse se manifester est appelée **charge élémentaire**, on la représente par  $e$ . Les charges sont souvent représentées par la notation  $q$  :

- pour l'électron atomique :  $q = - e$
- pour le proton :  $q = + e$ .

Un atome de numéro atomique  $Z$  possède  $Z$  électrons liés à un noyau contenant  $Z$  protons d'où une charge globale nulle : on dit que l'atome est électriquement neutre.

Un atome ayant perdu ou gagné un ou plusieurs électrons se transforme en un édifice atomique chargé appelé **ion**. Dans le premier cas, il s'agit d'un ion positif; dans le second cas, il s'agit d'un ion négatif.

## 1.2. Conducteurs et isolants

Les conducteurs types sont les métaux. Ceux-ci à l'état solide sont formés d'ions positifs occupant des positions fixes. Ces positions constituent des réseaux (exemple : dans un réseau cubique, les ions

occupent les sommets de cubes juxtaposés). En plus du réseau, nous avons des électrons qui se sont détachés des atomes et qui circulent d'une façon désordonnée au sein du réseau. Ces électrons sont en très grand nombre (ordre de grandeur : 1 par atome) ; ils forment un véritable « **gaz électronique** » et sont responsables des phénomènes de transport de charge c'est-à-dire des « courants » et aussi des transferts de chaleur. Ceci explique le nom d'électrons de conduction qui leur a été donné. Pour marquer la grande facilité avec laquelle ils se déplacent, ils sont souvent qualifiés d'électrons « **libres** ».

Dans les conditions habituelles un volume donné contiendra autant de charges + que de charges - et le métal paraîtra « **neutre** ».

Si par un procédé quelconque, on attire un excès d'électrons dans une région déterminée du métal, cette région apparaîtra comme étant chargée négativement. Réciproquement, une région déficitaire en électrons apparaîtra comme étant chargée positivement. Un isolant est un corps dépourvu d'électrons libres ; il est normalement neutre.

Un **isolant** peut être « chargé » en lui arrachant ou en lui apportant des électrons. Ceci peut se faire par frottement.

L'« électrisation » par frottement est un phénomène très courant observable avec les isolants comme avec les conducteurs. Notons que dans le cas des isolants les charges restent localisées à l'endroit où elles sont créées alors que dans les conducteurs elles se déplacent avec la plus grande facilité.

L'indestructibilité des charges fait que la somme algébrique des charges reste constante pour tout corps isolé c'est-à-dire pour tout corps qui n'est en contact avec aucun autre. Seule la répartition de cette charge totale peut être modifiée.

### 1.3. Notion de champ électrique

On appelle « **champ électrique** » une région de l'espace où une charge est soumise à une force appelée force électrique. Il résulte de cette définition que toute charge crée en son voisinage un champ électrique. Le champ apparaît ainsi comme la cause physique des forces électriques. Ces définitions sont vagues. Nous allons donner à ce concept de champ un aspect quantitatif en définissant le champ électrique en un point.

#### 1.4. Définition quantitative du champ

Plaçons en un point  $P$  une charge ponctuelle  $q$ ; celle-ci se trouve soumise à une force électrique  $\vec{f}$ . Nous appellerons champ  $\vec{E}$  au point  $P$  le quotient

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q}} \quad (1.1)$$

Remarquons que cette définition n'a de sens que si le fait de placer  $q$  au point  $P$  ne perturbe pas le champ préexistant. On dit pour cela que  $q$  est une charge « **passive** » ou encore « **charge d'épreuve** ».

Nous avons, en plus, admis implicitement que  $q$  est une grandeur mesurable. Il en est bien ainsi car on peut définir le rapport de deux charges ponctuelles placées successivement en un même point comme égale au rapport des modules des forces électriques auxquelles elles sont soumises.

Insistons sur le caractère vectoriel du champ. Si  $q$  est positif,  $\vec{f}$  et  $\vec{E}$  ont même direction et même sens. Si  $q$  est négatif,  $\vec{f}$  et  $\vec{E}$  ont même direction et sont de sens contraire. Si  $q = +1$ ,  $\vec{E} = \vec{f}$ , c'est-à-dire que le vecteur champ en un point se confond avec le vecteur force électrique qui s'exerce sur une charge ponctuelle positive unité placée en ce point. Le champ électrique appartient à la catégorie des **champs vectoriels** car à chaque point d'un espace donné on associe un vecteur  $\vec{E}$  (et un seul).

Rappelons qu'une **ligne de champ** est une courbe

tangente en chaque point au vecteur champ associé à ce point. La ligne de champ est orientée par continuité avec les vecteurs champs (cf. Fig. 1.1).

On appelle **tube de champ** la surface formée par l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé (cf. Fig. 1.2).

Un champ est dit **uniforme** lorsque tous les vecteurs  $\vec{E}$  sont équipollents.

Les lignes de champ sont alors des droites parallèles (cf. Fig. 1.3).

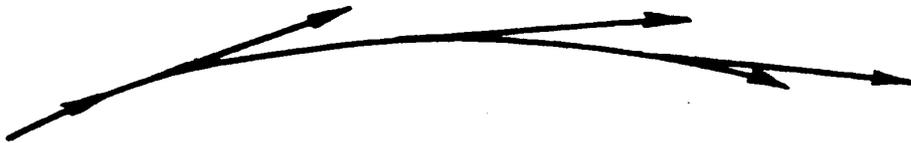


FIG. 1.1.

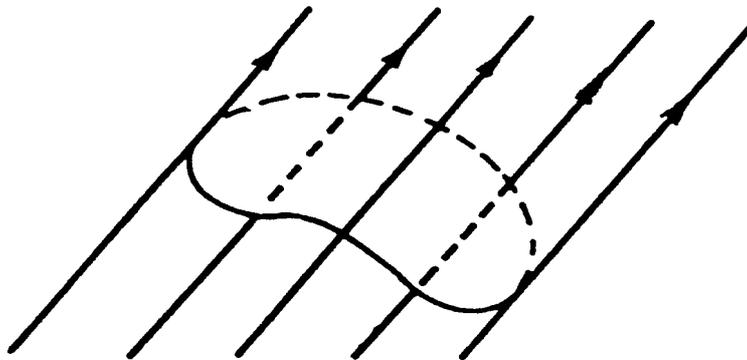


FIG. 1.2.



FIG. 1.3.

## 1.5. Loi de Coulomb

Cette loi précise la force d'interaction électrique entre deux charges ponctuelles au repos dans un référentiel lié à l'observateur. L'étude expérimentale de cette interaction est l'œuvre de Coulomb (1785).

*Énoncé* : L'interaction  $f$  entre deux charges ponctuelles  $q$  et  $q'$  est proportionnelle à leurs charges et inversement proportionnelle au carré de leur distance  $r$ , sa direction se confond avec la droite joignant les deux charges.

Traduction mathématique

$$f = k \frac{qq'}{r^2}$$

$k$  est une constante fonction des unités choisies.

Dans le système international (S.I.) ou (M.K.S.A.) l'unité de charge est le **coulomb** (symbole C) — le coulomb dérive de l'ampère — le coefficient  $k$  a alors une valeur bien déterminée donnée par l'expérience

$$k = 9 \cdot 10^9 \quad (1.2)$$

(cette valeur est approchée par excès à  $10^{-3}$  près) :

$$f \text{ (newton)} = 9 \cdot 10^9 \frac{q \cdot q'}{r^2} \begin{matrix} \text{(C)} \\ \text{(m)} \end{matrix}$$

Il est judicieux d'exprimer  $k$  sous la forme  $k = 1/4 \pi \epsilon_0$  dite « **rationalisée** ».

$\epsilon_0$  est une constante universelle appelée « **permittivité du vide** » sa valeur numérique est sensiblement égale à :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4 \pi k} = \frac{1}{36 \pi \cdot 10^9} \quad (1.3)$$

Nous écrirons dorénavant la loi de Coulomb sous la forme

$$f = \frac{qq'}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \quad (1.4)$$

*Remarque* : l'unité de champ sera précisée ultérieurement (cf. 2.4.2).

## 1.6. Calcul des champs créés par des charges ponctuelles

Considérons d'abord une charge ponctuelle  $q$  placée en un point  $O$ , cette charge est une « source » de champ. Il s'agit d'évaluer le champ  $\vec{E}$  créé par cette source en  $P$  situé à une distance  $r$  de la source.

Pour cela plaçons en  $P$  une charge d'épreuve  $q' = +1$ . On sait que le champ s'identifie avec la force qui s'exerce sur  $q'$ .

La loi de Coulomb permet alors de caractériser entièrement le champ  $\vec{E}$ .

$\vec{E}$  a pour direction la droite passant par  $OP$ . Si  $q$  est positif  $\vec{E}$  est dirigé dans le sens de  $O$  vers  $P$ .

Si  $q$  est négatif  $\vec{E}$  est dirigé dans le sens  $P$  vers  $O$ .

Le module du champ est :

$$E = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q \cdot 1}{r^2}.$$

On peut vectorialiser cette relation en introduisant un vecteur unitaire  $\vec{u}$  placé sur  $OP$  (cf. Fig. 1.4).

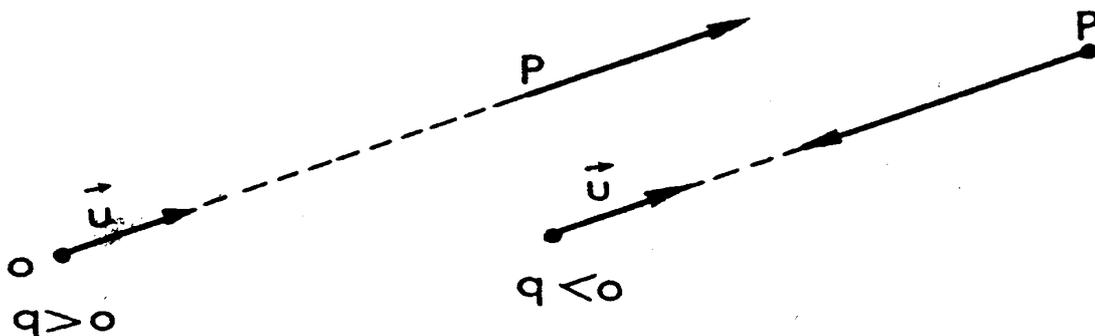


FIG. 1.4.

On écrit alors :

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} \quad (1.5)$$

cette relation contient toute l'information concernant  $\vec{E}$  (direction, sens, module).

Traisons maintenant le problème plus général du champ créé en un point  $P$  par un nombre quelconque de sources ponctuelles  $q_1, q_2, \dots, (q_i)$  placées en des points  $O_1, O_2, \dots, (O_i)$ . La charge d'épreuve  $q' = +1$  placée en  $P$  est soumise à des forces dues à chacune des charges  $q_1, q_2, \dots$ , etc, qui sont autant de champs électriques que nous noterons

$$\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, (\vec{E}_i) .$$

Ces champs se calculent grâce à (1.5). Ces champs se composent comme des forces c'est-à-dire par addition vectorielle (cf. RC 1.2).

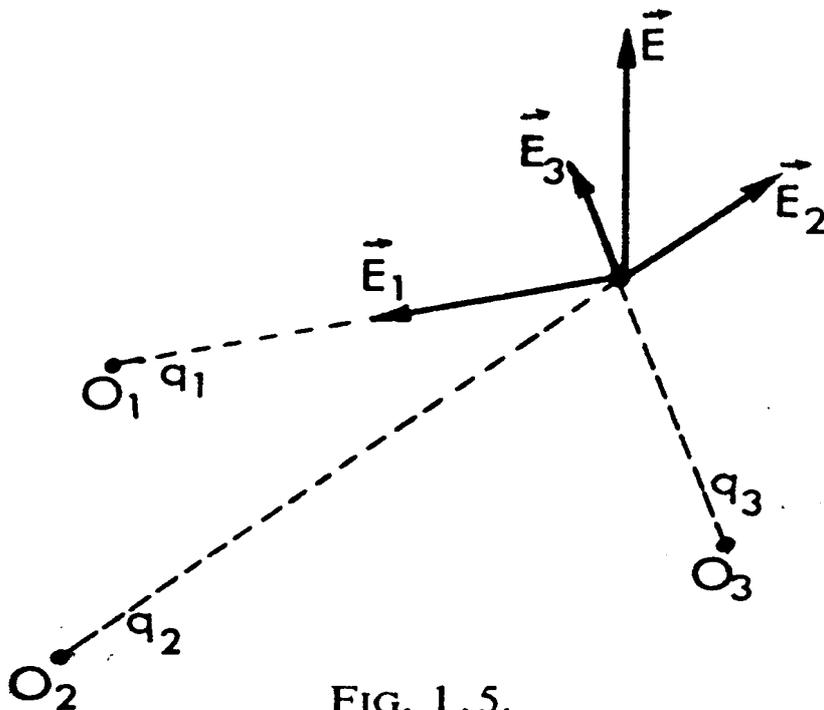


FIG. 1.5.

Soit  $\vec{E}$  le champ résultant, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i} \quad (1.6)$$

{ Nous insistons sur le **caractère vectoriel** des champs  
 { (ne jamais omettre de préciser : direction, sens,  
 { module) et leur **addition vectorielle**.

Précisons que les sources de champ sont supposées immobiles ; nous sommes alors dans le domaine de l'électrostatique et en toute rigueur nous devons appeler le champ créé « **champ électrostatique** ».

Précisons également que toutes les charges sont supposées placées dans le vide.

## 1.7. Distributions continues de charges

A notre échelle (échelle dite macroscopique), compte tenu de la petitesse des corpuscules chargés, il est commode de considérer les charges comme distribuées d'une façon continue formant une espèce de fluide pouvant recouvrir une surface ou imprégner un volume.

Pour de telles distributions, il est intéressant d'introduire la notion de densité.

### 1.7.1. DENSITÉ SUPERFICIELLE DE CHARGE

Si  $\Delta S$  désigne un élément de surface entourant un point  $P$  et  $\Delta q$  la charge portée par cet élément, la **densité superficielle de charge**  $\sigma$  au point  $P$  est définie comme la limite du quotient  $\Delta q / \Delta S$  lorsque  $\Delta S$  tend vers zéro, ce qui s'écrit sous forme différentielle :

$$\boxed{\sigma = \frac{dq}{dS}} \quad (1.7)$$

### 1.7.2. DENSITÉ VOLUMIQUE DE CHARGE

Si  $\Delta v$  désigne un élément de volume entourant un

point  $P$  et  $\Delta q$  la charge contenue dans cet élément, la densité volumique de charge  $\rho$  au point  $P$  est définie comme la limite du quotient  $\Delta q/\Delta v$  lorsque  $\Delta v$  tend vers zéro, ce qui s'écrit sous forme différentielle :

$$\rho = \frac{dq}{dv} \quad (1.8)$$

Insistons sur le fait que ces densités sont relatives à un point :  $dq = \rho dv$ , par exemple, peut être assimilé à une charge ponctuelle.

Comme exemple de distribution de charges en volume, on peut donner celui d'un noyau atomique lequel contient les charges liées aux protons qui s'y trouvent.

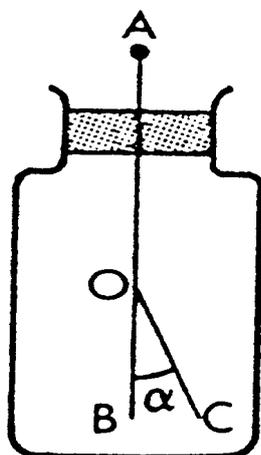
### **Remarques complémentaires**

**RC 1.1. Electroscope.** — Il s'agit d'un instrument fréquemment utilisé pour détecter ou mesurer des charges.

L'appareil se compose d'une tige métallique  $AB$  isolée par rapport à une cage métallique.

Articulée sur  $AB$  en  $O$  se trouve une feuille métallique très légère  $OC$ . Lorsqu'on charge l'électroscope en  $A$ , les charges se répartissent à la fois sur  $OB$  et  $OC$  ; il en résulte une répulsion de la feuille mobile  $OC$  qui tourne d'un angle  $\alpha$  d'autant plus grand que la charge est plus forte.

L'une des façons de « charger » l'électroscope est de le mettre en contact au niveau de l'extrémité  $A$  avec un conducteur ou un isolant lui-même chargé (électrisation par contact).



RC 1.1.

**RC 1.2. Principe de superposition.** — Les résultats de ce chapitre ont supposé implicitement le postulat suivant : dans un système de charges immobiles l'interaction entre deux quelconques d'entre elles est la même que si elles étaient seules. Ce résultat est connu sous le nom de « Principe de superposition ».

**RC 1.3. Comparaison des forces de gravitation et des forces électriques.** — Il résulte de la loi de Newton que 2 masses ponctuelles  $m$  et  $m'$  placées à une distance  $r$  l'une de l'autre s'attirent avec une force

$$f = G \frac{mm'}{r^2} \quad G = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ (S.I.) .}$$

Si par exemple nous comparons les forces d'interaction gravitationnelle et électrique, dans le cas de deux protons, placés à la même distance  $r$  compte tenu des valeurs  $m_p = 1,6725 \cdot 10^{-27}$  kg,  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C on obtient :

$$\frac{f \text{ (électrique)}}{f \text{ (gravitation)}} = 1,24 \cdot 10^{36} .$$

On remarquera donc que les ordres de grandeur sont totalement différents ; les forces électriques appartiennent aux interactions fortes.

## 2. Potentiel électrostatique

### 2.1. Existence d'un potentiel électrostatique

Nous établirons que la circulation du vecteur champ entre deux points  $A$  et  $B$  ne dépend que de la position de ces points et non du trajet effectivement suivi pour aller de  $A$  en  $B$  ; on dit pour cette raison que le « **champ électrostatique dérive d'un potentiel** ».

Dans ces conditions, la circulation du champ peut prendre la forme d'une différence entre la valeur prise par une fonction scalaire  $V(x, y, z)$ , respectivement au point  $A$  et  $B$  notée  $V(A)$  et  $V(B)$ . Cette fonction est appelée « **fonction potentiel** » ou simplement « **potentiel** ». Rappelons que la circulation du vecteur  $\vec{E}$  le long d'une trajectoire  $AB$  est l'intégrale curviligne :

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$d\vec{l}$  est un élément de la trajectoire.

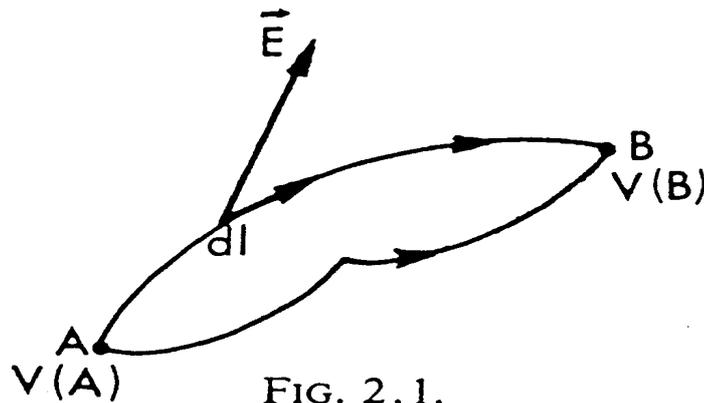


FIG. 2.1.

L'existence d'un potentiel se traduit donc par la relation :

$$\boxed{\int_{\widehat{AB}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B)} \quad (2.1)$$

Comme corollaire de cette existence, on remarquera que lorsque le champ décrit une courbe fermée le point d'arrivée est confondu avec le point de départ ce qui entraîne d'après (2.1) une circulation nulle.

**La circulation du champ électrostatique le long de toute courbe fermée est nulle.**

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.2)$$

## 2.2. Expressions de la fonction potentiel

La démonstration des propriétés annoncées ci-dessus consistera à montrer la possibilité d'évaluer dans tous les cas une fonction  $V$  qui satisfait à la relation fondamentale (2.1).

Nous avons à examiner plusieurs cas selon la nature des sources du champ.

### 2.2.1. LA SOURCE DU CHAMP EST UNE CHARGE PONCTUELLE UNIQUE $q$

$q$  est placée en  $O$  ; au point  $P$  de la trajectoire la valeur du champ est donnée par (1.5)

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

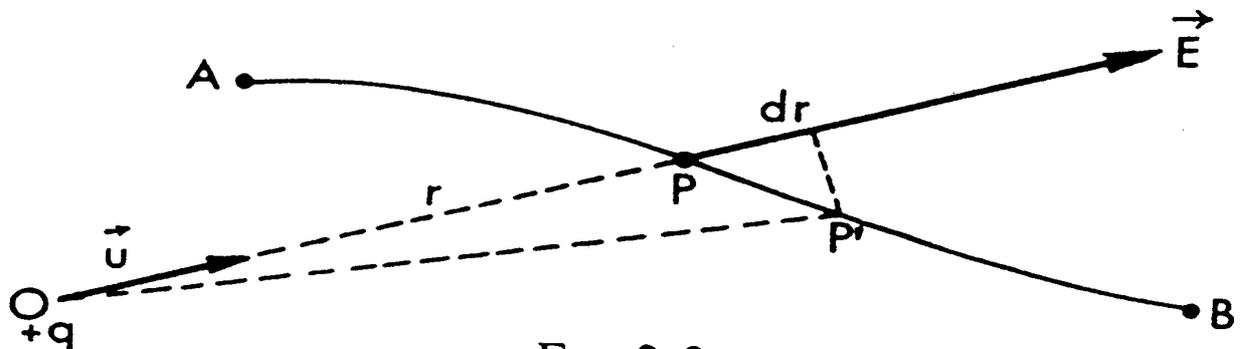


FIG. 2.2.

$\vec{PP}' = d\vec{l}$  ; la circulation élémentaire entre  $P$  et  $P'$  vaut :

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\vec{dl} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

en effet  $\vec{dl} \cdot \vec{u}$  représente la projection  $dr$  de  $PP'$  sur  $OP$  ( $OP' = r + dr$ ); cette circulation élémentaire est une différentielle totale :

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} d \left( -\frac{1}{r} \right).$$

La circulation totale entre  $A$  et  $B$  s'obtient par intégration sur  $r$  qui varie de  $r_A = OA$  à  $r_B = OB$

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right].$$

Cette expression est bien de la forme  $V(A) - V(B)$  à condition de poser :

$$\boxed{V = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r} + C} \quad (2.3)$$

$C$  est une constante d'intégration, le potentiel en un point n'est défini qu'à une constante additive près; seules les différences ont une signification physique. Une convention commode consiste à faire  $C = 0$ , ce qui revient à supposer  $V = 0$  en un point  $P$  infiniment éloigné du point source. Nous prendrons dorénavant comme expression du potentiel créé par une charge ponctuelle  $q$  :

$$\boxed{V = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r}} \quad (2.4)$$

### 2.2.2. LA SOURCE DU CHAMP EST UN ENSEMBLE DE CHARGES PONCTUELLES

Soit  $q_i$  une charge quelconque de cet ensemble; elle crée en un point  $P$  situé à une distance  $r_i$  de  $q_i$  un champ  $\vec{E}_i$  et un potentiel  $V_i = q_i / 4 \pi \epsilon_0 r_i$ .

L'addition vectorielle des champs  $\vec{E}_i$  (cf. (1.6)) entraîne l'addition scalaire des circulations élémentaires  $\vec{E}_i \cdot d\vec{l}$ . Le potentiel total  $V$  est donc la somme scalaire des potentiels  $V_i$

$$V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i} \quad (2.5)$$

### 2.2.3. LA SOURCE DU CHAMP EST UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES

Chaque élément de la distribution porte une charge quasi ponctuelle de valeur  $dq = \rho dv$  pour une distribution en volume ou  $dq = \sigma dS$  pour une distribution en surface. L'addition des potentiels conduit selon le cas à une intégrale triple ou une intégrale double qui généralisent la relation (2.5)

$$V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iiint_v \rho \frac{dv}{r} \quad (2.6)$$

$$V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iint_s \sigma \frac{dS}{r} \quad (2.7)$$

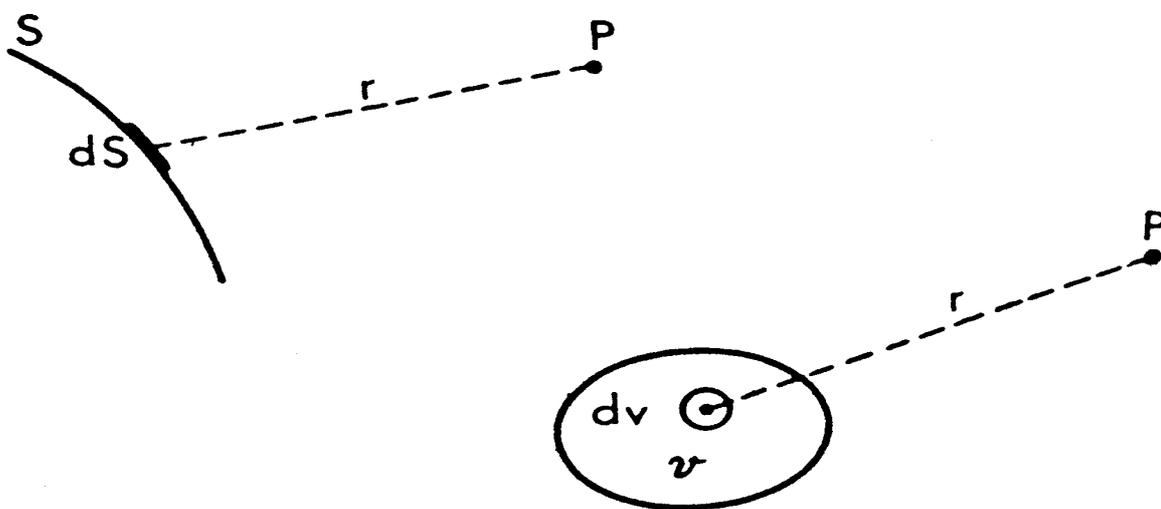


FIG. 2.3.

Lorsque le point  $P$  est pris à l'intérieur de la distribution, il y a nécessairement une valeur de  $r$  qui s'annule ; le potentiel garde néanmoins une valeur finie pourvu que la densité de charge soit elle-même finie. Voir la démonstration de cette continuité du potentiel dans la remarque complémentaire RC 2.1.

### 2.3. Travail d'une force électrostatique

Soit une charge  $q$  qui se déplace dans un champ de  $A$  en  $B$ . Comme en tout point de la trajectoire la force électrique  $\vec{f}$  est liée au champ  $\vec{E}$  par  $\vec{f} = q\vec{E}$  (cf. (1.1)), le travail de  $\vec{f}$  noté  $W_A^B(\vec{f})$  est égal à la circulation de  $\vec{E}$  multipliée par le scalaire  $q$ , d'où :

$$W_A^B(\vec{f}) = q \int_{\widehat{AB}} \vec{E} \cdot d\vec{l} .$$

D'après (2.1) :

$$\boxed{W_A^B(\vec{f}) = q[V(A) - V(B)]} . \quad (2.8)$$

Cette relation permet de définir l'unité de différence de potentiel (d.d.p)  $V(A) - V(B) = 1$ , lorsque  $W_A^B = 1$  et  $q = 1$ .

Dans le système international (S.I.) cette unité est le volt (V).

Le volt est la d.d.p. entre deux points tels que, lors du déplacement d'un coulomb de l'un à l'autre, la force électrique effectue un travail d'un joule.

Les dimensions d'une d.d.p. sont donc  $[V] = [W]/[Q]$ .

La relation (2.8) nous permet encore de définir une nouvelle unité de travail et d'énergie très utilisée en physique atomique : l'électron-volt (eV).

Prenons pour  $q$  la charge « élémentaire »  $e$  (valeur absolue de la charge d'un électron) et prenons  $V(A) - V(B) = 1$  V ; le travail correspondant est

appelé électron-volt.

Comme  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} .$$

## 2.4. Relations entre champ et potentiel

### 2.4.1. LE CHAMP COMME DÉRIVÉE DE LA FONCTION POTENTIEL

La circulation élémentaire du champ  $\vec{E}$  entre un point  $P$  où le potentiel est  $V$  et un point infiniment voisin  $P'$  où le potentiel est  $V + dV$  a pour valeur  $\vec{E} \cdot d\vec{l}$  (avec  $d\vec{l} = \vec{PP}'$ ) et d'après (2.1) cette circulation a pour valeur

$$V - (V + dV) = -dV, \quad \vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV. \quad (2.9)$$

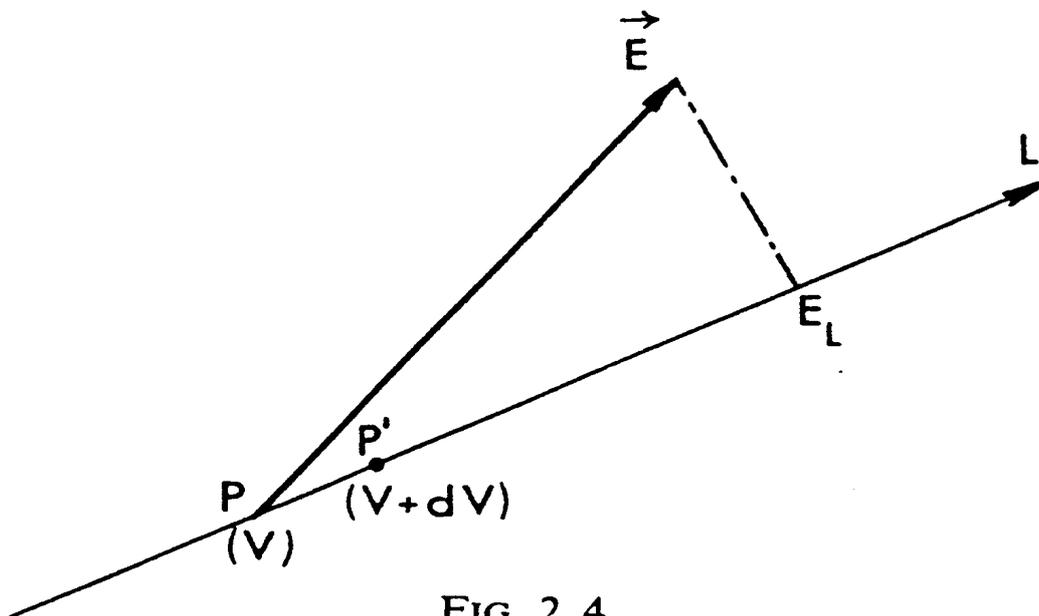


FIG. 2.4.

Sur un axé orienté  $L$  passant par  $P$  et  $P'$ , le vecteur  $\vec{E}$  a une projection  $\vec{E}_L$  de valeur algébrique  $E_L$ , la mesure algébrique de  $d\vec{l}$  est  $dl$ . La relation précédente s'écrit encore :

$$E_L dl = - dV, \quad \boxed{E_L = - \frac{dV}{dl}} \quad (2.10)$$

Une discussion algébrique montre que  $\vec{E}_L$  est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

Lorsque les directions de  $L$  et de  $\vec{E}$  sont confondues :  
 $E_L = E$

$$\boxed{E = - \frac{dV}{dl}} \quad (2.11)$$

Cette relation n'est qu'un cas particulier de la relation générale (2.10); c'est dans cette direction particulière que la variation  $dV/dl$  est maximale.

#### 2.4.2. UNITÉ DE CHAMP

La relation (2.11) nous montre que le champ a pour dimension  $[V]/[L]$ . Il s'exprime donc en volt par mètre (V/m).

#### 2.4.3. CHAMP ET GRADIENT DU POTENTIEL

Si nous prenons successivement comme axe  $L$  les trois axes d'un trièdre trirectangle de référence, en désignant les composantes de  $\vec{E}$  par  $E_x, E_y, E_z$ , la relation (2.10) nous permet d'écrire

$$\boxed{E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}; E_y = - \frac{\partial V}{\partial y}; E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}} \quad (2.12)$$

⌋  $V$  est fonction de  $x, y, z$ ; le symbole  $\partial V/\partial x$  représente une dérivée « partielle » c'est-à-dire une dérivée par rapport à la seule variable  $x$ ;  $y$  et  $z$  sont à considérer comme des constantes.

On appelle **gradient d'une fonction scalaire** un vecteur dont les composantes sur les axes  $x, y, z$  sont les dérivées partielles de la fonction par rapport respectivement à  $x, y, z$ ; c'est-à-dire que  $\overrightarrow{\text{grad}} V$  a pour composantes  $\partial V/\partial x, \partial V/\partial y, \partial V/\partial z$ .

La relation (2.12) prend donc la forme équivalente

$$\boxed{\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V} . \quad (2.13)$$

La relation (2.13) est équivalente à la relation vectorielle

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0} . \quad (2.14)$$

(cf. RC 2.2).

#### 2.4.4. SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES

Une **surface équipotentielle** est une surface telle qu'en tous ses points le potentiel a même valeur; son équation est  $V(x, y, z) = \text{Cte}$ .

Démontrons que le champ  $\vec{E}$  est normal en tout point à la surface équipotentielle passant par ce point.

En effet le long d'un trajet  $d\vec{l}$  infiniment petit, pris sur une équipotentielle, on a  $dV = 0$ ; il résulte de (2.9) que  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  ce qui indique que  $\vec{E}$  est orthogonal à tout déplacement  $d\vec{l}$  sur l'équipotentielle; ceci démontre la propriété.

Il en résulte que les lignes de champ sont les trajectoires orthogonales aux surfaces équipotentielles.

Si  $dn$  est un élément de longueur pris sur une normale orientée  $\vec{N}$  à la surface équipotentielle, on a d'après (2.11)

$$E = - \frac{dV}{dn} \quad (2.15)$$

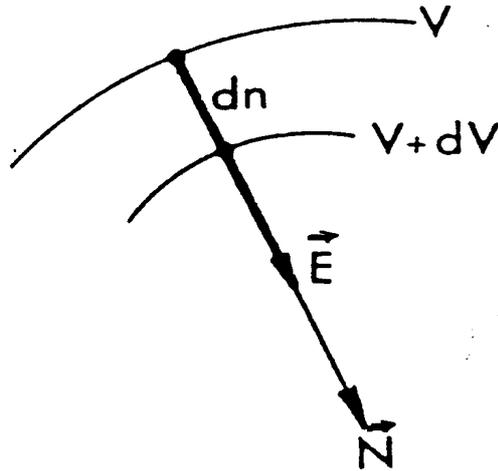


FIG. 2.5.

### **Remarques complémentaires**

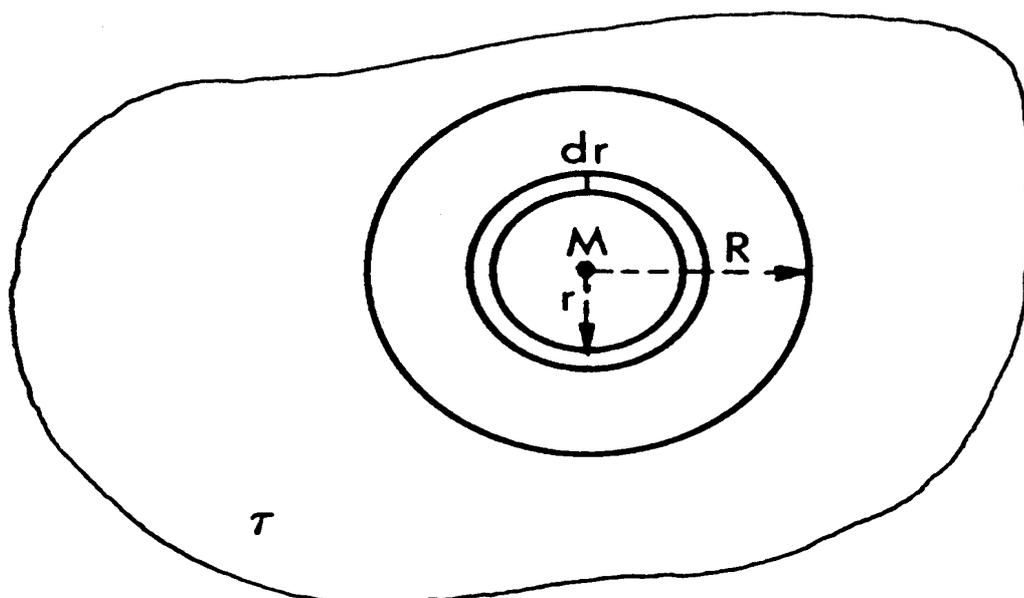
**RC 2.1. Continuité du potentiel à l'intérieur d'une distribution continue de charges.** — Prenons un point  $M$  à l'intérieur d'un domaine chargé  $\tau$ . Soit une petite sphère de rayon  $R$  entourant  $M$  dans laquelle on peut supposer la densité volumique  $\rho$  constante.

Au point  $M$  la contribution au potentiel des charges extérieures à la sphère reste finie. Il reste à évaluer le potentiel  $V'$  en  $M$  dû aux charges contenues dans la sphère. Découpons pour cela la sphère en couronnes sphériques de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ , leur volume est  $d\tau = 4\pi r^2 dr$  on a alors :

$$V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho \frac{d\tau}{r} = \frac{4\pi\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R r dr = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2.$$

On voit que cette contribution est finie et tend vers zéro avec  $R$ .

Les densités  $\rho$  étant des fonctions continues de  $r$ , la fonction potentiel est également continue.



RC 2.1.

On notera que le champ (gradient du potentiel) est également fini.

**RC 2.2. Rotationnels du champ  $\vec{E}$ .** — Par définition, le rotationnel d'un vecteur  $\vec{E}$  de composantes  $E_x, E_y, E_z$  est un vecteur noté  $\text{rot } \vec{E}$  dont les composantes sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{rot } \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ (\text{rot } \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ (\text{rot } \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{array} \right.$$

La relation fondamentale  $\vec{E} = -\text{grad } V$  où  $\vec{E}$  représente cette fois le champ électrostatique et  $V$  le potentiel exprime les trois relations

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Calculons par exemple

$$(\text{rot } \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = 0,$$

il en est de même pour les deux autres composantes de  $\text{rot } \vec{E}$ . Nous venons donc de démontrer que

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V$$

implique

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0} .$$

Réciproquement un vecteur  $\vec{E}$  quelconque dérive d'un potentiel si en tout point

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0 .$$

**RC 2.3. Accélération électrostatique des particules.** — Si une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  passe d'un point  $A$  où sa vitesse est  $v_A$  et où le potentiel vaut  $V_A$  à un point  $B$  où sa vitesse est  $v_B$  et où le potentiel vaut  $V_B$ , le théorème de l'énergie cinétique, compte tenu de la relation (2.8), permet d'écrire :

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = q(V_A - V_B) .$$

Désignons par  $V$  la d.d.p.  $V_A - V_B$  et supposons la vitesse initiale de la particule nulle  $v_A = 0$  (par exemple électron quittant un filament avec une vitesse négligeable). La particule atteint  $B$  avec une vitesse  $v = v_B$  telle que  $\frac{1}{2} m v^2 = qV$ .

Il est très commode d'exprimer  $qV$  en électron-volt (eV) (cf. 2.3).

Ceci permet de définir encore l'électron-volt comme l'énergie cinétique acquise par une particule porteur d'une charge élémentaire lorsqu'elle est accélérée par une d.d.p. de 1 volt.

Nous avons supposé implicitement la vitesse  $v$  des particules faibles par rapport à celle de la lumière (mécanique non relativiste).

Ces relations montrent la possibilité de construire des accélérateurs de particules en utilisant une « tension » électrostatique.

### 3. Flux électrostatique. Théorème de Gauss

#### 3.1. Définitions

Soit une surface  $S$  située dans un champ, et soit  $\vec{E}$  le champ en un point  $P$  de  $S$ . Autour de  $P$  considérons un élément de surface d'aire  $dS$ . Orientons la normale en  $P$  à la surface en y choisissant un sens positif arbitraire, par exemple le sens  $\vec{PN}$  de la figure 3.1.

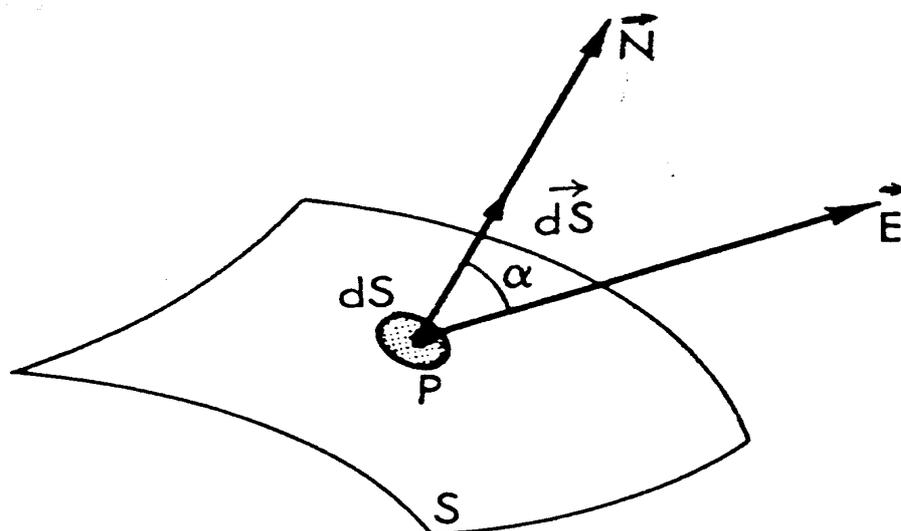


FIG. 3.1.

Introduisons le vecteur  $\vec{dS}$  porté par la normale dans le sens positif et de module  $dS$ .

*Définitions* : On appelle « flux élémentaire » du champ à travers  $dS$ , le produit scalaire

$$d\psi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = E dS \cos \alpha \quad (3.1)$$

$\alpha$  désignant l'angle des deux vecteurs.

— On appelle « flux » à travers  $S$ , la somme algébrique des flux élémentaires, l'orientation des normales s'obtenant par continuité

$$\boxed{\Psi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}} \quad (3.2)$$

*Remarques* : Le signe d'un flux dépend de la convention d'orientation des normales; changer cette convention revient à changer le signe du flux.

— Dans le cas d'une surface  $S$  fermée, on convient d'orienter les normales vers l'extérieur; on dit pour cette raison que  $\Psi$  représente le flux « sortant » de  $S$ .

— Il résulte de la définition de flux que le flux dû à un ensemble de champs à travers une surface est égal à la somme algébrique des flux dus aux divers champs. En effet si :

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i; d\Psi = (\sum \vec{E}_i) \cdot d\vec{S} = \sum (\vec{E}_i \cdot d\vec{S}) = \sum d\Psi_i.$$

avec  $d\Psi_i = \vec{E}_i \cdot d\vec{S}$ .

### 3.2. Flux du champ créé par une charge ponctuelle à travers une surface $S$ non fermée

Soit une charge  $q$  placée en  $O$  (cf. Fig. 3.2) et un élément de surface  $dS$  centré en  $P$ .

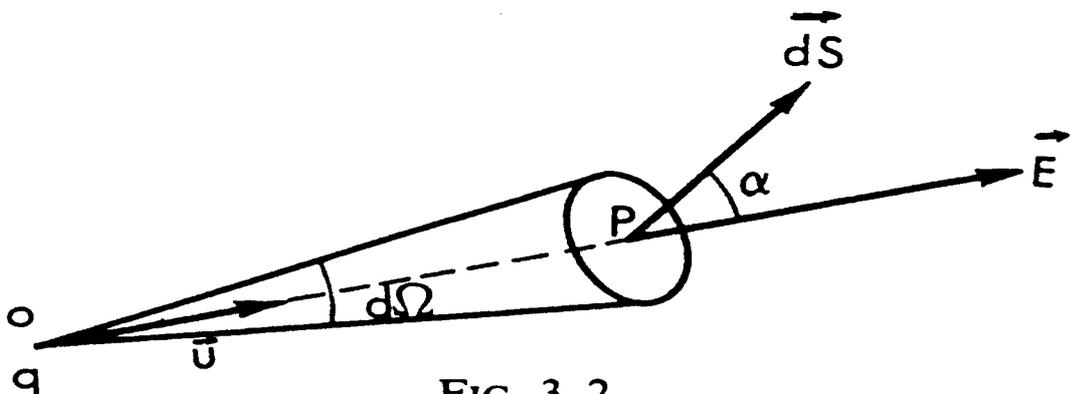


FIG. 3.2.

Le champ en  $P$  vaut  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$  (cf. 1.5)).

On a :

$$d\Psi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS \cos \alpha}{r^2}.$$

$\frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2} = d\Omega$ , angle solide sous lequel on voit de  $O$  la surface  $dS$

$$\boxed{d\Psi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega} \quad (3.3)$$

Pour une surface  $S$  ouverte d'étendue finie, limitée par un contour  $C$  (cf. Fig. 3.3), on a :

$$\Psi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega \quad (3.4)$$

où  $\Omega$  est l'angle solide sous lequel on voit de  $O$  le contour  $C$ .

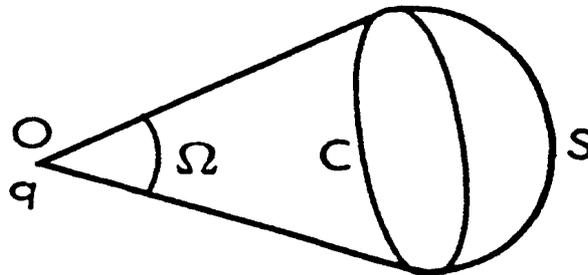


FIG. 3.3.

### 3.3. Flux à travers une surface fermée $S$ . Théorème de Gauss

#### 3.3.1. LA CHARGE PONCTUELLE $q$ EST PLACÉE A L'EXTÉRIEUR DE $S$ (cf. Fig. 3.4)

Considérons un cône élémentaire de sommet  $O$ , il découpe sur  $S$  deux surfaces élémentaires  $dS$  et  $dS'$ ; les flux sortant par  $dS$  et  $dS'$  sont d'après (3.3) égaux en valeur absolue et de signe contraire :

$$d\Psi + d\Psi' = 0.$$

Toute la surface  $S$  peut être découpée en couples du type  $dS$  et  $dS'$ .

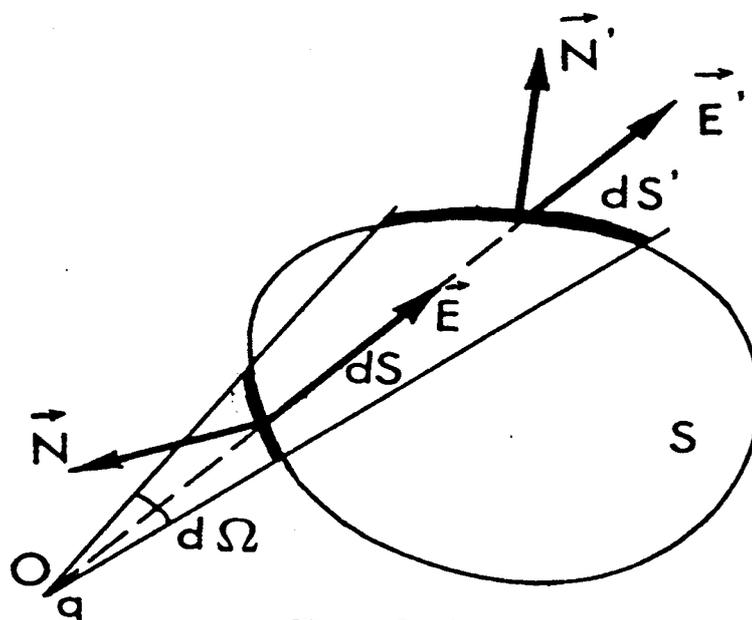


FIG. 3.4.

Le flux total sortant de la surface  $S$  fermée est donc nul.

$$\boxed{\Psi = 0} . \quad (3.5)$$

§ Le lecteur vérifiera que ce résultat est vrai quelle que soit la forme de la surface fermée  $S$ .

### 3.3.2. LA CHARGE PONCTUELLE $q$ EST PLACÉE A L'INTÉRIEUR DE $S$ (cf. Fig. 3.5)

Toute demi-droite issue de  $O$  coupe  $S$  un nombre impair de fois. A un cône d'angle solide  $d\Omega$  correspond un nombre impair de flux élémentaires sortants qui s'annulent deux à deux sauf le dernier; il reste donc

$$d\Psi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega .$$

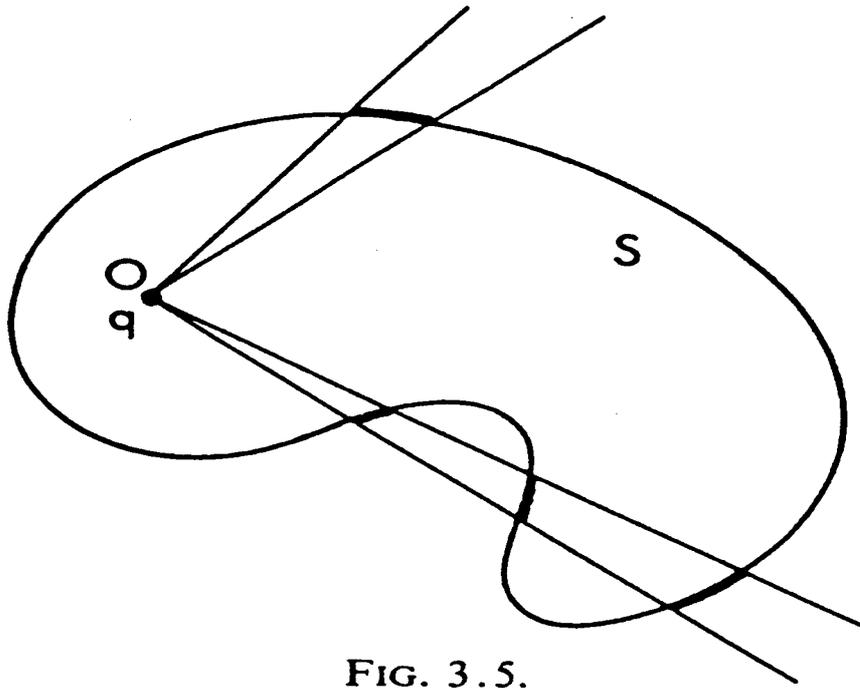


FIG. 3.5.

Pour l'ensemble des cônes de sommet  $O$  et rencontrant  $S$  on a un flux total sortant :

$$\Psi = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \sum d\Omega .$$

Comme  $\sum d\Omega = 4 \pi$  (angle solide qui correspond à tout l'espace autour de  $O$ )

$$\boxed{\Psi = \frac{q}{\epsilon_0}} . \quad (3.6)$$

Ce résultat est indépendant de la localisation de  $q$  à l'intérieur de  $S$ .

Pour un ensemble de charges  $q_1, q_2, \dots, q_i$  l'additivité des flux donne :

$$\boxed{\Psi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i} . \quad (3.7)$$

Cette relation reste valable pour des distributions continues quelconques placées à l'intérieur de  $S$ .

**3.3.3.** L'ensemble de ces résultats peut se résumer en une seule proposition connue sous le nom de **théorème de Gauss**, théorème essentiel aux multiples applications. « **Le flux du champ électrique sortant d'une surface fermée  $S$  est égal au quotient par  $\epsilon_0$  de la somme algébrique des charges situées à l'intérieur de  $S$ .** »

La surface  $S$  qui en général n'est qu'une surface purement géométrique, est appelée « **surface de Gauss** ».

On remarquera la non-intervention des charges extérieures à  $S$ ; ceci découle de (3.5). On prendra soin de ne pas faire passer la surface de Gauss par l'une des charges du système.

### 3.4. Les équations de Poisson et de Laplace

Soit une région de l'espace où sont réparties des charges en volume.

Le théorème de Gauss va nous permettre d'établir une **relation locale** entre le champ en un point  $P$  et la densité volumique de charge  $P$  en ce même point.

En  $P$  le champ  $\vec{E}$  a pour composantes  $E_x, E_y, E_z$ . Construisons en  $P$  le parallélépipède élémentaire de côtés  $dx, dy, dz$  (cf. Fig. 3.6). Considérons les 2 faces perpendiculaires à  $Ox$ ; sur la face passant par  $P$ , la composante du champ selon  $Ox$  a pour valeur  $E_x$ ; sur la face passant par  $P'$ , la composante du champ a pour valeur

$$E_x + dE_x = E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx .$$

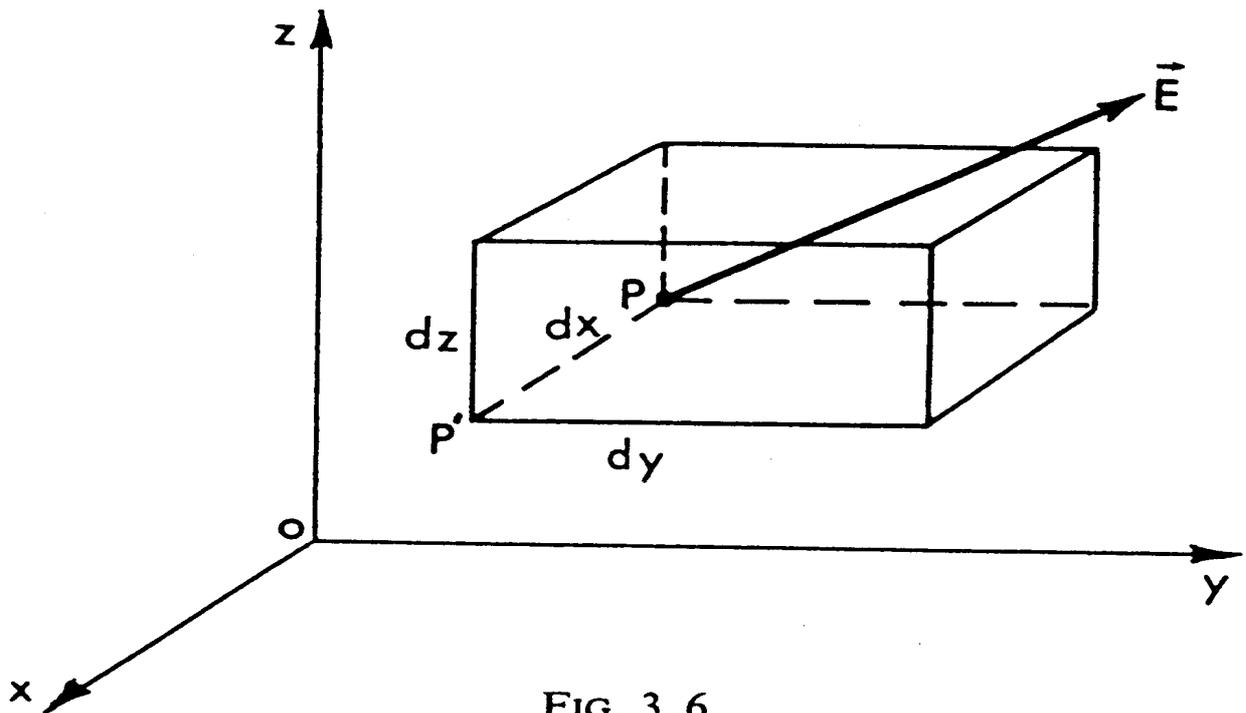


FIG. 3.6.

Le flux sortant par l'ensemble de ces deux faces est :

$$\begin{aligned}
 - E_x dy dz + \left( E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dy dz &= \\
 &= \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz .
 \end{aligned}$$

Pour les deux autres paires de faces, les valeurs du flux s'obtiennent par permutation circulaire.

Le flux total sortant a pour valeur :

$$d\Psi = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz .$$

Or, on appelle **divergence du vecteur  $\vec{E}$** , le scalaire :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \text{div } \vec{E} \quad (3.8)$$

donc

$$d\Psi = \text{div } \vec{E} dx dy dz . \quad (3.9)$$

D'après le théorème de Gauss, ce flux est égal au

quotient par  $\varepsilon_0$  de la charge contenue dans le parallélépipède ; c'est-à-dire  $\rho \, dx \, dy \, dz$ , donc :

$$\operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \, dx \, dy \, dz$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad . \quad \text{Equation de Poisson} \quad (3.10)$$

D'après (2.12)

$$\operatorname{div} \vec{E} = - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = - \Delta V$$

$\Delta V$  est le « laplacien » de la fonction scalaire  $V$ .

$$\boxed{\Delta V = - \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad (3.10bis)$$

ceci est une autre formulation de l'équation de Poisson.

On remarque que dans un *espace dépourvu de charges* (mais où règne un champ) on a :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = 0} \quad (3.11)$$

et

$$\boxed{\Delta V = 0} \quad (3.12)$$

Cette dernière relation est l'*équation de Laplace*.

L'équation de Poisson est la forme *locale* du théorème de Gauss, car elle ne fait intervenir que les variations de  $E$  (ou de  $V$ ) au voisinage d'un seul point. Par opposition l'expression (3.7) est l'*expression intégrale* de ce même théorème (elle fait intervenir les valeurs de  $E$  en tous les points d'une surface).

### 3.5. Caractère « conservatif » du flux du champ électrique

#### 3.5. 1. DÉFINITION

On dit que le **flux d'un champ vectoriel quelconque est conservatif** lorsque le *flux sortant de toute surface fermée est nul*.

Il résulte immédiatement du théorème de Gauss que dans toute région de l'espace dépourvue de charge le flux de champ électrique est conservatif.

#### 3.5.2. CONSERVATION DANS UN TUBE DE CHAMP

En particulier, considérons un tube de champ situé dans un espace privé de charge et limité par deux sections quelconques  $dS_1$  et  $dS_2$  (cf. Fig. 3.7).

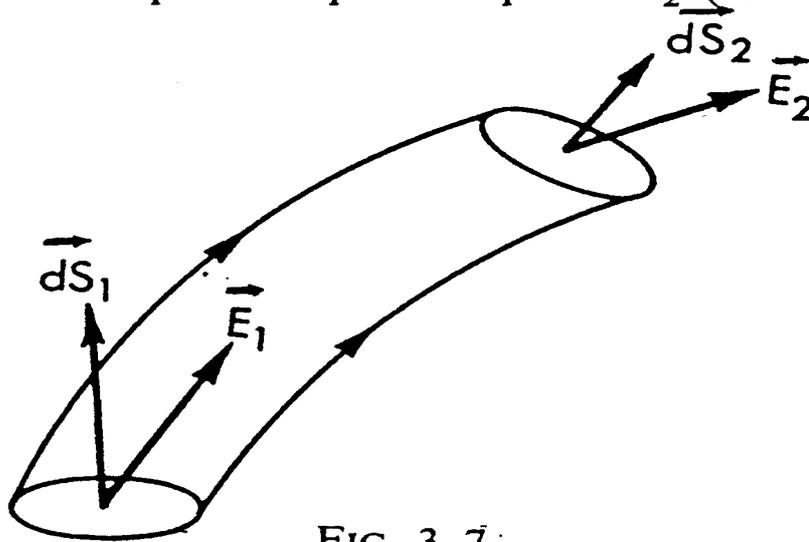


FIG. 3.7.

Le flux total sortant de cette surface de Gauss est nul. Or, aucun flux ne sort par la surface latérale du tube puisque le champ lui est tangent en tout point. Il en résulte que le flux « entrant » par  $dS_1$  est égal au flux « sortant » par  $dS_2$ .

Si nous orientons les sections de la même façon, par continuité, les flux auront même signe, posons  $\vec{E}_1 \cdot \vec{dS}_1 = d\Psi_1$  et  $\vec{E}_2 \cdot \vec{dS}_2 = d\Psi_2$  le flux total *sortant* se réduit à

$$d\Psi_2 - d\Psi_1 = 0; \quad d\Psi_2 = d\Psi_1.$$

Les sections étant quelconques, on peut dire que toutes les sections d'un tube de champ sont traversées par le même flux. On dit pour cela que le flux « se conserve » à l'intérieur d'un tel tube.

### 3.5.3. CONDITION MATHÉMATIQUE DE FLUX CONSERVATIF

La relation (3.9) est valable pour un champ vectoriel  $\vec{a}$  quelconque. Le flux sortant par un parallélépipède élémentaire est  $d\Psi = \text{div } \vec{a} \, dx \, dy \, dz$ , ce flux est nul lorsque

$$\boxed{\text{div } \vec{a} = 0} ; \quad (3.13)$$

cette relation exprime la condition mathématique de flux conservatif pour un champ vectoriel  $\vec{a}$ .

Il en est bien ainsi pour le vecteur  $\vec{E}$  dans un espace privé de charges (cf. (3.11)).

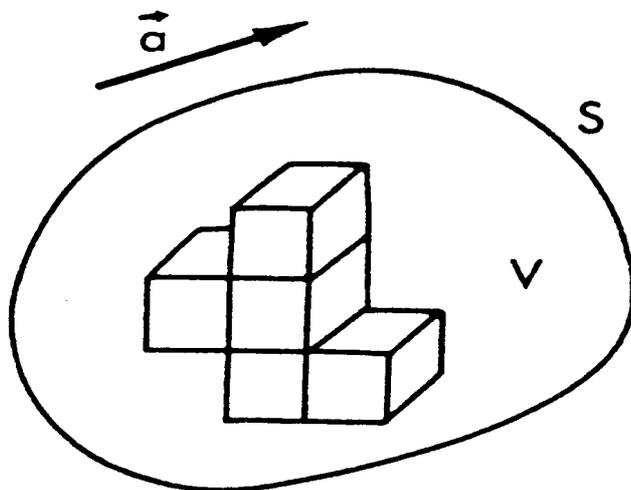
## 3.6. Intérêt du théorème de Gauss

De nombreux résultats et théorèmes se démontrent à partir du théorème de Gauss. Le calcul du champ est souvent facilité par son emploi; on l'applique surtout lorsque la symétrie du système permet de choisir une surface de Gauss très symétrique (sphère, cylindre, etc...) à travers laquelle le calcul du flux sortant est aisé. Voir les exercices d'application.

## ***Remarques complémentaires***

**RC 3.1. Théorème de Green.** — Sans prétendre donner une démonstration rigoureuse de ce théorème nous remarquerons qu'un volume  $V$  (cf. Fig.) peut être décomposé en une somme de parallélépipèdes élémentaires. La somme algébrique des flux élémentaires sortant par ces parallélépipèdes se réduit finalement au flux sortant par les éléments de la surface  $S$  qui limite  $V$ , c'est-à-dire  $\iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$ .

La somme des flux élémentaires, dont chacun vaut,  $d\Psi = \text{div } \vec{a} dv$ , est une intégrale  $\iiint_V \text{div } \vec{a} dv$ .



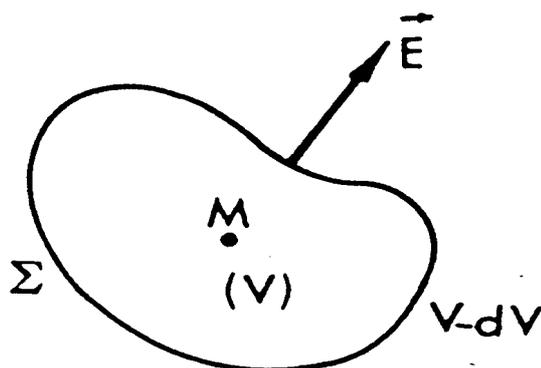
RC 3.1.

D'où l'expression du théorème de Green

$$\boxed{\iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{a} dv} \quad (3.14)$$

**RC 3.2. Théorème sur les extremums du potentiel.** — Dans un domaine dépourvu de charges, le potentiel ne peut présenter ni maximum, ni minimum.

Supposons (démonstration par l'absurde) qu'en un point  $M$  (cf. Fig.) le potentiel présente une valeur maximale  $V$ ; quelle que soit la direction dans laquelle on se déplace à partir de  $M$  le potentiel ne peut que décroître, on rencontrera nécessairement la surface équipotentielle  $\Sigma$  où le potentiel a pour valeur  $V - dV$ ; cette surface est donc fermée et



RC 3.2.

entoure  $M$ . Le vecteur  $\vec{E}$  est en tout point perpendiculaire à  $\Sigma$  et dirigé vers l'extérieur (sens des potentiels décroissants). Le flux sortant de  $\Sigma$  est donc positif. D'après le théorème de GAUSS ce flux est nul. Cette contradiction rejette l'hypothèse initiale.

La démonstration est analogue dans le cas d'un minimum.

Il ne peut y avoir de maximum de potentiel que là où existe une charge positive. Une ligne de champ ne peut partir que d'un point où il y a une charge  $+$  (ou de l'infini). Il ne peut y avoir de minimum de potentiel que là où existe une charge négative. Une ligne de champ ne peut aboutir qu'en un point où il y a une charge  $-$  (ou à l'infini).

**RC 3.3. Introduction du vecteur « déplacement »  $\vec{D}$ .** — Dans le vide on peut définir un vecteur  $\vec{D}$  appelé « déplacement » lié au champ  $\vec{E}$  par la relation :

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}} \quad (3.15)$$

L'introduction de ce vecteur permet de donner une expression plus simple au théorème de Gauss, en effet, le flux du vecteur  $\vec{D}$ ,  $\Psi(\vec{D})$  vaut  $\varepsilon_0$  fois le flux du vecteur  $\vec{E}$ . Partant de (3.7) on obtient

$$\boxed{\Psi(\vec{D}) = \sum q_i} \quad (3.16)$$

A noter surtout que l'introduction de ce second vecteur permet des généralisations intéressantes en électrostatique des milieux isolants (diélectriques) moyennant d'ailleurs une nouvelle définition de ce vecteur.

## **4. Propriétés des conducteurs en équilibre**

### **4.1. Conducteur en équilibre**

On sait qu'un conducteur contient de nombreux électrons « libres » animés d'un mouvement désordonné (revoir 1.2).

Soit un ensemble de  $n$  électrons libres, considérons le barycentre de cet ensemble. Si  $n$  est très grand, en dépit de l'agitation des électrons ce barycentre peut être pratiquement immobile.

Dans un volume très petit à notre échelle (micron-cube par exemple) il y a environ  $10^{10}$  électrons libres ; il est commode d'appeler « charges libres » les barycentres de telles collections d'électrons.

On dit qu'un conducteur est en équilibre lorsque les « charges libres » qu'il contient sont toutes au repos. Une action extérieure peut provoquer la mise en mouvement de ces charges ce qui donne lieu à un « courant » électrique. Nous admettrons qu'il suffit d'une force infiniment petite pour rompre l'équilibre (analogie avec une force de frottement qui s'annule avec la vitesse) : d'où l'expression de charge « libre ».

### **4.2. Propriétés d'un conducteur en équilibre**

#### **4.2.1. CHAMP ÉLECTRIQUE**

Les charges libres ne peuvent rester au repos, selon nos hypothèses, que si aucune force électrique ne les sollicite c'est-à-dire si le champ est nul en tous les points du volume du conducteur  $\underline{E} = 0$ .

Signalons qu'il s'agit ici d'un champ moyen, à notre échelle (échelle macroscopique), sans rapport avec les champs locaux (échelle microscopique) qui peuvent être très intenses.

#### 4.2.2. POTENTIEL

$E = 0$  implique  $V = \text{Cte}$  (conséquence des relations (2.12)).

Le volume du conducteur est donc équipotentiel ; la surface limitant le conducteur est une surface équipotentielle.

#### 4.2.3. DENSITÉ VOLUMIQUE DE CHARGES

L'équation de Poisson (cf. (3.10)).

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{entraîne} \quad \boxed{\rho = 0}.$$

Ce résultat signifie que dans tout élément de volume il y a autant de charges positives (noyaux) que de charges négatives (électrons).

Si le conducteur est « chargé » cette charge non compensée ne peut exister qu'à la surface du conducteur — en fait dans une couche très mince (quelques Å) que l'on assimile à une distribution superficielle de charges.

Dans cette couche d'épaisseur  $e$  le champ n'est pas nul (cf. équation de Poisson) ; il ne peut être que normal à la surface (s'il n'en était pas ainsi les charges se déplaceraient sur la surface : il n'y aurait pas équilibre).

#### 4.2.4. CAS D'UNE CAVITÉ AU SEIN D'UN CONDUCTEUR EN ÉQUILIBRE (CONDUCTEUR CREUX)

La cavité ne contient pas de charges.

Dans la cavité le potentiel ne peut avoir ni maximum ni minimum. La surface intérieure étant équipotentielle, le potentiel dans la cavité ne peut être que constant ; par continuité, ce potentiel est celui du conducteur.

Le potentiel étant constant, le champ est nul en tout point de la cavité.

Il ne peut y avoir de charges sur la surface intérieure de la cavité.

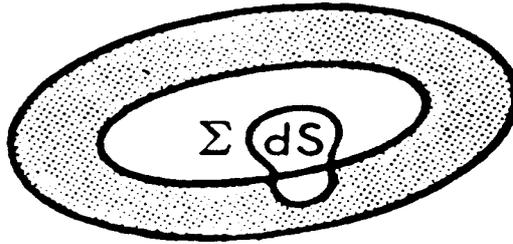


FIG. 4. 1.

En effet, considérons une surface fermée  $\Sigma$  s'appuyant sur un élément de surface  $dS$ . Le flux sortant de  $\Sigma$  est nul car en tous ses points le champ est nul. D'après le théorème de Gauss la somme des charges intérieures à  $\Sigma$  est nulle ; comme il n'y en a ni dans la masse du conducteur ni dans la cavité (par hypothèse) il n'y a donc pas de charges sur  $dS$ , donc la densité de charge est nulle en tout point de la surface intérieure.

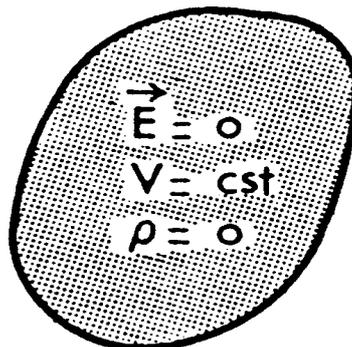
#### 4.2.5. RÉSUMÉ DES PROPRIÉTÉS D'UN CONDUCTEUR EN ÉQUILIBRE

Dans un conducteur plein ou dans un conducteur creux dont la cavité ne contient pas de charges ; lorsque l'équilibre est réalisé :

1° Le champ est nul dans la masse du conducteur et dans la cavité.

2° Le potentiel est constant en tout point du conducteur et de la cavité.

3° Seule la surface extérieure du conducteur peut porter une charge non compensée.



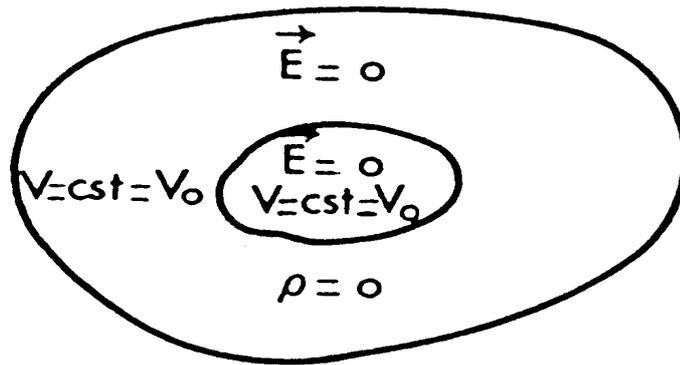


FIG. 4.2.

#### 4.2.6. EXTENSION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS

L'expérience montre que les résultats précédents sont encore valables approximativement pour un conducteur creux présentant une ouverture. Ce sera le cas pour un « cylindre de Faraday » qui est un cylindre métallique creux, ouvert à l'une de ses extrémités et dont la hauteur est grande par rapport à l'ouverture.

Les résultats précédents sont encore valables dans une enceinte grillagée (cage de Faraday).

### 4.3. Champ au voisinage immédiat d'un conducteur en équilibre. Théorème de Coulomb

#### 4.3.1. THÉORÈME DE COULOMB

La surface du conducteur étant équipotentielle, les lignes de champ sont normales à la surface du conducteur.

En un point  $M$  infiniment voisin de la surface  $S$  du conducteur le champ  $\vec{E}$  est normal à  $S$ .

Considérons autour de  $M$  un élément de surface d'aire  $dS$  parallèle à la surface du conducteur.

Le tube de champ s'appuyant sur  $dS$ , découpe sur le conducteur une aire sensiblement égale à  $dS$  et qui porte une charge  $\sigma dS$ . Constituons une surface de Gauss constituée par  $dS$ , le tube et

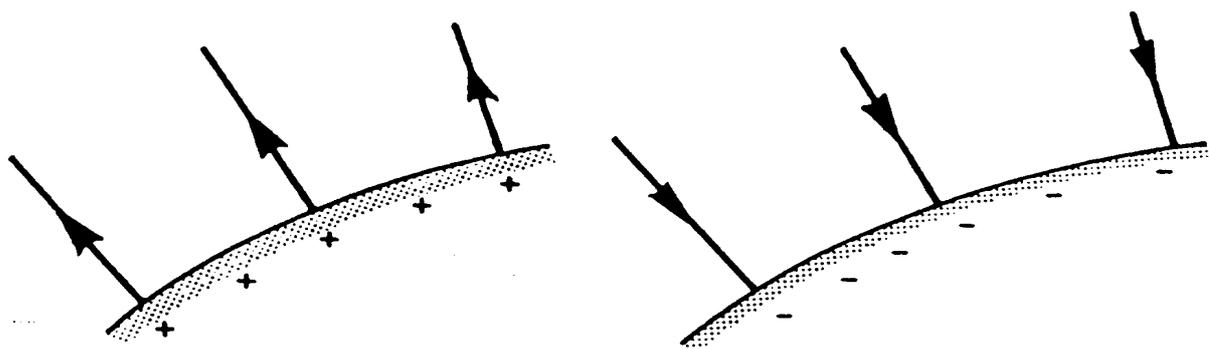


FIG. 4.3.

une surface quelconque  $\Sigma$  située à l'intérieur du conducteur (cf. Fig. 4.4).

Le flux sortant par cette surface se réduit au flux sortant par  $dS$  (en effet, le flux à travers la surface du tube est nul; le flux à travers  $\Sigma$  est nul puisque le champ est nul).

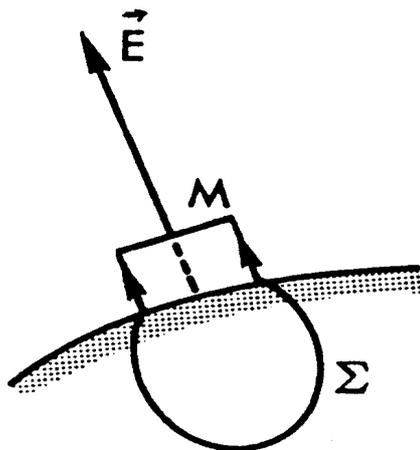


FIG. 4.4.

Le théorème de Gauss permet d'écrire :

$$E dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

(4.1)

Ce résultat est la traduction du **théorème de Coulomb**.

$\vec{u}_N$  désignant un vecteur unitaire normal à la surface, dirigé vers l'extérieur, on peut écrire :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_N \quad (4.2)$$

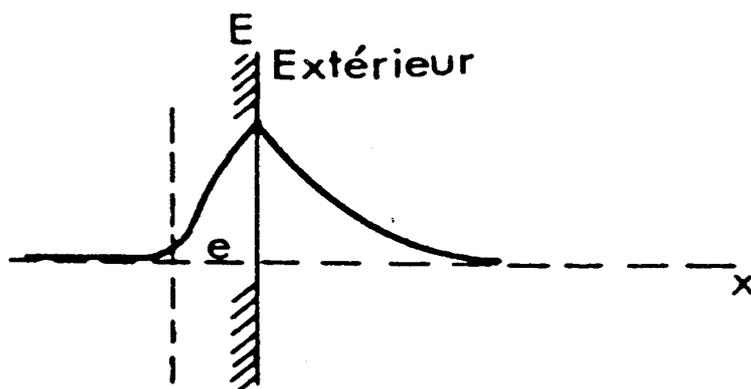


FIG. 4.5.

On notera que suivant que  $\sigma$  est positif ou négatif, le champ est dirigé soit vers l'extérieur, soit vers l'intérieur.

La distribution du module du champ au voisinage de la surface est représentée sur la figure 4.5.

#### 4.3.2. STRUCTURE DU CHAMP AU VOISINAGE D'UN CONDUCTEUR

Le champ  $\vec{E}$  au point  $M$ , évalué précédemment, peut être considéré comme la superposition de deux champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$ .

Le champ  $\vec{E}_1$  est celui créé par les charges de la surface les plus voisines de  $M$ ; on peut admettre qu'elles sont placées sur un disque de rayon  $dR$  appartenant au plan tangent à la surface.

Le champ  $\vec{E}_2$  est celui créé par toutes les autres charges de l'espace (il ne s'agit pas des seules charges portées par le conducteur en question mais bien de toutes les charges autres que celles donnant naissance à  $\vec{E}_1$ , quelle que soit leur localisation).

Le champ  $\vec{E}_1$  est normal à  $S$  et a pour expression :

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \vec{u}_N \quad (\text{cf. E 1.1})$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E} - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_N - \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \vec{u}_N = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \vec{u}_N. \quad (4.3)$$

On remarque que  $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ .

#### 4.4. Pression électrostatique

Une charge  $dq = \sigma dS$  portée par l'élément  $dS$  de la surface d'un conducteur peut être considérée comme une charge passive placée dans le champ  $\vec{E}_2$  dû à toutes les autres charges.

Cette charge se trouve soumise, de ce fait, à une force électrique  $d\vec{f} = dq \vec{E}_2$ , c'est-à-dire

$$d\vec{f} = \sigma dS \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \vec{u}_N = \frac{\sigma^2}{2 \varepsilon_0} dS \vec{u}_N. \quad (4.4)$$

On remarquera que quel que soit le signe de  $\sigma$ , cette force normale au conducteur est toujours dirigée vers l'extérieur.

La force par unité de surface appelée « pression électrostatique » a pour valeur :

$$p = \frac{\sigma^2}{2 \varepsilon_0}. \quad (4.5)$$

Ces forces sont en général faibles et insuffisantes pour arracher les charges de la surface. Les forces sont transmises au conducteur ; si celui-ci est rigide, ces forces sont équilibrées par des forces de nature élastique ; si le conducteur est déformable, ce dernier se déformera au moment de la charge (ou de la décharge). L'expérience peut se faire avec des bulles de savon.

Pour des champs  $\vec{E}_2$  très intenses, il peut y avoir arrachement d'électrons de la surface. Ce phénomène est appelé « émission froide ».

## 4.5. Répartition des charges sur un conducteur

Le problème dans sa généralité sera abordé ultérieurement. Nous nous bornerons ici à examiner une relation entre la densité et la courbure de la surface d'un conducteur.

### 4.5.1. RELATION ENTRE DENSITÉ ET COURBURE

Les charges tendent à s'accumuler dans les régions à forte courbure. En effet, considérons un conducteur chargé isolé dans l'espace. Nous voyons sur la figure que pour un tube de champ centré sur un point  $M$  (région à faible courbure), la section du tube croît plus lentement lorsqu'on s'éloigne de la surface que pour un tube centré sur  $M'$  (région à forte courbure).

La conservation du flux dans un tel tube exige que le champ décroisse plus vite à partir de  $M'$  qu'à partir de  $M$ .

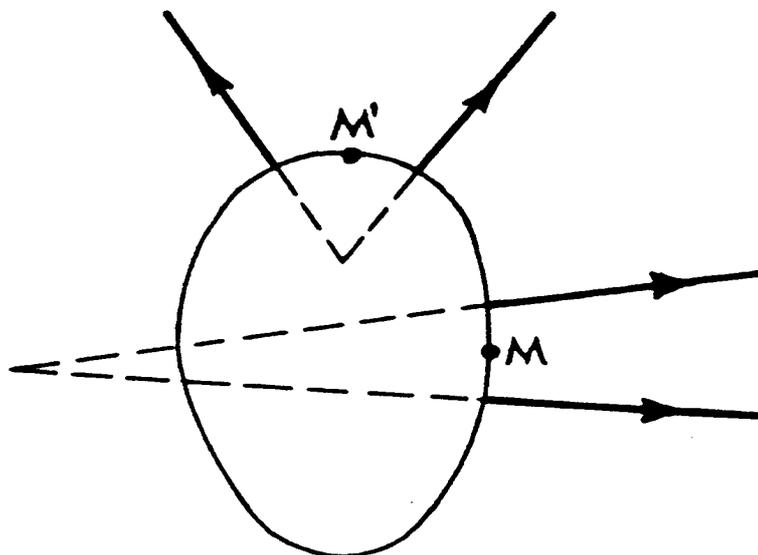


FIG. 4.6.

Or à grande distance le conducteur est vu comme une charge ponctuelle et à une même distance du conducteur, les champs sont égaux quelle que soit la ligne de champ considérée. Pour cela il est nécessaire que le champ  $\vec{E}$  soit d'autant plus intense au départ

que sa décroissance est plus rapide. Le champ en  $M'$  est plus intense que le champ en  $M$  ; il en sera de même pour les densités en vertu du théorème de Coulomb.

#### 4.5.2. POUVOIR DES POINTES

Au voisinage d'une « **pointe** » ou arête vive, la courbure étant très grande, la densité de charge pourra être très grande. Le champ à proximité d'une pointe peut avoir une très grande intensité en vertu du théorème de Coulomb. Ce champ intense est responsable d'une série d'effets connus sous le nom de « **pouvoir des pointes** ».

Ces phénomènes se produisent lorsque le conducteur est en contact avec un gaz, l'air par exemple ; ils sont dus au phénomène d'ionisation du gaz sous l'effet d'un champ intense (production d'ions positifs et négatifs dans le gaz par arrachement d'électrons). Les ions chargés de signe contraire à la charge de la pointe sont attirés par elle et tendent à la neutraliser. Il s'avère donc impossible de conserver la charge sur un conducteur terminé par une pointe. Les ions de même signe sont repoussés par la pointe ; ce déplacement peut provoquer un véritable courant gazeux appelé « vent électrique ». Cette ionisation est couramment accompagnée de phénomènes lumineux.

#### 4.5.3. DÉPERDITION DE CHARGE DES CONDUCTEURS. CHAMP DISRUPTIF

Un conducteur chargé en contact de l'air se décharge spontanément grâce à un processus de neutralisation dû aux ions toujours présents dans l'air.

Lorsque le champ au voisinage du conducteur dépasse une certaine limite (de l'ordre de  $3 \cdot 10^6$  V/m) une étincelle tend à s'amorcer : l'air devient alors franchement conducteur. Ce champ maximal est appelé « **champ disruptif** ». L'existence de ce champ

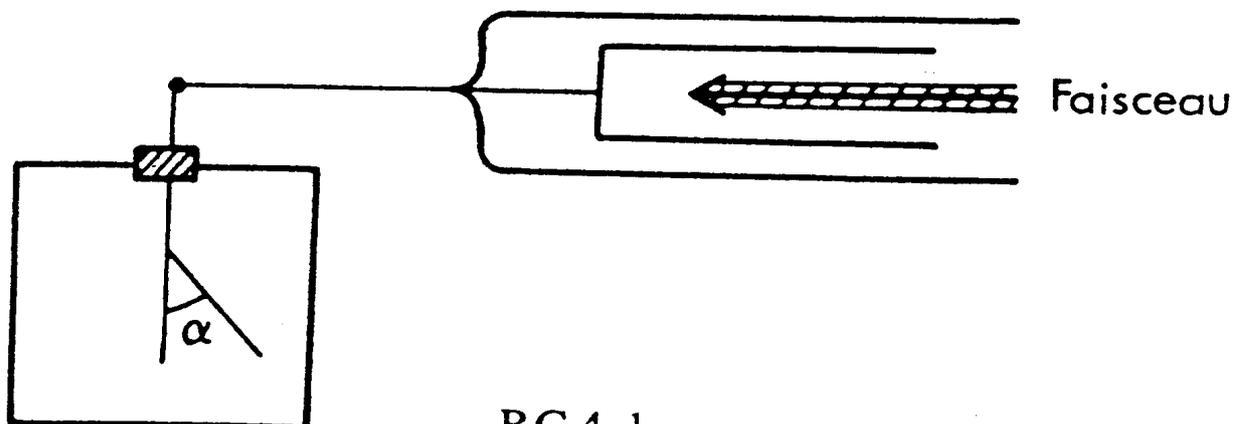
limite la densité de charge qu'un conducteur peut supporter.

#### 4.6. La terre comme conducteur

La terre peut être considérée comme un énorme conducteur en équilibre au potentiel invariable. Il est commode de prendre ce potentiel égal à zéro. On se souviendra que tout conducteur en contact avec le sol, soit directement, soit par une chaîne de conducteurs, se trouve au potentiel zéro.

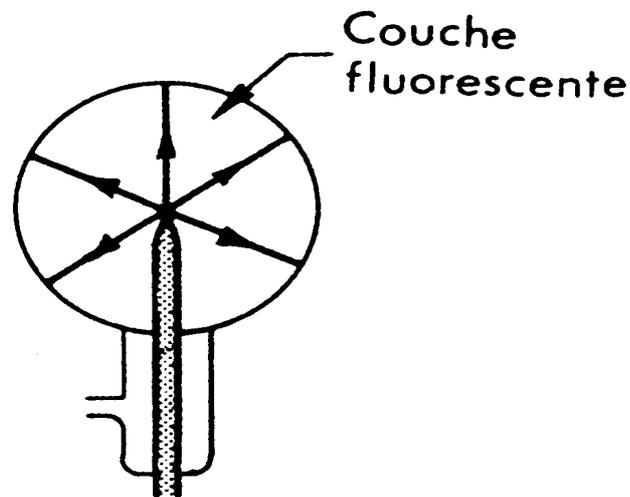
### *Remarques complémentaires*

**RC 4.1. Utilisation du cylindre de Faraday pour la mesure des charges.** — Relions le cylindre de Faraday à un électroscope, toute charge introduite à l'intérieur du cylindre provoque une déviation de l'électroscope qui peut ainsi être étalonné. Ce dispositif est souvent utilisé pour mesurer la charge transportée par un faisceau d'électrons ou d'ions circulant dans le vide.



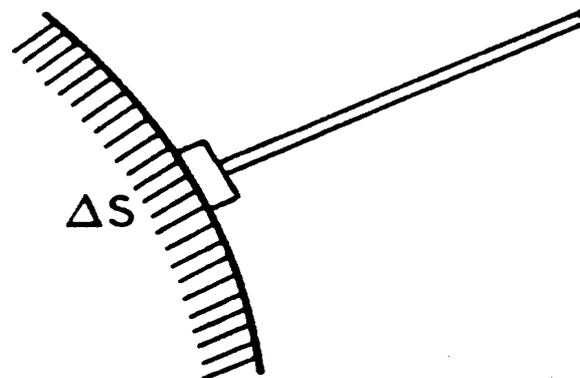
RC 4.1.

**RC 4.2. Microscopie à émission de champ.** — Une fine aiguille (diamètre :  $1/10 \mu\text{m}$ ) est placée au centre d'une sphère vide revêtue intérieurement d'un matériau fluorescent. On applique une d.d.p. élevée entre l'aiguille et la sphère. Dans ce champ intense des électrons sont arrachés de la surface de l'aiguille et se précipitent sur la surface en remontant les lignes de champ. On voit alors sur cette surface une sorte d'image de la pointe de l'aiguille. En portant l'aiguille à un potentiel + par rapport à la sphère et en introduisant un peu d'hélium dans celle-ci, il y a formation d'ions He qui se précipitent sur la couche. L'« image » est alors plus nette. On a pu ainsi visualiser des atomes individuels sur une pointe de tungstène (1960).



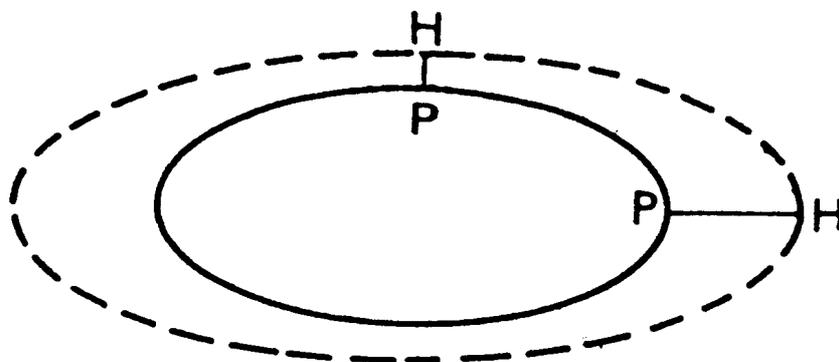
RC 4.2.

**RC 4.3. Etude expérimentale d'une distribution de charges.** — On utilise un « plan d'épreuve ». Il s'agit d'un disque métallique mince de surface  $\Delta S$  (quelques mm de diamètre) fixé à un manche isolant. Lorsqu'on l'applique contre la surface du conducteur, la charge  $\sigma \Delta S$  du conducteur passe



RC 4.3<sub>1</sub>.

sur la surface externe du disque. En retirant le disque normalement à la paroi il emporte cette charge que l'on mesure au moyen d'un électroscope.



RC 4.3<sub>2</sub>.

N.B. On utilise une représentation suggestive d'une distribution de charges en portant sur un segment normal à la surface une longueur  $PH$  proportionnelle à  $\sigma$ . Le lieu des points  $H$  forme une surface appelée « **indicatrice des densités** ».

**RC 4.4. Utilisation du pouvoir des pointes.** — Pour éliminer les charges statiques qui se forment par frottement sur un corps en mouvement rapide (par exemple fuselage d'un avion) on fixe à celui-ci des petits balais métalliques. On peut encore utiliser le pouvoir des pointes pour faire passer de l'électricité d'un conducteur à un autre sans qu'il y ait contact au moyen par exemple d'un peigne métallique placé à faible distance du corps. Un tel dispositif est utilisé dans les machines électrostatiques du type Van de Graaff (cf. RC 5.1).

## 5. Influence électrostatique

### 5.1. Expériences fondamentales

Dans ce qui suit nous supposons que l'espace considéré ne contient que les conducteurs décrits.

5.1.1. Soit un conducteur  $A$ , isolé, initialement neutre; nous en approchons un conducteur  $B$  isolé mais chargé (par exemple positivement) (cf. Fig. 5. 1). L'on constate alors qu'il apparaît des charges sur  $A$ ; ces charges sont : de signe contraire à celles de  $B$  dans les régions de  $A$  les plus proches de  $B$ ; de même signe que celles de  $B$  dans les régions de  $A$  les plus éloignées de  $B$ . On dit que le conducteur  $A$  s'est chargé « par influence ».

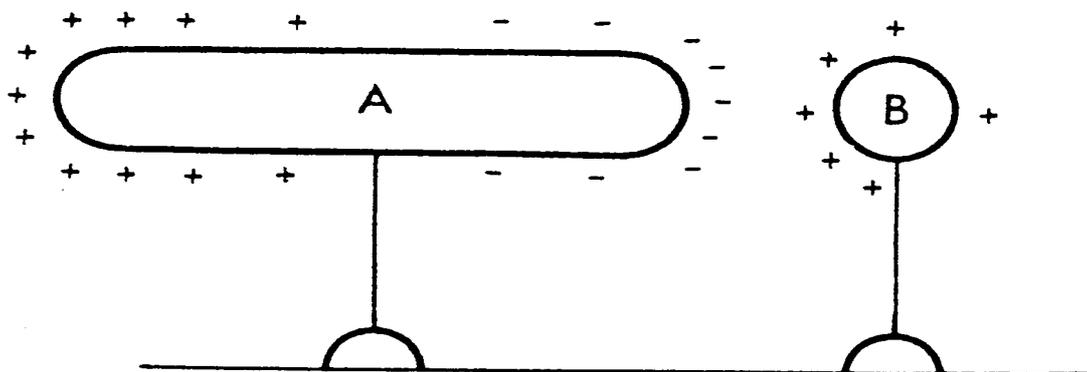


FIG. 5. 1.

L'explication du phénomène est immédiate :  $A$  se trouve placé dans le champ créé par  $B$ . Sous l'action de ce champ les électrons libres de  $A$  se mettent en mouvement; ils sont attirés vers  $B$ , d'où la charge négative sur la partie de  $A$  en regard de  $B$ ; il en résulte aussi un déficit en électrons du côté opposé, d'où l'apparence d'une charge positive. Ces charges qui apparaissent par influence ne peuvent qu'être égales en valeur absolue. La charge algébrique totale du conducteur isolé  $A$  reste nulle.

Le conducteur  $A$ , chargé par influence, prendra une répartition de charge en équilibre telle que le champ redevienne nul à l'intérieur de  $A$ .

Si l'on retire  $B$  le conducteur  $A$  retourne à son état initial neutre.

Il est évident que l'influence de  $B$  sur  $A$  est réciproque car  $B$  se trouvera placé dans le champ créé par les charges de  $A$ . Nous retiendrons que les charges créées par influence peuvent se superposer à des charges préexistantes.

5.1.2. Si nous reprenons l'expérience précédente mais avec  $A$  relié au sol (cf. Fig. 5.2), on observe toujours des charges sur la partie  $A$  en regard de  $B$  mais pas de charge sur la partie opposée. On dit parfois que ces charges se sont « écoulées dans le sol ». En fait, le déficit en électrons se manifeste quelque part dans le sol et non sur  $A$ .

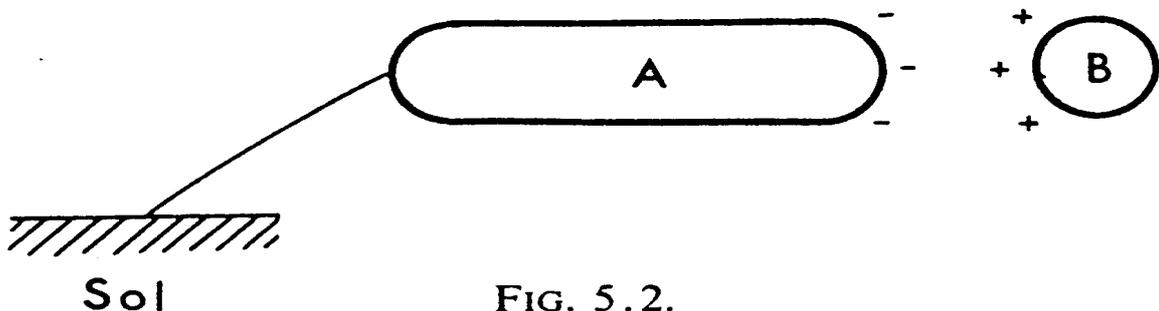


FIG. 5.2.

Lorsqu'on supprime la liaison entre  $A$  et le sol puis que l'on éloigne  $B$ , la charge se répartit sur  $A$  qui se trouve ainsi chargé d'une façon permanente — c'est ainsi que l'on procède pour charger un électroscope. —

## 5.2. Théorème des « éléments correspondants »

Soient deux conducteurs  $A$  et  $B$  en position d'influence (cf. Fig. 5.3). Un tube de champ s'appuyant sur  $dS$  découpe sur  $B$  un élément de surface  $dS'$ .

On dit que  $dS$  et  $dS'$  sont des « éléments correspondants ». Ils portent respectivement des charges  $dq$  et  $dq'$ . Le théorème de Gauss appliqué à la surface fermée formée par le tube et les surfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  prises à l'intérieur de  $A$  et  $B$  nous permet d'écrire :

$$0 = \frac{1}{\epsilon_0} (dq + dq') .$$

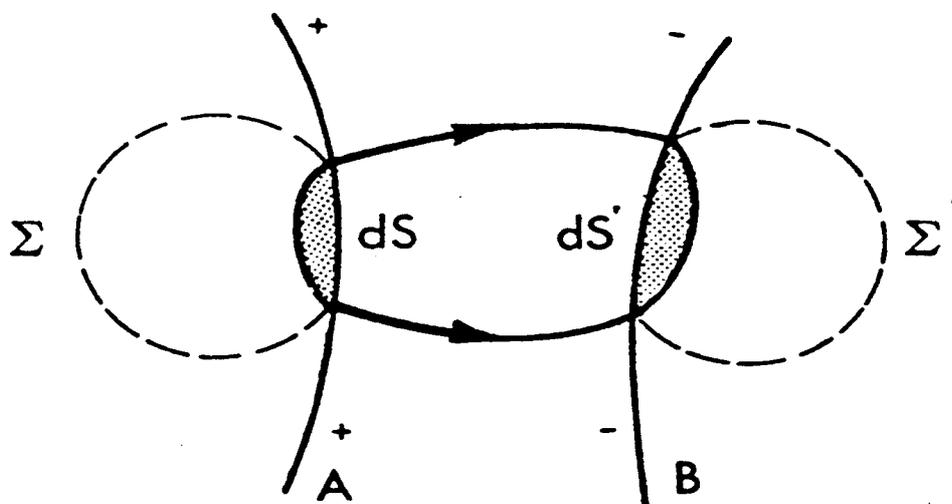


FIG. 5.3.

En effet le flux total sortant est nul. Donc

$$\boxed{dq = - dq'} .$$

*Théorème* : Les charges portées par deux éléments correspondants sont égales et de signe contraire.

### 5.3. Influence totale

On dit qu'il y a **influence « totale »** lorsque le conducteur  $A$  entoure complètement le conducteur  $B$  (cf. Fig. 5.4).

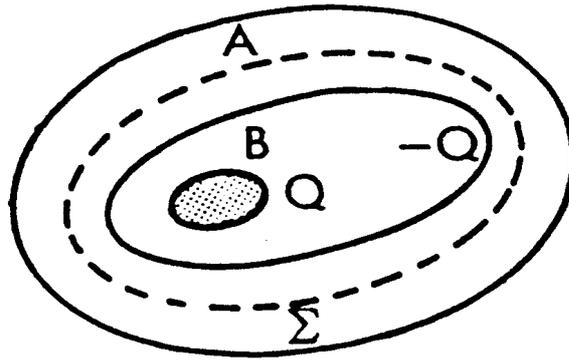


FIG. 5.4.

Si  $Q$  désigne la charge algébrique de  $B$  on aura dans tous les cas une charge  $-Q$  sur la surface interne de  $A$ .

La démonstration découle du théorème de Gauss. Soit  $\Sigma$  une surface de Gauss tracée à l'intérieur de  $A$ . Le flux sortant par  $\Sigma$  est nul car le champ en tout point de  $\Sigma$  est nul. Il en résulte que la somme algébrique des charges à l'intérieur de  $\Sigma$  est nulle ce qui démontre la proposition.

N.B. Le résultat reste vrai si  $B$  est un isolant chargé.

Si  $A$  est isolé et initialement neutre, il apparaît également une charge  $Q$  sur la face externe de  $A$  (en effet sa charge totale doit rester nulle).

Si  $A$  est isolé et porte initialement une charge  $Q'$ , la face externe de  $A$  portera finalement une charge  $Q' + Q$ .

Si  $A$  est relié au sol, seule subsiste la charge  $-Q$  sur la face interne de  $A$ ; il n'y a aucune charge sur sa face externe.

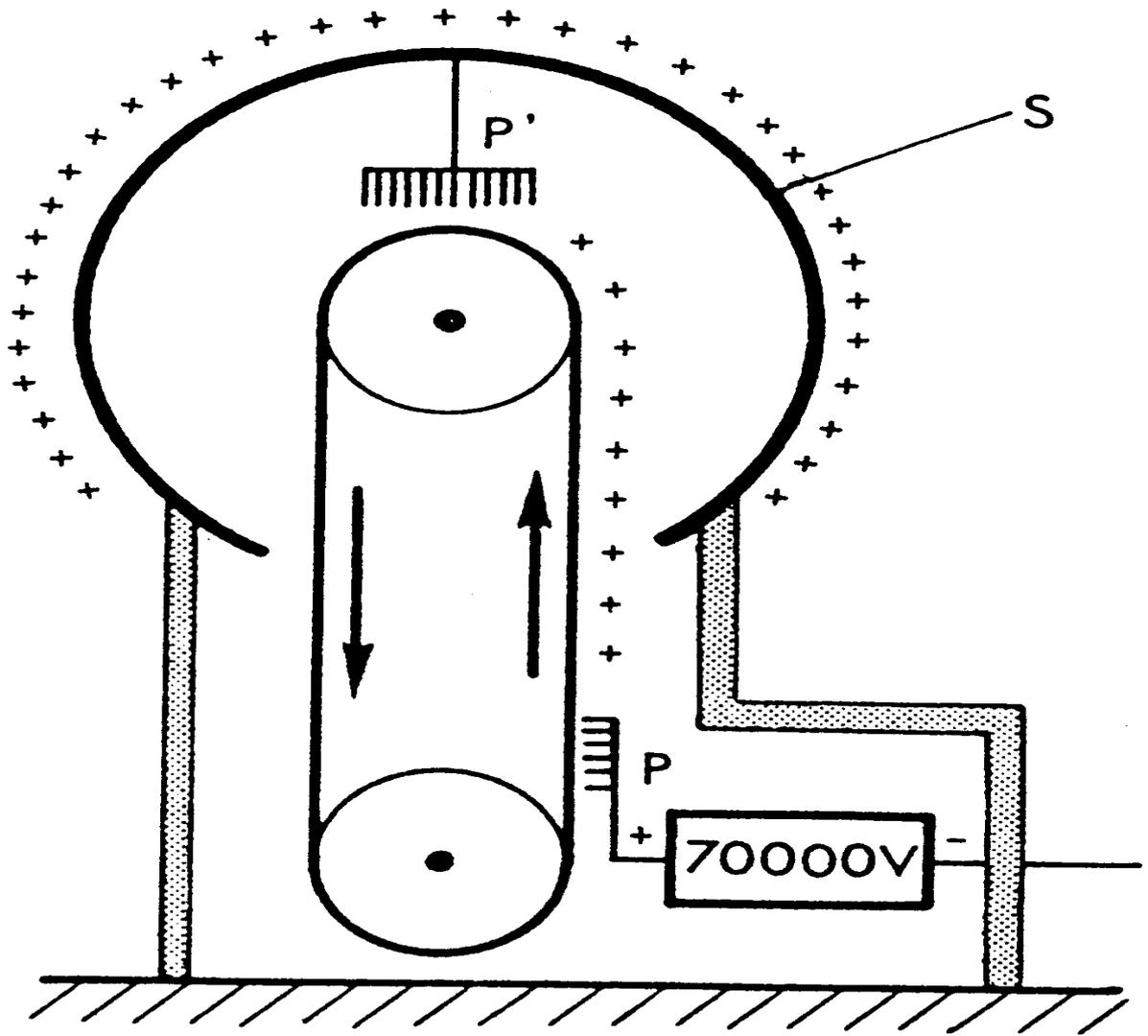
*Remarque* : Faraday a montré expérimentalement qu'un conducteur creux portant une ouverture étroite se comportait comme un conducteur creux fermé et réalisait les conditions de l'influence totale.

## **Remarque complémentaire**

**RC 5.1. Machine de Van de Graaff.** — Il s'agit de charger fortement un conducteur de façon à le porter à un potentiel élevé. Le conducteur à charger est une sphère métallique ( $S$ ) creuse supportée par une colonne isolante. A la base de la colonne, se trouve un générateur auxiliaire (tension de 70 000 V par exemple), par l'intermédiaire d'un peigne ( $P$ ) métallique, ce générateur dépose des charges sur une courroie isolante défilant à la vitesse de quelques mètres par seconde. Ces charges positives sont entraînées par la courroie à l'intérieur de la sphère ce qui a pour effet de charger la sphère, charges  $-$  sur la face interne, charges  $+$  sur la face externe. Les charges  $-$  sont collectées par un deuxième peigne métallique ( $P'$ ) (utilisation du pouvoir des pointes). Les charges  $-$  du peigne neutralisant les charges  $+$  apportées par la courroie. Celle-ci redescend sensiblement neutre et peut à nouveau se charger au contact du premier peigne ( $P$ ) et le cycle des opérations continue de la même façon. Ainsi la sphère se charge positivement de plus en plus et son potentiel croît corrélativement.

Le phénomène ne peut continuer indéfiniment car lorsque la sphère est suffisamment chargée les pertes de charges spontanées par l'air et par les isolants supportant la sphère deviennent aussi importantes que les charges créées par influence et on atteint une charge limite et un potentiel limite.

Ces hauts potentiels ( $5 \cdot 10^6$  V) servent essentiellement à accélérer des particules tels les protons.



RC 5.1.

## **6. Etude mathématique de l'équilibre d'un système de conducteurs**

### **6.1. Position du problème**

Soit un ensemble de conducteurs occupant des positions fixes. On impose à chacun des conducteurs :

- soit un potentiel fixe (en le reliant par exemple à un générateur approprié)
- soit une charge totale donnée (le conducteur est chargé puis isolé).

On demande de déterminer « l'état d'équilibre » du système, en entendant par là qu'il s'agit d'évaluer :

- 1) le champ en chaque point extérieur aux conducteurs,
- 2) la répartition des charges, c'est-à-dire la densité  $\sigma$  en chaque point de chaque conducteur.

L'expérience étant réalisable, il existe au moins une solution. On démontre que cette solution est unique.

### **6.2. Solution théorique du problème**

Le problème posé est résolu si l'on sait déterminer la fonction potentiel  $V(x, y, z)$  en tout point de l'espace.

En effet, connaissant  $V$ , on déduit  $\vec{E}$  par la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ ;  $\sigma$ , densité en un point d'un conducteur, se déduit de la valeur du champ en un point infiniment voisin grâce au théorème de COULOMB  $\sigma = \epsilon_0 E$ .

Du point de vue mathématique, la fonction  $V$  cherchée doit obéir d'une part à l'équation de LAPLACE  $\Delta V = 0$  et aussi à des « conditions aux limites »,  $V$  devant avoir une valeur constante et imposée sur la surface limitant certains conducteurs.

La résolution de telles équations présente souvent de grandes difficultés mathématiques. Il existe des procédés permettant parfois d'éviter la résolution de l'équation de LAPLACE.

### 6.3. Superpositions des états d'équilibre

Considérons un système de conducteurs ; on peut envisager un nombre illimité d'états d'équilibre suivant le potentiel auquel est porté chacun des conducteurs.

Désignons par  $V'$  la fonction qui caractérise un premier état d'équilibre et par  $V''$  celle qui caractérise un second état d'équilibre. On appelle superposition de ces états toute combinaison linéaire telle que  $V = \lambda V' + \mu V''$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes.

La fonction  $V$  correspond encore à un état d'équilibre (état superposé). Ceci résulte du caractère linéaire de l'équation fondamentale ; en effet si  $\Delta V' = 0$  et  $\Delta V'' = 0$ ,  $\Delta(\lambda V' + \mu V'') = 0$ .

Dans l'état superposé, les potentiels sur chacun des conducteurs deviennent :

$$V_i = \lambda V'_i + \mu V''_i ;$$

$V'_i$  et  $V''_i$  représentent les potentiels du conducteur ( $i$ ) dans le premier puis dans le second état d'équilibre. En un point  $P$  quelconque, le champ devient

$$\vec{E} = \lambda \vec{E}' + \mu \vec{E}'' ;$$

en effet  $\text{grad } V = \lambda \text{grad } V' + \mu \text{grad } V''$ .

En un point  $M$  à la surface d'un conducteur, la densité devient :  $\sigma = \lambda \sigma' + \mu \sigma''$ .

On remarque que la charge de chacun des conducteurs devient :

$$Q = \iint_s \sigma \, dS = \lambda Q' + \mu Q'' .$$

On peut résumer ceci en disant d'une façon sché-

matique : la superposition des potentiels entraîne celle des champs, des densités et des charges.

Nous retiendrons le cas particulier suivant, souvent utilisé, qui correspond à  $\mu = 0$  ; on peut dire que si l'on multiplie tous les potentiels d'un système par un scalaire  $\lambda$ , toutes les densités  $\sigma$  donc aussi toutes les charges  $Q$  sont multipliées par ce même scalaire  $\lambda$ .

#### 6.4. Images électriques

Soit un système  $A$  de conducteurs en équilibre numérotés (1), (2), (3), ... ; les surfaces externes de ces conducteurs sont désignées par  $S_1, S_2, S_3, \dots$  et leurs potentiels par  $V_1, V_2, V_3, \dots$  (cf. Fig. 6.1).

Soit un système  $B$  qui diffère du précédent par le seul fait que le conducteur (1) est remplacé par un ensemble de charges ponctuelles  $q_1, q_2, q_3, \dots$  placées en des points  $P_1, P_2, P_3$  intérieurs à  $S_1$  de telle

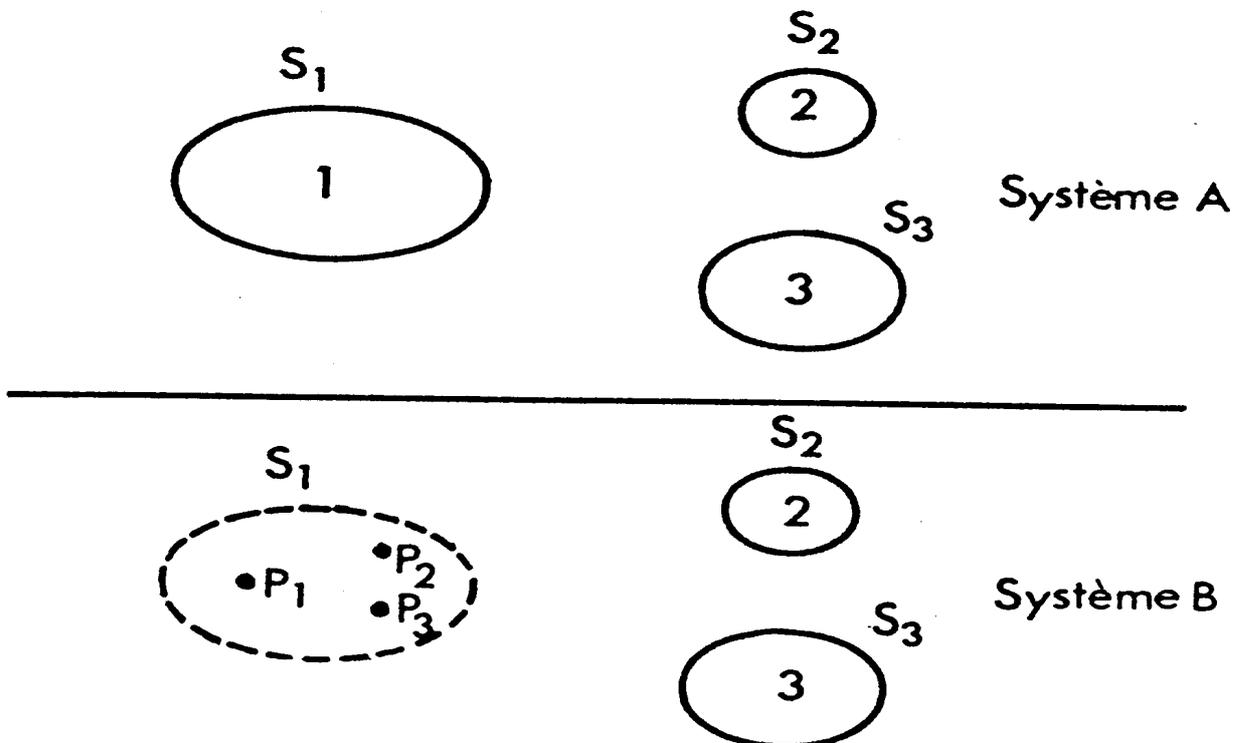


FIG. 6.1.

sorte que le potentiel sur  $S_1$  (devenue une surface purement géométrique) garde la valeur  $V_1$ . Dans

ces conditions, la fonction  $V$  qui caractérise la distribution  $B$  est, à l'extérieur de  $S_1$ , la même que pour la distribution initiale  $A$  ; en effet elle satisfait aux mêmes conditions aux limites dans les deux cas (à l'extérieur de  $S_1$ ).

On dit que l'ensemble des charges ponctuelles  $q_1, q_2, q_3, \dots$  substitué à celui des charges portées par  $S_1$  dans le système  $A$  forme « l'image électrique » du conducteur (1) en présence de tous les autres.

*Exemple* : Une sphère chargée, isolée dans l'espace et portant une charge  $Q$ , a pour « image » une charge ponctuelle unique  $Q$  placée au centre de la sphère. (Pour justifier ce résultat on reverra l'exercice E 3.1.)

## 6.5. Effet d'écran

### 6.5.1. NOTION D'ÉCRAN

Soit un conducteur creux  $C$  fermé sans charge à l'intérieur de la cavité (cf. Fig. 6.2).

On sait (cf. 4.2.4) que le champ à l'intérieur de cette cavité est nul, ceci quelle que soit la répartition des charges extérieures (y compris celles qui se trouvent sur la surface externe de  $C$ ).

Plaçons à l'intérieur de la cavité des charges. Le champ en un point de la cavité ne dépendra que de ces charges intérieures, car les charges extérieures

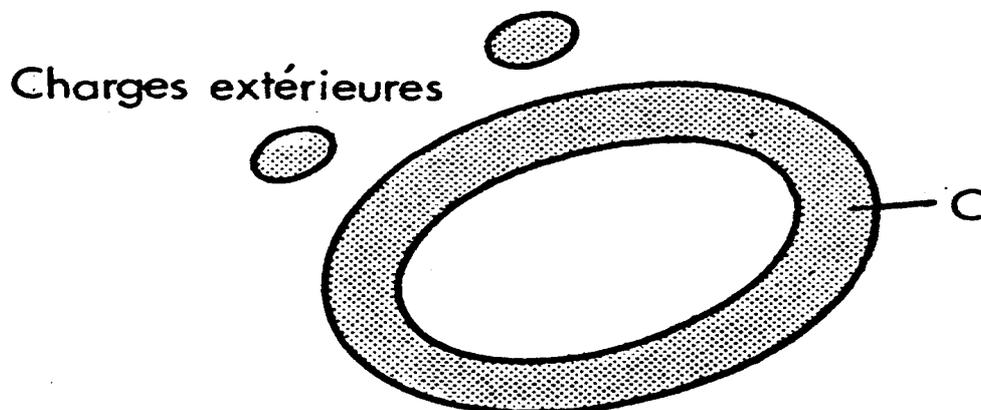


FIG. 6.2.

y donnent un champ nul. Une modification de ces dernières est sans effet. Il en est de même pour la d.d.p. entre deux points intérieurs quelconques ainsi que pour les densités de charge  $\sigma$ , donc pour les charges intérieures ; on dit que le **conducteur creux constitue un « écran »**.

### 6.5.2. ECRAN IMPARFAIT

Le conducteur creux précédent ne fonctionne pas comme écran dans les deux sens. En effet si nous modifions les charges intérieures (par exemple, par adjonction d'une charge supplémentaire) nous aurons par influence une nouvelle répartition de charges sur la surface extérieure d'où une modification du champ et de l'ensemble des charges extérieures. L'effet d'écran ne se produit donc pas de l'intérieur vers l'extérieur. On dit qu'un **conducteur creux isolé constitue un écran « imparfait »**.

### 6.5.3. ECRAN PARFAIT

On dit que l'écran est « **parfait** » si les deux distributions de charges extérieures et intérieures sont indépendantes l'une de l'autre.

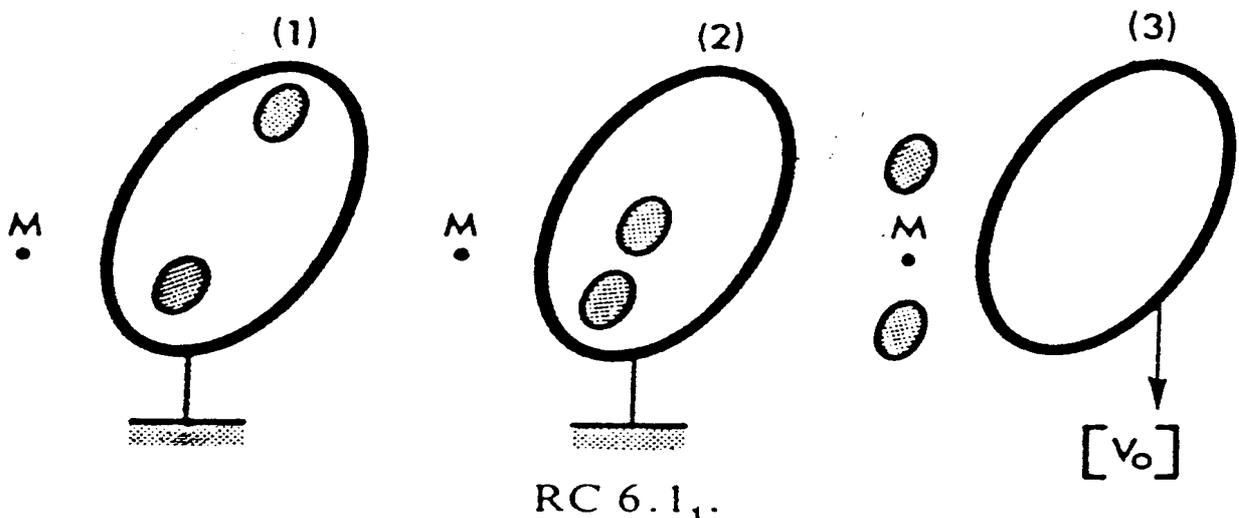
On peut démontrer (cf. RC 6.1) que pour transformer un conducteur creux en écran parfait, il suffit de le **maintenir à un potentiel constant**.

Ce potentiel constant peut être le potentiel du sol, pris conventionnellement comme potentiel zéro. L'expérience montre qu'un conducteur grillagé (cage de Faraday) possède encore la propriété d'écran. On a déjà noté que la différence de potentiel entre deux points quelconques de la cavité était indépendante des charges extérieures ; il en est encore ainsi entre un point de la cavité et un point de l'enceinte. Il est donc commode de prendre pour origine des potentiels (potentiel zéro) le potentiel de l'enceinte.

## **Remarques complémentaires**

**RC 6.1. Démonstration de l'existence d'écrans parfaits.** — Considérons trois distributions (1), (2), (3) (cf. Fig. RC 6.1<sub>1</sub>). Le point  $M$  est le même.

Distribution (1) : l'enceinte est au potentiel zéro ; il n'y a pas de charges extérieures ; tout le volume extérieur est au potentiel zéro (il ne peut y avoir ni maximum, ni minimum). Le potentiel en  $M$  est noté :  $V_{M,1} = 0$ .



Distribution (2) : elle ne diffère de (1) que par la répartition des charges intérieures. On a :  $V_{M,2} = 0$ .

Distribution (3) : l'enceinte est portée au potentiel fixe  $V_0$ . Le potentiel en  $M$  a une valeur  $V = V_{M,3}$ .

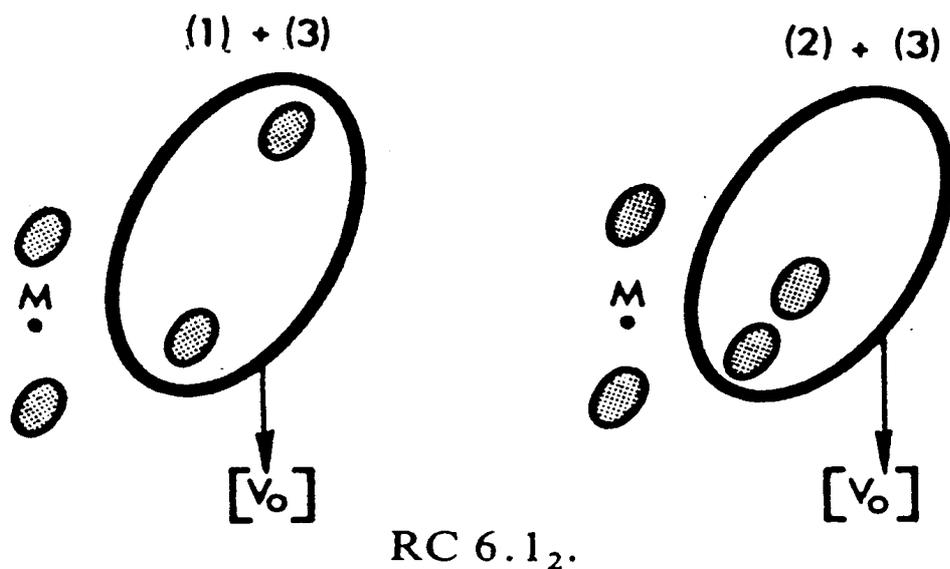
Superposons maintenant les distributions (1) + (3), puis (2) + (3) (cf. Fig. RC 6.1<sub>2</sub>). Pour (1) + (3) le potentiel en  $M$  vaut :

$$V_M = V_{M,1} + V_{M,3} = V_{M,3} .$$

Pour (2) + (3) le potentiel en  $M$  vaut :

$$V_M = V_{M,2} + V_{M,3} = V_{M,3} .$$

Ces deux distributions diffèrent par la répartition des charges intérieures, ce qui n'a aucune répercussion sur le potentiel d'un point extérieur, tel que  $M$  ; ceci démontre l'effet d'écran.



**RC 6.2. Utilisation des écrans électriques.** — L'effet d'écran a de très nombreuses applications. Il est utilisé chaque fois qu'il convient de soustraire un appareillage électrique (instrument de mesure par exemple) à une influence extérieure. Les fils de connexions, par exemple, sont placés à l'intérieur d'un tube métallique creux appelé « blindage ». L'enceinte protectrice est souvent appelée « masse ».

## 7. Capacité. Condensateurs

### 7.1. Capacité d'un conducteur isolé dans l'espace

#### 7.1.1. DÉFINITION

Soit un conducteur unique supposé seul dans le vide. Il porte une charge  $Q$ , son potentiel est  $V$ .

Le rapport  $Q/V$  est constant ; ce rapport est appelé « **capacité du conducteur isolé dans l'espace** » ; notation  $C$  :

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}} \quad (7.1)$$

Cette propriété découle du théorème de superposition : la multiplication du potentiel par un scalaire  $\lambda$  entraîne la multiplication de la charge par ce même scalaire  $\lambda$  : le rapport reste donc constant.

La capacité  $C$  ne dépend que de la forme et des dimensions de la surface du conducteur.

#### 7.1.2. UNITÉS

L'unité de capacité est d'après (7.1) le coulomb/volt, appelé **farad** (symbole F).

En pratique on se sert surtout de ses sous-multiples : le microfarad ( $\mu\text{F}$ ) et le picofarad (pF)

$$1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F} .$$

#### 7.1.3. CONDUCTEUR SPHÉRIQUE

Un tel conducteur de rayon  $R$  porte une couche sphérique uniforme de charge ; le potentiel créé par cette couche est :

$$V = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R} \quad (\text{cf. E 3.2})$$

donc

$$\boxed{C = 4 \pi \epsilon_0 R} \quad (7.2)$$

## 7.2. Coefficients de capacité et d'influence d'un système de conducteurs

Supposons en présence  $n$  conducteurs fixes numérotés (1), (2), ..., ( $n$ ) caractérisés par des potentiels  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Tous ces conducteurs s'influencent mutuellement.

On démontre au moyen du théorème de superposition que les charges des divers conducteurs sont des fonctions linéaires de tous les potentiels

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_{11} V_1 + C_{12} V_2 + C_{13} V_3 + \dots + C_{1n} V_n \\ Q_2 &= C_{21} V_1 + C_{22} V_2 + C_{23} V_3 + \dots + C_{2n} V_n \\ &\vdots \\ Q_n &= C_{n1} V_1 + C_{n2} V_2 + C_{n3} V_3 + \dots + C_{nn} V_n \end{aligned} \right\} (7.3)$$

Un coefficient tel que  $C_{ij}$  est appelé **coefficient d'influence de  $j$  sur  $i$  en présence de tous les autres**. Un coefficient tel que  $C_{ii}$  est appelé **capacité du conducteur  $i$  en présence de tous les autres**; il représente le rapport  $Q_i/V_i$  lorsque tous les autres potentiels sont nuls.

Cette capacité est différente de celle du même conducteur  $i$ , unique et isolé dans l'espace. Tous ces coefficients s'expriment en farad; leurs valeurs dépendent des formes et des positions relatives de l'ensemble des conducteurs. On peut démontrer que les coefficients  $C_{ij}$  et  $C_{ji}$  sont égaux et que les  $C_{ii}$  sont positifs alors que les  $C_{ij}$  sont négatifs.

## 7.3. Condensateurs

### 7.3.1. DÉFINITIONS

Deux conducteurs forment un « condensateur » lorsqu'ils sont placés en position d'influence totale.

Les deux conducteurs sont appelés les « armatures » ; (1) est l'armature interne, (2) est l'armature externe (cf. Fig. 7.1). Soient  $V_1$  et  $V_2$  les potentiels respectifs des deux armatures. On appelle « charge

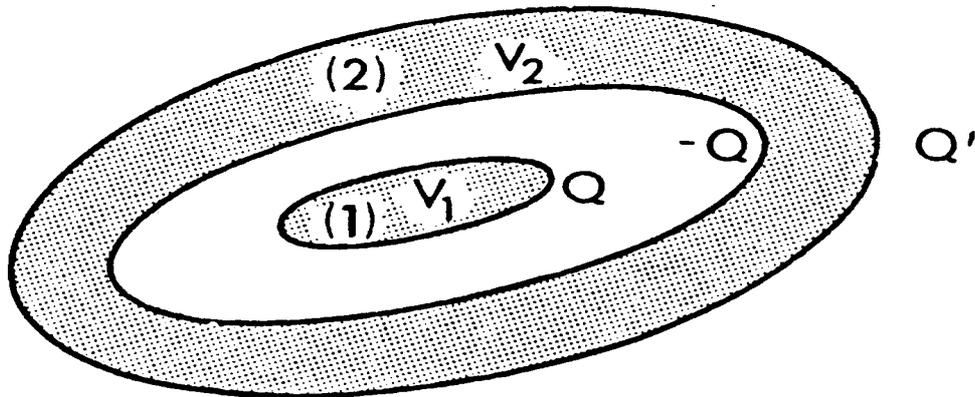


FIG. 7.1.

du condensateur » ( $Q$ ) la charge de son armature interne (encore représentée par  $Q_1$ ). Par suite de l'influence totale, la face interne de (2) porte en toute circonstance une charge  $-Q$  ; sa face externe peut porter une charge  $Q'$ . La charge algébrique totale de (2) est  $Q_2 = -Q + Q'$ .

Le rapport  $Q/(V_1 - V_2)$  est constant ; ce rapport est appelé « capacité du condensateur » (notation  $C$ )

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (7.4)$$

Cette propriété découle encore du théorème d'addition. Si nous multiplions les potentiels des deux armatures par  $\lambda$  il en sera de même pour  $V_1 - V_2$ . Les charges sont, elles aussi, multipliées par  $\lambda$  ; il en est ainsi pour  $Q$ . Ceci démontre la propriété. Cette capacité, rapport d'une charge sur une d.d.p.

s'exprime en farad.

## 7.4. Calcul de la capacité d'un condensateur

### 7.4.1. IDÉE DIRECTRICE

La symétrie des conducteurs permet de calculer (en général grâce au théorème de GAUSS) le champ en un point de l'espace entre les armatures ; ce champ s'exprime en fonction de  $Q$ . On évalue ensuite la circulation du champ, lorsque l'on passe d'une armature à l'autre ; cette circulation n'est autre que la d.d.p. entre les armatures ; il en résulte une relation entre  $V_1 - V_2$  et  $Q$  d'où l'on déduit la capacité cherchée.

Les condensateurs classiques sont : **les condensateurs sphériques**, les armatures ont des surfaces en regard sphériques et concentriques, de rayon  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) ; le calcul donne :

$$C = 4 \pi \epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (7.5) \quad (\text{cf. E 7.1})$$

**les condensateurs cylindriques**, les armatures ont des surfaces en regard cylindriques, coaxiales, de rayon  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), de longueur théoriquement infinie.

Le calcul donne :

$$C = \frac{2 \pi \epsilon_0 h}{\text{Log} \frac{R_2}{R_1}} \quad (7.6) \quad (\text{cf. E 7.2}) .$$

### 7.4.2. CONDENSATEUR PLAN

Les armatures ont des surfaces en regard planes et parallèles, distantes de  $e$ . Les armatures sont suppo-

sées infinies. Nous sommes bien dans le cas de l'influence totale exigée par la définition. Par raison de symétrie la distribution des charges est uniforme sur les surfaces planes en regard. Ces deux distributions engendrent un champ uniforme (cf. E 1.1); celui-ci a un module constant  $E = \sigma/\epsilon_0$  (cf. théorème de COULOMB).

La circulation du champ quand on passe de  $A$  à  $B$  le long d'une ligne de champ (cf. Fig. 7.2), a pour expression  $E \cdot e = V_1 - V_2$  d'où  $V_1 - V_2 = \sigma e/\epsilon_0$ .

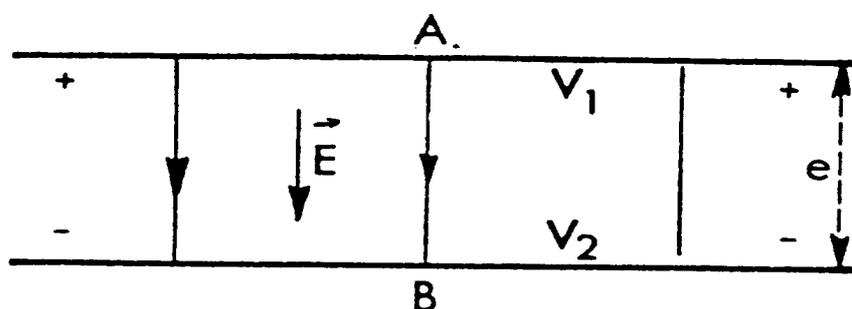


FIG. 7.2.

Délimitons dans le condensateur infini une portion d'aire  $S$  et de charge  $Q = \sigma S$ . La capacité de cette portion est

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\sigma S \epsilon_0}{\sigma e} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 S}{e}} \quad (7.7)$$

#### 7.4.3. CONDENSATEUR DE FORME QUELCONQUE

La distance  $e$  entre armatures est supposée très faible et constante (cf. Fig. 7.3). Les lignes de champ normales aux deux surfaces en regard sont pratiquement des segments de droite de longueur  $e$  (cf. Fig. 7.4). Le module  $E$  du champ est sensiblement constant et a pour valeur  $E \simeq \frac{V_1 - V_2}{e}$ .

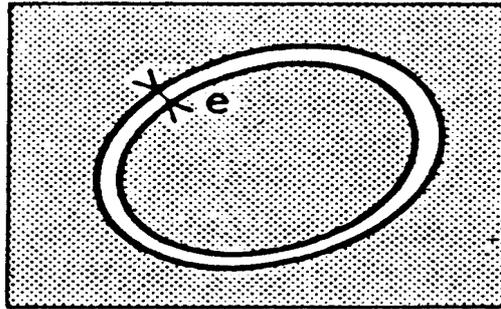


FIG. 7.3.

(2)

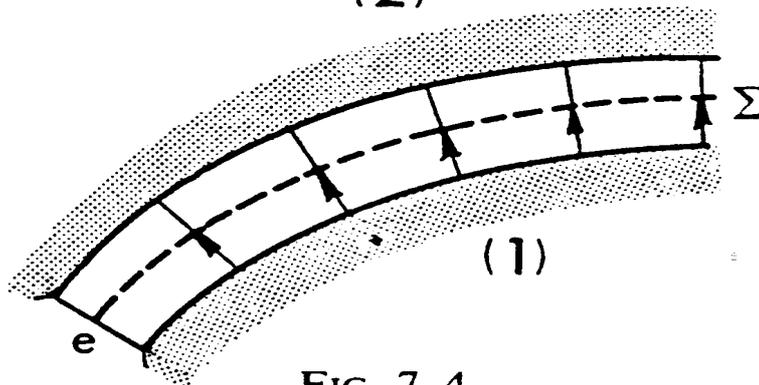


FIG. 7.4.

Soit  $\Sigma$  une surface de GAUSS tracée entre les armatures et parallèles à celles-ci. Son aire  $S$  se confond pratiquement avec celle des armatures. Le flux sortant par  $\Sigma$  est  $\Psi_{\Sigma} = E \cdot S = Q/\epsilon_0$  (théorème de GAUSS)

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}; \quad V_1 - V_2 = \frac{Qe}{\epsilon_0 S} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\epsilon_0 S}{e}} \quad (7.8)$$

## 7.5. Association de condensateurs

Les condensateurs sont représentés de façon symbolique par deux traits parallèles (cf. Fig. 7.5).

On peut associer de diverses façons plusieurs condensateurs. On appelle **condensateur équivalent** d'un tel système le condensateur unique qui, chargé sous la même d.d.p. emmagasine la même charge, cette charge étant restituée lors de la décharge.

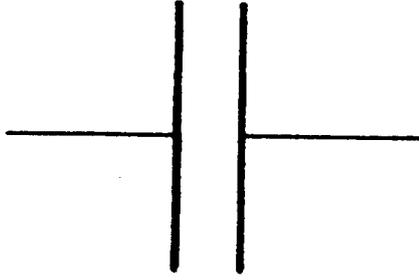


FIG. 7.5.

### 7.5.1. ASSOCIATION EN PARALLÈLE (OU EN SURFACE)

Les armatures sont reliées de façon à former deux groupes, l'un d'eux est à un potentiel  $V_1$  l'autre à un potentiel  $V_2$  (cf. Fig. 7.6). Chacun des condensateurs est donc soumis à la même d.d.p. :

$$V = V_1 - V_2 .$$

Leurs charges respectives sont

$$Q_1 = C_1 V ; \quad Q_2 = C_2 V ; \quad \text{etc...}$$

Les armatures réunies forment un conducteur unique porteur d'une charge

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots .$$

Lors de la décharge, en reliant les bornes  $B$  et  $B'$  on recueille cette charge  $Q$ . Par définition le condensateur équivalent aurait une capacité  $C$  telle que  $Q = CV$  ; comme

$$CV = Q_1 + Q_2 + \dots$$

$$CV = C_1 V + C_2 V + \dots$$

$$\boxed{C = C_1 + C_2 + \dots} . \quad (7.9)$$

Une telle association permet d'obtenir de grandes capacités mais chacun des condensateurs supporte la d.d.p. totale  $V$ .

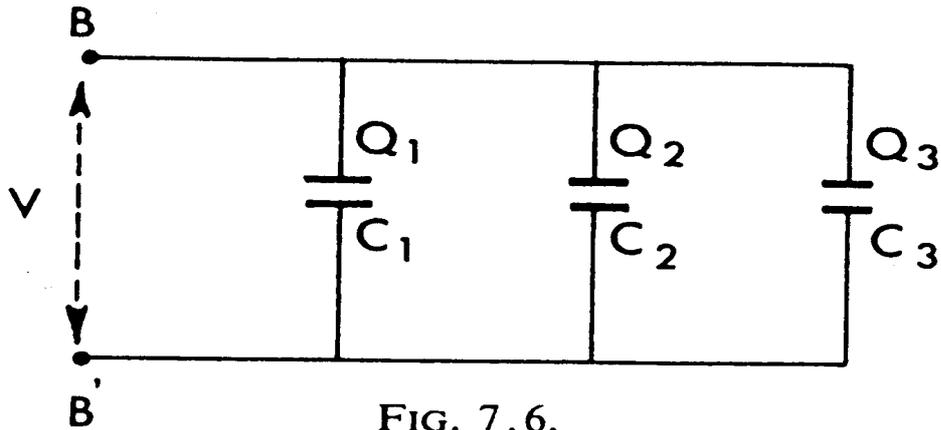


FIG. 7.6.

### 7.5.2. ASSOCIATION EN SÉRIE (OU EN CASCADE)

Chaque armature d'un condensateur est reliée par un conducteur à une seule armature d'un autre (cf. Fig. 7.7).

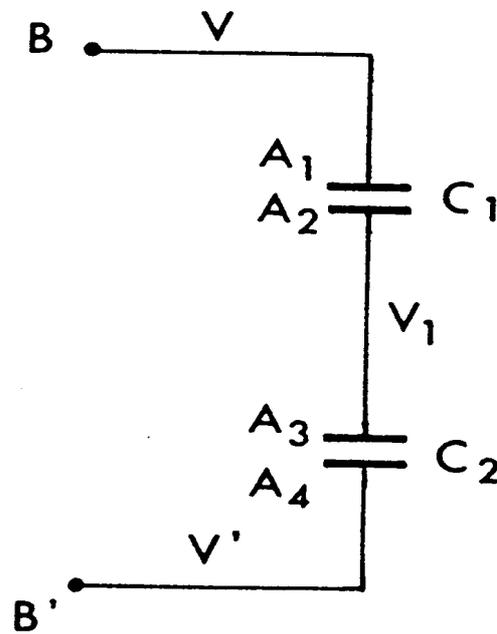


FIG. 7.7.

Supposons les condensateurs initialement neutres et établissons entre les deux bornes  $B$  et  $B'$  une d.d.p.  $V - V'$ .

Désignons les armatures successives par  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ , etc.

$A_1$  prend une charge  $+Q$  par influence, on aura  $-Q$  sur  $A_2$  et  $+Q$  sur  $A_3$  (en effet,  $A_2$  et  $A_3$  forment un conducteur unique initialement neutre dont la charge totale reste nulle). Il apparaît de même une charge  $-Q$  sur  $A_4$ . Désignons par  $V_1$  le potentiel commun de  $A_2$  et  $A_3$ .

On a les relations

$$V - V_1 = \frac{Q}{C_1}$$
$$V_1 - V' = \frac{Q}{C_2}.$$

Par addition  $V - V' = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right).$

Lors de la décharge, en reliant les bornes  $B$  et  $B'$ , on recueille la charge  $Q$ .

Par définition, le condensateur équivalent aurait une capacité  $C$  telle que :

$$Q = C(V - V').$$

En rapprochant ces deux dernières relations on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}. \quad (7.10)$$

Le calcul précédent s'étend par récurrence à un nombre quelconque de condensateurs en série.

### ***Remarques complémentaires***

**RC 7.1. Relations entre capacités et coefficients d'influence.**

— Etablissons d'abord une relation entre  $Q'$  et  $V_2$ . Pour cela, maintenons l'armature externe au potentiel  $V_2$  et supprimons la charge de l'armature interne  $Q = Q_1$ . Cette suppression, en vertu de la propriété des écrans parfaits, n'a aucune répercussion sur la charge extérieure  $Q'$ ; tout se passe comme si (2) était seule dans l'espace  $Q'/V_2 = C'$  (capacité de l'armature externe supposée seule).

Les relations générales (7.3) s'écrivent ici :

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_{11} V_1 + C_{12} V_2 = Q \\ Q_2 &= C_{21} V_1 + C_{22} V_2 \end{aligned} \right\} \text{ (i)}$$

On sait que  $C_{21} = C_{12}$ .

Pour trouver une relation entre les coefficients nous nous plaçons dans le cas particulier où  $V_2 = 0$  (armature externe au sol);  $Q'$  est alors nul; le système précédent se réduit à :

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q = C_{11} V_1 \\ Q_2 &= -Q = C_{21} V_1 \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{C_{21} = C_{12} = -C_{11}} .$$

La première relation de (i) peut s'écrire :

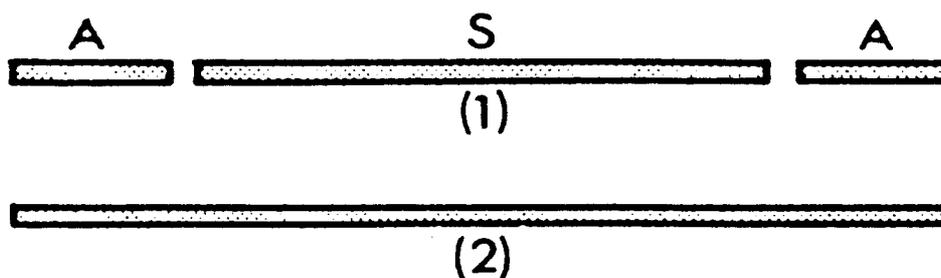
$$Q_1 = Q = C_{11} V_1 - C_{11} V_2 = C_{11}(V_1 - V_2)$$

d'où

$$\boxed{C = C_{11}} .$$

**RC 7.2. Remarques sur les condensateurs plans.** — Pour un condensateur plan limité à une surface  $S$  la relation (7.7) ne s'applique pas en toute rigueur; en effet le champ cesse d'être uniforme au voisinage du bord (« effet de bord »).

On peut limiter cette perturbation par l'artifice de l'« anneau de garde » (cf. Fig. RC 7.2), l'armature (1) d'aire  $S$  est plus petite que l'armature (2) autour de  $S$ ; on



### RC 7.2.

dispose un condensateur  $A$  en forme d'anneau, séparé de  $S$  par un étroit sillon. Si (1) est porté au même potentiel que l'anneau, le champ sera uniforme dans la région centrale couverte par (1), la capacité sera exactement :  $C = \epsilon_0 S/e$ .

**RC 7.3. Condensateurs avec isolant.** — Très souvent l'espace entre les armatures est entièrement occupé par un isolant encore appelé « diélectrique ». L'expérience montre que la capacité est alors multipliée par un facteur  $k > 1$ , caractéristique de l'isolant et appelé sa « constante diélectrique ». Un second intérêt du diélectrique est d'augmenter le potentiel limite que peut supporter le condensateur sans qu'il y ait amorçage d'un arc et « claquage » du condensateur.

**RC 7.4.** Parmi beaucoup d'utilisations possibles, signalons l'utilisation des condensateurs plans pour réaliser un volume où règne un champ électrique uniforme utilisé par exemple pour la déflexion de particules chargées.

## **8. Energie et forces en électrostatique**

### **8.1. Energie d'une charge ponctuelle dans un champ**

On appelle énergie électrostatique  $W$  d'une charge ponctuelle  $q$  passive, placée en un point  $P$  où le potentiel est  $V$ , le travail que peut fournir cette charge dans un déplacement la menant de  $P$  à l'infini. Il s'agit du travail fourni par la force électrostatique s'exerçant sur  $q$ . Ce travail est appelé énergie car dans certaines conditions il peut être recueilli par le milieu extérieur.

En utilisant la relation (2.8) en prenant  $V = 0$  à l'infini, on obtient :

$$W = q(V - 0) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{W = qV} . \quad (8.1)$$

Une façon équivalente de définir cette énergie est la suivante :

On appelle énergie électrostatique d'une charge ponctuelle  $q$  en un point  $P$  où le potentiel est  $V$ , le travail dépensé par un opérateur pour amener la charge de l'infini jusqu'en  $P$ , ceci d'une façon réversible c'est-à-dire par une succession d'états d'équilibres.

Evaluons ce travail. L'opérateur équilibre à tout moment la force électrostatique  $\vec{f}$  par une force  $\vec{f}'$ .  
 $\vec{f}' = -\vec{f}$ . Le travail de l'opérateur est

$$\mathcal{C}(f') = -\mathcal{C}(f) = -q(O - V) \text{ (cf. (2.8))} \Rightarrow W = qV .$$

La relation (8.1) est algébrique ;  $W$ ,  $q$ ,  $V$  sont positifs ou négatifs.

Si  $W$  est positif cela signifie que la charge est capable de fournir du travail de par sa localisation en  $P$ .

Si  $W$  est négatif cela signifie que le déplacement de la charge à l'infini nécessite un travail fourni par le milieu extérieur (l'opérateur).

*Remarque* :  $W$  comme  $V$  ne sont définis qu'à une constante près ; écrire  $W = qV$  revient à faire coïncider les zéros des deux fonctions.

L'énergie électrostatique liée à la position d'une charge est une énergie du type **énergie potentielle**.

## 8.2. Énergie mutuelle d'un ensemble de charges ponctuelles

Soit un ensemble de charges ponctuelles  $q_1, q_2, \dots$ , placées en des points  $P_1, P_2, \dots$ .

Pour mettre en place ce système en amenant les charges de l'infini, d'une façon réversible, il faut dépenser un certain travail qui mesure par définition **l'énergie mutuelle du système des charges**. On convient donc de prendre celle-ci égale à zéro lorsque les charges sont infiniment éloignées les unes des autres.

Faisons le calcul dans le cas particulier de 3 charges ; il se généralise sans peine.

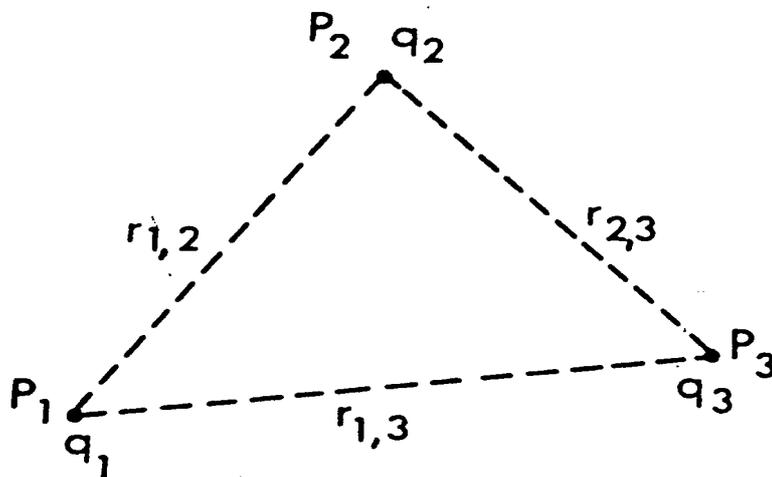


FIG. 8.1.

Les 3 charges  $q_1, q_2, q_3$  sont séparées par des distances  $r_{1,2}, r_{2,3}, r_{1,3}$  (cf. Fig. 8.1). Toutes les charges étant à l'infini plaçons  $q_1$  en  $P_1$ , ceci n'exige aucun travail ( $W_1 = 0$ ).  $q_1$  crée en  $P_2$  un potentiel égal à :

$$v = \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_{1,2}}.$$

Pour amener  $q_2$  de l'infini à  $P_2$  il faut alors fournir d'après (8.1) un travail

$$W_2 = q_2 v = \frac{q_2 q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_{1,2}}.$$

Les deux charges  $q_1$  et  $q_2$  créent en  $P_3$  un potentiel :

$$v' = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{1,3}} + \frac{q_2}{r_{2,3}} \right).$$

Pour amener  $q_3$  de l'infini à  $P_3$  il faut donc fournir un travail

$$W_3 = q_3 v' = \frac{q_3}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{1,3}} + \frac{q_2}{r_{2,3}} \right).$$

En résumé, pour mettre en place notre système de 3 charges, il faut fournir un travail total :

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + W_3 \\ &= \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left[ \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}} + \frac{q_3 q_1}{r_{1,3}} + \frac{q_3 q_2}{r_{2,3}} \right]. \end{aligned}$$

Ce travail mesure l'énergie mutuelle du système.

Introduisons le potentiel  $V_1$  créé en  $P_1$  par toutes les charges exceptée celle qui s'y trouve c'est-à-dire le potentiel en  $P_1$  dû à  $q_2$  et  $q_3$ .

$$V_1 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{q_2}{r_{1,2}} + \frac{q_3}{r_{1,3}} \right)$$

on a 
$$V_1 q_1 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}} + \frac{q_1 q_3}{r_{1,3}} \right).$$

De même si  $V_2$  est le potentiel créé en  $P_2$  par toutes les charges à l'exception de  $q_2$  et  $V_3$  le potentiel créé en  $P_3$  par toutes les charges à l'exception de  $q_3$  on vérifie que :

$$V_2 q_2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}} + \frac{q_2 q_3}{r_{2,3}} \right)$$

$$V_3 q_3 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{q_3 q_1}{r_{1,3}} + \frac{q_3 q_2}{r_{2,3}} \right)$$

$$V_1 q_1 + V_2 q_2 + V_3 q_3 = 2 W.$$

Cette relation se généralise aisément pour obtenir

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum V_i q_i}. \quad (8.2)$$

### 8.3. Energie d'une distribution continue de charges

Divisons l'espace  $v$  en cellules de volume  $d\tau$  portant chacune une charge quasi ponctuelle  $dq = \rho d\tau$ .

La relation (8.2) s'écrit dans ce cas :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int_v V dq = \frac{1}{2} \int_v V \rho d\tau}. \quad (8.3)$$

L'intégrale intervenant dans cette relation porte sur l'ensemble du volume chargé  $v$ .

Le potentiel  $V$  qui figure dans (8.3) représente le potentiel créé en un point par toutes les charges car nous nous sommes assurés que la contribution de la charge  $dq$  qui entoure le point en question,

donne une contribution infiniment petite (revoir RC 2.1).

Pour une répartition en surface on a de même :

$$W = \frac{1}{2} \int_s V dq = \frac{1}{2} \int_s V \sigma dS . \quad (8.4)$$

En pratique nous avons souvent le cas d'un système de conducteurs en équilibre. On sait que les charges se répartissent uniquement sur la surface des conducteurs. Un conducteur ( $i$ ) du système est caractérisé par un potentiel constant  $V_i$ ; nous désignerons sa charge par  $Q_i$ .

A chaque conducteur se trouve associé une énergie donnée par (8.4) :

$$W_i = \frac{1}{2} V_i \int_s dq = \frac{1}{2} V_i Q_i . \quad (8.5)$$

A l'ensemble du système se trouve associé une énergie totale :

$$W = \frac{1}{2} \sum_i V_i Q_i . \quad (8.6)$$

Remarquons que pour un conducteur unique (potentiel  $V$ ; charge  $Q$ ), compte tenu de la définition de la capacité  $C = Q/V$ , l'énergie du conducteur peut prendre l'une quelconque des formes suivantes :

$$W = \frac{1}{2} VQ = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} . \quad (8.7)$$

#### 8.4. Localisation de l'énergie électrostatique

Notre définition de l'énergie électrostatique fait appel au champ, responsable de la force électrique. Il est donc logique d'admettre que l'énergie électrostatique est localisée dans le domaine de l'espace où existe le champ ; donc dans l'espace entre les conducteurs.

On appelle **densité d'énergie** (notation :  $w$ ) l'énergie par unité de volume.

Calculons cette densité dans le cas particulier d'un condensateur plan isolé dans le vide.

Le champ uniforme n'existe qu'entre les armatures ; nous admettrons que la densité, elle aussi, est uniforme.

L'énergie du condensateur plan (ensemble de deux conducteurs) a pour expression, d'après (8.6) :

$$W = \frac{1}{2} QV_1 - \frac{1}{2} QV_2 = \frac{1}{2} Q(V_1 - V_2).$$

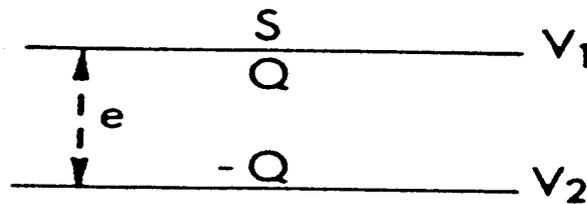


FIG. 8.2.

Compte tenu de la définition de la capacité (cf. 7.4)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} Q(V_1 - V_2) \\ &= \frac{1}{2} C(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Comme :  $C = \epsilon_0 S/e$  et  $V_1 - V_2 = Ee$ , on obtient  $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 SeE^2$  d'où la densité

$$w = \frac{W}{Se}; \quad \boxed{w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}. \quad (8.9)$$

Cette relation, établie dans un cas particulier, est générale, elle permet de calculer une énergie électrostatique  $W$  par intégration en admettant que tout élément de volume  $dv$  contient une énergie locale  $\frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv$  (cf. E 8.5).

## 8.5. Forces électrostatiques s'exerçant sur des conducteurs

### 8.5.1. ORIGINE DE CES FORCES

On a vu (cf. 4.4) que chaque élément de surface  $dS$  d'un conducteur est soumis à une force de pression électrostatique  $d\vec{f}$ . Ce système de forces est caractérisé par une résultante générale  $\vec{F}$  et un moment résultant  $\vec{L}$ . Le calcul direct est aisé dans certains cas particuliers (cf. E 4.2). Il existe une méthode générale liée à l'expression de l'énergie électrostatique du système.

### 8.5.2. MÉTHODE GÉNÉRALE

La méthode la plus générale consiste à déduire la résultante (ou le moment résultant) des forces s'exerçant sur un conducteur d'un système en établissant le bilan énergétique lors d'un déplacement virtuel élémentaire du conducteur en question.

**8.5.3.** Plaçons-nous d'abord dans le cas où le déplacement se fait à charges constantes (les conducteurs sont isolés).

Cherchons la résultante  $\vec{F}$  et le moment résultant  $\vec{L}$  au point  $O$  (cf. Fig. 8.3). Prenons deux axes  $Ox$  et  $Oz$  quelconques ; désignons par  $X$  et  $L$  les composantes respectives de  $\vec{F}$  et  $\vec{L}$  sur ces axes (cf. Fig. 8.3).

Considérons une translation élémentaire  $dx$  sur  $Ox$  ou une rotation élémentaire  $d\alpha$  autour de  $Oz$ . Le travail des forces vaut respectivement :  $X dx$  et  $L d\alpha$ .

L'énergie du système étant constante (le système étant isolé par hypothèse), le travail fourni par les forces ne peut être qu'égal à la diminution de l'énergie électrostatique du système :  $- dW$ , donc

$$X dx = - (dW)_Q; \quad L d\alpha = - (dW)_Q.$$

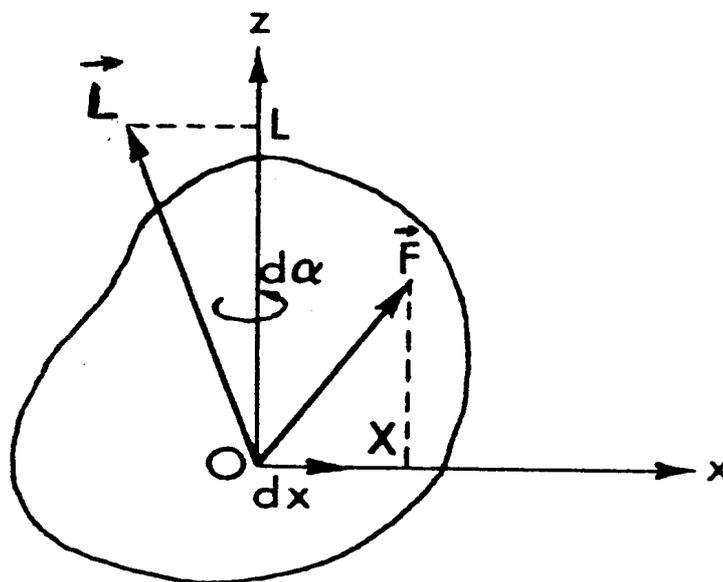


FIG. 8.3.

L'indice  $Q$  signifiant que l'on opère à charges constantes

$$\boxed{\begin{aligned} X &= - \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_Q \\ L &= - \left( \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right)_Q \end{aligned}} \quad (8.10)$$

$W$  devra être exprimé en fonction des charges du système.

#### 8.5.4. LES DÉPLACEMENTS SE FONT A POTENTIELS CONSTANTS

On suppose que chaque conducteur est maintenu à un potentiel constant grâce à une liaison avec un générateur. Le déplacement de l'un des conducteurs modifie toutes les charges des conducteurs. Soit  $dQ_i$  l'accroissement de charge du conducteur ( $i$ ) au potentiel  $V_i$ ; ce transfert de charge a nécessité un travail  $V_i dQ_i$  fourni par le générateur. L'ensemble du système a donc reçu des générateurs une énergie  $\sum V_i dQ_i$ . La variation d'énergie du système s'obtient à partir de (8.6) par différentiation :

$$(dW)_v = \frac{1}{2} \sum V_i dQ_i .$$

On remarquera que les générateurs fournissent une énergie double de l'augmentation d'énergie du système : la différence correspond au travail des forces électriques, donc :

$$X dx = (dW)_v \quad \text{et} \quad L d\alpha = (dW)_v$$

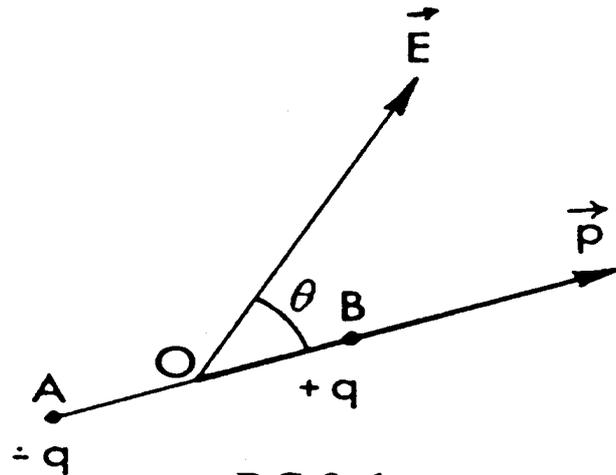
$$\boxed{\begin{array}{l} X = \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_v \\ L = \left( \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right)_v \end{array}} . \quad (8.11)$$

$W$  devra être exprimé en fonction des potentiels.

### ***Remarques complémentaires***

**RC 8.1. Energie d'un dipôle.** — Il convient de distinguer :

a) L'énergie mutuelle  $W_0$  des deux charges (cf. 8.2); celle-ci représente le travail nécessaire pour construire le dipôle lorsque les deux charges  $+q$  et  $-q$  sont seules en présence. Un calcul direct ainsi que l'application de (8.2) nous donne  $W_0 = -q^2/4\pi\epsilon_0 a$ .  $W_0$  est une énergie « interne », car associée à des forces internes au système.



RC 8.1.

b) L'énergie potentielle (ou électrostatique)  $W$  du dipôle placé dans un champ. Il s'agit de l'énergie d'un ensemble de 2 charges passives placé dans un champ en un point  $A$  (charge  $-q$ ) où le potentiel est  $V_A$  et en un point  $B$  (charge  $+q$ ) où le potentiel est  $V_B$ . D'après (8.1) on a

$$W = qV_B + (-q)V_A = q(V_B - V_A).$$

La distance  $AB$  est supposée petite pour que le champ  $\vec{E}$  puisse être supposé constant entre  $A$  et  $B$ . Donc

$$V_A - V_B = \vec{E} \cdot \vec{AB}; \quad W = -q\vec{E} \cdot \vec{AB}$$

comme  $q\vec{AB} = \vec{p}$  (moment du dipôle) :

$$\boxed{W = -\vec{p} \cdot \vec{E}}. \quad (8.12)$$

**RC 8.2. Energie d'un condensateur.** — Relire 7.3.1 :

$$W = \frac{1}{2}QV_1 + \frac{1}{2}V_2(-Q + Q') = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2) + \frac{1}{2}Q'V_2.$$

Lorsqu'on « décharge » le condensateur en reliant les deux armatures, son énergie résiduelle est  $W = \frac{1}{2} Q' V_2$  (cf. Q 7.5).

La variation d'énergie est donc

$$\boxed{W = \frac{1}{2} Q(V_1 - V_2)} ; \quad (8.13)$$

c'est cette quantité que l'on appelle « énergie du condensateur » ; c'est elle qui apparaît lorsqu'on relie les deux armatures.

Relations équivalentes :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C(V_1 - V_2)^2} . \quad (8.14)$$

Les énergies ainsi emmagasinées dans les condensateurs sont en général faibles.