COURS IA

Logiques Classiques et Calcul des prédicats

ISTV
Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

E. ADAM

Références principales : Outils logiques pour l'intelligence artificielle. J.P. Delahaye. Eyrolles Ed. 1988
Intelligence Artificielle et Informatique Théorique. J.-M. Alliot – T. Schiex. Cepadues ED. 1994

Histoire de l'Intelligence Artificielle ?

- 1920-30 Whitehead, Russel, Tarski, Kleene formalisent le raisonnement avec le Calcul Propositionnel
- 1936 Turing démontre qu'un ordinateur peut manipuler des symboles
- 1943 McCulloch, Pitts appliquent la logique symbolique au modèle du cerveau
- 1940-50
  - Church, Gödel, Post, Turing développent le Calcul de Prédicats
  - Wiener développe la cybernétique
  - Shannon fait des théories neurologiques et des modèles du cerveau humain
  - Hebb démontre le mécanisme de mise à jour des connections sypnatiques dans l'apprentissage humain
- 1951 Minsky et Edmonds construisent le premier réseau neuronal informatisé de 40 neurones, le SNARC, avec 3000 lampes à vide et le mécanisme d'auto-pilotage d'un B-24
- 1952 Shannon et aussi Newell et Simon font les premiers jeux d'échecs automatisés
- 1955 Weaver crée un programme de traduction linguistique
- 1956 McCarthy invite Minsky, Shannon et Rochester à organiser un atelier de deux mois à Darmouth pour réunir les chercheurs en Théorie des automates, en réseaux neuronaux et en étude de l'intelligence. Il donne le nouveau domaine "l'intelligence artificielle"
- 1956-57 Newell, Simon, Shaw développent LT, premier prouveur de théorèmes et IPL langage d'inférence
- 1958 Rosenblatt développe les Perceptrons qui apprennent à reconnaître les formes
  McCarthy développe LISP
- 1958-59 Newell, Shaw, Simon créent GPS
- 1961-65 Samuel fait le premier jeux de dames
- 1965 Robinson invente la méthode de résolution
- 1965-... DENDRAL, MAXSYMA,...
- 1972 Michalski développe INDUCE, premier programme d'auto-apprentissage

(E. Tropper)

Qu'est-ce-que l'Intelligence Artificielle ?

- Le test de (Alan) Turing (1950) :
    - 3 joueurs A (Homme), B(Femme) & C
    - C ne voit ni A, ni B, et doit retrouver les genres
    - A & B tentent d'induire C en erreur
  - Que se passe-t-il si un des joueurs A ou B est remplacé par une machine ?
  - Turing prévoyait qu'en 2000 une machine gagnerait !
- L'IA est l'ensemble des disciplines visant à ce que les ordinateurs imitent les comportements *intelligents* humains.
- Intelligence ? Raisonnement, apprentissage, création, adaptativité, pensée ?

Domaines de l'I.A.

- Représentation des connaissances et formalisation du raisonnement
- Apprentissage automatique
- Systèmes experts
- Jeux (échec, go, …)
- Démonstration automatique de théorèmes
- Reconnaissance des formes (codes postaux, ocr)
- Aide la traduction (linguistique)
- Compréhension de la parole
- …

Humains vs I.A.

- Difficulté pour l'I.A. de :
  - Conduire
  - Lire un texte manuscrit
  - Comprendre le langage parlé
  - Traduire d'une langue dans une autre
  - …
- Facilité pour l'I.A. de :
  - Jouer, aux échec, …, à haut niveau
  - Traiter de grandes quantités de données symboliques
  - Démontrer des théorèmes
  - Manipuler les formules mathématiques formelles
  - …

Objections à l’I.A.

- 9 objections proposées et réfutées par Turing. L’objection
  - *Théologique* : penser est le propre de l’âme
  - *De l’autruche* : c’est dangereux !
  - *Mathématique* : théorème d’incomplétude de Gödel
  - *Issue de la conscience* : penser nécessite la conscience de soi
  - *Issue de l’incapacité* : impossible de réaliser X ($X > X_{hier}$)
  - *De lady Lovelace* : une machine ne peut créer
  - Que le système nerveux est *continu* (la machine fonctionne en discret)
  - Qu’il n’est pas possible de *formaliser* la véritable *intelligence*
  - Que la *perception extra-sensorielle* est impossible à une machine

Exemple de problème

- « Aujourd’hui, c’était l’anniversaire de Jack. Penny et Janet sont allés dans un magasin pour acheter des cadeaux. Janet s’est décidée pour un cerf-volant. « Surtout pas » a dit Penny, « Jack en a déjà un, il t’obligerait à *le* rapporter »

- *le* ? Lequel ? Celui qu’il a déjà ?
- Implicitement :
  - les cadeaux sont pour Jack
  - Si quelqu’un a un objet, il n’en veut pas un second

Logique mathématique et résolution

Le calcul propositionnel P_0

- **<u>But</u>** : étude des formes de raisonnement dont la validité dépend seulement de la propriété vraie ou fausse des propositions composantes
  - S'il pleut, alors je prends mon parapluie : ilPleut → parapluie
- **<u>Calcul propositionnel P_0</u>** = système formel défini par

  $\Sigma_{p0} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots\} \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}$

  p_i est appelée *<u>variable propositionnelle</u>* ou *<u>atome</u>*
  - F_{P0} = le plus petit ensemble de formules tel que :

    $\forall i : p_i \in F_{P0}$

    $\forall A \in F_{P0}, \forall B \in F_{P0} : \neg A \in F_{P0}, (A \rightarrow B) \in F_{P0}$
  - A_{P0} = l'ensemble des schémas d'axiomes suivants :

    SA1 : $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

    SA2 : $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

    SA3 : $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

    où $A, B, C \in F_{P0}$
  - R_{P0} = {m.p.} : une seule règle d'inférence : le *<u>modus ponens</u>*

    m.p. : $A, (A \rightarrow B) \vdash B$

Théorème de P_0

- Exemple de déduction :

F1 : $((p_0 \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_0) \rightarrow p_0)) \rightarrow ((p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0) \rightarrow (p_0 \rightarrow p_0)))$ SA1 : A/p_0, $B/(p_1 \rightarrow p_0)$, C/p_0
F2 : $(p_0 \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_0) \rightarrow p_0))$ SA2 : A/p_0, $B/(p_1 \rightarrow p_0)$
F3 : $((p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0) \rightarrow (p_0 \rightarrow p_0))$ (m.p. F1, F2)
F4 : $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0))$ SA1 : A/p_0, B/p_1
F5 : $(p_0 \rightarrow p_0)$ (m.p. F3, F4)

- $(p_0 \rightarrow p_0)$ est un ***théorème*** de P_0 : $(p_0 \rightarrow p_0) \in T_{P0}$: $\vdash (p_0 \rightarrow p_0)$

- **Proposition 1** : $\forall A \in F_{P0}$, $A \rightarrow A$

- **Proposition 2** : Si $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$
  alors $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$

- **Proposition 3** : Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$
  alors $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$

Théorèmes de P_0

- **Proposition 4** : toutes les formules suivantes sont des théorèmes de P_0
  - 1) $((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
  - 2) $(B \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C))$
  - 3) $(\neg B \rightarrow (B \rightarrow C))$
  - 4) $(\neg \neg B \rightarrow B)$
  - 5) $(B \rightarrow \neg \neg B)$
  - 6) $((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$
  - 7) $(B \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg (B \rightarrow C)))$
  - 8) $((B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A))$

Le calcul propositionnel P_1

- ***Calcul propositionnel P_1*** = système formel défini par

  $\Sigma_{P1} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots\} \cup \{\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee, (,)\}$

  F_{P1} = le plus petit ensemble de formules tel que :

  $\forall i : p_i \in F_{P1}$

  $\forall A \in F_{P1}, \forall B \in F_{P1}$:

  $\neg A \in F_{P1}, (A \rightarrow B) \in F_{P1}, (A \vee B) \in F_{P1}, (A \wedge B) \in F_{P1}, (A \leftrightarrow B) \in F_{P1}$

  $F_{P0} \subset F_{P1}$

- ***Interprétation***
  - On appelle interprétation de F_{P1},

    toute application $i: \{p_0, p_1, \ldots, p_{n, \ldots}\} \rightarrow \{V, F\}$

  Soit toute application qui assigne une valeur Vrai ou Faux à tout atome p_i

  De plus, on a :

  $i(\neg A) = \neg [i(A)]$

  $i((A \rightarrow B)) = \rightarrow [i(A), i(B)]$

  $i((A \vee B)) = \vee [i(A), i(B)]$

  $i((A \wedge B)) = \wedge [i(A), i(B)]$

  $i((A \leftrightarrow B)) = \leftrightarrow [i(A), i(B)]$

Table de vérité

- Interprétation : *table de vérité*

A	B	$\rightarrow$ [A, B]	$\wedge$ [A, B]	$\vee$ [A, B]	$\leftrightarrow$ [A, B]
F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F
V	F	F	F	V	F
V	V	V	V	V	V

- *Exemple* : Soit i une interprétation telle que i[A]=V, i[B]=F, i[C]=V,
  Alors $i((A \rightarrow B) \vee \neg C) = \vee\, [i(A \rightarrow B), i(\neg C)] = \vee\, [\rightarrow [i(A),i(B)], \neg\, [i(C)]]$
  $= \vee\, [\rightarrow [V,F], \neg\, [V]] = \vee\, [F, F] = F$

- On appelle ***Tautologie***, toute formule $A \in F_{P1}$ tq pour toute interprétation i, i[A] = V.
  On écrit alors $\models A$

Consistance, satisfiabilité

- Soit $A \in F_{P1}$ et $B \in F_{P1}$,
  - A est ***conséquence*** de A, on note $A \models B$
    si, dès que i[A] = V alors i[B] = V
  - A et B sont équivalentes si $A \models B$ et $B \models A$, on note $A \equiv B$
- $A \in F_{P1}$ est ***satisfiable*** (***consistante***) s'il existe une interprétation i tq i[A] = V
- L'ensemble $F \subset F_{P1}$ est ***satisfiable*** (***consistant***)
  s'il existe une interprétation i tq $\forall A \in F$, i[A] = V (i est un ***modèle*** de F)
- A est ***insatisfiable*** (***inconsistante***) si, pour toute interprétation i, i[A] = F
  ou si $\neg A$ est une tautologie
- L'ensemble $F \subset F_{P1}$ est ***insatisfiable*** (***inconsistante***) si, pour toute interprétation i,
  $\exists A \in F$ tq i[A] = F
  s'il n'existe pas de modèle de F
- Attention, une LOGIQUE est ***consistante syntaxiquement*** s'il n'existe pas de formule
  A tq $\vdash A$ et $\vdash \neg A$

P_0 et P_1

- **Proposition 5** :
  - Soit $A \in F_{P1}$ et $B \in F_{P1}$,
    1) $\models (A \rightarrow B)$ si et seulement si (ssi) $A \models B$
    2) $\models (A \leftrightarrow B)$ ssi $A \equiv B$
    3) Si $\models A$ et si $\models (A \rightarrow B)$ alors $\models B$
    4) $\models (A \wedge B)$ ssi $\models A$ et $\models B$
    5) Si $\models A$ ou $\models B$ alors $\models A \vee B$

- **Proposition 6** :
  - Soit $A \in F_{P0}$, Si $\vdash A$ alors $\models A$

- **Proposition 7** :
  - Soit A tautologie de F_{P1}, constitué des atomes $p_0, p_1, \ldots, p_n$.
    Soit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ des formules de F_{P1}.
    A′, obtenue en remplaçant p_i par P_i pour i=1, 2, …, n, est une tautologie.

Formules équivalentes de P_1

- **Proposition 8** :
  - Soit $A \in F_{P1,}$ il existe B_1, B_2, B_3, B_4 et $B_5 \in F_{P1}$ équivalente à A tq :
    1) B_1 n'utilise que les connecteurs $\vee$, $\neg$
    2) B_2 n'utilise que les connecteurs $\wedge$, $\neg$
    3) B_3 n'utilise que les connecteurs $\rightarrow$, $\neg$
    4) B_4 n'utilise que les connecteurs $\vee$, $\wedge$, $\neg$ et est de la forme $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_n$ où chaque D_i est de la forme d'une ***clause*** $p_{a1} \vee p_{a2} \vee \ldots \vee p_{an} \vee \neg p_{b1} \vee \neg p_{b2} \vee \ldots \vee \neg p_{br}$
       B_4 est la <u>forme normale conjonctive</u> de A
    5) B_4 n'utilise que les connecteurs $\vee$, $\wedge$, $\neg$ et est de la forme $D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_n$ où chaque D_i est de la forme $p_{a1} \wedge p_{a2} \wedge \ldots \wedge p_{an} \wedge \neg p_{b1} \wedge \neg p_{b2} \wedge \ldots \wedge \neg p_{br}$
       B_5 est la <u>forme normale disjonctive</u> de A

- On utilise les équivalences :
  $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$; $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$
  $\neg (A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$; $\neg (A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$; $\neg \neg A \equiv A$
  $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$; $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Relations P_0 – P_1

- **<u>Proposition 9</u>** :
  - Théorème de complétude du calcul propositionnel P_0
    $\forall A \in F_{P0}$, si $\models A$ alors $\vdash A$
- **<u>Proposition 10</u>** :
  - Soit F un ensemble de formule de F_{P1}
    Si, pour toute famille finie $F' \subset F$, il existe une interprétation i tq :
    $\forall A \in F' : i[A] = V$ alors il existe une interprétation i tq :
    $\forall A \in F : i[A] = V$
- **<u>Proposition 11</u>** :
  - Soit F un ensemble de formule de F_{P1}, Soit $B \in F_{P1}$
    Si $F \models B$ alors $\exists F' \subset F$, F' fini tq: $F' \models B$
- **<u>Proposition 12</u>** :
  - Soit $F \subset F_{P0}$ et $A \in F_{P0}$
    $F \models A$ si et seulement si $F \vdash A$

Exercices

- **Exercice 1** :
  Représenter les connaissances suivantes en logique des prédicats …
  – P ≡ "Pierre est étudiant" ; M ≡ "Marie est étudiante".
  2. Pierre est étudiant et Marie est étudiante.
  3. Marie est étudiante ou Pierre n'est pas étudiant.
  4. Pierre et Marie ne sont pas tous les deux étudiants.
  5. Pierre est étudiant ou n'est pas étudiant.
  6. Ni Pierre, ni Marie ne sont étudiants.
  7. Si Pierre est étudiant, alors Marie est étudiante.
  8. Si Marie n'est pas étudiante, Pierre ne l'est pas non plus.
  9. Pierre est étudiant si Marie l'est.
  10. Marie est étudiante si et seulement si Pierre l'est.
  11. Pierre est étudiant seulement si Marie l'est.

  (D. Kesner)

Exercices

- **Exercice 2** :
  représenter les connaissances suivantes en logique des prédicats …
  - 1 a) Jean est chez-lui ou chez Hélène.
  - 1 b) Si Jean n'est pas chez-lui, il est chez Hélène.
  - 2 c) Vous pouvez déduire vos frais médicaux si votre revenu est inférieur à 10 000€ et que vous avez plus de 70 ans.
  - 2 d) Vous ne pouvez pas déduire vos frais médicaux si vous n'avez pas plus de 70 ans ou que votre revenu est inférieur à 10 000€.
  - 3 e) Jean réussira son examen ou il n'est pas fort en logique.
  - 3 f) Si Jean n'est pas fort en logique, Marie n'est pas forte non plus en logique et elle ne réussira pas son examen.
  - 3 g) Jean et Marie réussiront leur examen s'ils sont forts en logique.
  - 4 h) Neige en novembre, Noël en décembre.

(S. Lapierre)

Calcul propositionnel et résolution

- *Théorème du principe de déduction* :
  - une formule A est la conséquence valide d'un ensemble de formule E ssi $E \cup \{\neg A\}$ est insatisfiable

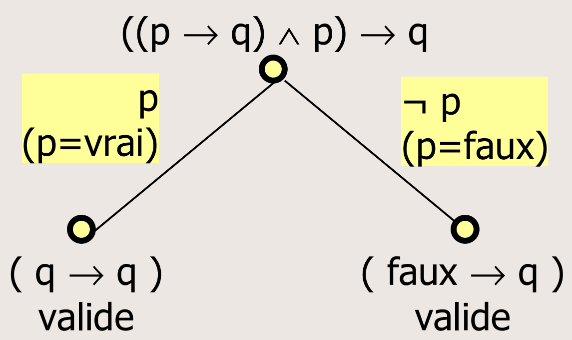
- Premier type de résolution : les tables de vérités
  - assez long : n atomes => 2^n lignes

- Pb NP complet : il n'existe pas d'algorithme idéal

Algorithme de Quine

- Algorithme de Quine :
  - construction d'un arbre binaire d'une formule F constituée des atomes $p_1, \dots, p_n$
  - chaque arc est étiqueté par un atome p_i ou $\neg p_i$
  - les littéraux partant d'un même nœud sont opposés
  - une occurrence maximum d'un atome par branche
  - évaluation partielle de la formule à chaque nœud

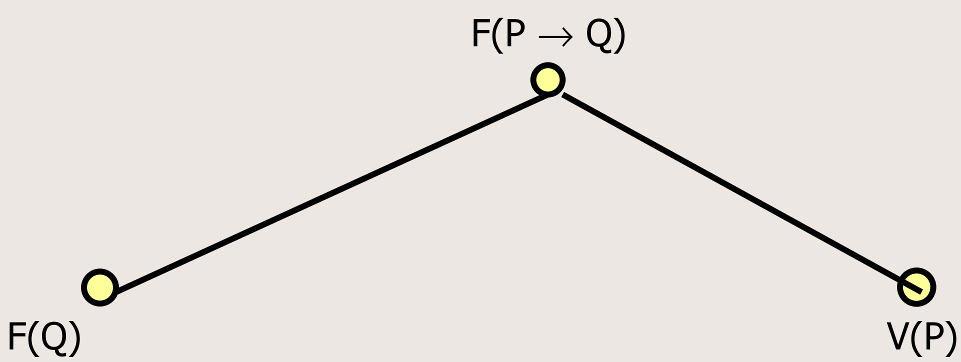
  - Exemple :
    - soit la formule : $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$



Algorithme de Réduction

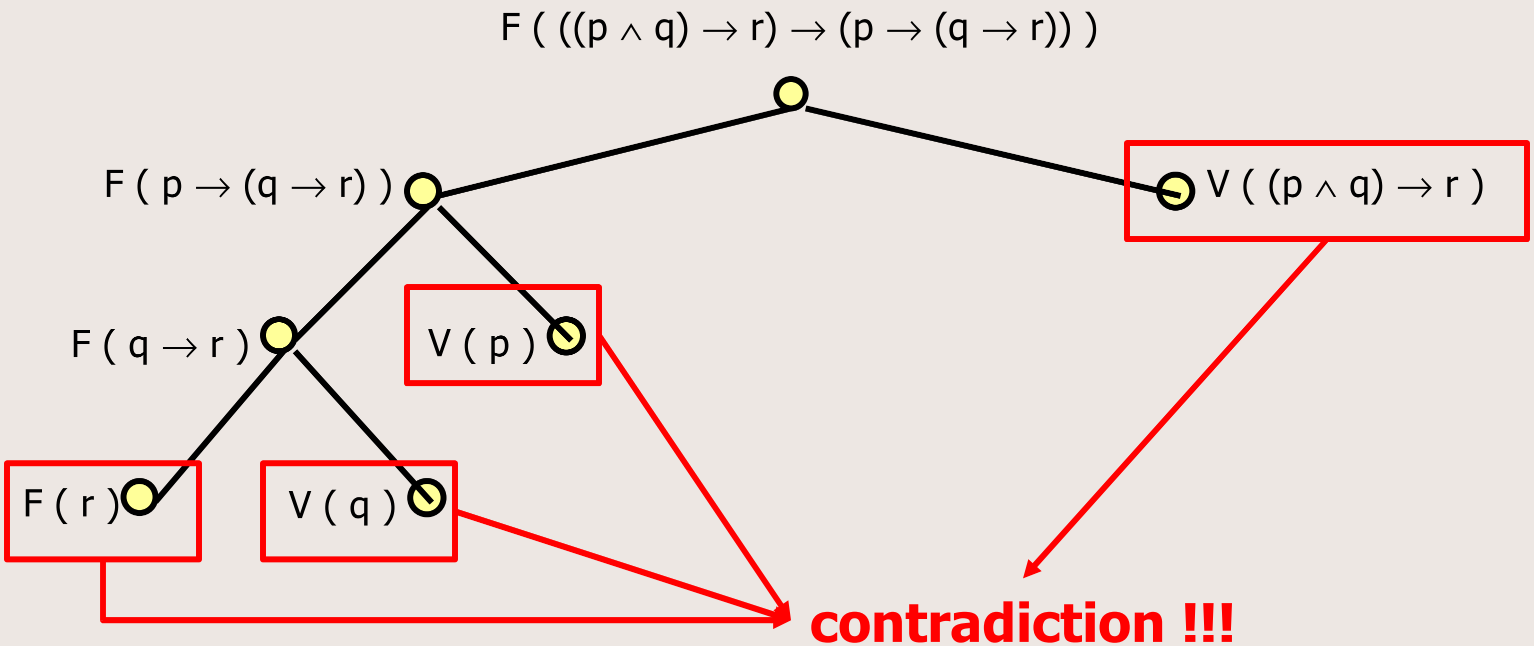
- Algorithme de Réduction est une preuve par réfutation (ou falsification)

- Supposons une interprétation fausse de l'énoncé
  - Répéter
    - Construction, à partir de l'interprétation, de deux nœuds fils :
      - premier nœud Q évaluée à faux (noté F(Q))
      - second nœud P évalué à vrai (noté V(P))
  - Jusqu'à l'obtention d'un contre-modèle ou d'une contradiction



Algorithme de Réduction

- exemple : démontrer que $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ est valide
- Supposons la fausse



=> formule valide

Normalisation

- Normaliser les formules pour automatiser la résolution
  => transformer les formules en formes normales conjonctives

- *Rappel : B_4 n'utilise que les connecteurs $\vee$, $\wedge$, $\neg$ et est de la forme*
  *$D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_n$ où chaque D_i est de la forme d'une **clause***
  $p_{a1} \vee p_{a2} \vee \ldots \vee p_{an} \vee \neg p_{b1} \vee \neg p_{b2} \vee \ldots \vee \neg p_{br}$
  B_4 a une <u>forme normale conjonctive</u>

- Exemples :
  - $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
  - $p \leftrightarrow (q \rightarrow r) \equiv (\neg p \vee (q \rightarrow r)) \wedge (\neg(q \rightarrow r) \vee p)$
    $\equiv (\neg p \vee (\neg q \vee r)) \wedge (\neg(\neg q \vee r) \vee p)$
    $\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee p)$
    $\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee p) \wedge (\neg r \vee p)$

Algorithme de Davis & Putman

- Soient des littéraux positifs : $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$
- Soient des littéraux négatifs : $\{\neg q_1, \neg q_2, \ldots, \neg q_m\}$

- Soit un ensemble de clause :
  $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \ldots \vee \neg q_m$

- Si lit est un littéral d'une clause, lit^c est son complémentaire

- La clause vide est insatisfiable par convention (notée $\square$)

- L'ensemble de clauses vide (i.e. l'ensemble de clauses ne comportant aucune clause) est satisfiable (noté $\varnothing$)s

Algorithme de Davis & Putman

Appliquer les règles suivantes jusqu'à ce qu'aucune ne puisse plus s'appliquer ; lorsque plusieurs règles sont applicables, on choisit celle de plus petit numéro

Règle 1 : Enlever les tautologies (clause contenant un littéral et son complément)

Règle 2 : Si l'une des clauses ne possède qu'un seul littéral **lit**, enlever toutes les clauses contenant ce littéral **lit** et enlever dans les autres clauses toutes les occurrences de **lit**^{c}.

Règle 3 : Si le littéral **lit** apparaît dans certaines clauses et que le littéral **lit**^{c} n'apparaît pas, enlever toutes les clauses contenant **lit**.

Règle 4 : Si une clause C a tous ses littéraux présents dans une clause C', enlever C'

Règle 5 : Si le littéral **lit** ainsi que son complémentaire **lit**^{c} sont présents dans l'ensemble des clauses, remplacer celui-ci par deux ensembles de clauses :

- le premier obtenu en enlevant toutes les clauses contenant **lit** et toutes les occurrences **lit**^{c}
- le second obtenu en enlevant toutes les clauses contenant **lit**^{c} et toutes les occurrences de **lit**.

Algorithme de Davis & Putman

Exemple : $\{(h), (h \rightarrow (p \vee q)), (p \rightarrow c), (a \rightarrow (b \rightarrow a)), (q \rightarrow c)\} \models (c)$?

1- Il faut prouver l'inconsistance de

$\{(h), (h \rightarrow (p \vee q)), (p \rightarrow c), (a \rightarrow (b \rightarrow a)), (q \rightarrow c), (\neg c)\}$

2 – Transformation en clauses

$\{(h), (\neg h \vee p \vee q), (\neg p \vee c), (\neg a \vee \neg b \vee a),(\neg q \vee c), (\neg c)\}$

3 – Application de la règle 1 (suppression des tautologies)

$\{(h), (\neg h \vee p \vee q), (\neg p \vee c),(\neg q \vee c), (\neg c)\}$

4 – Application de la règle 2 (un seul littéral)

$\{(p \vee q), (\neg p \vee c),(\neg q \vee c), (\neg c)\}$

5 – Application de la règle 2 (un seul littéral)

$\{(p \vee q), (\neg p), (\neg q)\}$

6 – Application de la règle 2 (un seul littéral)

$\{(q),(\neg q)\}$

6 – Application de la règle 2 (un seul littéral)

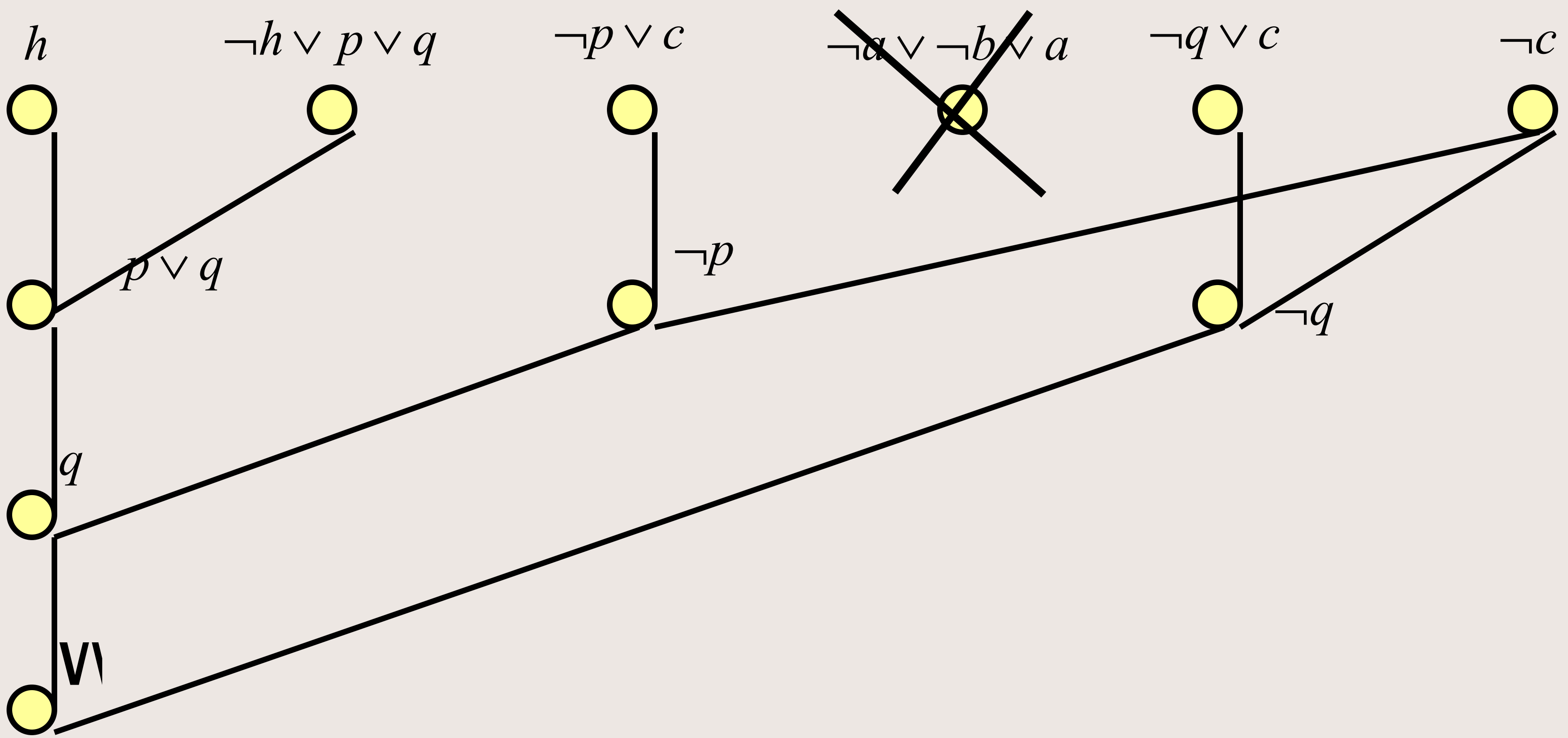
$\{\square\}$

$\{h, h \rightarrow (p \vee q), p \rightarrow c, a \rightarrow (b \rightarrow a), q \rightarrow c, \neg c\}$
INSATISFIABLE
DONC
$\{h, h \rightarrow (p \vee q), p \rightarrow c, a \rightarrow (b \rightarrow a), q \rightarrow c\} \models c$

Algorithme de Davis & Putman

Exemple (suite)

$$\{h, h \to (p \vee q), p \to c, a \to (b \to a), q \to c\} \models c\ ?$$
$$\{h, \neg h \vee p \vee q, \neg p \vee c, \neg a \vee \neg b \vee a, \neg q \vee c, \neg c\}$$



Principe de résolution

- système à une seule règle d'inférence ! sans axiome !
- Principe de résolution :

Soit N une forme normale conjonctive (fnc),

Soient C_1 et C_2 deux clauses de N

Soit p un atome tq $p \in C_1$ et $\neg p \in C_2$

Soit la clause $R = C_1 \setminus \{p\} \cup C_2 \setminus \{\neg p\}$

Alors N et $N \cup R$ sont logiquement équivalente

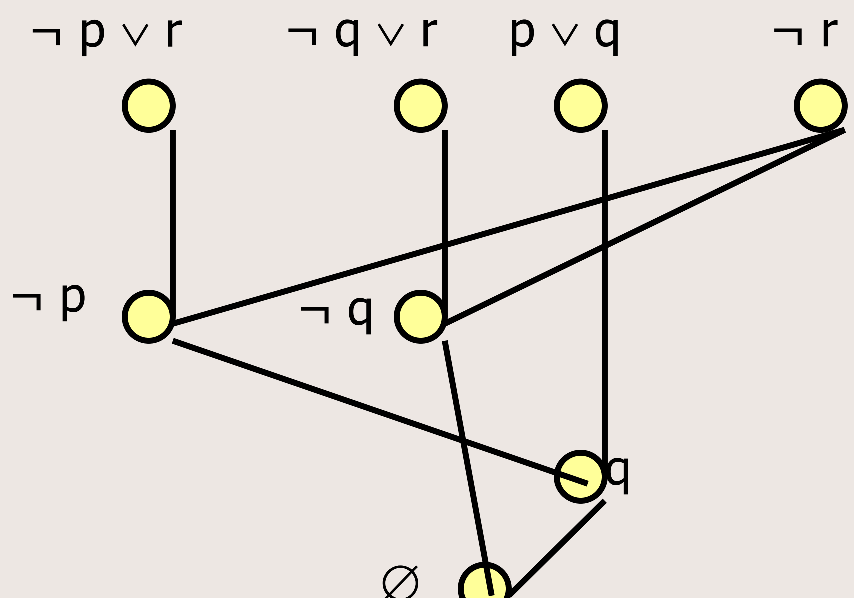
R est appelée ***Résolvante*** de C_1 et C_2

Principe de résolution

Exemple : $\{ p \rightarrow r, q \rightarrow r\} \models (p \vee q) \rightarrow r$?

Il faut prouver l'inconsistance de $\{\neg p \vee r, \neg q \vee r, p \vee q, \neg r\}$

1 – $\neg p \vee r$	(hypothèse 1)
2 – $\neg q \vee r$	(hypothèse 2)
3 – $p \vee q$	(hypothèse 3)
4 – $\neg r$	(hypothèse 4)
5 – $\neg p$	résolution par 1 & 4
6 – $\neg q$	résolution par 2 & 4
7 – q	résolution par 3 & 5
6 – $\varnothing$	résolution par 6 & 7



Clauses de Horn

- clause de Horn : contient au plus un littéral positif
  - clause de Horn *stricte* : de la forme $p_1 \vee \neg n_1 \vee \neg n_2 \vee \ldots \vee \neg n_m$, $m \geq 1$
  - clause de Horn *positive* : de la forme p_1
  - clause de Horn *négative* : de la forme $\neg n_1 \vee \neg n_2 \vee \ldots \vee \neg n_m$, $m \geq 0$

- Algorithme
  - soit une forme normale conjonctive N

SI $\varnothing \in$ N ALORS N inconsistant => fin de la résolution

SINON

choisir $C \in N$ et $P \in N$, tq P est une clause de Horn positive = p et $(\neg p) \in C$

choisir R la résolvante de P et C

$N = (N \setminus \{C\}) \cup R$

RETOUR DEBUT

Clauses de Horn

- Exemple :
  - Il faut prouver l'inconsistance de $\{\neg p \vee r, \neg r \vee s, p, \neg s\}$

  1 – $\{r, \neg r \vee s, p, \neg s\}$ par choix de $P = p$
  2 – $\{r, s, p, \neg s\}$ par choix de $P = r$
  3 – $\{r, s, p, \emptyset\}$ par choix de $P = s$
  donc l'ensemble des clauses est inconsistant

- Interprétation:
  - les clauses de Horn positives sont des faits
  - les clauses de Horn strictes sont des règles
    - $p_1 \vee \neg n_1 \vee \neg n_2 \vee \ldots \vee \neg n_m \Leftrightarrow (n_1, n_2, \ldots, n_m) \rightarrow p_1$
  - les clauses de Horn négatives sont les buts à atteindre

  - on a donc prouvé : $(p \rightarrow r, r \rightarrow s) \models p \rightarrow s$

Exercices

- **<u>Exercice 3</u>** :
  représenter les connaissances suivantes en logique des prédicats et vérifier si elles sont des théorèmes…
  1. Jean et Henri ont le même âge, autrement Jean est plus vieux que Henri. Or si Jean et Henri ont le même âge, alors Marie et Jean n’ont pas le même âge. Mais si Jean est plus vieux que Henri, alors Jean est plus vieux que Paul. Donc Marie et Jean n’ont pas le même âge ou Jean est plus vieux que Henri.
  2. Si Jean est en prison, alors il n’est pas une nuisance pour sa famille. S’il n’est pas en prison, alors il est en disgrâce. S’il n’est pas en disgrâce, alors il est dans l’armée. S’il boit en plus, il est une nuisance pour sa famille. Donc il ne boit pas ou il est dans l’armée.
  3. Si le suspect a commis le vol, alors il avait un complice. Mais le suspect avait un complice seulement si un butin important a été emporté. Or cela n’est pas le cas. Donc le suspect n’a pas commis le vol.
  4. Au moins un de Pierre, Jean et Jacques est coupable. Or, si Jean est coupable, Pierre l’est aussi. En outre, si Jacques est coupable, les deux autres le sont aussi. Donc Pierre est coupable.

(S. Lapierre)

Exercices

- **<u>Exercice 4</u>** :
  Lesquelles, parmi les formules suivantes, sont valides ? Contradictoires ? Si une formule n'est pas valide, on donnera une interprétation qui la falsifie.

1. $p \wedge \neg p$
2. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
3. $q \rightarrow (p \wedge \neg p)$
4. $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
5. $(p \wedge q) \rightarrow p$
6. $(p \vee q) \rightarrow q$
7. $p \rightarrow (p \vee q)$
8. $p \rightarrow (p \wedge q)$
9. $p \vee (p \rightarrow q)$
10. $q \vee (p\ !\ q)$
11. $p \wedge (p \rightarrow q)$
12. $q \wedge (p \rightarrow q)$
13. $p \vee q$
14. $p \vee \neg p$
15. $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$
16. $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)) \rightarrow \neg p$
17. $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$
18. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

(D. Kesner)

Exercices

- **Exercice 5** :
  Dans un asile, l'agent Foldeur doit identifier les fous et les médecins. En effet, suite à une erreur dans la lingerie, ils portent tous le même habit. Les médecins ne se trompent jamais. Les fous se trompent toujours.

2. Un occupant peut-il dire qu'il est fou ?
3. Foldeur rencontre deux occupants Abed et Bea.
   Abed déclare : « Je suis un fou ou Bea est un médecin »
   que sont Abed et Bea ?
4. Foldeur rencontre alors trois habitants Alain, Bahia et Cleeve.
   Alain déclare : « Nous sommes tous des fous ».
   B déclare : « Un et un seul d'entre-nous est un médecin ».
   Que sont Alain, Bahia et Cleeve ?

Les systèmes formels

Le calcul des prédicats

- Manipuler des propriétés générales et des relations entre objets
- Utiliser des énoncés dépendant des variables, appelés des ***prédicats***
  - ex : x donne y à z, x est le père de y, …
- Possibilité d'utiliser des *fonctions*

Eléments de base

- Eléments de base :
  - *variables* : notées généralement x,y,z,u,v,w…
  - *constantes* : notées généralement a,b,c,d,…
  - *symboles de fonctions* : d'arité n>0, notés généralement f,g,h …
  - *symboles de prédicats* : d'arité n ≥ 0, notés généralement p, q, r, s …
    - un symbole d'arité nulle est équivalent à un atome
  - *connecteurs* : ceux du calcul propositionnel
  - *quantificateurs* : ∀ et ∃

Eléments de base

- ***Terme*** :
  - un variable est un terme *x*
  - un symbole de constante est un terme *a*
  - si *f* est un symbole de fonction d'arité n et si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est un terme *pere(shazia) ; mere(x)*
- ***Atome***
  - si *p* est un symbole de prédicat d'arité n et si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est un atome *perede(pere(x), shazia)*
- ***Formule***
  - un atome est une formule
  - si A et B sont des formules, $\neg$ A, (A $\rightarrow$ B), (A $\vee$ B), (A $\wedge$ B), (A $\leftrightarrow$ B) sont des formules
  - si A est une formule et *x* une variable, alors
    - $\forall x$A est une formule
    - $\exists\, x$A est une formule

$$p\,;\, p1 \rightarrow p2\,;\, (\neg q(x, f(x)) \rightarrow r(x))\,;\, \forall x \neg r(x)$$

$$\forall x \forall y (p(x) \rightarrow (r(y) \rightarrow \exists z\, s(x, y, z)))$$

Variables liées, libres

- Dans un objectif de résolutions, quelles sont les variables manipulables (libres) et les variables non libres (liées) ?
- Variables liées
  - soit $\mathcal{B}(A)$ l'ensemble des variables liées de A
    - si A est un atome, $\mathcal{B}(A) = \emptyset$
    - si A est de la forme $(B \rightarrow C)$, $(B \vee C)$, $(B \wedge C)$, $(B \leftrightarrow C)$ alors $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(B) \cup \mathcal{B}(C)$
    - si A est de la forme $(\neg B)$, alors $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(B)$
    - Si A est de la forme $(\forall x B)$ ou $(\exists x B)$, alors $\boldsymbol{\mathcal{B}(A) = \{x\} \cup \mathcal{B}(B)}$
- Variables libres
  - soit $\mathcal{F}(A)$ l'ensemble des variables libres de A
    - si A est un atome, $\mathcal{F}(A)$ = ensemble des variables de A
    - si A est de la forme $(B \rightarrow C)$, $(B \vee C)$, $(B \wedge C)$, $(B \leftrightarrow C)$ alors $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B) \cup \mathcal{F}(C)$
    - si A est de la forme $(\neg B)$, alors $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$
    - Si A est de la forme $(\forall x\ B)$ ou $(\exists x\ B)$, alors $\boldsymbol{\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B) - \{x\}}$
- Formule close : A est une formule close si $\mathcal{F}(A) = \emptyset$

Variables liées, libres

- Exemples :

$$A = (p(f(x, y)) \vee \forall z\, r(a, z))$$

var(A) = {*x*,*y*,*z*}
varLiée(A) = {*z*}
varLibre(A) = {*x*,*y*}

$$B = (\forall x\, p(x, y, z) \vee \forall z (p(z) \rightarrow r(z)))$$

B1	B2
var(B1) = {*x*,*y*,*z*}	var(B2) = {*z*}
varLiée(B1) = {x}	*varLiée*(B1) = {z}
varLibre(B1) = {y,*z*}	*varLibre*(B1) = {}

var(B) = {*x*,*y*,*z*}
varLiée(B) = {x,***z***}
varLibre(B) = {y,***z***}

$$C = \forall x \exists y (p(x, y) \rightarrow \forall z\, r(x, y, z))$$

var(C) = {*x*,*y*,*z*}
varLiée(C) = {x,y, *z*}
varLibre(C) = {}

C est dite *close* ou fermée car varLibre(C) = {}

Pb : certaines variables peuvent être libres et liées...

Substitutions

- *Renommage et substitution*
  - Soit A(x) une formule concernant x comme variable libre; soit t un terme.
  - On notera A(t) toute formule obtenue :
    - en remplaçant chaque x par t dans la formule A(x),
    - et ceci après avoir changé dans A les noms des variables liées de telle manière que x ne soit plus variable liée (si x l'était)
    - et que plus aucune variable de t ne soit liée dans A (s'il y en avait)

- *Exemple* : Soit la formule $A(x)=(p(x)\vee\forall y\exists x\, r(x,y))$
  Que donne *A(t)* avec *t = f(y,u)*

- On a varLiée(A) = {*x*, *y*}, varLibre(A) = {*x* }
- Pour obtenir *A(t)*, on change d'abord le nom des variables liées *x* puis *y*, on obtient : $A(x)=(p(x)\vee\forall z2\exists z1\, r(z1,z2))$

- Puis, on effectue la substitution, ce qui donne :
  $A(f(y,u))=(p(f(y,u))\vee\forall z2\exists z1\, r(z1,z2))$

Nouveaux schémas

- *La logique des prédicats utilisent 2 shémas d'axiomes supplémentaires :*
- ***<u>Schéma d'axiome 4</u>***
  - $\forall x A(x) \rightarrow A(t)$
- ***<u>Schéma d'axiome 5</u>***
  - $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B))$
- *Et une règle d'inférence supplémentaire :*
- ***<u>Règle d'inférence</u>***
  - *<u>Généralisation</u>* : $\dfrac{\vdash A}{\vdash \forall x A}$
- ***<u>Théorème de la déduction</u>***
  - soit A une formule close, si $A \vdash B$ alors $\vdash A \rightarrow B$

Déduction

- Exemple de déduction
  - Montrons que : $\forall x \forall y\, p(x,y) \vdash \forall z\, p(z,z)$

$f1$	$\vdash \forall x \forall y\, p(x,y)$	*hypothèse*
$f2$	$\vdash \forall x \forall y\, p(x,y) \rightarrow \forall y\, p(z,y)$	*SA4 : x/z ; A(t) = A(z) = ∀y p(z,y)*
$f3$	$\vdash \forall y\, p(z,y)$	*m.p.(f2, f1)*
$f4$	$\vdash \forall x\, p(z,y) \rightarrow p(z,z)$	*SA4 : y/z; A(t) = A(z) = p(z,z)*
$f5$	$\vdash p(z,z)$	*m.p.(f4, f3)*
$f6$	$\vdash \forall z\, p(z,z)$	*généralisation*

Théorie des modèles

- *Interprétation plus complexe que le calcul propositionnel*
  - *Quelles valeurs donner aux variables, fonctions, prédicats ?*
- ***Interprétation*** :
  - Soit A une formule, $\mathcal{D}$: domaine d'interprétation,

    I : interprétation qui associe :

    - à chaque constante de A un élément de $\mathcal{D}$
    - à chaque symbole de fonction *f* d'arité *n* de A,

      le graphe d'une fonction de $\mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$ définissant *f*
    - à chaque symbole de prédicat *p* d'arité *n* de A,

      le graphe d'une fonction de $\mathcal{D}^n \rightarrow \{V,F\}$ définissant *p*

Théorie des modèles

- ***Interprétation des termes***
  - Soit A une formule et I une interprétation de A, on associe
    - à chaque symbole de constante, sa valeur selon I
    - à chaque variable, la variable elle-même
    - à chaque terme $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, le terme $f'(t'_1, t'_2, \ldots, t'_n)$

      où

      $t'_1, t'_2, \ldots, t'_n$ sont les interprétations des $t_1, t_2, \ldots, t_n$

      f' est l'interprétation de f

Théorie des modèles

- ***Interprétation des formules***
  - Soit A une formule et I une interprétation de A,
  - si A est un atome $p(t_1, \ldots, t_n)$, I(A) est la fonction $p'(t'_1, \ldots, t'_n)$ où p' est l'interprétation de p et où t'_i est l'interprétation de t_i
  - si A est de la forme ¬ G, (G → H), (G ∨ H), (G ∧ H), (G ↔ H), I(A) est définie par les même lois que le calcul propositionnel
  - si A est de la forme $\forall x G(x, y_1, \ldots, y_n)$,
    soit un n-uplet $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathcal{D}^i$,
    si pour toute valeur $a \in \mathcal{D}$, I(G)($a, b_1, \ldots, b_n$) = V,
    alors I(A)($a_1, \ldots, a_n$) = V,
    sinon I(A)($a_1, \ldots, a_n$) = F.
  - si A est de la forme $\exists x G(x, y_1, \ldots, y_n)$,
    soit un n-uplet $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathcal{D}^i$,
    s'il existe une valeur $a \in \mathcal{D}$, telle que I(G)($a, b_1, \ldots, b_n$) = V,
    alors I(A)($b_1, \ldots, b_n$) = V,
    sinon I(A)($b_1, \ldots, b_n$) = F.

Théorie des modèles : Exemple

- Exemple
  - Soit la formule : C(*x*) = $\forall x(p(x, f(x)) \rightarrow p(f(x), x))$
  - Considérons l'interprétation
    - *I* = (*D*, *f'*, *p'*)
      - *D* = {*e1*, *e2*, *e3*}
      - *f'* : *D* -> *D* :
        - » *e1* -> *e2*
        - » *e2* -> *e3*
        - » *e3* -> *e1*
      - *p'* : *D* -> { *V*, *F* }
        - » (*e1*, *e2*) -> *V*
        - » (*e2*, *e1*) -> *V*
        - » (*x*, *y*) -> *F* dans les autres cas

On pose $A = p(x, f(x))$ et $B = p(f(x), x)$

Théorie des modèles : Exemple

- Exemple (suite)

  alors A, B et C sont définis par :

x	$f(x)$	$p(x, f(x))$	$p(f(x),x)$	$p(x,f(x)) \rightarrow p(f(x),x)$
e1	e2	V	F	V
e2	e3	F	F	V
e3	e1	F	F	V

C(x) est vraie dans I

MAIS n'est pas vraie dans toute interprétation !!!

Comment montrer qu'un ensemble de formules est valide / inconsistant ?

Théorie des modèles

- Tautologie : On appelle tautologie (ou thèse) toute formule F telle que, pour toute interprétation i : i[F]=V
  On note : $\models F$

- Exemples :

$$\models (\forall x (p(x) \wedge q(x)) \leftarrow\rightarrow (\forall y\, p(y) \wedge \forall z\, q(z)))$$

$$\models (\exists y \forall x\, r(x, y, z) \rightarrow \forall x \exists y\, r(z, x, y))$$

$$\models (\forall x (p(x) \rightarrow p(f(x))) \rightarrow \forall y (p(y) \rightarrow p(f(f(y)))))$$

Théorie des modèles

<u>Conséquence</u> : On dit que la formule $B \in F_{pr}$ est **conséquence** de la formule $A \in F_{pr}$ si, à chaque fois que i[A]=V alors i[B]=V.

On écrira alors : $A \models B$

On dit que la formule $B \in F_{pr}$ est **conséquence** de l'ensemble des formules $\mathcal{A} \subset F_{pr}$ si, pour chaque interprétation i telle que

$\forall A \in \mathcal{A}$, i[A]=V, on ait aussi i[B]=V.

On écrit alors : $\mathcal{A} \models B$

Les définitions de consistance, de satisfiabilité, d'équivalence, de modèle son similaires aux définitions données dans le cadre du calcul propositionnel

Théorie des modèles : Exercices

Exercices

La formule $\forall x\ p(x,x)$ est conséquence des formules :

$$\forall x\ \forall y\ \left(q(x,y) \rightarrow p(x,y)\right)$$

$$\forall z\ q(z,z)$$

- L'ensemble des formules suivant est satisfiable

$$\forall x\ \forall y\ \left(p(x,x) \rightarrow \left(p(y,y) \rightarrow p(x,y)\right)\right)$$

$$\forall z\ p(z,z)$$

- L'ensemble des formules suivant est satisfiable

$$\exists a\ p(a)$$

$$\forall x\ \left(p(x) \rightarrow \neg r(x)\right)$$

$$\forall y\ \left(\neg r(y) \rightarrow q(y)\right)$$

$$\forall z\ \left(q(z) \rightarrow \neg p(z)\right)$$

Théorie des modèles

- Proposition : Soit $\mathcal{A} \subset F_{pr}$ un ensemble des formules closes de P_r,
  soit B une formule close de P_r ;
  alors $\mathcal{A} \models B$ ssi $\mathcal{A} \cup \{\neg B\}$ est insatisfiable.

- Proposition 5 : Soit $A \in F_{P0}$, Si $\vdash A$ alors $\models A$

Théorie des modèles

- Les théorème de *complétude*, *théorème de compacité*, *théorème de finitude* s'appliquent au calcul des prédicats

- **Proposition** : Soit $F \subset F_{Pr}$ et B une tautologie,

  alors $F \vdash \neg B$ SSI F n'a pas de modèle

- ***Remarque : le calcul des prédicats est indécidable***

Modèle de Herbrand

- **Matrice** : une matrice est une formule du calcul des prédicats ne contenant aucun quantificateur
- Une forme prénexe est une formule F de la forme $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n$ M où Q représente $\forall$ ou $\exists$ et M est une matrice
- Mise sous forme prénexe : *toute formule admet une forme prénexe équivalente*.
  - Exemple :
    - $\forall x\ \exists y\ \forall z\ \neg(p(x,y) \rightarrow \neg\, p(y,z))$ est une forme prénexe

Modèle de Herbrand

(a) ***Mise sous forme prenexe :***

- **Supprimer les connecteurs IMP, EQUIV en utilisant les équivalences suivantes :**

$a1.\ (A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$ $\quad a2.\ (A \leftarrow\rightarrow B) \equiv ((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B))$

- **Changer le nom de certaines variables liées de manière à n'avoir plus de variable quantifiée deux fois, en utilisant les équivalences suivantes :**

$b1.\ \forall x\, A(x) \equiv \forall y\, A(y)$ $\quad b2.\ \exists x\, A(x) \equiv \exists y\, A(y)$

- **Faire remonter tous les quantificateurs en tête, en utilisant les équivalences suivantes :**

$c1.\ \neg(\exists x\, A(x)) \equiv \forall x \neg(A(x))$

$c2.\ \neg(\forall x\, A(x)) \equiv \exists x \neg(A(x))$

$c3.\ \neg\neg A \equiv A$

$c4.\ (C \vee \forall x\, A(x)) \equiv \forall x (C \vee A(x))$

$c5.\ (C \vee \exists x\, A(x)) \equiv \exists x (C \vee A(x))$

$c6.\ (\forall x\, A(x) \vee C) \equiv \forall x (A(x) \vee C)$

$c7.\ (\exists x\, A(x) \vee C) \equiv \exists x (A(x) \vee C)$

$c8.\ (C \wedge \forall x\, A(x)) \equiv \forall x (C \wedge A(x))$

$c9.\ (C \wedge \exists x\, A(x)) \equiv \exists x (C \wedge A(x))$

$c10.\ (\forall x\, A(x) \wedge C) \equiv \forall x (A(x) \wedge C)$

$c11.\ (\exists x\, A(x) \wedge C) \equiv \exists x (A(x) \wedge C)$

$x \notin varLib(C)$

$c12.\ (\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x))$

$c13.\ (\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)) \equiv \exists x (A(x) \wedge B(x))$

Modèle de Herbrand

Exemple

$$\left(\forall x\ A(x) \rightarrow \left(\exists t\ B(t) \vee \exists t\ C(t)\right)\right)$$

$$\equiv \left(\neg\forall x\ A(x) \vee \left(\exists t\ B(t) \vee \exists t\ C(t)\right)\right) \quad \text{a1}$$

$$\equiv \left(\neg\forall x\ A(x) \vee \left(\exists t\ B(t) \vee \exists y\ C(y)\right)\right) \quad \text{b2}$$

$$\equiv \left(\exists x\ \neg A(x) \vee \left(\exists t\ B(t) \vee \exists y\ C(y)\right)\right) \quad \text{c2}$$

$$\equiv \exists x\left(\neg A(x) \vee \left(\exists t\ B(t) \vee \exists y\ C(y)\right)\right) \quad \text{c7}$$

$$\equiv \exists x\left(\neg A(x) \vee \exists t\left(B(t) \vee \exists y\ C(y)\right)\right) \quad \text{c7}$$

$$\equiv \exists x\ \exists t\left(\neg A(x) \vee \left(B(t) \vee \exists y\ C(y)\right)\right) \quad \text{c5}$$

$$\equiv \exists x\ \exists t\left(\neg A(x) \vee \exists y\left(B(t) \vee C(y)\right)\right) \quad \text{c5}$$

$$\equiv \exists x\ \exists t\ \exists y\left(\neg A(x) \vee B(t) \vee C(y)\right) \quad \text{c5}$$

ou

$$\left(\forall x\ A(x) \rightarrow \left(\exists t\ B(t) \vee \exists t\ C(t)\right)\right)$$

$$\equiv \left(\neg\forall x\ A(x) \vee \left(\exists t\ B(t) \vee \exists t\ C(t)\right)\right) \quad \text{a1}$$

$$\equiv \left(\neg\forall x\ A(x) \vee \exists t\left(B(t) \vee C(t)\right)\right) \quad \text{c13}$$

$$\equiv \left(\exists x\ \neg A(x) \vee \exists t\left(B(t) \vee C(t)\right)\right) \quad \text{c2}$$

$$\equiv \left(\exists x\ \neg A(x) \vee \exists x\left(B(x) \vee C(x)\right)\right) \quad \text{c2}$$

$$\equiv \exists x\left(\neg A(x) \vee B(x) \vee C(x)\right) \quad \text{c13}$$

Modèle de Herbrand :

Théorème de Skolem

<u>Définition</u> :

Soit A une forme prénexe : $Q_1x_1\ Q_2x_2\ \ldots\ Q_nx_n\ B(x_1, X_2, \ldots, x_n)$

On appelle *<u>forme de Skolem</u>* de A noté A^s la formule obtenue en enlevant tous les quantificateurs existentiels, en remplaçant chacune des variables quantifiées $\exists x_i$ par $f_i(x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jk})$ où $x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jk}$ sont des variables quantifiées par des $\forall$ placés devant le $\exists x_i$

<u>Note</u> :

Lorsqu'il n'y a aucun quantificateur universel devant l'existentiel, le symbole introduit est une constante (i.e. symbole fonctionnel 0-aire).

Modèle de Herbrand :

Théorème de Skolem

Exemple :

A	forme de Skolem de A
$\exists x\, p(x, f(x))$	$\mathrm{p}(\mathrm{a}, \mathrm{f}(\mathrm{a}))$
$\forall x \exists y\, p(x, f(y))$	$\forall x\, p(x, f(f_1(x)))$
$\exists x_1 \forall x_2\ \exists x_3 \exists x_4 \left(p(x_1, x_2) \rightarrow q(x_3, x_4) \right)$	$\forall x_2 \left(p(a, x_2) \rightarrow q(f_1(x_2), f_2(x_2)) \right)$
$\exists x_1 \forall x_2\ \exists x_3 \forall x_4 \exists x_5\ p(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$	$\forall x_2 \forall x_4\ p(a, x_2, f_1(x_2), x_4, f_2(x_2, x_4))$

Proposition :

Soit $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un ensemble fini de fbf du calcul des prédicats

Soit $\{A_1^S, A_2^S, \ldots, A_n^S\}$ l'ensemble des formes de Skolem de A

Alors $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ admet un modèle de base E ssi

$\{A_1^S, A_2^S, \ldots, A_n^S\}$ admet un modèle de base E

Modèle de Herbrand :
Théorème de Skolem

<u>Théorème de Skolem</u> :
T est un théorème des axiomes A,
ou la formule T est conséquence de A si
$A \cup \{\neg T\}$ n'admet pas de modèle

<u>Exemple</u> :

$$T = \exists x\ \exists y\ q(x,y)$$

$$A = \left\{ \forall x \left(p(x) \rightarrow \exists y \left(r(y) \wedge q(x,y) \right) \right), \exists x\ p(x) \right\}$$

<u>Étape 0 : Construction de l'ensemble initial</u>

$$F_0 = A \cup \{\neg T\} = \left\{ \forall x \left(p(x) \rightarrow \exists y \left(r(y) \wedge q(x,y) \right) \right), \exists x\ p(x), \neg \exists x\ \exists y\ q(x,y) \right\}$$

Modèle de Herbrand :

Théorème de Skolem

Étape 1 : Mise sous forme prénexe

$$F_1 = \left\{ \forall x \exists y \left(\neg p(x) \vee \left(r(y) \wedge q(x,y) \right) \right), \exists x\, p(x), \forall x\, \forall y \neg\, q(x,y) \right\}$$

Étape 2 : Mise sous forme de Skolem

$$F_2 = \left\{ \forall x \left(\neg p(x) \vee \left(r(f(x)) \wedge q(x, f(x)) \right) \right), p(a), \forall x\, \forall y \neg\, q(x,y) \right\}$$

Étape 3 : Suppression des quantificateurs universels

$$F_3 = \left\{ \neg p(x) \vee \left(r(f(x)) \wedge q(x, f(x)) \right), p(a), \neg\, q(x,y) \right\}$$

Étape 4 : Mise sous forme de clauses

$$F_4 = \left\{ \neg p(x) \vee r(f(x)), \neg p(x) \vee q(x, f(x)), p(a), \neg\, q(x,y) \right\}$$

Si F4 ne possède pas de modèle, cela signifie que T est bien un théorème.
Si F4 possèdent des modèles, cela signifie que T n’est pas un théorème.

Un modèle ? : infinité d’essais (une base à un elt, une base à deux elts, etc…)

Modèle de Herbrand :

Théorème de Herbrand

Définition : Soit $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ un ensemble fini de fbf du calcul des prédicats du 1er ordre, résultat de la mise sous forme de clauses

On appelle *Univers de Herbrand* l'ensemble de tous les termes sans variables construits à partir du vocabulaire des formules $\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$, noté : $U_{\{A_1, A_2, \ldots A_n\}}$

Exemple (suite) : $F_4 = \{\neg p(x) \vee r(f(x)), \neg p(x) \vee q(x, f(x)), p(a), \neg q(x, y)\}$

$$A_1 = \{\neg p(x) \vee r(f(x))\}; A_2 = \{\neg p(x) \vee q(x, f(x))\}; A_3 = \{p(a)\}; A_4 = \{\neg q(x, y)\}$$

$$U_{\{A_1, A_2, A_3, A_4\}} \{a, f(a), f(f(a)), ..., f(f(....)...), ...\}$$

Modèle de Herbrand :

Théorème de Herbrand

Définition :

On appelle *Atomes de Herbrand*, l'ensemble de tous les atomes sans variables construits à partir du vocabulaire des formules de $\{A_1,A_2,\ldots A_n\}$, noté : $A_{\{A_1,A_2,\ldots A_n\}}$

i.e. toutes les fbf de la forme $p(t_1,\ldots t_m)$ où p est un symbole de prédicat de l'une des formules de $\{A_1,A_2,\ldots A_n\}$ et où $t_1,\ldots t_m$ sont des éléments de $U_{\{A_1,A_2,\ldots A_n\}}$

Exemple 14 (suite)

$$A_1 = \{\neg p(x) \vee r(f(x))\}\,; A_2 = \{\neg p(x) \vee q(x, f(x))\}\,; A_3 = \{p(a)\}\,; A_4 = \{\neg q(x,y)\}$$

$$A_{\{A_1,A_2,A_3,A_4\}} \begin{Bmatrix} p(a), r(a), q(a,a), p(f(a)), r(f(a)), q(a, f(a)), \\ q(f(a),a), q(f(a), f(a)), p(f(f(a))), \ldots \end{Bmatrix}$$

Modèle de Herbrand :

Théorème de Herbrand

Définition :
On appelle *Systèmes de Herbrand*, l'ensemble de tous les formules obtenues à partir de A_i en remplaçant dans les A_i les variables par les éléments de l'univers de Herbrand, noté : $S_{\{A_1,A_2,\ldots A_n\}}$

Exemple 14 (suite)

$$A_1 = \{\neg p(x) \vee r(f(x))\}; A_2 = \{\neg p(x) \vee q(x, f(x))\}; A_3 = \{p(a)\}; A_4 = \{\neg q(x,y)\}$$

$$S_{\{A_1,A_2,A_3,A_4\}} \begin{Bmatrix} \neg p(a) \vee r(f(a)), \neg p(a) \vee q(a, f(a)), p(a), \neg q(a,a), \\ \neg p(f(a)) \vee r(f(f(a))), \neg p(f(a)) \vee q(f(a), f(f(a))), \\ \neg q(a, f(a)), \neg q(f(a), a), \neg q(f(a), f(a)), \ldots. \end{Bmatrix}$$

Modèle de Herbrand :

Théorème de Herbrand

Théorème de Herbrand :

Soit $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un ensemble fini de clauses. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

3. (a) $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ possède un modèle
4. (b) $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ possède un modèle dont la base est l'univers de Herbrand
5. (c) Le système de Herbrand considéré comme un ensemble de formules du calcul propositionnel dont les atomes sont $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, possède un modèle

Proposition :

Numérotons les formules de $S_{\{A1, A2, \ldots, An\}} = \{f_0, f_1, \ldots, f_m, \ldots\}$

L'ensemble $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est inconsistant (i.e. n'admet pas de modèle) si et seulement si une des formules $f_0 \wedge f_1 \wedge \ldots \wedge f_m \wedge \ldots$ est insatisfiable.

Modèle de Herbrand :

Théorème de Herbrand

Exemple 14 (suite)

$f_0 = \neg p(f(a)) \vee r(f(a))$ $\quad f_1 = \neg p(a) \vee q(a, f(a))$

$f_2 = p(a)$ $\quad f_3 = \neg q(a,a)$

$f_4 = \neg p(f(a)) \vee q(f(a), f(f(a)))$ $\quad f_5 = \neg p(f(a)) \vee r(f(f(a)))$

$f_6 = \neg q(a, f(a))$ $\quad f_7 = \neg q(f(a), a)$, etc.

Pour savoir si l'ensemble des formules possède un modèle, il suffit d'étudier successivement : $f_0, f_0 \wedge f_1, f_0 \wedge f_1 \wedge f_2, \ldots,$

en cherchant à chaque étape à savoir si la formule est satisfiable ou non.

<u>Exemple (suite)</u>

On constate que $f_0 \wedge f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 \wedge f_4 \wedge f_5 \wedge f_6$ est insatisfiable - impossible de construire un modèle à partir de f_1, f_2, f_6

Donc : Il n'existe pas de modèle de Herbrand;

Donc T est conséquence des axiomes de A (ou T est un théorème de A)