Calcul Algébrique

Eric Dumas, Emmanuel Peyre, Bernard Ycart

Ce chapitre est consacré à la manipulation de formules algébriques, constituées de variables formelles, de réels ou de complexes. L'objectif est essentiellement pratique : « savoir calculer ». La seule nouveauté réside dans la manipulation de formules avec indices, utilisant les symboles $\sum$ (somme) et $\prod$ (produit). Pour le reste, vous aurez simplement à réviser votre cours de terminale sur les nombres complexes.

Table des matières

27 septembre 2014

1 Cours

1.1 Sommes et produits

Nous commençons par les sommes.

L'écriture

$$\sum_{k=0}^{5} 2^k$$

se lit « *somme pour k allant de zéro à cinq de deux puissance k* ». C'est une notation abrégée pour :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

La lettre k est l'*indice de sommation*. On la remplace successivement par toutes les valeurs entières comprises entre les deux *bornes*, qui sont 0 et 5 dans notre exemple. La première borne, celle qui est écrite au-dessous du signe somme, sera toujours inférieure ou égale à celle qui est au-dessus. Les bornes peuvent elles-mêmes être des variables, mais elles sont nécessairement différentes de l'indice de sommation. Par exemple, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k$$

désigne la somme

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n\ .$$

Rappelons que, par convention, $a^0 = 1$ pour tout nombre réel a. Prenez l'habitude d'écrire les sommes sous forme développée quitte à introduire des points de suspension entre les premiers termes et les derniers. Voici quelques exemples d'égalités illustrant la manipulation des indices et des bornes. Nous donnons sous chaque exemple une écriture sous forme développée.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} 2^k &= \sum_{h=0}^{n-1} 2^{h+1} \\ 2^1 + \cdots + 2^n &= 2^{0+1} + \cdots + 2^{n-1+1}\ . \end{aligned}$$

L'indice de sommation peut être remplacé par n'importe quel autre : on dit que c'est une *variable muette*.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{h=1}^{n} 2^{n+h} &= \sum_{k=0}^{2n} 2^k \\ (2^0 + \cdots + 2^n) + (2^{n+1} + \cdots + 2^{2n}) &= 2^0 + \cdots + 2^{2n}\ . \end{aligned}$$

Observez que la borne peut être une des variables de la quantité à sommer.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} 2^n &= (n+1)2^n \\ 2^n + \cdots + 2^n &= (n+1)2^n\ . \end{aligned}$$

Dans cet exemple la quantité à sommer ne dépend pas de l'indice de sommation : celle-ci a pour seul effet de compter les termes. Attention, pour $m \leqslant n$, il y a $n-m+1$ termes dans la somme de m à n.

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{1} 2^{k+h} &=& \displaystyle\sum_{h=0}^{1}\sum_{k=0}^{n} 2^{k+h} \\
(2^0+2^1)+\cdots+(2^n+2^{n+1}) &=& (2^0+\cdots+2^n)+(2^1+\cdots+2^{n+1})\,.
\end{array}$$

Une double somme est une somme de sommes, et on peut toujours intervertir les deux.

Voici un enchaînement d'égalités, montrant que la somme des puissances de 2 de 2^0 jusqu'à 2^n vaut $(2^{n+1}-1)$ (c'est un cas particulier d'une formule à connaître que nous verrons plus loin). Pour chaque ligne de calcul, nous donnons à droite l'écriture sous forme développée. On rappelle que $2^0 = 1$.

$$\begin{array}{rcl|cl}
\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k &=& \displaystyle 2\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) &=& 2(2^0+\cdots+2^n)-(2^0+\cdots+2^n) \\
&=& \displaystyle \left(\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) &=& (2^1+\cdots+2^{n+1})-(2^0+\cdots+2^n) \\
&=& \displaystyle \left(\sum_{h=1}^{n+1} 2^{h}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) &=& (2^1+\cdots+2^{n+1})-(2^0+\cdots+2^n) \\
&=& 2^{n+1}-2^0 &=& 2^{n+1}-1\,.
\end{array}$$

Ce que nous venons de voir pour les sommes s'applique aussi aux produits. Le produit des entiers de 1 à n intervient dans de nombreuses formules. C'est la *factorielle* de n. Elle se note « $n!$ ».

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\ 2\ 3 \cdots\ (n-2)\ (n-1)\ n\,.$$

Il est souvent utile d'étendre la définition de la factorielle en convenant que $0! = 1$. Voici les premières valeurs.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Si n est un entier positif, un *n-uplet* désigne une liste ordonnée de n objets. On appelle *permutation des nombres de* 1 *à* n un n-uplet d'entiers $(u_1,\dots,u_n)$ dans lequel chaque entier entre 1 et n apparaît une et une seule fois. Par exemple $(5,3,2,4,1)$ est une permutation des nombres de 1 à 5.

Théorème 1. *Le nombre de permutations des nombres de* 1 *à* n *est* $n!$.

Démonstration : On montre le théorème par récurrence sur n.

Si $n = 1$, la seule permutation des entiers de 1 à 1 est (1).

On suppose donc que le résultat est vrai pour l'entier n. Montrons-le pour l'entier $n+1$. Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n+1$ et comptons le nombre A_k de permutations

$$(u_1, \ldots, u_{n+1})$$

telles que $u_k = n + 1$. À une telle permutation, associons le n-uplet :

$$(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_{n+1}) \; .$$

C'est une permutation des nombres de 1 à n. Inversement étant donnée une permutation $(v_1, \ldots, v_n)$ des entiers de 1 à n, alors

$$(v_1, \ldots, v_{k-1}, n + 1, v_{k+1}, \ldots, v_n)$$

est une permutation des entiers de 1 à $n + 1$ dont le k-ième terme est $n + 1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient que $A_k = n!$. Donc le nombre total de permutations des nombres de 1 à $n + 1$ est :

$$\sum_{k=1}^{n+1} A_k = \sum_{k=1}^{n+1} n! = (n + 1)\, n! = (n + 1)! \; ,$$

ce qui montre le résultat pour $n + 1$. □

Pour ordonner n objets, il faut associer à chacun un nombre entre 1 et n de sorte que chaque nombre renvoie à un objet et un seul. Il y a autant de manières de le faire que de permutations des n premiers entiers : $n!$. Au tiercé, il y a $5! = 120$ manières d'ordonner les 5 premiers chevaux. Une seule donne l'ordre d'arrivée, soit le quinté dans l'ordre, et il y a 119 quintés dans le désordre.

Le *nombre de combinaisons* de k objets parmi n est le nombre de manières de choisir k objets parmi n, sans distinguer leur ordre.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \; . \tag{1}$$

La notation $\binom{n}{k}$ que nous utilisons ici, de préférence à l'ancienne notation C_n^k, est conforme aux programmes en vigueur et à l'usage international. Nous conseillons de la lire « de n choisir k ».

La formule (1) correspond au raisonnement suivant. Pour choisir k objets, on peut se donner une permutation des n objets, et décider d'en retenir les k premiers. Parmi les permutations, toutes celles qui auront en commun leurs k premiers nombres conduiront au même choix. Il faut donc diviser par le nombre de permutations des k objets choisis, et par le nombre de permutations des $n - k$ objets qui ne l'ont pas été.

Observez que (1) ne change pas si on remplace k par $n - k$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \; .$$

Choisir k objets parmi n (ceux que l'on garde) revient à en choisir $n-k$ (ceux que l'on laisse).

Voici une autre expression de $\binom{n}{k}$.

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{h=0}^{k-1}(n-h) = \frac{n\ (n-1)\ \cdots\ (n-k+1)}{1\ 2\ \cdots\ k}\ . \tag{2}$$

Notez qu'il y a k facteurs au numérateur, comme au dénominateur. On obtient cette formule en simplifiant le quotient $n!/(n-k)!$ dans (1).

On peut aussi raisonner comme suit. Il y a n façons de choisir le premier objet, puis $n-1$ de choisir le second (puisqu'un objet a déjà été choisi), etc. Pour choisir le k-ième objet, il reste n–(k–1) possibilités. Ceci correspond au numérateur de (2). Cette manière de procéder retourne une liste ordonnée. Il faut donc diviser par le nombre d'ordres possibles des k objets choisis, qui est $k!$.

Observez les relations suivantes, faciles à déduire de (1) ou (2) et de la définition de la factorielle.

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}\ .$$

Pour calculer $\binom{n}{k}$ en pratique, on n'utilise ni (1) ni (2). Le calcul récursif par la formule du *triangle de Pascal* (connue des indiens, des chinois et des arabes bien avant Pascal) est beaucoup plus rapide.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\ . \tag{3}$$

Nous conseillons au lecteur de démontrer cette formule à partir des expressions (1) et (2). Voici la justification combinatoire. Supposons que parmi les n objets dont k doivent être choisis, l'un d'entre eux soit distingué (disons qu'il est rouge). Parmi les choix possibles de k objets, certains ne contiennent pas l'objet rouge, d'autres le contiennent. Les premiers sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$, car les k objets sont choisis parmi les $n-1$ différents de l'objet rouge. Les choix contenant l'objet rouge sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$ car l'objet rouge ayant été retenu, il reste $k-1$ objets à choisir parmi les $n-1$ autres. Voici, disposées en triangle, les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour n allant de 0 à 6.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Chaque valeur est la somme de celle qui est au-dessus, et de celle qui est à gauche de celle qui est au-dessus. S'il n'est pas indispensable de connaître ce tableau par cœur, il est souvent utile de savoir le réécrire rapidement.

1.2 Trois formules à connaître

Les formules données par les trois théorèmes qui suivent vous seront souvent utiles.

Théorème 2. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, la somme des n premiers entiers vaut $n(n+1)/2$.*

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} . \tag{4}$$

Démonstration : Nous donnons d'abord la démonstration par récurrence. Nous verrons ensuite une justification géométrique et une justification combinatoire. L'hypothèse de récurrence est :

$$H(n) \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Pour $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} .$$

Supposons maintenant que $H(n)$ est vraie. Ecrivons :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) + (n+1) .$$

En appliquant $H(n)$, on obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) .$$

Le membre de droite s'écrit :

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} .$$

Nous avons donc démontré que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} ,$$

c'est-à-dire que $H(n+1)$ est vraie. $\square$

Voici maintenant une justification géométrique. Considérons un rectangle dont la largeur et la hauteur valent respectivement $n+1$ et n unités (figure 1). Ce rectangle

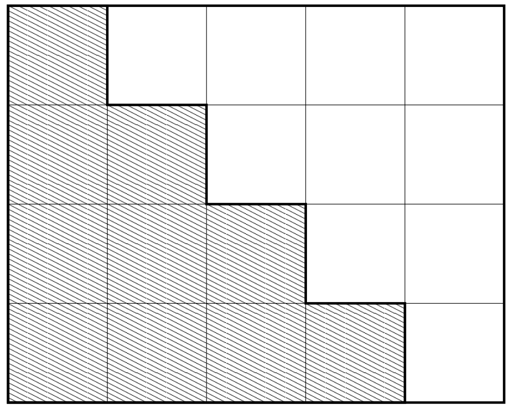

FIGURE 1 – La somme des n premiers entiers vaut $n(n+1)/2$.

peut être découpé en deux moitiés superposables. Chacune est formée de $1+2+\cdots+n$ carrés de côté unité, et couvre une surface égale à la surface du rectangle divisée par 2, soit $n(n+1)/2$.

Voici maintenant une explication combinatoire. Autour d'une table $n+1$ personnes sont assises et s'apprêtent à trinquer. Combien de bruits de verre entendra-t-on ? Il y a deux manières de compter. La première consiste à prendre les personnes dans l'ordre : la première doit trinquer avec les n autres. La seconde, qui a déjà trinqué avec la première, doit encore trinquer avec $n-1$ autres. Ainsi de suite jusqu'à la n-ième personne, qui ayant déjà trinqué avec les $n-1$ autres n'aura plus que la n-ième avec qui trinquer. On entendra donc $n+(n-1)+\cdots+1$ bruits de verre. La seconde manière de compter consiste à remarquer que le nombre de bruits de verre est égal au nombre de combinaisons de 2 personnes parmi $n+1$:

$$\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \;.$$

Les deux formules suivantes portent sur deux variables a et b que vous pouvez voir dans un premier temps comme deux réels. Ces formules sont aussi valables pour des nombres complexes, et plus généralement pour des objets quelconques que l'on peut ajouter et multiplier de façon commutative (par exemple des polynômes ou des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

La première généralise l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Théorème 3. *Pour tout entier n,*

$$a^{n+1}-b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\right) = (a-b)(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n). \qquad (5)$$

(Rappelons la convention $a^0 = b^0 = 1$.)

Démonstration : La démonstration se fait par récurrence. L'affirmation est vraie pour $n = 0$ puisque :

$$\sum_{k=0}^{0} a^0 b^0 = 1.$$

Supposons le résultat vrai pour n.

$$\begin{aligned}
(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k} b^k\right) &= (a-b)\left(\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n+1-k} b^k\right) + b^{n+1}\right) \\
&= (a-b)\left(a\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k\right) + b^{n+1}\right) \\
&= a(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k\right) + (a-b)b^{n+1} \\
&= a(a^{n+1} - b^{n+1}) + (a-b)b^{n+1} \\
&= a^{n+2} - b^{n+2}
\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence a été utilisée pour obtenir l'avant-dernière égalité. Le résultat est vrai pour $n + 1$, donc pour tout n. □

Des cas particuliers du théorème 3 reviennent souvent dans les calculs. Nous avons déjà rencontré le cas $a = 2, b = 1$. Vous pouvez retenir le suivant :

$$(1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}.$$

Plus généralement, on a la relation :

Proposition 1 (Somme d'une série géométrique)**.** *Soit x un nombre réel différent de 0 et de 1 et soient p et q des entiers relatifs tels que $p \leqslant q$. Alors :*

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = \frac{x^p - x^{q+1}}{1-x}\cdot$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que :

$$(1-x)\left(\sum_{k=p}^{q} x^k\right) = \sum_{k=p}^{q} x^k - \sum_{k=p+1}^{q+1} x^k = x^p - x^{q+1}.$$

□

Une autre formule à connaître est celle du *binôme de Newton*, qui généralise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Théorème 4. *Pour tout entier $n \geqslant 1$,*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = b^n + nb^{n-1}a + \cdots + nba^{n-1} + a^n. \tag{6}$$

À cause de (6), les nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent les *coefficients binomiaux*.

Démonstration : Ici encore la démonstration se fait par récurrence, nous donnerons ensuite une justification combinatoire. Pour $n = 1$:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 \ .$$

Supposons que la formule est vraie pour n et démontrons-la pour $n+1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\right) \\
&= \left(\sum_{h=1}^{n+1}\binom{n}{h-1}a^h b^{n+1-h}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\right) \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1}a^h b^{n+1-h}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\right) + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k}\right) + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} \ .
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, nous avons appliqué la formule du triangle de Pascal (3). Le résultat est démontré. □

Voici maintenant la justification combinatoire. La quantité $(a+b)^n$ est le produit de n facteurs, chacun contenant deux termes a et b. Quand on développe le produit, on prend dans le premier facteur un des deux termes, on le multiplie par un terme du second facteur, ainsi de suite jusqu'au n-ième facteur. Le produit obtenu est égal à $a^k b^{n-k}$ si on a choisi le terme a dans k facteurs et le terme b dans les $n-k$ autres. Le nombre de produits égaux à $a^k b^{n-k}$ est le nombre de combinaisons de k facteurs parmi n, soit $\binom{n}{k}$.

1.3 Nombres complexes

Le reste de ce chapitre est une révision du programme de terminale sur les complexes.

Les nombres complexes sont nés de la nécessité de donner un sens à la racine carrée de nombres négatifs, pour résoudre les équations algébriques. Dans l'ensemble des réels, l'équation $x^2 = 1$ a deux solutions, $+1$ et -1, mais l'équation $x^2 = -1$ n'en a pas, puisque le carré de tout nombre réel est positif ou nul. On décide d'appeler i un nombre (imaginaire) tel que $\mathrm{i}^2 = -1$, puis d'appeler *nombre complexe* tout nombre de la forme $a + \mathrm{i}b$, où a et b sont deux réels quelconques. Leur ensemble est noté $\mathbb{C}$.

Ainsi tout nombre complexe z a une *partie réelle*, notée $\mathrm{Re}(z)$ et une *partie imaginaire*, notée $\mathrm{Im}(z)$.

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\ \mathrm{i}\ .$$

On représente ces nombres par les points d'un plan muni de deux axes orthogonaux. L'axe horizontal porte les réels (qui sont les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle). L'axe vertical porte les nombres dits imaginaires purs, ceux dont la partie réelle est nulle. Le point correspondant au nombre $a + \mathrm{i}b$ est placé à la verticale du réel a et à l'horizontale de l'imaginaire pur $\mathrm{i}b$ (figure 2). On dit que le nombre $a+\mathrm{i}b$ est l'*affixe* du point qui le représente. Le point d'affixe 0 est l'*origine*, et on le note O.

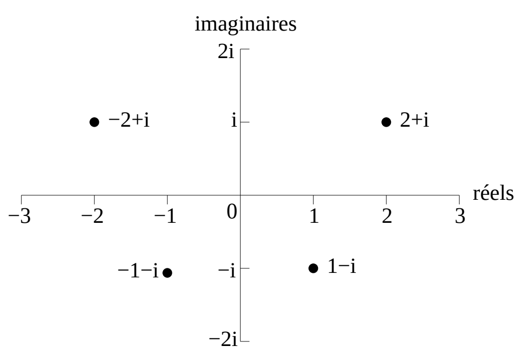

FIGURE 2 – Le plan complexe.

L'addition et la multiplication des réels s'étendent aux nombres complexes sans difficulté particulière.

- *addition :* $(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$,
- *multiplication :* $(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}(bc + ad)$.

Soient a, b, c trois réels. L'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ admet toujours des solutions, éventuellement complexes.

1. si $b^2 - 4ac > 0$ l'équation admet deux racines réelles,

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ;$$

2. si $b^2 - 4ac = 0$ l'équation admet une racine réelle « double »,

$$r = \frac{-b}{2a}\ ;$$

3. si $b^2 - 4ac < 0$ l'équation admet deux racines complexes,

$$r_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a} \; .$$

Ce résultat n'est pas étonnant, et vous le connaissez déjà. Le miracle est que les complexes permettent de résoudre non seulement les équations du second degré, mais toutes les équations algébriques quel que soit leur degré. Le théorème suivant porte en France le nom de d'Alembert, bien qu'il ait été démontré par Gauss. Il est partout connu comme le *théorème fondamental de l'algèbre*.

Théorème 5. *Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$ à coefficients complexes. Le polynôme P est un produit de n facteurs de degré 1, à coefficients dans $\mathbb{C}$.*

En d'autres termes, l'équation $P(x) = 0$ a toujours n solutions ; certaines solutions peuvent être multiples, et elles sont comptées avec leur ordre de multiplicité. On traduit cette propriété en disant que $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos*.

Définition 1. *Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe. On appelle*

1. module de z *le nombre réel positif ou nul $\sqrt{a^2 + b^2}$. On le note $|z|$.*

2. argument de z *l'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\mathrm{Re}(z) = |z| \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(z) = |z| \sin(\theta)$ (défini seulement si z est non nul). On le note $\arg(z)$.*

3. conjugué de z *le nombre complexe de même partie réelle et de partie imaginaire opposée. On le note $\overline{z}$.*

$$\overline{z} = a - \mathrm{i}b \; .$$

Voici quelques exemples.

nombre	module	argument	conjugué
i	1	$\pi/2$	$-\mathrm{i}$
$1+\mathrm{i}$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$	$1-\mathrm{i}$
$-1+\mathrm{i}$	$\sqrt{2}$	$3\pi/4$	$-1-\mathrm{i}$
$1+\mathrm{i}\sqrt{3}$	2	$\pi/3$	$1-\mathrm{i}\sqrt{3}$
$\sqrt{3}-\mathrm{i}$	2	$11\pi/6$	$\sqrt{3}+\mathrm{i}$
$-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	$2\pi/3$	$-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{6}$

Dans le plan complexe, le module est la longueur du segment joignant l'origine au point représentant z. L'argument est l'angle entre l'axe des réels et ce segment, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (le sens trigonométrique). Le conjugué est le symétrique par rapport à l'axe horizontal des réels (figure 3).

Observez qu'un nombre et son conjugué ont le même module et que leur produit est le carré de ce module.

$$z\,\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2 \; .$$

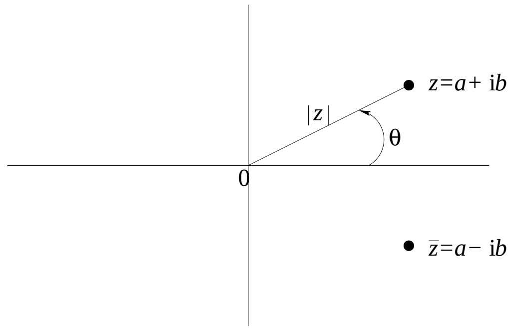

FIGURE 3 – Module, argument et conjugué d'un nombre complexe.

Il est fréquent dans les calculs d'utiliser un conjugué pour simplifier le résultat et le mettre sous la forme $a + \mathrm{i}b$. Si z_1 et z_2 sont deux complexes, leur quotient s'écrit :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{z_2\,\overline{z_2}} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{|z_2|^2}\ .$$

Voici un exemple.

$$\frac{1+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{3+\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\ .$$

1.4 Formes trigonométrique et exponentielle

Par définition si ρ et θ désignent respectivement le module et l'argument du nombre complexe $a + \mathrm{i}b$, alors $a = \rho\cos(\theta)$ et $b = \rho\sin(\theta)$. Ainsi le nombre s'écrit :

$$z = a + \mathrm{i}b = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))\ .$$

On dit que le nombre est mis sous *forme trigonométrique*, ou *forme polaire*. Cette écriture prend toute sa force grâce à l'*exponentielle complexe*.

Définition 2. *Soit $z = a+\mathrm{i}b$ un nombre complexe. On appelle* exponentielle complexe de z *et on note* e^z *(ou* $\exp(z)$*) le nombre complexe :*

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a\Big(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)\Big)\ ,$$

où e^a *est l'exponentielle réelle de* a.

Observez que l'exponentielle complexe coïncide avec l'exponentielle réelle si la partie imaginaire est nulle. Si la partie réelle est nulle, le nombre $\cos(b)+\mathrm{i}\sin(b)$ est un nombre complexe de module 1 (car $\cos^2(b) + \sin^2(b) = 1$). Dans le cas général, le module de e^{a+ib} est e^a et son argument est l'unique élément θ de $[0, 2\pi[$ tel que $b - \theta$ soit multiple de 2π.

La périodicité modulo 2π des fonctions sinus et cosinus induit la périodicité modulo $2\mathrm{i}\pi$ de l'exponentielle complexe : pour tout réel b et pour tout entier k,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(b+2k\pi)}$$

Ainsi,

$$\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}} = 1 \;, \quad \mathrm{e}^{(2k+1)\pi\mathrm{i}} = -1 \;, \quad \mathrm{e}^{(\pi/2+2k\pi)\mathrm{i}} = \mathrm{i} \;, \quad \mathrm{e}^{(-\pi/2+2k\pi)\mathrm{i}} = -\mathrm{i} \;.$$

L'exponentielle complexe conserve la propriété fondamentale de l'exponentielle réelle qui est de transformer les sommes en produits.

Théorème 6. *Soient z et z' deux nombres complexes,*

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{z'} \;.$$

Démonstration : Posons $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = c + \mathrm{i}d$. Par définition de l'exponentielle,

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{(a+c)+\mathrm{i}(b+d)} = \mathrm{e}^{a+c}\Big(\cos(b+d) + \mathrm{i}\sin(b+d)\Big) \;.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{z'} &= \Big(\mathrm{e}^{a}\Big(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)\Big)\Big)\Big(\mathrm{e}^{c}\Big(\cos(d) + \mathrm{i}\sin(d)\Big)\Big) \\
&= \mathrm{e}^{a+c}\Big(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)\Big)\Big(\cos(d) + \mathrm{i}\sin(d)\Big) \;,
\end{aligned}$$

car $\mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{c} = \mathrm{e}^{a+c}$ (propriété de l'exponentielle réelle). Les formules trigonométriques suivantes sont supposées connues :

$$\cos(b+d) = \cos(b)\cos(d) - \sin(b)\sin(d) \quad \text{et} \quad \sin(b+d) = \sin(b)\cos(d) + \cos(b)\sin(d) \;.$$

On en déduit immédiatement que :

$$\Big(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)\Big)\Big(\cos(d) + \mathrm{i}\sin(d)\Big) = \cos(b+d) + \mathrm{i}\sin(b+d) \;.$$

□

Si z est un nombre complexe de module ρ et d'argument θ, il est souvent commode de l'écrire sous sa *forme exponentielle* :

$$z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \;.$$

Observez que le conjugué est :

$$\overline{z} = \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \;,$$

et son argument est $-\theta+2\pi$. L'utilisation de l'exponentielle facilite le calcul des produits et des puissances. Par exemple si n est un entier,

$$z^n = (\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \;.$$

Il est facile également de retrouver les racines n-ièmes d'un nombre complexe sous forme trigonométrique, c'est-à-dire de résoudre l'équation $z^n = \rho e^{i\theta}$. Il y a n solutions qui s'écrivent :

$$\rho^{1/n} e^{i(\theta/n+2k\pi/n)} \;, \quad k = 0, \ldots, n-1 \;.$$

Les nombres de la forme

$$e^{i(2k\pi/n)} \;, \quad k = 0, \ldots, n-1 \;,$$

sont les solutions de $z^n = 1$. On les appelle les *racines n-ièmes de l'unité* (figure 4).

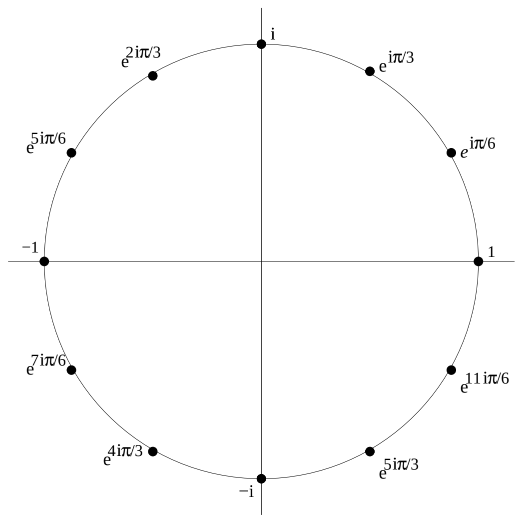

FIGURE 4 – Racines douzièmes de l'unité.

Les fonctions sinus et cosinus s'expriment à l'aide de l'exponentielle complexe par les *formules d'Euler*.

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \;, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \;. \tag{7}$$

On les utilise pour *linéariser* des puissances de sinus et cosinus, afin de calculer leurs primitives. Voici un exemple.

$$\begin{aligned}
\sin^4(x)\cos^6(x) &= \frac{1}{2^{10}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^6\\
&= \frac{1}{1024}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})^4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^2\\
&= \frac{1}{1024}(\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x}-4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+6-4\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})\\
&= \frac{1}{1024}(\mathrm{e}^{10\mathrm{i}x}-4\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}+6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\\
&\qquad\quad +2\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x}-8\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+12-8\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}+2\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}x}\\
&\qquad\quad +\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}-4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+6\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}-4\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-10\mathrm{i}x})\\
&= \frac{1}{512}\Big(6+2\cos(2x)-8\cos(4x)-3\cos(6x)+2\cos(8x)+\cos(10x)\Big)
\end{aligned}$$

D'où une primitive de $\sin^4(x)\cos^6(x)$:

$$\frac{3x}{256}+\frac{\sin(2x)}{512}-\frac{\sin(4x)}{256}-\frac{\sin(6x)}{1024}+\frac{\sin(8x)}{2048}+\frac{\sin(10x)}{5120}\;.$$

L'observation de la parité permet de prévoir a priori que la linéarisation ne contiendra que des $\cos(kx)$. En effet, $\sin(x)$ est une fonction impaire et $\cos(x)$ une fonction paire. Donc si on remplace x par $-x$, $\sin^n(x)\cos^m(x)$ sera inchangé si n est pair, changé en son opposé si n est impair. Dans le premier cas, la linéarisation ne contiendra que des cosinus, dans le second cas, elle ne contiendra que des sinus.

1.5 Géométrie du plan complexe

Nous rappelons ici les liens entre les calculs sur les nombres complexes et la géométrie du plan. Le premier résultat concerne les mesures de distances et d'angles.

Théorème 7. *Soient A, B et C trois points distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.*

1. *La distance entre A et B est le module de $z_B - z_A$.*
2. *L'angle orienté $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ est égal à l'argument du rapport $(z_B - z_C)/(z_A - z_C)$.*

Si C est un point du plan d'affixe z_C, et ρ et un réel positif, l'ensemble des points dont l'affixe z est telle que $|z - z_C| = \rho$ est le cercle de centre C et de rayon ρ. On peut aussi écrire ce cercle comme l'ensemble des points d'affixe $z_C + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où θ décrit $[0, 2\pi[$. Comme conséquence immédiate du point *2*, les points A, B, C sont alignés si et seulement si l'argument de $(z_B - z_C)/(z_A - z_C)$ est égal à 0 ou π ; le triangle ABC est rectangle en C si l'argument de $(z_B - z_C)/(z_A - z_C)$ est égal à $\pi/2$ ou $3\pi/2$.

Voici maintenant la traduction sous forme de tranformations dans $\mathbb{C}$ des translations, homothéties et rotations (figure 5).

Théorème 8. *Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On note F l'application du plan dans lui-même qui au point d'affixe z associe le point d'affixe $f(z)$. Soit A un point du plan, d'affixe z_A.*

1. Translation : *L'application F est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$, si et seulement si f est l'application qui à z associe $z + z_A$.*
2. Homothétie : *Soit r un réel. L'application F est l'homothétie de centre A et de rapport r si et seulement si f est l'application qui à z associe le complexe $f(z)$ tel que $f(z) - z_A = r(z - z_A)$.*
3. Rotation : *Soit θ un réel. L'application F est la rotation de centre A et d'angle θ si et seulement si f est l'application qui à z associe le complexe $f(z)$ tel que $f(z) - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - z_A)$.*

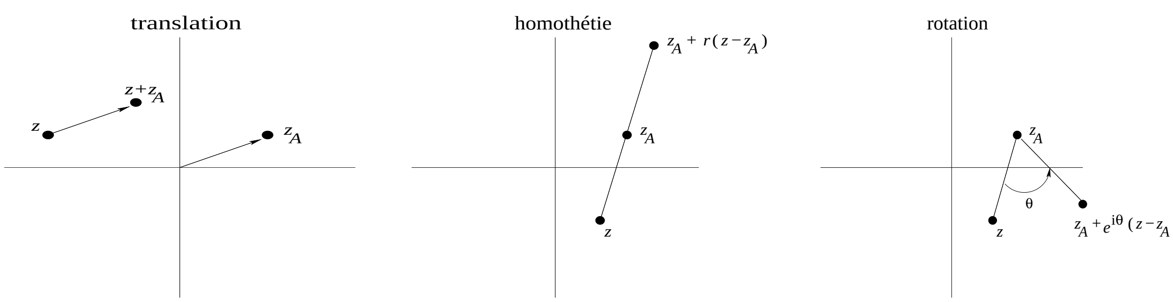

Figure 5 – Translation, homothétie et rotation dans le plan complexe.

Notons $M(z)$ le point du plan d'affixe z. Si z et z' sont des nombres complexes, le produit zz' peut être décrit comme l'unique nombre complexe tel que le triangle $(M(0), M(z'), M(zz'))$ soit semblable au triangle $(M(0), M(1), M(z))$ (figure 6).

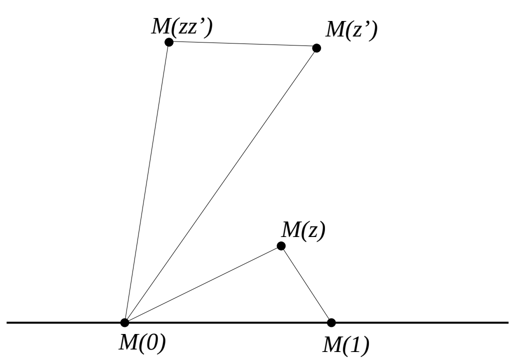

Figure 6 – Interprétation géométrique du produit de deux complexes.

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Soit n un entier $\geqslant 2$. Parmi les expressions suivantes lesquelles sont égales à n, lesquelles sont différentes et pourquoi ?

1. ☐ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$.
2. ☒ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1$.
3. ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k/n$.
4. ☒ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2k/(n-1)$.
5. ☒ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{h=0}^{n-1} h$.
6. ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{h=2}^{n-1} h$.
7. ☒ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{h=2}^{n-2} h$.
8. ☐ $\displaystyle\sum_{k=n}^{n} 1$.
9. ☒ $\displaystyle\sum_{k=n}^{n} k$.

Vrai-Faux 2. Soient n et k deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Nous conviendrons que les entiers compris entre k et n sont $k, k+1, \dots, n-1, n$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Le nombre $n!/(n-k)!$ est entier.
2. ☐ Le nombre $k!/(n!)$ est entier.
3. ☐ Il y a $n-k$ entiers compris entre k et n.
4. ☒ Il y a $(n-k+1)^2$ couples d'entiers compris entre k et n.
5. ☐ Il y a $\binom{n-k+1}{3}$ triplets d'entiers, différents deux à deux, et tous compris entre k et n.
6. ☒ Il y a $\binom{n-k+1}{3}$ triplets d'entiers (a, b, c) tels que $a < b < c$, et a, b, c compris entre k et n.
7. ☐ La somme des entiers compris entre k et n est $(n-k)(n-k+1)/2$.

8. ☐ La somme des entiers compris entre k et n est $n(n+1)/2 - k(k+1)/2$.
9. ☒ La somme des entiers compris entre k et n est $n(n+1)/2 - k(k-1)/2$.
10. ☐ La somme des nombres 2^h pour h compris entre k et n vaut $2^{n+1} - 2^{k+1}$.
11. ☒ La somme des nombres 2^h pour h compris entre k et n vaut $2^{n+1} - 2^k$.

Vrai-Faux 3. Dans une course de chevaux, 10 chevaux sont au départ. Vous en choisissez 3 que vous classez pour jouer au tiercé. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Il y a 3 tiercés dans le désordre.
2. ☒ Il y a 3! tiercés, dont 1 dans l'ordre.
3. ☐ Il y a $\binom{10}{3}$ tiercés possibles.
4. ☐ Il y a 720 ordres d'arrivée possibles.
5. ☒ Il y a plus de 3 millions d'ordres d'arrivée possibles.
6. ☒ Vous avez 720 choix différents.
7. ☐ Vous avez une chance sur 120 de gagner le tiercé dans l'ordre.
8. ☒ Vous avez une chance sur 120 de gagner, soit dans l'ordre, soit dans le désordre.

Vrai-Faux 4. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.
2. ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3^{n}-1}{2}$.
3. ☒ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3^{n}-3}{2}$.
4. ☒ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n$.
5. ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 3$.
6. ☒ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 3^n$.
7. ☒ $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 1 - 3n$.

Vrai-Faux 5. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Tout nombre réel a pour argument 0.

2. ☒ Tout nombre réel strictement négatif a pour argument π.
3. ☒ Tout nombre imaginaire pur non nul a pour argument $\pi/2$ ou $3\pi/2$.
4. ☒ Le conjugué d'un nombre imaginaire pur est égal à son opposé.
5. ☐ Si deux nombres complexes ont le même argument alors leur produit est réel.
6. ☒ Le produit de deux nombres imaginaires purs est réel.
7. ☒ Si deux nombres complexes non nuls ont le même argument alors leur quotient est réel.
8. ☒ Si deux nombres complexes non nuls ont le même module alors leur quotient a pour module 1.

Vrai-Faux 6. Soit z un nombre complexe non nul. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Le module de z égal au module de son conjugué.
2. ☐ L'argument de z est l'opposé de l'argument de son conjugué.
3. ☒ Le produit de z par une racine n-ième de l'unité a le même module que z.
4. ☐ L'argument de $-z$ est l'opposé de l'argument de z.
5. ☒ Si la partie imaginaire de z est positive, alors son argument est compris entre 0 et π.
6. ☐ L'argument de z^2 est le double de l'argument de z.
7. ☒ L'argument de $z/\overline{z}$ est égal à l'argument de z^2.

Vrai-Faux 7. On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ la partie réelle de z est l'opposé de sa partie imaginaire.
2. ☒ la partie réelle de z^2 est l'opposé de sa partie imaginaire.
3. ☐ l'argument de z^2 est $-\pi/4$.
4. ☒ l'argument de z^2 est $7\pi/4$.
5. ☐ le module de z^2 est 16.
6. ☒ le module de z est 2.
7. ☒ $z^2 = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$.
8. ☐ $z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/8}$.
9. ☒ $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(7\pi/8)}$.
10. ☐ $\cos(7\pi/8) = (\sqrt{2+\sqrt{2}})/2$.
11. ☒ $\cos(\pi/8) = (\sqrt{2+\sqrt{2}})/2$.
12. ☒ $\sin(7\pi/8) = (\sqrt{2-\sqrt{2}})/2$.

Vrai-Faux 8. A tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe $z' = (z - 4\mathrm{i})/(z + 2)$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ L'ensemble des points d'affixe z tels que z' est réel est un cercle.
2. ☒ L'ensemble des points d'affixe z tels que z' est réel est une droite privée d'un point.
3. ☒ L'ensemble des points d'affixe z tels que z' est imaginaire pur est un cercle privé d'un point.
4. ☐ L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est un cercle.
5. ☐ L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est une droite privée d'un point.
6. ☒ L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est une droite.

Vrai-Faux 9. L'application qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $\mathrm{i}z - 1$ est (vrai ou faux et pourquoi) ?

1. ☐ une translation.
2. ☐ une homothétie de rapport i.
3. ☒ une rotation.
4. ☐ une rotation dont le centre est le point d'affixe 1.
5. ☒ une rotation dont le centre est le point d'affixe $-(1 + \mathrm{i})/2$.
6. ☐ une rotation d'angle $-\pi/2$.

Vrai-Faux 10. L'application qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $\mathrm{i}\,\overline{z}$ est (vrai ou faux et pourquoi) ?

1. ☐ une homothétie de rapport i.
2. ☐ une rotation.
3. ☒ une symétrie.
4. ☐ la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
5. ☒ la symétrie par rapport à la première bissectrice.

2.2 Exercices

Exercice 1. Calculer les nombres suivants.

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} 1\,, \quad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h\,, \quad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} k\,,$$
$$\sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} h\,, \quad \sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} k\,, \quad \prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h\,,$$
$$\prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} k\,, \quad \prod_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} h\,, \quad \prod_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} k\,.$$

Exercice 2. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre variables. Ecrire à l'aide des symboles $\sum$ et $\prod$ les quantités suivantes.

1. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.
2. $a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3a_4$.
3. $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4$.
4. $a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4$.
5. $a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4$.
6. $a_1(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$.

Exercice 3. Démontrer les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n\ n!$.
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n\ n!}$.
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-1} = 2n+1$.
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k} = \frac{(n+1)!}{2n}$.

Exercice 4. Une entreprise veut se donner un nouveau sigle, qui soit formé d'exactement 3 lettres. De combien de façons peut-elle le faire ? Combien reste-t-il de possibilités si on impose au sigle d'être formé de lettres distinctes ?

Exercice 5. On met dans une boîte 26 jetons de Scrabble, portant chacune des lettres de l'alphabet. On en tire 3 à la fois. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

Exercice 6. Dix personnes doivent s'asseoir autour d'une table circulaire. On considère comme identiques deux dispositions dont l'une se déduit de l'autre par une rotation. Combien y a-t-il de dispositions possibles ? Combien en reste-t-il si deux personnes données refusent d'être assises à côté ?

Exercice 7. Une association comprenant 20 membres dont 12 femmes et 8 hommes désire former un comité de 5 personnes, dans lequel doivent se trouver au moins deux hommes et deux femmes. Calculer de combien de façons on peut former ce comité dans chacun des cas suivants.

1. Chaque membre de l'association accepte d'en faire partie.
2. Deux des femmes refusent d'en faire partie.
3. Monsieur X et Madame Y refusent de siéger ensemble.

Exercice 8. Démontrer les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k) = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.

Exercice 9. Démontrer les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}-1$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^n-2$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} 2^{k/2} = \frac{2^n-1}{\sqrt{2}-1}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} 2^{2k-1} = \frac{4^{2n+1}-1}{6}$.
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = 3^{n+1}-2^{n+1}$.
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{n-k} = \frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}$.

Exercice 10. Démontrer les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$ *(ajoutez les deux égalités précédentes).*
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k} = 3^n$.
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{3k-1}\binom{n}{k} = 9^n/2$.
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{3k}3^{n-2k}\binom{n}{k} = (17/3)^n$.
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{i}^k\binom{n}{k} = 2^{n/2}\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4}$.

8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{k/2}\mathrm{i}^k \binom{n}{k} = 2^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/3}$.
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(nk-1) = \frac{n(n-1)(n+2)}{2}$.

Exercice 11. Calculer les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+4}(k-2)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k+1}2^{n-3k}$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) = (1+x)^n$.

1. En utilisant une formule du cours, écrivez $f(x)$ comme une somme où interviennent les puissances de x.
2. La dérivée de f est $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$. L'intégrale de f sur $[0,1]$ vaut
$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$
En utilisant la question 1. donner une autre expression de $f'(x)$ et de cette intégrale.
3. En déduire les valeurs des expressions suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Exercice 13. Soient n et p deux entiers naturels. Cet exercice présente une méthode générale pour calculer $\sum_{k=0}^{n} k^p$, sur le cas particulier $p = 2$.

1. Soit $x \to P(x)$ une fonction, donner une expression plus simple de $\sum_{k=0}^{n}(P(k+1) - P(k))$.
2. Soit a, b, c des réels et $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Calculer $P(x+1) - P(x)$.
3. Déterminer a, b, c de sorte que $P(x+1) - P(x) = x^2$.
4. Déduire des questions précédentes que
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 14. Le but de l'exercice est de démontrer que pour tout nombre entier naturel n non nul, et pour tout n-uplets de réels $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

On pose $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$, $C = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

1. Soit $P(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2$. Exprimez $P(x)$ en fonction de A, B, C et x.
2. Si $A \neq 0$, quel est le signe du **trinôme** du second degré P ?
3. Déduisez que $C^2 \leqslant AB$.
4. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ un n-uplet de réels strictement positifs. Montrez que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geqslant n^2$$

Exercice 15. Mettre sous la forme $a + \mathrm{i}b$ les nombres complexes suivants.

$$\frac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}\;, \quad \frac{5+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\;, \quad \frac{-2}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\;, \quad \frac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\;,$$

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2 + \frac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}\;, \quad \frac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \frac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\;, \quad \left(\frac{1+\mathrm{i}-\sqrt{3}(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}\right)^2 .$$

Exercice 16. Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants.

$$1+\mathrm{i}\;, \quad 3+3\mathrm{i}\;, \quad 1+\mathrm{i}\sqrt{3}\;, \quad -1+\mathrm{i}\sqrt{3}\;,$$

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}\;, \quad -\frac{4}{3}\mathrm{i}\;, \quad 1+\mathrm{i}(1+\sqrt{2})\;, \quad (1+\sqrt{2})-\mathrm{i}\;.$$

Exercice 17. Mettre sous la forme $a + \mathrm{i}b$ les nombres complexes suivants.

$$2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\;, \quad 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8}\;, \quad 2\mathrm{e}^{-7\mathrm{i}\pi/3}\;, \quad 3\mathrm{e}^{-7\mathrm{i}\pi/8}\;,$$

$$(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})(\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4})\;, \quad \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}{\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4}}$$

$$(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})(3\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/6})\;, \quad \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}{3\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/6}}$$

Exercice 18. Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle.

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\;, \quad \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3\;, \quad (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^4$$

$$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^5 + (1-\mathrm{i}\sqrt{3})^5\;, \quad \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\;, \quad \frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2-2\mathrm{i}}$$

Exercice 19. Calculer les racines carrées des nombres suivants.

$$-1\;, \quad \mathrm{i}\;, \quad 1+\mathrm{i}\;, \quad -1-\mathrm{i}\;, \quad 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$$

$$3+4\mathrm{i}\;, \quad 8-6\mathrm{i}\;, \quad 7+24\mathrm{i}\;, \quad 3-4\mathrm{i}\;, \quad 24-10\mathrm{i}$$

Exercice 20.

1. Calculer les racines carrées de $(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les racines carrées de $(\sqrt{3}+\mathrm{i})/2$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 21. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

$$z^2+z+1=0\ ,\quad z^2-z+1=0\ ,\quad z^2+2z+4=0\ ,$$

$$4z^2-2z+1=0\ ,\quad z^2+(1+2\mathrm{i})z+\mathrm{i}-1=0\ ,\quad z^2-(3+4\mathrm{i})z-1+5\mathrm{i}=0\ ,$$

$$z^2+4z+5=0\ ,\quad z^2-(1-\mathrm{i})z-\mathrm{i}=0\ ,\quad z^2-(11-5\mathrm{i})z+24-27\mathrm{i}=0\ ,$$

$$z^3=\mathrm{i}\ ,\quad z^3=\frac{-1+\mathrm{i}}{4}\ ,\quad z^3=2-2\mathrm{i}\ ,$$

$$z^4=1\ ,\quad z^4=(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2\ ,\quad \left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1\ .$$

Exercice 22. Soit θ un réel.

1. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$.
2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$.

Exercice 23. Linéariser :

$$\cos^3(x)\ ,\quad \sin^3(x)\ ,\quad \cos^4(x)\ ,\quad \sin^4(x)\ ,$$

$$\cos^2(x)\sin^2(x)\ ,\quad \cos(x)\sin^3(x)\ ,\quad \cos^3(x)\sin(x)\ ,$$

$$\cos^3(x)\sin^2(x)\ ,\quad \cos^2(x)\sin^3(x)\ ,\quad \cos(x)\sin^4(x)\ .$$

Exercice 24.

1. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $(1-z)/(1-\mathrm{i}z)$ soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $(1-z)/(1-\mathrm{i}z)$ soit imaginaire pur.
3. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixe 1, z, $1+z^2$ soient alignés.
4. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixe z, $\mathrm{i}z$, i forment un triangle équilatéral.

5. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixe z, z^2, z^3 forment un triangle rectangle au point d'affixe z.
6. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixe z, $1/z$, $1-z$ soient sur un même cercle, de centre l'origine.

Exercice 25.

1. Montrer que $(1+\mathrm{i})^6 = -8\mathrm{i}$.
2. En déduire une solution de l'équation $(E) \quad z^2 = -8\mathrm{i}$.
3. Ecrire les deux solutions de (E) sous forme algébrique, et sous forme exponentielle.
4. Déduire de la première question une solution de l'équation $(E') \quad z^3 = -8\mathrm{i}$.
5. Soit A le point d'affixe $2\mathrm{i}$. Soit B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$. Soit C l'image de B par la même rotation. Ecrire les affixes des points B et C, sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.
6. Vérifier que les affixes calculées à la question précédente sont solution de (E').
7. Montrer que le triangle ABC est équilatéral et que O est son centre de gravité.

Exercice 26. On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. On pose $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$. On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c. On note

- A' l'image de B par la rotation de centre C, et d'angle $\pi/3$
- B' l'image de C par la rotation de centre A, et d'angle $\pi/3$
- C' l'image de A par la rotation de centre B. et d'angle $\pi/3$

On note a', b' et c' les affixes respectives de A', B' et C'.

1. Calculer a', b' et c'.
2. Montrer que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes en 0.
3. Montrer que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$
4. Soit z un nombre complexe quelconque. Montrer que
$$|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = 22$$
5. On admet que quels que soient les nombres complexes z et z', $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$. Montrer que la somme de distances $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1.

A $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} 1 = 1.$

B $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} k = 1.$

C $\displaystyle\prod_{k=0}^{1} k = 1.$

D $\displaystyle\prod_{k=0}^{1} 1 = 1.$

E $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 1 = 10.$

Question 2. Soit n un entier naturel.

A $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} 2 = 2n.$

B $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} 2 = 4n+2.$

C $\displaystyle\prod_{k=0}^{2n} 2 = 2^{2n}.$

D $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} 2k = 2n(2n+1).$

E $\displaystyle\prod_{k=0}^{2n} 2(k+1) = (2n)!.$

Question 3. Soient n et k deux entiers.

A $\displaystyle\binom{n+k}{n} = \frac{n!}{k!(n+k)!}.$

B $\displaystyle\binom{n+k}{n} = \binom{n+k-1}{n} + \binom{n+k-1}{k-1}.$

C $\displaystyle\binom{n+k}{n} = \binom{n+k-1}{n} + \binom{n+k-1}{k}.$

D $\displaystyle\binom{n+k}{n} = \frac{n+k}{n}\binom{n+k-1}{n}.$

E $\displaystyle\binom{n+k}{n} = \frac{n+k}{k}\binom{n+k-1}{n}.$

Question 4. Un jeu de tarot comprend 78 cartes, dont 21 atouts. À cinq joueurs, chacun reçoit 15 cartes, et 3 cartes constituent le « chien ».

A Il y a $\displaystyle\binom{78}{3}$ chiens différents possibles.

B Il y a $\binom{57}{3}$ chiens différents ne contenant aucun atout.

C Il y a $\binom{78}{2}$ chiens différents contenant le « petit » (atout numéro 1).

D Il y a $\binom{21}{1}\binom{57}{2}$ chiens différents contenant au moins un atout.

E Il y a $\binom{21}{2}\binom{76}{1}$ chiens différents contenant au moins deux atouts.

Question 5. Soit n un entier naturel.

A $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} 2^k = 4^n - 2^n$.

B $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-9}{2}$.

C $\displaystyle\sum_{k=2}^{2n} 2^k = 4^{n+1} - 8$.

D $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} 4^k = \frac{4}{3}(16^n - 1)$.

E $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} 3^k = 3(9^n) - 3^n$.

Question 6. Soit n un entier naturel.

A $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.

B $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 2^n$.

C $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-3)^k = 2^{2n}$.

D $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-2)^k = 1$.

E $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k 3^{-k} = 1$.

Question 7.

A $|1+\mathrm{i}| = 2$.

B $\arg(1-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}$.

C $\arg(-1-\mathrm{i}) = \frac{5\pi}{4}$.

D $|3+4\mathrm{i}| = 5$.

E $\arg(1+3\mathrm{i}) = \frac{\pi}{3}$.

Question 8.

$\boxed{\text{A}}$ $\mathrm{i}^{23} = -\mathrm{i}$.

$\boxed{\text{B}}$ $(1+\mathrm{i})^9 = (1+\mathrm{i})$.

$\boxed{\text{C}}$ $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^9 = 512\mathrm{i}$.

$\boxed{\text{D}}$ $(1-\mathrm{i})^{10} = -32\mathrm{i}$.

$\boxed{\text{E}}$ $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^6 = 64$.

Question 9.

$\boxed{\text{A}}$ L'ensemble des points du plan complexe tels que $|z-\mathrm{i}| = |z+1|$ est un cercle.

$\boxed{\text{B}}$ L'ensemble des points du plan complexe tels que $|z-\mathrm{i}| = |z+\mathrm{i}|$ est l'axe des réels.

$\boxed{\text{C}}$ L'ensemble des points du plan complexe tels que $|z-\mathrm{i}| = |1+\mathrm{i}|$ est une droite.

$\boxed{\text{D}}$ L'ensemble des points du plan complexe tels que $|z+1| = |1+\mathrm{i}|$ est un cercle.

$\boxed{\text{E}}$ L'ensemble des points du plan complexe tels que $|z-\mathrm{i}| = |2z+\mathrm{i}|$ est une droite.

Question 10.

$\boxed{\text{A}}$ L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 1-\mathrm{i}z$ est une homothétie.

$\boxed{\text{B}}$ L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 1-\mathrm{i}z$ est une rotation dont le centre a pour affixe 1.

$\boxed{\text{C}}$ L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1-\mathrm{i})z$ est une rotation d'angle $-\pi/2$.

$\boxed{\text{D}}$ L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 1-\mathrm{i}z$ est une rotation d'angle $-\pi/2$.

$\boxed{\text{E}}$ L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})z$ est une rotation dont le centre est l'origine du plan complexe.

Réponses : 1–BD 2–BD 3–CE 4–AB 5–BD 6–AC 7–CD 8–AD 9–BD 10–DE

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours : Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) \quad \text{et} \quad P_n = \prod_{k=0}^{n} f(k) \; .$$

1. Soient n et m deux entiers tels que $n < m$. Exprimer à l'aide de S_n et S_m la somme $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} f(n)$. Exprimer à l'aide de P_n et P_m le produit $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{m} f(k)$.

2. Soient n et m deux entiers tels que $n \leqslant m$. Montrer que pour tout complexe z différent de 1 :
$$\sum_{k=n}^{m} z^k = \frac{z^n - z^{m+1}}{1-z} .$$
3. Soit n un entier naturel. Montrer que :
$$\sum_{k=n}^{2n} k = \frac{3}{2} n(n+1) .$$
4. En déduire que, pour tout réel positif ou nul x :
$$\prod_{k=n}^{2n} x^k = \left(\sqrt{x^3}\right)^{n(n+1)} .$$
5. Soient n et m deux entiers tels que $1 \leqslant n \leqslant m$. Montrer que :
$$\prod_{k=n}^{m} k = \binom{m}{n-1} (m-n+1)! .$$

Exercice 1 : Soit n un entier strictement positif.

1. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2(k+1) = \sum_{h=1}^{n} h(h-1)^2 .$$
2. En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n} k^2(k+1) - k(k-1)^2 = n^2(n+1) .$$
3. En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$
4. Redémontrer le résultat de la question précédente, par récurrence sur n.

Exercice 2 : Soit n un entier naturel et k un entier strictement positif. On appelle *partition de n en k entiers* un k-uplet d'entiers $(n_1, \ldots, n_k)$ tels que $n_1 + \cdots + n_k = n$. Par exemple, $(2, 3, 0, 5)$ est une partition de 10 en 4 entiers et $(3, 5, 2, 0)$ en est une autre, différente de la précédente. On note $P_{n,k}$ le nombre de partitions de n en k entiers.

1. En énumérant tous les cas possibles, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$P_{n,1} = 1 , \quad P_{n,2} = n+1 , \quad P_{0,k} = 1 , \quad P_{1,k} = k , \quad P_{2,k} = \frac{k(k+1)}{2} .$$

2. Montrer qu'il y a $P_{n,k-1}$ partitions de n en k entiers $(n_1,\ldots,n_k)$, qui sont telles que $n_1 = 0$. Montrer qu'il y en a $P_{n-1,k}$ qui sont telles que $n_1 > 0$. En déduire que :
$$P_{n,k} = P_{n,k-1} + P_{n-1,k} \ .$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$P_{n,k} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n} \ .$$
4. On considère $n+k-1$ étiquettes alignées sur une table. On en choisit $k-1$ sur lesquelles on écrit le mot « barrière ». Sur les n autres, on écrit le mot « unité ». Une fois ce choix effectué, on note :
   - n_1 le nombre d'unités à gauche de la première barrière,
   - n_i le nombre d'unités entre la $(i$–$1)$-ième et la i-ième barrière, pour $i = 2,\ldots,k$,
   - n_k le nombre d'unités à droite de la k-ième barrière.

   Vérifier que $(n_1,\ldots,n_k)$ est une partition de n en k entiers. Réciproquement, vérifier qu'à chaque partition de n en k entiers, on peut associer un choix de $k-1$ objets parmi $n+k-1$, et un seul. Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 3 :

1. Déterminer les racines carrées de $-\mathrm{i}$ dans $\mathbb{C}$, sous forme exponentielle $(\rho e^{\mathrm{i}\theta})$ et sous forme algébrique $(a + \mathrm{i}b)$. (On rappelle que les racines carrées de $-\mathrm{i}$ sont les nombres complexes z tels que $z^2 = -\mathrm{i}$).
2. Soit Δ le nombre complexe $\Delta = -50\mathrm{i}$. Déterminer les racines carrées de Δ dans $\mathbb{C}$, sous forme algébrique.
3. Déterminer, sous forme algébrique, les deux solutions complexes de l'équation :
$$z^2 + 3(1-\mathrm{i})z + 8\mathrm{i} = 0 \ .$$
4. Soit A le point du plan complexe d'affixe $2 + 2\mathrm{i}$. Soient B et C les points du plan complexe ayant pour affixes les solutions calculées à la question précédente. Représenter les trois points A, B, C dans le plan complexe. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A
5. Soit M le milieu du segment $[B, C]$, et $\mathcal{C}$ le cercle de centre M et de rayon $5\sqrt{2}/2$. Montrer que les trois points A, B, C appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.
6. Soit O l'origine du plan complexe. Calculer les affixes des images de A, B, C par la rotation de centre O et d'angle $-\pi/4$.
7. Calculer les affixes des images de A, B, C par l'homothétie de centre M et de rapport -1.

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1.
$$\sum_{k=n+1}^{m} f(k) = \left(\sum_{k=0}^{m} f(k)\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} f(k)\right) = S_m - S_n \ .$$
$$\prod_{k=n+1}^{m} f(k) = \left(\prod_{k=0}^{m} f(k)\right) / \left(\prod_{k=0}^{n} f(k)\right) = \frac{P_m}{P_n} \ .$$

2. Pour tout complexe z différent de 1, la somme de 0 à m des z^k s'écrit :
$$\sum_{k=0}^{m} z^k = \frac{1-z^{m+1}}{1-z} \ .$$
D'où le résultat pour $n=0$. Pour $n>0$:
$$\sum_{k=n}^{m} z^k = \left(\sum_{k=0}^{m} z^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right) = \frac{1-z^{m+1}}{1-z} - \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{z^n - z^{m+1}}{1-z} \ .$$

3. On connaît la somme des n premiers entiers :
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$
On en déduit :
$$\sum_{k=n}^{2n} k = \left(\sum_{k=1}^{2n} k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) = \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{3}{2}n(n+1) \ .$$

4.
$$\prod_{k=n}^{2n} x^k = x^{\sum_{k=n}^{2n} k} = x^{\frac{3}{2}n(n+1)} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{n(n+1)} = \left(\sqrt{x^3}\right)^{n(n+1)} \ .$$

5. La formule est vraie pour $n=1$, puisque dans ce cas :
$$\prod_{k=1}^{m} k = m! \quad \text{et} \quad \binom{m}{0} = 1 \ .$$
Pour $n>1$:
$$\begin{aligned}
\prod_{k=n}^{m} k &= = \left(\prod_{k=1}^{m} k\right) / \left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right) \\
&= \frac{m!}{(n-1)!} \\
&= \frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!}(m-n+1)! \\
&= \binom{m}{n-1}(m-n+1)! \ .
\end{aligned}$$

Exercice 1 : Soit n un entier strictement positif.

1. Si on pose $h = k+1$, alors $k^2(k+1) = h(h-1)^2$, et :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2(k+1) = \sum_{h=1}^{n} h(h-1)^2 \ .$$

2. $$\sum_{k=0}^{n} k^2(k+1) - k(k-1)^2 = n^2(n+1) + \sum_{k=0}^{n-1} k^2(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k(k-1)^2 \ .$$

   D'après la question précédente, les deux sommes du membre de droite sont égales. D'où le résultat.

3. $$\sum_{k=0}^{n} k^2(k+1) - k(k-1)^2 = \sum_{k=0}^{n} 3k^2 - k = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k = n^2(n+1) \ .$$

   Donc :
   $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left(n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .$$

4. Pour tout entier n, notons $H(n)$ l'hypothèse de récurrence :

$$H(n) \ : \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .$$

   Elle est vraie pour $n = 0$, puisque dans ce cas la somme est nulle. Supposons que $H(n)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=0}^{n} k^2 \\ &= (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n+1}{6}\Big(6n+6+2n^2+n\Big) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \ . \end{aligned}$$

   Donc $H(n+1)$ est vraie, donc par récurrence, $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

1. Le seul 1-uplet dont la somme vaut n est (n), donc $P_{n,1} = 1$. Les couples d'entiers dont la somme vaut n sont :

$$(0,n)\,,\ (1,n-1)\,,\ \ldots\ ,\ (n-1,1)\,,\ (n,0)\ .$$

Il y en a autant que d'entiers entre 0 et n, soit $P_{n,2} = n+1$. Il n'y a qu'un k-uplet d'entiers dont la somme vaut 0 : $(0,0,\ldots,0)$, donc $P_{0,k} = 1$. Les k-uplets d'entiers dont la somme vaut 1 sont :

$$(1,0,\ldots,0)\,,\ (0,1,0,\ldots,0)\,,\ \ldots\ (0,\ldots,0,1,0)\,,\ (0,\ldots,0,1)\,.$$

Donc $P_{1,k} = k$. Les k-uplets d'entiers dont la somme vaut 2 sont ceux dont une des coordonnées vaut deux, et tous ceux qui ont deux coordonnées égales à 1. Il y en a k du premier type et $\binom{k}{2}$ du second. :

$$P_{2,k} = k + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}\,.$$

2. Si $(0, n_2, \ldots, n_k)$ est une partition de n en k entiers, alors $(n_2, \ldots, n_k)$ est une partition de n en $k-1$ entiers. Réciproquement, si $(n_1, \ldots, n_{k-1})$ est une partition de n en k entiers, alors $(0, n_1, \ldots, n_{k-1})$ est une partition de n en k entiers. Il y a donc exactement $P_{n,k-1}$ partitions de n en k entiers, dont la première coordonnée est nulle.

   Si $(n_1, \ldots, n_k)$ est une partition de n en k entiers, et si $n_1 > 0$, alors $(n_1-1, \ldots, n_k)$ est une partition de $n-1$ en k entiers. Réciproquement si $(n_1, \ldots, n_k)$ est une partition de $n-1$ en k entiers, alors $(n_1+1, \ldots, n_k)$ est une partition de n en k entiers, dont la première coordonnée est strictement positive. Il y a donc exactement $P_{n-1,k}$ partitions de n en k entiers, dont la première coordonnée est strictement positive.

   Toutes les partitions de n ont leur première coordonnée soit nulle, soit strictement positive. Donc :

$$P_{n,k} = P_{n,k-1} + P_{n-1,k}\,.$$

3. Nous allons le démontrer par récurrence sur n, à partir de la formule précédente. Posons comme hypothèse de récurrence :

$$H(n)\ :\qquad \forall k \in \mathbb{N}^*\,,\quad P_{n,k} = \binom{n+k-1}{k-1}\,.$$

   D'après la première question, $H(0)$ est vraie. Supposons que $H(n-1)$ est vraie. Nous allons montrer, par récurrence sur k, que $H(n)$ est vraie. Pour n fixé, notons $H'(k)$ l'hypothèse de récurrence sur k :

$$H'(k)\ :\qquad P_{n,k} = \binom{n+k-1}{k-1}\,.$$

   D'après la première question, $H'(1)$ est vraie, puique $P_{n,1} = 1$. Supposons que

$H'(k-1)$ soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned} P_{n,k} &= P_{n,k-1} + P_{n-1,k} \\ &= \binom{n+k-2}{k-2} + \binom{n+k-2}{k-1} \\ &= \binom{n+k-1}{k-1}, \end{aligned}$$

en utilisant la formule du triangle de Pascal. L'hypothèse $H'(k)$ est donc vraie pour tout entier $k \geqslant 1$, donc $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Sur les $n+k-1$ étiquettes, on a choisi en tout $k-1$ barrières, et n unités. Le n-uplet d'entiers $(n_1, \ldots, n_k)$ est donc bien une partition de l'entier n en k entiers. Réciproquement, soit $(n_1, \ldots, n_k)$ une partition de n en k entiers. Plaçons n_1 étiquettes marquées « unité » sur la table, puis une marquée « barrière », puis n_2 marquées « unité », puis une marquée barrière, etc. À la fin, on place la $k-1$-ième étiquette marquée « barrière », puis n_k marquées « unité ». Au total, on a placé $n+k-1$ étiquettes, parmi lesquelles n sont marquées « unité » et $k-1$ « barrière ». On a donc défini un choix de $k-1$ objets parmi $n+k-1$.

   Nous avons montré qu'il y a exactement autant de partitions de n en k entiers, qu'il y a de choix de $k-1$ objets parmi $n+k-1$.

$$P_{n,k} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Exercice 3 :

1. Sous forme exponentielle, $-\mathrm{i}$ s'écrit $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/2+2\mathrm{i}k\pi}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Les deux nombres dont le carré vaut $-\mathrm{i}$ sont $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$ et $\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/4}$. Sous forme algébrique :

$$\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Le nombre Δ s'écrit $\Delta = \left(5\sqrt{2}\right)^2(-\mathrm{i})$. Ses racines carrées sont celles de $-\mathrm{i}$, multipliées par $5\sqrt{2}$, soit :

$$-5+5\mathrm{i} \quad \text{et} \quad 5-5\mathrm{i}.$$

3. Le discriminant de cette équation est :

$$\Big(3(1-\mathrm{i})\Big)^2 - 4(8\mathrm{i}) = -18\mathrm{i} - 32\mathrm{i} = -50\mathrm{i} = \Delta.$$

   Les deux solutions sont :

$$\frac{1}{2}\Big(-3+3\mathrm{i}+(-5+5\mathrm{i})\Big) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\Big(-3+3\mathrm{i}+(5-5\mathrm{i})\Big),$$

   soit :

$$-4+4\mathrm{i} \quad \text{et} \quad 1-\mathrm{i}$$

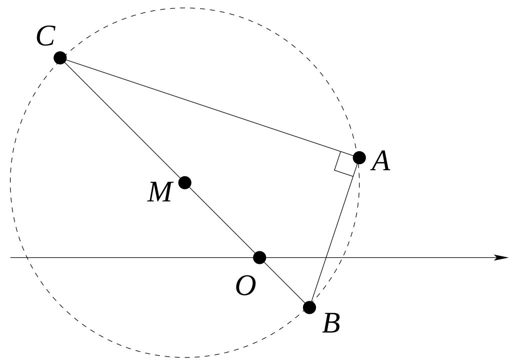

FIGURE 7 – Triangle rectangle et cercle circonscrit.

4. Figure 7.
Soient z_A, z_B, z_C les affixes respectives des points A, B, C.

$$z_A = 2 + 2\mathrm{i} \;, \quad z_B = 1 - \mathrm{i} \;, \quad z_C = -4 + 4\mathrm{i} \;.$$

Pour démontrer que le triangle ABC est rectangle en A, il suffit de démontrer que le nombre complexe $(z_B - z_A)/(z_C - z_A)$ a pour argument $\pi/2$ modulo π, c'est-à-dire que c'est un imaginaire pur.

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1 - 3\mathrm{i}}{-6 + 2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{2} \;.$$

5. Le point M a pour affixe :

$$z_M = \frac{z_B + z_C}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i} \;.$$

Le cercle $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie :

$$|z - z_M| = \frac{5\sqrt{2}}{2} \;.$$

Pour montrer que A, B, C appartiennent au cercle $\mathcal{C}$, il suffit de vérifier que les trois modules $|z_A - z_M|$, $|z_B - z_M|$ et $|z_C - z_M|$ sont égaux à $5\sqrt{2}/2$. Or :

$$z_A - z_M = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \implies |z_A - z_M| = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \;,$$

$$z_B - z_M = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\mathrm{i} \implies |z_B - z_M| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \;,$$

$$z_C - z_M = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i} \implies |z_C - z_M| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \;.$$

6. L'image du point d'affixe z par la rotation de centre O et d'angle $-\pi/4$ est le point d'affixe z' tel que $z' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}z$. Les images respectives de A, B et C sont les points d'affixes :

$$z'_A = 2\sqrt{2}\;,\quad z'_B = -\mathrm{i}\sqrt{2}\;,\quad z'_C = 4\mathrm{i}\sqrt{2}\;.$$

7. L'image du point d'affixe z par l'homothétie de centre M et de rapport -1 est le point d'affixe z' tel que $z' = z_M - (z - z_M)$. Comme M est le milieu du segment $[B, C]$, l'image de B est C et l'image de C est B. L'image de A est le point d'affixe :

$$z'_A = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i} - \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -5 + \mathrm{i}\;.$$

3 Compléments

3.1 Qu'on m'aille quérir M. Viète

Au service successivement de Charles IX, Henri III, puis Henri IV, François Viète (1540–1603) était plus connu de son vivant comme avocat, membre du conseil du Roi, maître des requêtes, que comme mathématicien. Pourtant il est l'un des premiers à avoir systématisé l'usage des lettres pour symboliser des variables, ouvrant ainsi la voie au calcul algébrique moderne. À partir de 1591, Viète commence à publier, à ses frais et à l'usage de ses amis, l'exposé systématique de sa théorie mathématique, qu'il nomme « logistique spécieuse » (de specis : symbole) ou art du calcul sur des symboles. Il développe d'abord les fondements de cette nouvelle algèbre dans son « Isagoge », puis en donne la même année des applications essentielles dans ses « Zététiques ». D'autres livres viendront compléter l'exposé de cette théorie, qui permet de résoudre des familles d'équations algébriques de degré 2 à 4 en donnant un sens géométrique à ces résolutions. Dans un premier temps, Viète recommande de noter toutes les grandeurs en présence, ainsi que leurs relations, en utilisant son symbolisme, puis de résumer le problème sous forme d'une équation. La notation de Viète est loin de celle que nous utilisons : il n'avait pas de signe pour l'égalité, ni pour la multiplication, ni pour les opérateurs de comparaison, et surtout il avait fait le choix de noter les paramètres par des consonnes et les inconnues par des voyelles, ce qui rendait le texte peu lisible. Le choix des premières lettres a, b, c pour les paramètres et des dernières x, y, z pour les inconnues est celui de Descartes, un demi-siècle après Viète.

À partir de 1588, la fonction principale de Viète est de décrypter les codes secrets ennemis, et ses succès donnent un avantage réel à la diplomatie française. Dans deux de ses lettres à Henri IV, le mathématicien s'y déclare explicitement « interprète et déchiffreur du Roy ». En 1590, pour des raisons diplomatiques, et sans doute avec l'aval d'Henri IV, il publie une lettre du commandeur Moreo au Roi d'Espagne, qu'il a déchiffrée. Furieux de voir son code découvert, Philippe II porte plainte auprès du Pape, accusant le roi de France d'user de magie et Viète d'être un nécromant. Le Pape, dont les services décodaient les lettres espagnoles depuis plusieurs années, s'empressa de ne pas donner suite, et l'on rit beaucoup à la cour de France... Du moins est-ce ainsi que l'on raconte l'histoire habituellement, aux dépens des espagnols. Peut-être est-ce un peu rapide : l'homologue de Viète auprès de Philippe II, Luis Valle del Cerdo, ne se privait pas pendant ce temps de déchiffrer les lettres d'Henri IV ! Toujours est-il que le mémoire de Viète, adressé à Sully quelques jours avant sa mort et décrivant sa méthode pour le déchiffrement des codes espagnols, est considéré comme un des textes fondateurs de la cryptologie.

Une anecdote montre la haute estime en laquelle Henri IV tenait son déchiffreur ; elle est rapportée par Tallemant des Réaux.

> Du temps d'Henri IV, un Hollandais, nommé Adrianus Romanus, savant aux mathématiques, mais non pas tant qu'il croyait, fit un livre où il mit

> une proposition qu'il donnait à résoudre à tous les mathématiciens de l'Europe ; or, en un endroit de son livre il nommait tous les mathématiciens de l'Europe, et n'en donnait pas un à la France. Il arriva peu de temps après qu'un ambassadeur des États vint trouver le Roi à Fontainebleau. Le Roi prit plaisir à lui en montrer toutes les curiosités, et lui disait les gens excellents qu'il y avait en chaque profession dans son royaume. « Mais, Sire, – lui dit l'ambassadeur – vous n'avez point de mathématiciens, car Adrianus Romanus n'en nomme pas un de français dans le catalogue qu'il en fait. « Si fait, si fait – dit le Roi – j'ai un excellent homme : qu'on m'aille quérir M. Viète. » M. Viète avait suivi le conseil, et était à Fontainebleau ; il vient. L'ambassadeur avait envoyé chercher le livre d'Adrianus Romanus. On montre la proposition à M. Viète, qui se met à une des fenêtres de la galerie où ils étaient alors, et avant que le roi en sortît, il écrivit deux solutions avec du crayon. Le soir il en envoya plusieurs à cet ambassadeur, et ajouta qu'il lui en donneroit tant qu'il lui plairait, car c'était une de ces propositions dont les solutions sont infinies.

Ut legi, ut solvi (aussitôt lu, aussitôt résolu) commente sobrement Viète.

3.2 L'homme qui savait tout... ou pas

Athanase Kircher (1601–1680) est-il né un siècle ou deux trop tard ? S'il avait été contemporain de Nostradamus (1503–1566) ou bien de Giovanni Pico de la Mirandola (1463–1494), peut-être aurait-il éclipsé ses illustres prédécesseurs, tant son savoir semblait infini. Optique, géologie, astronomie, égyptologie, acoustique, sinologie, kabbale, alchimie... rares sont les domaines qu'il n'ait pas gratifié de quelques milliers de pages richement illustrées. Oui mais voilà : en ce XVII[e] siècle où Galilée, Pascal, Descartes et bien d'autres luttaient pour mettre au monde l'esprit scientifique, savoir sans comprendre, affirmer sans justifier était passé de mode. Or, si le savoir de Kircher semblait n'avoir aucune limite, son imagination et son aplomb pour asséner les énormités les plus invraisemblables allaient de pair. Crédulité, naïveté extrême, mégalomanie ? Voici ce que lui écrivit F. Redi après la parution d'un de ses ouvrages sur la Chine (où il n'avait jamais mis les pieds, contrairement aux missionnaires dont il avait plagié les récits).

> Vous soutenez que dans les mers de la Chine on pêche certains poissons à écailles de couleur safran, qui tout l'hiver habitent dans l'eau, mais le printemps arrivé, ayant jeté leurs écailles, se recouvrent de plumes, et ouvrant leurs ailes, s'envolent vers les forêts des montagnes où ils vivent tout l'été et l'automne, à la fin duquel ils retournent s'ébrouer dans les eaux, reprenant leur ancienne forme de poisson. Bien que vous-même, illustre Père, dans votre livre de la Chine illustrée, montrez clairement de le croire, moi au contraire, je suis d'avis qu'au fond de votre cœur vous ne le croyez pas, et que vous avez seulement le but de montrer le mieux possible la hauteur

> de votre intelligence, et la profondeur de votre doctrine, méditant et racontant les causes de ces métamorphoses successives, en espérant qu'elles soient vraies et peu distantes des habituelles lois de la nature.

Descartes était plus expéditif : « Ledit [Kircher] a quantité de forfanteries, et est plus charlatan que savant ». Il faut tout de même rendre à Kircher cette justice : dans un siècle passionnément religieux, où la gaudriole n'était pas toujours de mise, le « bon Père Athanase » a fourni maints sujets de rigolade. Contemporain de Kircher, Molière (Les Précieuses ridicules, Le Bourgeois gentilhomme, Les Femmes savantes) avait certainement en tête quelques modèles bien réels, mais il ne les a pas dévoilés. D'autres n'eurent pas sa retenue. Quand J.B. Mencke publie en 1721 « De la charlatanerie des savans », augmenté des remarques critiques (et jubilatoires) de divers autres auteurs, Kircher est une cible de choix.

> On dit qu'à Rome, une jeunesse badine, ayant résolu de se divertir aux dépens de ce Jésuite, grava plusieurs figures fantasques sur une pierre informe, qu'ils enterrèrent dans un endroit, où ils savaient qu'on devait bâtir dans peu. Qu'arriva-t-il ? Bientôt les ouvriers s'assemblent ; bientôt on creuse la terre pour jeter les fondements du nouvel édifice, et bientôt on rencontre la pierre, ce nouveau reste de l'Antiquité ; monument d'autant plus admirable, que la fureur du temps l'a respecté tout entier. On cherche un *Oedipe* ; c'est le Père : on lui présente la pierre. À ce spectacle, il sent des transports de joie qui ne se peuvent dire, il saute, il trépigne, et comme s'il était inspiré d'Apollon, il fait à l'instant le plus beau discours du monde, sur la signification des croix, des lignes, des cercles, et de tous les traits irréguliers, dont la pierre était chargée : jamais tant d'éloquence, ni tant d'érudition.

Vous vous doutez bien que les mathématiques (qu'il enseignait) n'allaient pas échapper à la production d'un esprit aussi universel. Après une « démonstration » de la quadrature du cercle qui fit bien rire les mathématiciens de l'Europe, il récidiva quelques années plus tard en publiant son « Ars Magna Sciendi, sive Combinatoriae » : quelque 500 pages d'élaborations fumeuses pillant sans trop de vergogne les travaux de Ramón Llull (antérieurs de plus de trois siècles). À la page 157 de cet ouvrage mémorable, on trouve une « Table générale, de laquelle les conjugaisons possibles de toutes choses peuvent se calculer simplement ». Suit la liste des valeurs de $n!$, pour n allant de 1 à 50. Devinez quoi ? Ces valeurs sont fausses à partir de la 39e. Euh… avant de ricaner, essayez donc de calculer 50! à la main sans vous tromper !

3.3 Triangle de Pascal, binôme de Newton et poésie védique

Dans le chapitre IV de son « Traité du Triangle Arithmétique », Pascal expédie en deux pages l'utilisation des coefficients binomiaux pour calculer des puissances de binômes, puis il conclut : « Je ne donne pas la démonstration de tout cela, parce que d'autres en ont déjà traité, comme Hérigone, outre que la chose est évidente d'elle-même. »

Pascal n'a jamais prétendu avoir inventé son triangle, qui était connu en Europe depuis plus d'un siècle : il apparaît entre autres dans les travaux de Apianus (1527), Stifel (1544), Scheubel (1545), Tartaglia (1556), Bombelli (1572). Le même tableau et son application au développement de $(a+b)^n$, étaient connus des mathématiciens arabes depuis al-Karaji (1000) et chinois depuis Chia Hsien (1100). Mais tous ignoraient que les mathématiciens indiens l'avaient découvert bien longtemps avant.

Dans les poèmes en ancien Sanskrit [1], la musique des vers provient en grande partie de l'alternance des syllabes courtes ou longues. Pour la poésie védique, les vers pouvaient contenir de 1 à 13 syllabes ; se posait alors la question d'énumérer les rythmes différents (alternances de syllabes courtes ou longues) que l'on pouvait former avec un nombre fixé de syllabes. Dans son traité Chandrahsūtra, Pingala (IIe siècle av. J.C. ?) donne de manière assez cryptique la manière de décomposer tous les vers de n syllabes. La voici, par son commentateur Halāyudha (Xe siècle).

> Ici est expliquée la règle de développement pyramidal (meru-prastāra) des combinaisons d'une, deux etc., syllabes formées de sons courts et longs. Après avoir dessiné un carré en haut, deux carrés sont dessinés en dessous, de sorte que la moitié de chacun soit étendu de chaque côté. En-dessous trois carrés, en-dessous quatre carrés sont dessinés et le processus est répété jusqu'à atteindre la pyramide désirée. Dans le premier carré, le symbole pour un doit être placé. Ensuite dans chacun des deux carrés de la seconde ligne, le chiffre un est placé. Ensuite sur la troisième ligne le chiffre un est placé dans chacun des carrés extrêmes. Dans le carré du milieu la somme des chiffres des deux carrés immédiatement au-dessus doit être placée. Dans la quatrième ligne, un doit être placé dans chacun des deux carrés extrêmes. Dans chacun des deux carrés intermédiaires, la somme des chiffres des deux carrés immédiatement au-dessus, c'est-à-dire trois, doit être placée. Les carrés suivants sont remplis de cette manière. Ainsi la seconde ligne donne le développement des combinaisons d'une syllabe ; la troisième ligne la même chose pour deux syllabes, la quatrième ligne pour trois syllabes, et ainsi de suite.

C'est bien la construction du triangle arithmétique. Pingala savait énumérer les manières d'écrire n syllabes courtes ou longues, ce qui représente, après le Yi Jing, la seconde plus ancienne énumération binaire connue. Cela ne donne pas exactement la formule du binôme de Newton, mais c'est tout de même plutôt remarquable.

À propos, que vient faire Newton dans cette affaire ? Vers 1665, il généralisa la formule du binôme à des exposants réels quelconques (et plus seulement des entiers positifs), en remplaçant les sommes finies par des séries infinies. Mais ceci est une autre histoire, que nous vous raconterons un jour...

1. Amulya Kumar Bag : Binomial Theorem in ancient India, *Indian Journal of History of Sciences p. 68–74 (1966)*

3.4 Les formules de Ramanujan

Srinivasa Ramanujan (1887-1920) avait appris tout seul les mathématiques, grâce à deux livres seulement. Admis en 1903 dans un collège gouvernemental du sud de l'Inde, il était tellement obnubilé par ses recherches qu'il échoua à ses examens, et ce quatre ans de suite. Ayant obtenu un poste dans un comptoir de Madras, ses supérieurs l'encouragèrent à envoyer ses résultats à d'éminents mathématiciens anglais. Seul G.H. Hardy (1877–1947) fit l'effort de s'intéresser à la lettre qu'il reçut le 16 janvier 1913, et qui contenait 120 formules. L'écriture mathématique était particulière et aucune justification n'était fournie. Ramanujan n'aura d'ailleurs jamais une idée claire de ce qu'est une démonstration. Il disait : « une équation pour moi n'a aucun sens, à moins qu'elle n'exprime une pensée de Dieu ».

Après quelques heures d'effort, Hardy reconnut certaines formules ; d'autres étaient erronées. Mais un grand nombre étaient totalement nouvelles. Hardy déclara « un coup d'œil sur ces formules était suffisant pour se rendre compte qu'elles ne pouvaient être pensées que par un mathématicien de la plus grande classe. Elles devaient être vraies, car si elles ne l'étaient pas, personne n'aurait eu assez d'imagination pour les inventer ».

Hardy invita Ramanujan à Cambridge où il séjourna de 1914 à 1919. Au fil du temps, la santé de Ramanujan déclinait, et son régime strictement végétarien ainsi que les restrictions dues à la première guerre mondiale ne l'amélioraient pas. Il retourna en Inde, ou il mourut à seulement 32 ans. Personne, pas même Hardy, n'avait eu le temps de comprendre d'où lui venaient ses intuitions géniales. Il fit dans sa vie environ 6000 découvertes qu'il consignait dans des carnets. Le déchiffrage de ces carnets a occupé de nombreux mathématiciens tout au long du XX$^{\text{e}}$ siècle.

Voici une des nombreuses formules que Ramanujan donna pour le calcul de π : elle date de 1910 mais ne fut démontrée qu'en 1985.

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{1103+26390n}{396^{4n}}}\,.$$

3.5 Le Rapido

Voulez-vous calculer vos chances de gagner au Bridge, au Poker, au Loto, au Keno ? Le procédure est à peu près la même et vous avez tous les outils en main.

Commençons par une formule générale, qui vous servira pour tous les jeux de hasard. Soit N un entier au moins égal à 2. Soient m et n deux autres entiers inférieurs ou égaux à N.

$$\binom{N}{n} = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k} \tag{8}$$

On peut démontrer cette formule par récurrence, en utilisant les propriétés des coefficients du binôme, mais il est plus intéressant de la comprendre. Disons que N est un nombre d'objets parmi lesquels vous vous apprêtez à en piocher n : $N = 52$ cartes et vous en recevez $n = 13$ (Bridge) ; $N = 32$ cartes et vous en recevez $n = 5$ (Poker) ; $N = 49$ numéros et vous en cochez $n = 6$ (Loto) etc. . . Parmi les N objets, m sont *marqués* et ce sont ceux qui peuvent vous faire gagner : $m = 4$ as au bridge, $m = 6$ numéros du tirage officiel au loto, etc. . .

Vous avez $\binom{N}{n}$ choix possibles. Ces choix se répartissent selon le nombre d'objets marqués que vous aurez en main. Il peut y en avoir au plus $\min\{m, n\}$. Comment constituer une sélection de n objets en tout, parmi lesquels k sont marqués ? Il faut choisir les k objets marqués parmi m en tout : $\binom{m}{k}$ façons de le faire. Il faut ensuite choisir $n - k$ objets non marqués parmi $N - m$: $\binom{N-m}{n-k}$ possibilités. La formule (8) traduit cette décomposition.

Comme cas particulier, voici comment décomposer le nombre de mains au bridge (13 cartes distribuées sur 52) en fonction du nombre d'as qu'elles contiennent.

$$\binom{52}{13} = \binom{4}{0}\binom{48}{13} + \binom{4}{1}\binom{48}{12} + \binom{4}{2}\binom{48}{11} + \binom{4}{3}\binom{48}{10} + \binom{4}{4}\binom{48}{9} .$$

Comment en déduire vos chances d'avoir 4 as dans une main ? C'est facile, il suffit de diviser le nombre de mains contenant 4 as par le nombre total de mains.

$$\frac{\binom{4}{4}\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} \simeq 0.002641 .$$

Le Rapido, comme son nom l'indique, ne demande pas une réflexion très puissante, et les résultats défilent toutes les 10 minutes sur un écran de télé. Pour jouer, vous cochez 8 numéros parmi 20 sur la grille A, et 1 numéro parmi 4 sur la grille B. Les « bons » numéros affichés à la télé sont choisis de même. Vous pouvez donc avoir k bons numéros (k entre 0 et 8) sur la grille A et 0 ou 1 sur la grille B. Vos chances d'avoir k bons numéros sur la grille A sont de :

$$\frac{\binom{8}{k}\binom{12}{8-k}}{\binom{20}{8}} .$$

Pour avoir vos chances d'avoir en plus le bon numéro de la grille B, multipliez par 1/4. Voici les probabilités pour k allant de 0 à 8 et $b = 0$ ou 1 selon que vous avez ou non le numéro de la grille B.

$b\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.00295	0.03772	0.15404	0.26406	0.20630	0.07335	0.01100	0.00057	0.00001
1	0.00098	0.01257	0.05135	0.08802	0.06877	0.02445	0.00367	0.00019	0.00000

Vos chances d'avoir au moins 3 bons numéros sur la grille A sont de 74%, ce qui vous encourage à jouer. Cependant vous ne gagnez qu'à partir de 4 bons numéros. Voici les gains en euros offerts pour 1 euro misé, pour chacune des combinaisons gagnantes.

$b\backslash k$	4	5	6	7	8
0	0	2	10	50	1000
1	1	6	30	150	10000

D'après les probabilités calculées plus haut, sur 100 000 joueurs payant chacun 1 euro, environ 6877 gagneront 1 euro, environ 7335 gagneront 2 euros, environ 2445 gagneront 6 euros, ... Au total, la Française des Jeux reversera en moyenne 66 518 euros, pour 100 000 euros de mise empochés.

3.6 Si non è vero, è bene trovato

Voici comment Daniel Kehlmann raconte les déboires scolaires du jeune Karl Friedrich Gauss (1777-1855) [2].

> Le maître d'école s'appelait Büttner et il aimait rosser ses élèves. Il feignait d'être sévère et ascétique, et, en quelques rares occasions, l'expression de son visage révélait le plaisir qu'il prenait à les rouer de coups. Ce qu'il aimait par dessus tout, c'était leur donner des problèmes qui demandaient beaucoup de temps et qui étaient malgré tout presque impossibles à résoudre sans faire d'erreur, si bien qu'à la fin, il avait une raison valable pour sortir le bâton. Cela se passait dans le quartier le plus pauvre de Brunswick, aucun de ces enfants n'irait jamais à l'école secondaire, personne ici ne travaillerait autrement qu'avec ses mains. Gauss savait que Büttner ne pouvait pas le souffrir. Il avait beau se taire et répondre aussi lentement que les autres, il percevait la méfiance du maître, il sentait que ce dernier n'attendait qu'une occasion de le frapper un peu plus fort que le reste du groupe.
>
> Et un beau jour, il lui fournit une occasion.
>
> Büttner leur avait demandé d'additionner tous les nombres de un à cent. Cela prendrait des heures, et même avec la meilleure volonté du monde, ce n'était pas possible sans faire à un moment ou à un autre une erreur de calcul, pour laquelle on pouvait alors être puni. Au travail, avait crié Büttner, qu'ils ne restent pas là à bailler aux corneilles, au travail, et plus vite que ça ! Par la suite, Gauss fut incapable de dire si, ce jour-là, il était plus fatigué que d'habitude, ou seulement étourdi. Toujours est-il qu'il n'avait pas réussi à se contrôler et qu'au bout de trois minutes, il s'était retrouvé devant le pupitre du maître, avec son ardoise sur laquelle ne figurait qu'une seule et unique ligne.
>
> Bon, dit Büttner, et il saisit le bâton. Son regard tomba sur le résultat et sa main se figea. Qu'est-ce que c'est que ça ?
>
> Cinq mille cinquante.

2. *Les arpenteurs du monde*, Editions Actes Sud (2006), traduit de l'allemand par Juliette Aubert

> Quoi ? Gauss resta sans voix, il se racla la gorge, il transpirait. Il ne souhaitait qu'une chose, être encore assis à sa place et calculer comme les autres qui, la tête penchée, faisaient mine de ne pas écouter. C'était pourtant bien cela qu'il fallait faire, dit-il, additionner tous les nombres de un à cent. Cent plus un faisaient cent un. Quatre-vingt dix-neuf plus deux faisaient cent un. Quatre-vingt dix-huit plus trois faisaient cent un. Toujours cent un. On pouvait répéter l'opération cinquante fois. Donc : cinquante fois cent un.
>
> Büttner ne dit rien.
>
> Cinq mille cinquante, répéta Gauss en espérant que, pour une fois, le maître comprendrait.
>
> Cinquante fois cent un faisait cinq mille cinquante. Gauss se frotta le nez. Il était au bord des larmes.
>
> Que Dieu me damne dit Büttner. Sur quoi il se tut pendant un long moment. Son visage travaillait : le maître rentra les joues, son menton s'allongea, il se frotta le front et se tapota le nez. Puis il renvoya Gauss à sa place : qu'il s'assoie, qu'il se taise et reste après les cours.

Brian Hayes[3] a recensé pas moins de 111 versions différentes de cette histoire. L'origine ? L'éloge funèbre de Gauss, prononcé en 1856 par un de ses amis, Wolfgang Sartorius von Waltershausen. Voici le paragraphe où apparaît l'anecdote. L'histoire est assez sensiblement différente, les nombres de un à cent ne sont pas mentionnés, pas plus que la méthode par laquelle Gauss aurait trouvé le résultat.

> Le jeune Gauss venait juste d'arriver dans cette classe quand Büttner donna en exercice la sommation d'une suite arithmétique. À peine avait-il donné l'énoncé que le jeune Gauss jeta son ardoise sur la table en disant « la voici ». Tandis que les autres élèves continuaient à compter, multiplier et ajouter, Büttner, avec une dignité affectée, allait et venait, jetant de temps en temps un regard ironique et plein de pitié vers le plus jeune de ses élèves. Le garçon restait sagement assis, son travail terminé, aussi pleinement conscient qu'il devait toujours l'être une fois une tâche accomplie, que le problème avait été correctement résolu et qu'il ne pouvait y avoir d'autre réponse.

Que Gauss ait eu très jeune des capacités propres à impressionner son maître d'école Büttner, est avéré : il obtint grâce à celui-ci et à son assistant Bartels le droit l'aller gratuitement au lycée, et plus tard une bourse du duc de Brunswick. Qu'il ait compris à huit ans comment additionner les nombres de un à cent l'est moins. Mais après tout, un conte de fées n'est peut-etre pas inapproprié pour celui qui est resté dans l'histoire comme « le Prince des mathématiciens ».

3. B. Hayes : Gauss's day of reckoning, American Scientist (2006), Vol. 94(3), p. 200

3.7 La marquise de Tencin

Claudine Alexandrine Guérin, marquise de Tencin (1682-1749) était une femme du siècle des lumières. Née à Grenoble, elle fut placée au couvent de Montfleury à l'âge de 8 ans. Contrainte de prononcer ses vœux afin que sa famille puisse disposer de ses biens, elle se révolta et, dès la mort de son père en 1705, après avoir déposé une protestation chez un notaire, elle s'enfuit du couvent. Relevée de ses vœux par le pape en 1712, elle gagna Paris où elle se lança dans l'intrigue politique et la galanterie. On lui prêta de nombreux amants, parmi lesquels le chevalier Destouches, dont elle eut un fils en 1717. Abandonné dès sa naissance sur les marches de la chapelle de Saint-Jean-le-Rond près de Notre-Dame, ce fils fut baptisé Jean Le Rond.

À 12 ans, il entre au collège janséniste des Quatre-Nations, où il étudie la philosophie, le droit et les arts, et devient avocat en 1738. Il s'intéresse à la médecine et aux mathématiques. Il s'était d'abord inscrit sous le nom de Daremberg, puis il le change en d'Alembert, nom qu'il conservera toute sa vie. Il est un des maîtres d'œuvre de l'Encyclopédie, dont le premier tome paraît en 1751.

En 1743 dans son Traité de Dynamique, il énonce le théorème fondamental de l'algèbre, qui dit que tout polynôme de degré n à coefficients complexes possède n racines dans $\mathbb{C}$ (ceci avait déjà été conjecturé par Girard au début du XVII^e siècle). La démonstration que d'Alembert donne de ce résultat est incomplète, et il faudra attendre Carl Friedrich Gauss (1777–1855) pour une démonstration rigoureuse. En fait, celui-ci en donnera 4 tout au long de sa vie, clarifiant au passage considérablement la notion de nombre complexe.

Et Madame de Tencin ? On raconte que dès les premiers succès de son fils, elle désira se rapprocher de lui et le fit venir dans le salon littéraire (et aussi politique et financier) qu'elle tenait à Paris. D'Alembert y vint accompagné de sa mère adoptive, et se montra très froid à l'égard de la belle marquise…

3.8 Equations résolubles par radicaux

On résout des équations du premier et du second degré au moins depuis les Babyloniens, au début du deuxième millénaire avant notre ère, mais ce n'est que depuis les XVI^e et surtout XVII^e siècles que zéro et les nombres négatifs sont traités de la même façon que les nombres positifs. Ainsi il y avait avant une théorie pour l'équation $x^2 = ax + b$ et une autre pour $x^2 + ax = b$, a et b étant supposés positifs.

Au début du IX^e siècle Al Khawarizmi (dont le nom a donné algorithme) décrit la méthode de résolution des équations du second degré, pratiquement telle que vous la connaissez (mais en supposant que le discriminant est positif ou nul). Il faudra attendre sept siècles et une belle bagarre avant que l'on sache résoudre les équations de degrés 3 et 4. Elle mit aux prises essentiellement deux mathématiciens italiens de la renaissance, Niccolò Fontana, dit Tartaglia (1499-1557) et Girolamo Cardano (1501-1576) (l'inventeur du joint de Cardan) : si vous êtes sages, nous vous la raconterons dans un autre chapitre.

Voici ce que l'on appelle de manière assez injuste les « formules de Cardan ». Considérons l'équation :

$$(E) \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \; ,$$

avec $a \neq 0$. En divisant par a puis en posant $z = x + b/(3a)$, on obtient l'équation

$$(E') \qquad z^3 + pz + q = 0 \; ,$$

où

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{27a^3} \; .$$

Si $4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$, La formule suivante donne une solution réelle en z :

$$z_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}} \; . \tag{9}$$

Tartaglia et Cardan n'utilisaient leurs formules que pour des équations dont on savait à l'avance qu'elles avaient des solutions réelles. Quand tout se passait bien, (9) donnait cette solution réelle. En factorisant par $(z - z_0)$, on se ramenait à une équation de degré 2 que l'on savait résoudre.

Cardan, puis Bombelli furent intrigués par l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$, dont 4 est racine. Pourtant, la formule de Cardan donne comme solution

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \; .$$

En fait dans le cas général (9) définit six nombres complexes, parmi lesquels seulement trois sont solutions de l'équation (E'). En effet, si u est tel que $u^3 = z$, les deux autres racines cubiques de z sont ju et $\overline{j}u$, où $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ et $\overline{j} = j^2 = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$ sont les deux racines cubiques de l'unité différentes de 1. Voici la solution complète de (E').

1. Si $4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$, soient u et v les deux réels tels que

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}} \quad \text{et} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}$$

   Les trois solutions de (E') sont

$$z_1 = u + v \; , \quad z_2 = ju + \overline{j}v \; , \quad z_3 = \overline{j}u + jv \; .$$

   L'équation (E') a une solution réelle, et deux solutions complexes conjuguées.

2. Si $4p^3 + 27q^2 < 0$, soit u un des complexes tels que :

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{-4p^3 - 27q^2}{27}} \; .$$

   Les trois solutions de (E') sont :

$$z_1 = u + \overline{u} \; , \quad z_2 = ju + \overline{j}\overline{u} \; , \quad z_3 = \overline{j}u + j\overline{u} \; .$$

   L'équation (E') a trois solutions réelles, même s'il faut passer par les complexes pour les écrire.

En 1540, un élève de Cardan, Ludovico Ferrari donne des expressions explicites pour les solutions d'équations de degré 4, mais le problème des solutions non réelles demeure. En 1572, Bombelli surmonte sa répulsion à l'égard des racines carrées de nombres négatifs et écrit le nombre « più di meno », c'est-à-dire i, puis définit les règles que vous connaissez, en particulier « più di meno via più di meno fa meno » : $\mathrm{i} \times \mathrm{i} = -1$. On constata bientôt qu'en acceptant les racines complexes et en comptant ces racines avec leur multiplicité, toute équation de degré 2 avait 2 racines, toute équation de degré 3 en avait 3 et toute équation de degré 4 en avait 4. Ceci fut énoncé par Girard en 1629, puis Descartes en 1637.

Et les équations de degré 5 ? On chercha longtemps une « résolution par radicaux » : une formule générale ne faisant intervenir que les opérations de $\mathbb{C}$ et l'extraction de racines. Le mémoire sur la résolution algébrique des équations que Joseph Louis Lagrange (1736–1813) publia en 1772 était une avancée importante. Il proposait une théorie ramenant le problème à l'étude des différentes valeurs que peuvent prendre certaines fonctions des racines lorsque l'on permute ces racines entre elles. Il y montrait aussi que les méthodes qui avaient conduit à la résolution des équations de degrés 2 3 et 4 ne pouvaient pas fonctionner sur une équation de degré 5 générale. Il s'écoula encore 60 ans avant qu'Evariste Galois (1811–1832) ne comprenne que la résolubilité par radicaux était liée aux propriétés du groupe des permutations des racines. Une conséquence de la théorie de Galois était la démonstration du fait que les équations de degré 5 n'étaient pas résolubles par radicaux en général. Ce n'est qu'en 1870, avec la parution du « Traité des substitutions et des équations algébriques » de Camille Jordan (1838–1922) que l'ampleur des conceptions de Galois fut pleinement comprise.

Il faut dire que Galois avait exposé ses idées dans des articles plutôt mal écrits, souvent incomplets, ainsi que dans une lettre à un ami, fébrilement écrite dans la nuit du 29 mai 1832. Elle se terminait par ces mots : « Après cela, il y aura j'espère des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis. Je t'embrasse avec effusion ». Le lendemain matin, il mourait des suites d'un duel ; il avait 21 ans.