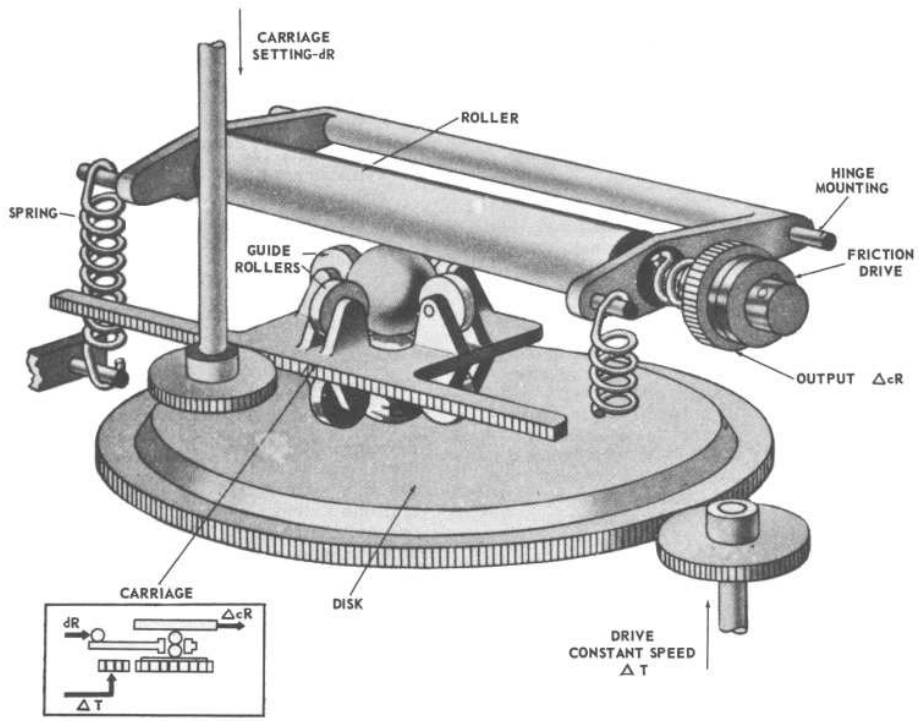
Cours 2: Calcul propositionnel. Calcul des prédicats. Complétude.



Olivier Bournez
bournez@lix.polytechnique.fr

Ecole Polytechnique
INF423

Rappels

Page du cours.

Commentaires, avis
sur les cours et les PCs.

- Page du cours:
  www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF423.

- Exprimez des commentaires, avis sur les cours et les PCs:
  email à bournez@lix.polytechnique.fr, ou
  www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF423/AVIS.

Rappels

Page du cours.

Commentaires, avis
sur les cours et les PCs.

- Page du cours:
  www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF423.
  - Les sujets et corrections des PCs sont en ligne.
- Exprimez des commentaires, avis sur les cours et les PCs:
  email à bournez@lix.polytechnique.fr, ou
  www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF423/AVIS.

Au menu

Logique ?

Calcul propositionnel

Calcul des prédicats

Exemples de théories du premier ordre

Théorème de complétude

Pourquoi s'intéresser à de la logique ?

- Un moyen de description :
  - des objets ;
  - et de leurs propriétés.

- Un moyen de faire des raisonnements :

Pourquoi s'intéresser à de la logique ?

- Un moyen de description :
  - des objets ;
  - et de leurs propriétés.

  Questions :
  - que décrit-on ?
  - que peut-on décrire ?

- Un moyen de faire des raisonnements :

Pourquoi s'intéresser à de la logique ?

- Un moyen de description :
  - des objets ;
  - et de leurs propriétés.

  Questions :
  - que décrit-on ?
  - que peut-on décrire ?

- Un moyen de faire des raisonnements :

  Questions :
  - qu'est-ce qu'un raisonnement ?
  - peut-on s'assurer de la cohérence des raisonnements ?
  - peut-on mécaniser le raisonnement ?

Domaines

- Mathématiques.
- Informatique :
  - intelligence artificielle, ...
  - vérification, preuve assistée, conception sûre, ...
  - programmation,
  - spécification, bases de données, ...
  - ...

Ingrédients d'un système logique

En général, on décrit une logique par les éléments suivants :

- **syntaxe** :
  - qu'est-ce qu'une formule ?
  - comment s'écrit-elle ?
- **sémantique** :
  - quel est le sens donné à chaque formule ?
- **système de déduction** :
  - une méthode de preuve pour déterminer si une formule est **vraie**.

Au menu

Logique ?

Calcul propositionnel

Calcul des prédicats

Exemples de théories du premier ordre

Théorème de complétude

Rappels

- La **logique propositionnelle** permet essentiellement de discuter des connecteurs grammaticaux comme la négation ($\neg$), la conjonction ($\wedge$) et la disjonction ($\vee$), en composant des propositions à partir de propositions données.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

- Elle permet essentiellement de parler de **fonctions booléennes**, c'est-à-dire de fonctions de $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$. En effet, les variables, c'est-à-dire **les propositions**, ne peuvent prendre que deux valeurs, **vrai** (codé par 1) ou **faux** (codé par 0).

Plus précisément

Calcul propositionnel

- Systèmes de déduction
- Preuves à la Hibert-Fregge
- Bonus Track : Preuves en déduction naturelle
- Bonus Track : Satisfaction d'un ensemble de formules - Théorème de Compacité

Introduction

- On va commencer à aborder la question suivante :

> qu'est-ce qu'une démonstration ?

- Exemple :
  - on se donne une formule propositionnelle F,
  - et on veut décider si F est une tautologie.

Une première méthode

- Première méthode :
  - Une formule propositionnelle F s'écrit à l'aide d'un nombre fini de variables $p_1, \cdots, p_n$.
  - On détermine la valeur de F sur les 2^n valuations possibles de $p_1, \cdots, p_n$, et on vérifie que c'est bien 1 pour toutes les valuations.
  - Soucis :
    1. Complexité exponentielle :

       pour n grand,

       le temps explose, car 2^n est très grand ;
       en outre, le temps explose **TOUJOURS**.

    2. Cela ne correspond pas à ce que l'on aurait pu vouloir appeler une "démonstration".

Des systèmes de preuve

- Preuves à la Hilbert-Fregge.
- Déduction naturelle.
- Preuves par résolution.
- Méthode des tableaux.

Plus précisément

Calcul propositionnel

- Systèmes de déduction
- Preuves à la Hibert-Fregge
- Bonus Track : Preuves en déduction naturelle
- Bonus Track : Satisfaction d'un ensemble de formules - Théorème de Compacité

Preuves à la Hilbert-Fregge

- Principe :
  - on part d'un ensemble d'axiomes, qui sont des tautologies ;
  - et on utilise une unique règle de déduction, le **modus ponens**, aussi appelé **coupure**, qui vise à capturer un type de raisonnement tout à fait naturel en mathématique.

- La règle du modus ponens dit qu'à partir de la formule F et d'une formule $F \Rightarrow G$, on déduit G.

$$\frac{F \quad (F \Rightarrow G)}{G}$$

- Exemple : à partir de $(A \wedge B)$ et de $(A \wedge B) \Rightarrow C$ on déduit C.

- On dit qu'une formule F est une **instance** d'une formule G si F s'obtient en substituant certaines variables propositionnelles de G par des formules F_i.

- Un **axiome de la logique booléenne** est n'importe quelle **instance** d'une des formules suivantes :
  1. $(X_1 \Rightarrow (X_2 \Rightarrow X_1))$ (axiome 1 pour l'implication) ;
  2. $((X_1 \Rightarrow (X_2 \Rightarrow X_3)) \Rightarrow ((X_1 \Rightarrow X_2) \Rightarrow (X_1 \Rightarrow X_3)))$ (axiome 2 pour l'implication) ;
  3. $(X_1 \Rightarrow \neg\neg X_1)$ (axiome 1 pour la négation) ;
  4. $(\neg\neg X_1 \Rightarrow X_1)$ (axiome 2 pour la négation) ;
  5. $((X_1 \Rightarrow X_2) \Rightarrow (\neg X_2 \Rightarrow \neg X_1))$ (axiome 3 pour la négation) ;
  6. $(X_1 \Rightarrow (X_2 \Rightarrow (X_1 \wedge X_2)))$ (axiome 1 pour la conjonction) ;
  7. $((X_1 \wedge X_2) \Rightarrow X_1)$ (axiome 2 pour la conjonction) ;
  8. $((X_1 \wedge X_2) \Rightarrow X_2)$ (axiome 3 pour la conjonction) ;
  9. $(X_1 \Rightarrow (X_1 \vee X_2))$ (axiome 1 pour la disjonction) ;
  10. $(X_2 \Rightarrow (X_1 \vee X_2))$ (axiome 2 pour la disjonction) ;
  11. $(\neg X_1 \Rightarrow ((X_1 \vee X_2) \Rightarrow X_2))$ (axiome 3 pour la disjonction).

Preuve par modus ponens

- Soit T un ensemble de formules propositionnelles, et F une formule propositionnelle.

- Une **preuve de F à partir de T** est une suite finie $F_1, F_2, \cdots, F_n$ de formules propositionnelles telle que :

  - F_n est égale à F,

  - et pour tout i,
    - ou bien F_i est dans T ;
    - ou bien F_i est un axiome de la logique booléenne ;
    - ou bien F_i s'obtient par modus ponens à partir de deux formules F_j, F_k avec $j < i$ et $k < i$.

- Notation :
  - On dit que F **est prouvable à partir de** T, noté $T \vdash F$ dans ce cas. F est dite **prouvable** si elle est prouvable à partir de $T = \emptyset$.

Exemple

Voici une preuve de $(F \Rightarrow H)$ à partir de $\{(F \Rightarrow G), (G \Rightarrow H)\}$:

- $F_1 : (G \Rightarrow H)$ (hypothèse) ;
- $F_2 : ((G \Rightarrow H) \Rightarrow (F \Rightarrow (G \Rightarrow H)))$ (instance de l'axiome 1.) ;
- $F_3 : (F \Rightarrow (G \Rightarrow H))$ (modus ponens à partir de F_1 et F_2) ;
- $F_4 : ((F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H)))$ (instance de l'axiome 2.) ;
- $F_5 : ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H))$ (modus ponens à partir de F_3 et F_4) ;
- $F_6 : (F \Rightarrow G)$ (hypothèse) ;
- $F_7 : (F \Rightarrow H)$ (modus ponens à partir de F_6 et F_5).

Validité et complétude de cette méthode de preuve

- Théorème [Validité]. Toute formule propositionnelle prouvable est une tautologie.
- Théorème [Complétude]. Toute tautologie est prouvable.
- Plus généralement :
  - Notons $T \models F$ pour signifier que tout modèle de chacune des formules de T est un modèle de F.
  - On dit que F est une **conséquence** (sémantique) de T.
  - On a :

$$T \vdash F \text{ ssi } T \models F.$$

Plus précisément

Calcul propositionnel

- Systèmes de déduction
- Preuves à la Hibert-Fregge
- Bonus Track : Preuves en déduction naturelle
- Bonus Track : Satisfaction d'un ensemble de formules - Théorème de Compacité

Déduction naturelle

- La notion de démonstration précédente est pénible à utiliser en pratique.

Déduction naturelle

- La notion de démonstration précédente est pénible à utiliser en pratique.
- Une alternative : la **déduction naturelle.**

Déduction naturelle

- La notion de démonstration précédente est pénible à utiliser en pratique.
- Une alternative : la **déduction naturelle.**
- Principe :
  - On manipule des couples (appelés **séquents**) $\Gamma \vdash A$, où Γ est un ensemble fini de formules (propositionnelles) et A est une formule (propositionnelle).
  - On utilise les règles de déduction du transparent suivant

Déduction naturelle

- La notion de démonstration précédente est pénible à utiliser en pratique.
- Une alternative : la **déduction naturelle.**
- Principe :
  - On manipule des couples (appelés **séquents**) $\Gamma \vdash A$, où Γ est un ensemble fini de formules (propositionnelles) et A est une formule (propositionnelle).
    - Motivation sous-jacente : $\Gamma \vdash A$ exprime le fait que sous les hypothèses Γ, on a A.
  - On utilise les règles de déduction du transparent suivant

Déduction naturelle

- La notion de démonstration précédente est pénible à utiliser en pratique.
- Une alternative : la **déduction naturelle.**
- Principe :
  - On manipule des couples (appelés **séquents**) $\Gamma \vdash A$, où Γ est un ensemble fini de formules (propositionnelles) et A est une formule (propositionnelle).
    - Motivation sous-jacente : $\Gamma \vdash A$ exprime le fait que sous les hypothèses Γ, on a A.
  - On utilise les règles de déduction du transparent suivant
    - i.e. : on définit inductivement **l'ensemble des séquents dérivables** par les règles du transparent suivant.

Déduction naturelle

- La notion de démonstration précédente est pénible à utiliser en pratique.
- Une alternative : la **déduction naturelle.**
- Principe :
  - On manipule des couples (appelés **séquents**) $\Gamma \vdash A$, où Γ est un ensemble fini de formules (propositionnelles) et A est une formule (propositionnelle).
    - Motivation sous-jacente : $\Gamma \vdash A$ exprime le fait que sous les hypothèses Γ, on a A.
  - On utilise les règles de déduction du transparent suivant
    - i.e. : on définit inductivement **l'ensemble des séquents dérivables** par les règles du transparent suivant.
    - Ici, on considère que les formules incluent aussi $\bot$, interprété par faux, et $\top$ interprété par vrai.

Déduction naturelle

- La notion de démonstration précédente est pénible à utiliser en pratique.
- Une alternative : la **déduction naturelle.**
- Principe :
  - On manipule des couples (appelés **séquents**) $\Gamma \vdash A$, où Γ est un ensemble fini de formules (propositionnelles) et A est une formule (propositionnelle).
    - Motivation sous-jacente : $\Gamma \vdash A$ exprime le fait que sous les hypothèses Γ, on a A.
  - On utilise les règles de déduction du transparent suivant
    - i.e. : on définit inductivement **l'ensemble des séquents dérivables** par les règles du transparent suivant.
    - Ici, on considère que les formules incluent aussi $\bot$, interprété par faux, et $\top$ interprété par vrai.
- On dit que F **est prouvable à partir de** T, noté $T \vdash F$ si $T \vdash F$ est un séquent dérivable. F est dite **prouvable** si elle est prouvable à partir de $T = \emptyset$.

$$\frac{}{\Gamma \vdash A}\ \text{axiome pour chaque } A \in \Gamma$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \bot\text{-élim}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ \wedge\text{-élim}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ \wedge\text{-élim}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \vee\text{-élim}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ \Rightarrow\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ \Rightarrow\text{-élim}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg\text{-élim}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ \text{tiers exclu}$$

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{(F \Rightarrow G), (G \Rightarrow H), F\} \vdash (G \Rightarrow H)}\ ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\{(F \Rightarrow G), (G \Rightarrow H), F\} \vdash (F \Rightarrow G)}\ ax \quad \dfrac{}{\{(F \Rightarrow G), (G \Rightarrow H), F\} \vdash F}\ ax}{G}\ \Rightarrow\text{-élim}}{\{(F \Rightarrow G), (G \Rightarrow H), F\} \vdash H}\ \Rightarrow\text{-élim}}{\{(F \Rightarrow G), (G \Rightarrow H)\} \vdash (F \Rightarrow H)}\ \Rightarrow\text{-intro}$$

Validité et complétude de cette méthode de preuve

- Théorème [Validité]. Toute formule propositionnelle prouvable est une tautologie.
- Théorème [Complétude]. Toute tautologie est prouvable.
- Plus généralement :
  - Notons $T \models F$ pour signifier que tout modèle de chacune des formules de T est un modèle de F.
  - On dit que F est une **conséquence** (sémantique) de T.
  - On a :

$$T \vdash F \text{ ssi } T \models F.$$

Plus précisément

Calcul propositionnel

- Systèmes de déduction
- Preuves à la Hibert-Fregge
- Bonus Track : Preuves en déduction naturelle
- Bonus Track : Satisfaction d'un ensemble de formules - Théorème de Compacité

Motivation

- Le calcul propositionnel reste très limité...
- Si on veut aller plus loin, on peut chercher à parler de choses plus générales que les fonctions booléennes.
  - On va se donner cette fois un ensemble Σ de formules.
  - On cherche à savoir quand on peut satisfaire toutes les formules de Σ.

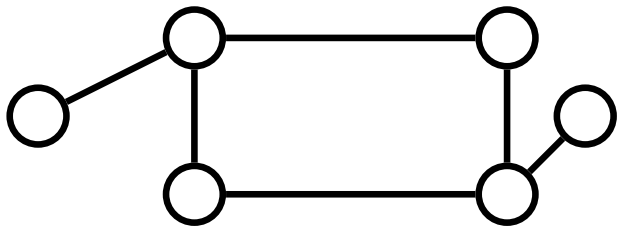
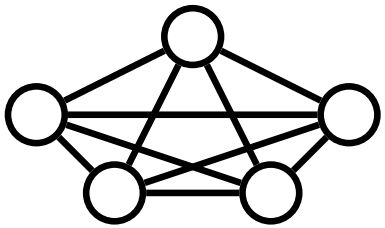
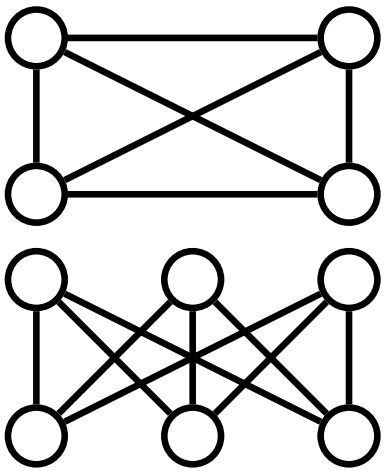
Motivation

- Le calcul propositionnel reste très limité...
- Si on veut aller plus loin, on peut chercher à parler de choses plus générales que les fonctions booléennes.
  - On va se donner cette fois un ensemble Σ de formules.
    - Σ peut être fini ou infini.
  - On cherche à savoir quand on peut satisfaire toutes les formules de Σ.

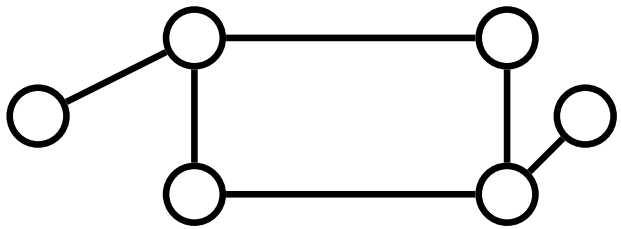
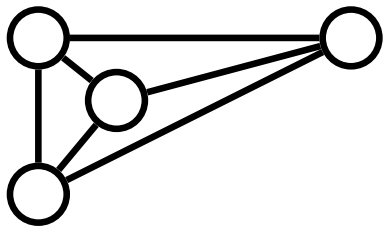
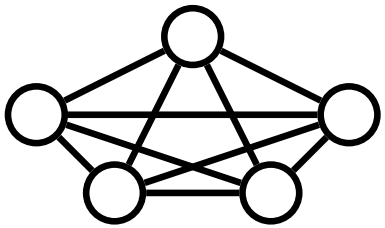
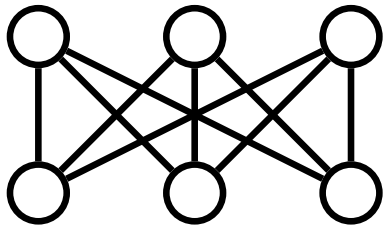
Motivation

- Le calcul propositionnel reste très limité...
- Si on veut aller plus loin, on peut chercher à parler de choses plus générales que les fonctions booléennes.
  - On va se donner cette fois un ensemble Σ de formules.
    - Σ peut être fini ou infini.
  - On cherche à savoir quand on peut satisfaire toutes les formules de Σ.
- Le reste de cette section : la présentation d'un des grands résultats du calcul propositionnel, le théorème de compacité, via quelques digressions liées à une application.

Digression : Théorie des graphes.

- Un graphe est dit **planaire** s'il peut se représenter sur un plan sans qu'aucune arête n'en croise une autre.
- Planaire : 
- Non-planaire : K_5 
- $K_{3,3}$ 
- Théorème [Kuratowski-Wagner] Un graphe fini est planaire ssi il ne contient pas de sous-graphe qui soit une expansion de K_5 ou de $K_{3,3}$.
  - Une expansion consiste (grossièrement) à ajouter un ou plusieurs sommets sur une ou plusieurs arêtes (exemple :  devient )

Digression : Théorie des graphes.

- Un graphe est dit **planaire** s'il peut se représenter sur un plan sans qu'aucune arête n'en croise une autre.
- Planaire : 

- Non-planaire : K_5 
$K_{3,3}$ 
- Théorème [Kuratowski-Wagner] Un graphe fini est planaire ssi il ne contient pas de sous-graphe qui soit une expansion de K_5 ou de $K_{3,3}$.
  - Une expansion consiste (grossièrement) à ajouter un ou plusieurs sommets sur une ou plusieurs arêtes (exemple :  devient )

Digression : Coloriage de graphes.

- Le problème de **coloriage d'un graphe** : colorier les sommets d'un graphe de telle sorte qu'aucune arête n'ait ses extrémités d'une même couleur.

Un coloriage avec 4 couleurs

- Théorème : Appel et Haken (76) : tout graphe planaire est coloriable avec 4 couleurs.
  - Preuve avec 1478 cas critiques.
  - Robertson, Sanders, Seymour, Thomas, Gonthier, Werner...
- Digression : Le problème du coloriage de graphes est NP-complet (voir fin du cours).

Retour sur la logique propositionnelle

- On se donne un graphe $G = (V, E)$ et k couleurs.
- On considère $\mathcal{P} = \{A_{u,i}, u \in V, 1 \leq i \leq k\}$ un ensemble de variables propositionnelles.
- Idée : $A_{u,i}$ vraie ssi le sommet u est colorié avec la couleur i.
- Contraintes :
  - Chaque sommet possède une couleur :
    $$\Gamma_1 = \{A_{u,1} \vee \cdots \vee A_{u,k} | u \in V\}.$$
  - Chaque sommet n'a pas plus qu'une couleur :
    $$\Gamma_2 = \{\neg(A_{u,i} \wedge A_{u,j}) | u \in V, 1 \leq i, j \leq k, i \neq j\}.$$
  - Chaque arête n'a pas ses extrémités d'une même couleur :
    $$\Gamma_3 = \{\neg(A_{u,i} \wedge A_{v,i}) | u \in V, 1 \leq i \leq k, (u, v) \in E\}.$$
- Un graphe est coloriable avec k couleurs si et seulement si on peut satisfaire toutes les formules de $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Définitions

- Soit Σ un ensemble de formules.
- Définitions :
  - Une valuation v **satisfait** Σ si elle satisfait chaque formule de Σ. On note alors $v \models \Sigma$. On dit aussi dans ce cas que cette valuation est **un modèle** de Σ.
  - Σ est dit **satisfiable**, ou **consistant**, s'il existe une valuation qui le satisfait. Σ est dit **inconsistant**, ou **contradictoire**, sinon.
- Exemples :
  - $\{p, \neg q, p \vee r\}$ est satisfiable.
  - $\{p, p \Rightarrow q, \neg q\}$ est inconsistant.
  - une valuation satisfait Γ ssi elle correspond à un k-coloriage.

Théorème de compacité

Supposons $\mathcal{P}$ dénombrable.

Trois formulations équivalentes du théorème.

- Théorème (Version 1). Un ensemble Σ de formules est satisfiable si et seulement si toute partie finie de Σ est satisfiable.
- Théorème (Version 2). Un ensemble Σ de formules est inconsistant si et seulement si Σ possède une partie finie inconsistante.
- Théorème (Version 3). Une formule F est une conséquence d'un ensemble Σ de formules si et seulement si F est une conséquence d'une partie finie de Σ.

▸ Démonstration

Une application du théorème : Coloriage de graphes

- Dans la preuve du théorème de Appel et Haken, il "suffit" de faire la preuve pour les graphes finis :

- Theorème : Un graphe (fini ou infini) G est coloriable avec k couleurs si et seulement si chacun de ses sous-graphes est coloriable avec k couleurs.

  - Sens $\Rightarrow$: trivial.

  - Sens $\Leftarrow$: Pourquoi ?

    - Γ est satisfiable si et seulement si toute partie finie Γ_0 de Γ est satisfiable.

    - Soit Γ_0 une partie finie de Γ. Soient $V_0 = \{u_1, \cdots, u_n\}$ les sommets u tels que $A_{u,i}$ figure dans une des formules de Γ_0. Soit $G_0 = (V_0, E_0)$ le sous-graphe déterminé par V_0.

    - Par hypothèse, G_0 est coloriable avec k couleurs, et donc Γ_0 est satisfiable.

Autres applications

- Le théorème de compacité est vrai pour des logiques plus générales.
- Autre application :
  - Lemme de König : tout arbre infini dénombrable de degré fini possède un chemin infini.
- . . .il a surtout des applications dans des logiques plus générales.

Au menu

Logique ?

Calcul propositionnel

Calcul des prédicats

Exemples de théories du premier ordre

Théorème de complétude

- Si l'on veut pouvoir raisonner sur des assertions mathématiques, il nous faut autoriser des constructions plus riches que celles du calcul propositionnel.

- Un énoncé comme

$$\forall x((\mathit{Premier}(x) \wedge x > \mathbf{1} + \mathbf{1}) \Rightarrow \mathit{Impair}(x)).$$

  n'est pas capturé par la logique propositionnelle :

  - on a des **prédicats** comme $\mathit{Premier}(x)$ dont la valeur de vérité dépend d'une variable x ;
  - on utilise des quantificateurs comme $\exists$, $\forall$.

Logique du premier ordre

- On va présenter seulement le **calcul des prédicats** du **premier ordre**.
  - En logique du **premier ordre**, on n'autorise que les quantifications sur les variables.

$$\forall x((\mathit{Premier}(x) \wedge x > \mathbf{1} + \mathbf{1}) \Rightarrow \mathit{Impair}(x)).$$

- Un énoncé **du second ordre** (ou **d'ordre supérieur**) serait un énoncé où l'on autoriserait les quantifications sur les fonctions ou des relations.
  - Exemple :

$$\neg\exists f(\forall x(f(x) > f(x + \mathbf{1}))).$$

Plus précisément

Calcul des prédicats

- Syntaxe
- Variables libres, variables liées
- Sémantique

Premières considérations

- Pour écrire une formule d'un langage du premier ordre, on utilise
  - certains symboles qui sont communs à tous les langages,
  - et certains symboles qui varient d'un langage à l'autre.

$$\forall x((\mathit{Premier}(x) \wedge x > \mathbf{1} + \mathbf{1}) \Rightarrow \mathit{Impair}(x)).$$

- Les symboles
  - communs à tous les langages sont :
    - les connecteurs $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;
    - les parenthèses (et) et la virgule , ;
    - le quantificateur universel $\forall$ et le quantificateur existentiel $\exists$;
    - un ensemble infini dénombrable de symboles $\mathcal{V}$ de variables.
  - qui peuvent varier d'un langage à l'autre sont :
    - capturés par la notion de **signature**.

Signature d'un langage du premier ordre

- La signature $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ d'un langage du premier ordre est la donnée [1] :
  - d'un premier ensemble $\mathcal{C}$ de **symboles de constantes** ;
  - d'un second ensemble $\mathcal{F}$ de **symboles de fonctions**.
    - A chaque symbole de cet ensemble est associé un entier strictement positif, que l'on appelle **son arité** ;
  - d'un troisième ensemble $\mathcal{R}$ de **symboles de relations**.
    - A chaque symbole de cet ensemble est associé un entier strictement positif, que l'on appelle **son arité**.

1. On supposera que $\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}$ sont des ensembles disjoints deux à deux.

Exemples

- Exemples de signatures :
  - $\Sigma = (\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \{s, +\}, \{\mathit{Impair}, \mathit{Premier}, =, <\})$ avec les symboles de constante $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$, les symboles de fonctions s d'arité 1 et $+$ d'arité 2, les symboles de relations *Impairs* et *Premier* d'arité 1 et $=$ et $<$ d'arité 2.
  - $\mathcal{L}_2 = (\{c, d\}, \{f, g, h\}, \{R\})$ avec c, d deux symboles de constante, f un symbole de fonction d'arité 1, g et h deux symboles de fonctions d'arité 2, R un symbole de relation d'arité 2.

- Une formule du premier ordre sera alors un mot sur l'alphabet

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \mathcal{V} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,), ,, =, \forall, \exists\}.$$

- On va définir par étapes :

1. d'abord les **termes**,
   - qui visent à représenter des objets,
2. puis les **formules atomiques**,
   - qui visent à représenter des relations entre objets,
3. et enfin les formules.

- Il est utile[2] de lire **le polycopié**.
  - en particulier, le chapitre 5.

2. voire nécessaire

- Il est utile[2] de lire **le polycopié**.
  - en particulier, le chapitre 5.
- tout ce qui suit dans cette section précise la terminologie et les définitions mais reste sur le fond sans surprises...

2. voire nécessaire

Termes

- Soit $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ une signature.
- L'ensemble T des **termes** sur la signature Σ est le langage sur l'alphabet $\mathcal{A}(\Sigma)$ défini inductivement par :

  (B) toute variable est un terme : $\mathcal{V} \subset T$;

  (B) toute constante est un terme : $\mathcal{C} \subset T$;

  (I) si f est un symbole de fonction d'arité n et si $t_1, t_2, \cdots, t_n$ sont des termes, alors $f(t_1, \cdots, t_n)$ est un terme.

- Un **terme clos** est un terme sans variable.

Exemples

- (Convention : $x, y, z, \ldots$ désignent des variables, c-à-d des éléments de $\mathcal{V}$).

- Exemples :

  - $+(x, s(+(\mathbf{1}, \mathbf{1})))$ est un terme sur la signature Σ précédente qui n'est pas clos. $+(+(s(\mathbf{1}), +(\mathbf{1}, \mathbf{1})), s(s(\mathbf{0})))$ est un terme clos sur cette même signature.

  - $h(c, x)$, $h(y, z)$, $g(d, h(y, z))$ et $f(g(d, h(y, z)))$ sont des termes sur la signature $\mathcal{L}_2$.

Formules atomiques

- Soit $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ une signature.

- Une **formule atomique** sur la signature Σ est un mot sur l'alphabet $\mathcal{A}(\Sigma)$ de la forme $R(t_1, t_2, \cdots, t_n)$, où $R \in \mathcal{R}$ est un symbole de relation d'arité n, et où $t_1, t_2, \cdots, t_n$ sont des termes sur Σ.

Formules atomiques

- Soit $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ une signature.
- Une **formule atomique** sur la signature Σ est un mot sur l'alphabet $\mathcal{A}(\Sigma)$ de la forme $R(t_1, t_2, \cdots, t_n)$, où $R \in \mathcal{R}$ est un symbole de relation d'arité n, et où $t_1, t_2, \cdots, t_n$ sont des termes sur Σ.
- Exemples :
  - $>(x, +(\mathbf{1}, \mathbf{0}))$ est une formule atomique sur la signature précédente. $=(x, s(y))$ aussi.
  - $R(f(x), g(c, f(d)))$ est une formule atomique sur $\mathcal{L}_2$.

Formules atomiques

- Soit $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ une signature.
- Une **formule atomique** sur la signature Σ est un mot sur l'alphabet $\mathcal{A}(\Sigma)$ de la forme $R(t_1, t_2, \cdots, t_n)$, où $R \in \mathcal{R}$ est un symbole de relation d'arité n, et où $t_1, t_2, \cdots, t_n$ sont des termes sur Σ.
- Exemples :
  - $>(x, +(\mathbf{1}, \mathbf{0}))$ est une formule atomique sur la signature précédente. $=(x, s(y))$ aussi.
  - On convient parfois d'écrire $t_1 R t_2$ pour certains symboles binaires, comme $=$, $<$, $+$:
    - par exemple, on écrira $x > \mathbf{1} + \mathbf{1}$ pour $>(x, +(\mathbf{1}, \mathbf{1}))$, ou $(s(\mathbf{1}) + \mathbf{1}) + s(s(\mathbf{0}))$ pour $+(+(s(\mathbf{1}), \mathbf{1}), s(s(\mathbf{0})))$.
  - $R(f(x), g(c, f(d)))$ est une formule atomique sur $\mathcal{L}_2$.

Formules

- Soit $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ une signature.
- L'ensemble des formules sur la signature Σ est le langage sur l'alphabet $\mathcal{A}(\Sigma)$ défini inductivement par :

  (B) toute formule atomique est une formule ;

  (I) si F est une formule, alors $\neg F$ est une formule ;

  (I) si F et G sont des formules, alors $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Rightarrow G)$, et $(F \Leftrightarrow G)$ sont des formules ;

  (I) si F est une formule, et si $x \in \mathcal{V}$ est une variable, alors $\forall x F$ est une formule, et $\exists x F$ aussi.

Exemples

- Exemples :
  - $\forall x((\mathit{Premier}(x) \wedge x > \mathbf{1} + \mathbf{1}) \Rightarrow \mathit{Impair}(x))$ est une formule sur la signature Σ précédente.
  - $\exists x(s(x) = \mathbf{1} + \mathbf{0} \vee \forall y\ x + y > s(x))$ aussi.
  - Exemples de formules sur la signature $\mathcal{L}_2$:
    - $\forall x \forall y \forall z((R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z))$
    - $\forall x \exists y(g(x, y) = c \wedge g(y, x) = c)$;
    - $\forall x \neg f(x) = c$;
    - $\forall x \exists y \neg f(x) = c$.

Théorème de décomposition/lecture unique

Ce sont des définitions inductives non-ambiguës :

- Théorème [de décomposition/lecture unique].
  - Toute formule F est d'une, et exactement d'une, des formes suivantes :
    1. une formule atomique ;
    2. $\neg G$, où G est une formule ;
    3. $(G \wedge H)$ où G et H sont des formules ;
    4. $(G \vee H)$ où G et H sont des formules ;
    5. $(G \Rightarrow H)$ où G et H sont des formules ;
    6. $(G \Leftrightarrow H)$ où G et H sont des formules ;
    7. $\forall x G$ où G est une formule et x une variable ;
    8. $\exists x G$ où G est une formule et x une variable.
  - De plus dans le premier cas, il y a une unique façon de "lire" la formule atomique. Dans chacun des autres cas, il y a unicité de la formule G et de la formule H avec cette propriété.

Plus précisément

Calcul des prédicats

- Syntaxe
- Variables libres, variables liées
- Sémantique

Intuition

- L'intuition de ce qui va suivre est de distinguer les variables **liées** des variables qui ne le sont pas.
- Tout cela est en fait à propos de "$\forall x$" et "$\exists x$" qui sont des **lieurs** :

Intuition

- L'intuition de ce qui va suivre est de distinguer les variables **liées** des variables qui ne le sont pas.
- Tout cela est en fait à propos de "$\forall x$" et "$\exists x$" qui sont des **lieurs** :
- D'autres lieurs en mathématiques :
  - le symbole intégrale : dans l'expression $\int_a^b f(t)dt$, la variable t est une variable muette (liée). $\int_a^b f(u)du$ est exactement la même intégrale.

Intuition

- L'intuition de ce qui va suivre est de distinguer les variables **liées** des variables qui ne le sont pas.
- Tout cela est en fait à propos de "$\forall x$" et "$\exists x$" qui sont des **lieurs** :
  - lorsqu'on écrit $\forall x F$ ou $\exists x F$, x devient une variable liée ;
  - en d'autres termes, x est une variable "muette" de $\forall x F$.
  - on pourrait tout aussi bien écrire $\forall y F(y/x)$ (respectivement : $\exists y F(y/x)$) où $F(y/x)$ désigne intuitivement la formule que l'on obtient en remplaçant x par y dans F.
- D'autres lieurs en mathématiques :
  - le symbole intégrale : dans l'expression $\int_a^b f(t)dt$, la variable t est une variable muette (liée). $\int_a^b f(u)du$ est exactement la même intégrale.

Le cas des termes

- Les variables libres d'un terme sont les variables qui apparaissent dans ce terme.

- Si on préfère : l'ensemble $\ell(t)$ des **variables libres d'un terme** t se définit inductivement par :

  (B) $\ell(v) = \{v\}$ pour $v \in \mathcal{V}$;

  (B) $\ell(c) = \emptyset$ pour $c \in \mathcal{C}$;

  (I) $\ell(f(t_1, \cdots, t_n)) = \ell(t_1) \cup \cdots \cup \ell(t_n)$.

Le cas des formules

- L'ensemble $\ell(t)$ des **variables libres d'une formule** F se définit inductivement par :

  (B) $\ell(R(t_1, \cdots, t_n)) = \ell(t_1) \cup \cdots \cup \ell(t_n)$;
  (I) $\ell(\neg G) = \ell(G)$;
  (I) $\ell(G \vee H) = I(G \wedge H) = \ell(G \Rightarrow H) = \ell(G \Leftrightarrow H) = \ell(G) \cup \ell(H)$;
  (I) $\ell(\forall x F) = \ell(\exists x F) = \ell(F) \backslash \{x\}$.

- Une formule F est dite **close** si elle ne possède pas de variables libres.

- Exemple :
  - La formule $\forall x \forall z (R(x, z) \Rightarrow \exists y (R(y, z) \vee y = z))$ est close.

Plus précisément

Calcul des prédicats

- Syntaxe
- Variables libres, variables liées
- Sémantique

- Nous pouvons maintenant parler du sens que l'on donne aux formules.

- Pour donner un sens aux formules, il faut fixer un sens aux symboles de la signature, et c'est l'objet de la notion de structure.

Structures

- Soit $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ une signature.

- Une **structure $\mathfrak{M}$ de signature Σ** est la donnée :
  - d'un ensemble non-vide M, appelé **ensemble de base**, ou **domaine** de la structure ;
  - d'un élément de M, noté $c^{\mathfrak{M}}$, pour chaque symbole de constante $c \in \mathcal{C}$;
  - d'une fonction, notée $f^{\mathfrak{M}}$, de $M^n \to M$ pour chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}$ d'arité n ;
  - d'un sous-ensemble, noté $R^{\mathfrak{M}}$, de M^n pour chaque symbole de relation $R \in \mathcal{F}$ d'arité n.

- On dit que la constante c (respectivement la fonction f, la relation R) est **interprétée par** $c^{\mathfrak{M}}$ (resp. $f^{\mathfrak{M}}$, $R^{\mathfrak{M}}$).

- Une structure est parfois aussi appelée une **réalisation**.

Exemples

- Exemples :
  - On peut obtenir une réalisation de la signature Σ précédente en prenant comme ensemble de base les entiers, $\mathbf{0}$ interprété par l'entier 0, $\mathbf{1}$ par l'entier 1, s par la fonction qui à l'entier x associe $x+1$, $+$ par la fonction addition, *Impair* par les entiers impairs, *Premier* par les entiers premiers, $=$ par l'égalité, et $<$ par la relation $\{(x,y)|x<y\}$.
    - On peut la noter $(\mathbb{N}, =, <, \mathit{Impair}, \mathit{Premier}, s, +, 0, 1)$.
  - On peut obtenir une réalisation de la signature $\mathcal{L}_2$ en considérant l'ensemble de base $\mathbb{R}$ des réels, en interprétant R comme la relation d'ordre $\leq$ sur les réels, la fonction f comme la fonction qui à x associe $x+1$, les fonctions g et h comme l'addition et la multiplication, les constantes c et d comme 0 et 1.
    - On peut la noter $(\mathbb{R}, \leq, s, +, \times, 0, 1)$.

- On va ensuite utiliser la notion de structure pour interpréter

  1. les termes,
  2. les formules atomiques,
  3. puis inductivement les formules,

  comme on peut s'y attendre.

- Une **valuation** v est une fonction de l'ensemble des variables $\mathcal{V}$ dans le domaine M de la structure.

- Etant donnée une valuation v, l'interprétation :

  - d'un terme est un élément de l'ensemble de base de la structure :

  - d'une formule atomique est un objet qui s'interprète soit par **vrai** soit par **faux**.

  - d'une formule est un objet qui s'interprète soit par **vrai** soit par **faux**.

- Une **valuation** v est une fonction de l'ensemble des variables $\mathcal{V}$ dans le domaine M de la structure.

- Etant donnée une valuation v, l'interprétation :

  - d'un terme est un élément de l'ensemble de base de la structure :

    - les termes désignent donc des éléments de la structure.

  - d'une formule atomique est un objet qui s'interprète soit par **vrai** soit par **faux**.

  - d'une formule est un objet qui s'interprète soit par **vrai** soit par **faux**.

- Une **valuation** v est une fonction de l'ensemble des variables $\mathcal{V}$ dans le domaine M de la structure.

- Etant donnée une valuation v, l'interprétation :

  - d'un terme est un élément de l'ensemble de base de la structure :

    - les termes désignent donc des éléments de la structure.

  - d'une formule atomique est un objet qui s'interprète soit par **vrai** soit par **faux**.

    - les formules atomiques désignent donc des relations entre éléments de la structure.

  - d'une formule est un objet qui s'interprète soit par **vrai** soit par **faux**.

Formellement : interprétation des termes

- Soit $\mathfrak{M}$ une structure de signature $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ et v une valuation.

- Définition. L'**interprétation $t^{\mathfrak{M}}$ du terme t en v**, aussi notée $t^{\mathfrak{M}}$ est définie inductivement de la façon suivante :

  (B) toute variable est interprétée par sa valeur dans la valuation :

  (B) toute constante est interprétée par son interprétation dans la structure :

  (I) chaque symbole de fonction est interprété par son interprétation dans la structure.

Formellement : interprétation des termes

- Soit $\mathfrak{M}$ une structure de signature $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ et v une valuation.

- Définition. L'**interprétation $t^{\mathfrak{M}}$ du terme t en v**, aussi notée $t^{\mathfrak{M}}$ est définie inductivement de la façon suivante :

  (B) toute variable est interprétée par sa valeur dans la valuation :
  - c-à-d : si t est la variable $x_i \in \mathcal{V}$, alors $t^{\mathfrak{M}}$ est $v(x_i)$;

  (B) toute constante est interprétée par son interprétation dans la structure :

  (I) chaque symbole de fonction est interprété par son interprétation dans la structure.

Formellement : interprétation des termes

- Soit $\mathfrak{M}$ une structure de signature $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ et v une valuation.

- Définition. L'**interprétation $t^{\mathfrak{M}}$ du terme t en v**, aussi notée $t^{\mathfrak{M}}$ est définie inductivement de la façon suivante :

  (B) toute variable est interprétée par sa valeur dans la valuation :
  - c-à-d : si t est la variable $x_i \in \mathcal{V}$, alors $t^{\mathfrak{M}}$ est $v(x_i)$;

  (B) toute constante est interprétée par son interprétation dans la structure :
  - c-à-d : si t est la constante $c \in \mathcal{C}$, alors $t^{\mathfrak{M}}$ est $c^{\mathfrak{M}}$;

  (I) chaque symbole de fonction est interprété par son interprétation dans la structure.

Formellement : interprétation des termes

- Soit $\mathfrak{M}$ une structure de signature $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ et v une valuation.

- Définition. L'**interprétation $t^{\mathfrak{M}}$ du terme t en v**, aussi notée $t^{\mathfrak{M}}$ est définie inductivement de la façon suivante :

  (B) toute variable est interprétée par sa valeur dans la valuation :
  - c-à-d : si t est la variable $x_i \in \mathcal{V}$, alors $t^{\mathfrak{M}}$ est $v(x_i)$;

  (B) toute constante est interprétée par son interprétation dans la structure :
  - c-à-d : si t est la constante $c \in \mathcal{C}$, alors $t^{\mathfrak{M}}$ est $c^{\mathfrak{M}}$;

  (I) chaque symbole de fonction est interprété par son interprétation dans la structure.
  - c-à-d : si t est le terme $f(t_1, \cdots, t_n)$, alors $t^{\mathfrak{M}}$ est $f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \cdots, t_n^{\mathfrak{M}})$, où $t_1^{\mathfrak{M}}, \cdots, t_n^{\mathfrak{M}}$ sont les interprétations respectives des termes $t_1, \cdots, t_n$.

Exemples

- Exemples :
  - Soit $\mathcal{N}$ la structure $(\mathbb{N}, \leq, s, +, \times, 0, 1)$ de signature $\mathcal{L}_2 = (\{c, d\}, \{f, g, h\}, \{R\})$.
    - l'interprétation du terme $h(d, x)$ pour une valuation telle que $v(x) = 2$ est 2.
    - l'interprétation du terme $f(g(d, h(y, z)))$ pour une valuation telle que $v(y) = 2, v(z) = 3$ est 8.

Interprétation des formules atomiques

- Soit $\mathfrak{M}$ une structure de signature $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ et v une valuation.

- Définition : La valuation v **satisfait la formule atomique** $R(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ de variables libres $x_1, \cdots, x_k$ si

$$(t_1^{\mathfrak{M}}, t_2^{\mathfrak{M}}, \cdots, t_n^{\mathfrak{M}}) \in R^{\mathfrak{M}},$$

où $R^{\mathfrak{M}}$ est l'interprétation du symbole R dans la structure.

Exemples

- Exemples :
  - Sur la structure Σ précédente $x < \mathbf{1} + \mathbf{1}$ s'interprète par vrai en une valuation telle que $v(x) = 1$, et par faux en une valuation telle que $v(x) = 5$. La formule atomique $\mathbf{0} = s(\mathbf{0})$ s'interprète par faux.
  - Sur la structure $\mathcal{N}$, $R(f(c), h(c, f(d)))$ s'interprète par faux.

Interprétation des formules

- Soit $\mathfrak{M}$ une structure de signature $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ et v une valuation.
- Définition. L'expression "la valuation v satisfait la formule $F = F(x_1, \cdots, x_k)$", notée $v \models F$, se définit inductivement de la façon suivante :

  (B) elle a déjà été définie pour une formule atomique ;
  (I) $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ sont interprétés exactement comme dans le calcul propositionnel.

  (I) $\exists x$ et $\forall x$ sont interprétés comme des quantifications existentielles et universelles :
  - si F est de la forme $\forall x_0 G(x_0, x_1, \cdots, x_k)$, alors $v \models F$ ssi pour tout $a_0 \in M$, $v' \models G$, où v' est la valuation telle que $v'(x_0) = a_0$, et $v'(x) = v(x)$ pour tout $x \neq x_0$.
  - si F est de la forme $\exists x_0 G(x_0, x_1, \cdots, x_k)$, alors $s \models F$ ssi pour un certain $a_0 \in M$, $v' \models G$, où v' est la valuation telle que $v'(x_0) = a_0$, et $v'(x) = v(x)$ pour tout $x \neq x_0$.

Interprétation des formules

- Soit $\mathfrak{M}$ une structure de signature $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ et v une valuation.

- Définition. L'expression "la valuation v satisfait la formule $F = F(x_1, \cdots, x_k)$", notée $v \models F$, se définit inductivement de la façon suivante :

  (B) elle a déjà été définie pour une formule atomique ;

  (I) $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ sont interprétés exactement comme dans le calcul propositionnel.
  - exemple du $\vee$: si F est de la forme $(G \vee H)$, alors $v \models F$ ssi $v \models G$ ou $v \models H$;

  (I) $\exists x$ et $\forall x$ sont interprétés comme des quantifications existentielles et universelles :
  - si F est de la forme $\forall x_0 G(x_0, x_1, \cdots, x_k)$, alors $v \models F$ ssi pour tout $a_0 \in M$, $v' \models G$, où v' est la valuation telle que $v'(x_0) = a_0$, et $v'(x) = v(x)$ pour tout $x \neq x_0$.
  - si F est de la forme $\exists x_0 G(x_0, x_1, \cdots, x_k)$, alors $s \models F$ ssi pour un certain $a_0 \in M$, $v' \models G$, où v' est la valuation telle que $v'(x_0) = a_0$, et $v'(x) = v(x)$ pour tout $x \neq x_0$.

- Pour une formule close F, la satisfaction de F dans la structure $\mathfrak{M}$ ne dépend pas de la valuation v.

- On dit alors que $\mathfrak{M}$ est un modèle de F, lorsque F est satisfaite sur $\mathfrak{M}$.

Au menu

Logique ?

Calcul propositionnel

Calcul des prédicats

Exemples de théories du premier ordre

Théorème de complétude

Plus précisément

Exemples de théories du premier ordre

- La notion de théorie
- Groupes
- Corps

Théories

- Une **théorie** $\mathcal{T}$ est un ensemble de formules closes sur une signature donnée. Les formules d'une théorie sont appelées des **axiomes** de cette théorie.
- Une structure $\mathfrak{M}$ est un **modèle de la théorie** $\mathcal{T}$ si $\mathfrak{M}$ est un modèle de chacune des formules de la théorie.
- Une théorie est dite **consistante** si elle possède un modèle.

Plus précisément

Exemples de théories du premier ordre

- La notion de théorie
- Groupes
- Corps

Groupe

- Un groupe est un modèle égalitaire[3] de la théorie constituée des deux formules :

$$\forall x \forall y \forall z \; x * (y * z) = (x * y) * z \qquad (1)$$

$$\exists e \forall x \; (x * e = e * x = x \wedge \exists y (x * y = y * x = e)) \qquad (2)$$

sur la signature $\Sigma = (\emptyset, \{*\}, \{=\})$, où $*$ et $=$ sont d'arité 2.

3. On impose à l'interprétation de $=$ de correspondre à l'égalité.

Plus précisément

Exemples de théories du premier ordre

- La notion de théorie
- Groupes
- Corps

Corps

- Un **corps commutatif** est un modèle égalitaire de la théorie constituée des formules

$$\forall x \forall y \forall z \ (x + (y + z) = (x + y) + z) \tag{3}$$
$$\forall x \forall y (x + y = y + x) \tag{4}$$
$$\forall x (x + \mathbf{0} = x) \tag{5}$$
$$\forall x \exists y (x + y = \mathbf{0}) \tag{6}$$
$$\forall x \forall y \forall z \ x * (y + z) = x * y + x * z \tag{7}$$
$$\forall x \forall y \forall z \ ((x * y) * z) = (x * (y * z)) \tag{8}$$
$$\forall x \forall y \ (x * y = y * x) \tag{9}$$
$$\forall x \ (x * \mathbf{1} = x) \tag{10}$$
$$\forall x \exists y (x = \mathbf{0} \vee x * y = \mathbf{1}) \tag{11}$$
$$\neg \mathbf{1} = \mathbf{0} \tag{12}$$

sur une signature avec deux symboles de constantes $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$, deux symboles de fonctions $+$ et $*$ d'arité 2, et le symbole de relation $=$ d'arité 2.

- Corps de caractéristique p :
  - On ajoute à la théorie précédente la formule F_p définie par $\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1} = \mathbf{0}$, où $\mathbf{1}$ est répété p fois.
- Corps de caractéristique 0 :
  - On ajoute à la théorie précédente l'union des formules $\neg F_2, \cdots, \neg F_p$ pour p un nombre premier.
- Corps algébriquement clos :
  - Pour chaque entier n, on considère la formule G_n

    $$\forall x_0 \forall x_1 \cdots \forall x_{n-1} \exists x (x_0 + x_1 * x + x_2 * x^2 + \cdots + x_{n-1} * x^{n-1} + x^n) = 0$$

    où x^k est $x * \cdots * x$ avec x répété k fois.
  - on ajoute à la théorie précédente l'union des formules G_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice : corps réel clos

- Un **corps réel clos** est un corps totalement ordonné F tel que tout élément positif soit un carré et que tout polynôme de degré impair à coefficients dans F ait au moins une racine dans F.
  - $\mathbb{R}$ est un corps réel clos.
- Cela correspond à une théorie du calcul des prédicats.

Au menu

Logique ?

Calcul propositionnel

Calcul des prédicats

Exemples de théories du premier ordre

Théorème de complétude

Enoncé

- On peut construire un (des) système(s) de preuve valide(s) et complet(s) :
  - Notons : $\mathcal{T} \vdash F$ pour "F se prouve à partir de $\mathcal{T}$" dans ce système.
  - Notons : $\mathcal{T} \models F$ pour "tout modèle de $\mathcal{T}$ est un modèle de F."
- C'est-à-dire :
- Théorème de Validité : Soit $\mathcal{T}$ une théorie. Soit F une formule close.
  Si $\mathcal{T} \vdash F$ alors $\mathcal{T} \models F$.
- Théorème de Complétude. Soit $\mathcal{T}$ une théorie. Soit F une formule close.
  Si $\mathcal{T} \models F$ alors $\mathcal{T} \vdash F$.

Autre façon de comprendre ce qu'on obtient :

- prouvabilité et conséquence (sémantique) sont les mêmes notions.

$$\mathcal{T} \vdash F \text{ si et seulement si } \mathcal{T} \models F.$$

Autre façon de le comprendre :

F est prouvable ssi F est vraie dans tous les modèles

Autre façon de le comprendre :

F est prouvable ssi F est vraie dans tous les modèles

- F est prouvable à partir des axiomes $\mathcal{T}$ ssi F est vraie dans tous les modèles de $\mathcal{T}$.

Exprimez vous.

Page du cours.

Commentaires, avis
sur les cours et les PCs.

- Page du cours:
  www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF423.
- Commentaires, avis sur les cours et les PCs.
  www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF423/AVIS.

ANNEXES

ANNEXE

Un système de déduction pour le calcul des prédicats

Preuves du théorème de compacité

Un système de déduction

- Il nous faut définir une notion de démonstration
  - c'est-à-dire $\mathcal{T} \vdash F$.
- Nous choisissons de considérer une notion basée sur la notion de preuve à la Frege et Hilbert.

Règle de généralisation

- Par rapport au calcul propositionnel, on n'utilise plus seulement la règle de modus ponens, mais aussi une règle de **généralisation** :
  - si F est une formule et x une variable, la règle de généralisation déduit $\forall x F$ de F.

$$\frac{F}{\forall x F}$$

- Règle troublante ?

Règle de généralisation

- Par rapport au calcul propositionnel, on n'utilise plus seulement la règle de modus ponens, mais aussi une règle de **généralisation** :
  - si F est une formule et x une variable, la règle de généralisation déduit $\forall x F$ de F.

$$\frac{F}{\forall x F}$$

- Règle troublante ?
  - non, c'est ce que l'on fait dans le raisonnement courant régulièrement :
    - si on arrive à prouver $F(x)$ sans hypothèse particulière sur x, alors on saura que $\forall x F(x)$.

Axiomes logiques

- Les **axiomes logiques du calcul des prédicats** sont :

  1. toutes les instances des tautologies du calcul propositionnel ;

  2. les axiomes des quantificateurs, c'est-à-dire

     2.1 les formules de la forme $(\exists x F \Leftrightarrow \neg \forall x \neg F)$, où F est une formule quelconque et x une variable quelconque ;
     2.2 les formules de la forme $(\forall x(F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow \forall x G))$ où F et G sont des formules quelconques et x une variable qui n'a pas d'occurrence libre dans F ;
     2.3 les formules de la forme $(\forall x F \Rightarrow F(t/x))$ où F est une formule, t un terme et aucune occurrence libre de x dans F ne se trouve dans le champ d'un quantificateur liant une variable de t, où $F(t/x)$ désigne la substitution de x par t.

Preuve par modus ponens et généralisation

- Soit $\mathcal{T}$ une théorie et F une formule.
- Une **preuve de F à partir de $\mathcal{T}$** est une suite finie $F_1, F_2, \cdots, F_n$ de formules telle que
  - F_n est égale à F,
  - et pour tout i,
    - ou bien F_i est dans $\mathcal{T}$,
    - ou bien F_i est un axiome logique,
    - ou bien F_i s'obtient par modus ponens à partir de deux formules F_j, F_k avec $j < i$ et $k < i$,
    - ou bien F_i s'obtient à partir d'un formule F_j avec $j < i$ par généralisation.
- Et on note $\mathcal{T} \vdash F$ dans ce cas.

ANNEXE

Un système de déduction pour le calcul des prédicats

Preuves du théorème de compacité

- Démonstration par la topologie (du sens non-trivial de la version 1).
  - L'espace topologique $\{0,1\}^{\mathcal{P}}$ (muni de la topologie produit) est un espace compact, car il s'obtient comme un produit de compacts (Théorème de Tychonoff).
  - Pour chaque formule propositionnelle $F \in \Sigma$, l'ensemble $\overline{F}$ des valuations qui la satisfont est un ouvert dans $\{0,1\}^{\mathcal{P}}$, car la valeur de vérité d'une formule ne dépend que d'un nombre fini de variables, celles qui apparaissent dans la formule.
  - Il est également fermé puisque celles qui ne satisfont pas F sont celles qui satisfont $\neg F$.
  - Dire que $\{0,1\}^{\mathcal{P}}$ est compact est équivalent à dire que de toute famille de fermés dont l'intersection est vide on peut extraire une famille finie dont l'intersection est aussi vide ((complémentaire de la) propriété de Borel-Lebesgue).
  - L'hypothèse du théorème entraîne que toute intersection d'un nombre fini de $\overline{F}$ pour $F \in \Sigma$ est non-vide.
  - L'intersection de tous les $\overline{F}$ pour $F \in \Sigma$ est donc non vide, ce qui prouve le résultat.

- Démonstration sans topologie :
  - Considérons $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \cdots, p_k, \cdots\}$ une énumération de $\mathcal{P}$.
  - Lemme : supposons qu'il existe une application v de $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ dans $\{0, 1\}$ telle que tout sous-ensemble fini de Σ ait un modèle dans lequel $p_1, \cdots, p_n$ prennent les valeurs $v(p_1)$, ..., $v(p_n)$. Alors on peut étendre v à $\{p_1, p_2, \cdots, p_{n+1}\}$ avec la même propriété.
    - En effet, si $v(p_{n+1}) = 0$ ne convient pas, alors il existe un ensemble fini U_0 de Σ qui ne peut pas être satisfait quand $p_1, \cdots, p_n, p_{n+1}$ prennent les valeurs respectives $v(p_1)$, ..., $v(p_n)$ et 0.
    - Si U est un sous-ensemble fini quelconque de Σ, alors d'après l'hypothèse faite sur v, $U_0 \cup U$ a un modèle dans lequel $p_1, \cdots, p_n$ prennent les valeurs $v(p_1), \cdots, v(p_n)$.
    - Dans ce modèle, la proposition p_{n+1} prend donc la valeur 1. Autrement dit, tout sous-ensemble fini U de Σ a un modèle dans lequel $p_1, \cdots, p_n, p_{n+1}$ prennent les valeurs respectives $v(p_1)$, ..., $v(p_n)$ et 1.
    - Dit encore autrement, soit $v(p_{n+1}) = 0$ convient auquel cas on peut fixer $v(p_{n+1}) = 0$, soit $v(p_{n+1}) = 0$ ne convient pas auquel cas on peut fixer $v(p_{n+1}) = 1$ qui convient.

- En utilisant ce lemme, on définit ainsi une valuation v telle que, par récurrence sur n, pour chaque n, tout sous-ensemble fini de Σ a un modèle dans lequel $p_1, \cdots, p_n$ prennent les valeurs $v(p_1)$, ..., $v(p_n)$.

- Il en résulte que v satisfait Σ :

  - En effet, soit F une formule de Σ.
  - F ne dépend que d'un ensemble fini $p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_k}$ de variables propositionnelles (celles qui apparaissent dans F).
  - En considérant $n = \max(i_1, i_2, \cdots, i_k)$, chacune de ces variables p_{i_j} est parmi $\{p_1, \cdots, p_n\}$.
  - Nous savons alors que le sous ensemble fini $\{F\}$ réduit à la formule F admet un modèle dans lequel $p_1, \cdots, p_n$ prennent les valeurs $v(p_1)$, ..., $v(p_n)$, i.e. F est satisfaite par v.

◂ Retour