CHAPITRE IV

Les Fonctions Usuelles

I - Généralités.

I-1- Rappel sur les limites

Les opérations sur les limites des fonctions (somme, produit, quotient, composé) permettent généralement le calcul de la limite d'une fonction sauf dans les quatre situations suivantes : appelées " les formes indéterminées "

- Somme de deux fonctions qui admettent pour limite l'une $+\infty$ et l'autre $-\infty$ (notée: $\infty - \infty$).
- Produit d'une fonction qui admet une limite infinie et d'une fonction qui admet une limite nulle (notée : $0\times\infty$).
- Quotient de deux fonctions qui admettent chacune une limite infinie (notée : $\dfrac{\infty}{\infty}$).
- Quotient de deux fonctions qui admettent chacune une limite nulle (notée : $\dfrac{0}{0}$).

Il est parfois possible, grâce à un artifice de calcul, de "lever l'indétermination". Par exemple :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}$ se présente sous la forme indéterminée ($\infty - \infty$)

or $\forall$ x>1, on a $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1-1/x})}$

et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x-1} = 0$.

Rappelons aussi le résultat suivant :
Soient P et Q deux fonctions polynômes de degré respectifs n et m.
Posons $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ et $Q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$, $b_m \neq 0$

Alors $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$

Par exemple $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2+x+1}{-5x^3+2x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{-5x} = 0$.

I-2- Continuité

1)- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in$ I. On dit que f est continue en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- Définition analogue pour la continuité à droite de x_0 (resp. à gauche de x_0)
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$).

- On dit que f est continue sur]a,b[si et seulement si f est continue en tout point x_0 de]a,b[.
On dit que f est continue sur [a,b] si et seulement si f est continue sur]a,b[, continue à droite de a et continue à gauche de b.

2)- Si f est continue sur un intervalle I alors f(I), image de I par f, est un intervalle.
En particulier, si I = [a,b] alors f([a,b]) = [m,M] où m = $\mathop{Inf}\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et M = $\mathop{Sup}\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

- Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

S'il existe deux éléments a et b de I tel que f(a) f(b) < 0 alors il existe c$\in$]a,b[tel que f(c) = 0.

De ce résultat résulte la conséquence suivante :
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si f ne s'annule en aucun point de I alors f garde un signe constant sur I.

3)- Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur f(I). L'application réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone (même sens de variation que f) de f(I) sur I.
- Les représentations graphiques, dans une même repère orthonormé, de deux bijections réciproques sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x (la $1^{ère}$ bissectrice).

I-3- Dérivabilité

1) <u>Définition</u>
Soient I un intervalle de IR , f : I $\rightarrow$ IR et $x_0 \in$ I.
On dit que f est dérivable en x_0 si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie L quand $x \rightarrow x_0$.
Cette limite L est appelée dérivée de f en x_0, on la note $f'(x_0)$.
Ainsi : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
Définition analogue pour la dérivée à droite (resp. à gauche) de f en x_0 noté $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$) avec $x \rightarrow x_0^+$ (resp. $x \rightarrow x_0^-$)
et on a : f est dérivable en x_0 $\Leftrightarrow$ f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

2) <u>Propriétés</u>
- Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.
- Si f est dérivable en x_0 alors la courbe C_f de f admet une tangente en $M_0(x_0,f(x_0))$ d'équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

et on a : $tg(\alpha) = f'(x_0)$ où α est l'angle entre l'axe (Ox) et la tangente.
- Si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers l'infinie quand $x \rightarrow x_0$, la courbe de f admet alors en $M_0(x_0,f(x_0))$ une tangente dite "verticale" d'équation : $x = x_0$.
- Si $f'(x_0) = 0$ alors la courbe de f admet une tangente dite "horizontale" en $M_0(x_0,f(x_0))$ d'équation $y = f(x_0)$.
- Les dérivées à droite et à gauche en x_0 s'interprètent de la même manière en considérant les demi-tangentes à droite et à gauche en $M_0(x_0,f(x_0))$. Si elles ne sont pas égales, la courbe présente alors un point anguleux en M_0.

3) <u>Opérations</u>
Soit I un intervalle de I dans IR, f et g deux fonctions de I dans 3. Si f et g sont dérivables en x_0 alors :
i) f+g est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
ii) $\forall \alpha \in$ IR, αf est dérivable sur 3 et $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$
iii) fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$
iv) Si $f(x_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0 et $(\frac{1}{f})'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$

v) Si $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}$

vi) Si h est une fonction définie sur un intervalle J contenant f(I) et h est dérivable en $f(x_0)$ alors hof est dérivable en $f(x_0)$ et on a : $(hof)'(x_0) = h'(f(x_0)).f'(x_0)$.

vii) Si f est continue est bijective d'un intervalle I sur un intervalle J, dérivable en $x_0 \in I$ alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0) = y_0$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

4) Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Fonction dérivée	Domaine de dérivabilité
$x \mapsto a$; $a \in IR$	$x \mapsto 0$	IR
$x \mapsto x^n$; $n \in IN^*$	$x \mapsto nx^{n-1}$	IR
$x \mapsto x^n$; $n \in Z \setminus IN$	$x \mapsto nx^{n-1}$	IR*
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	IR
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	IR
$x \mapsto tgx$	$x \mapsto 1+tg^2x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$3\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$; $n \in IN^*$	$x \mapsto \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$	$]0,+\infty[$
$x \mapsto Logx$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	IR

Application :

Soit u une fonction dérivable sur I alors :

i) Les fonctions $f : x \mapsto \sin u(x)$ et $g : x \mapsto \cos u(x)$ sont dérivables sur I et on a $\forall x \in I$ $f'(x) = u'(x)\cos u(x)$ et $g'(x) = -u'(x)\sin u(x)$.

ii) Si $\forall x \in I$, $u(x) > 0$ alors la fonction $h : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$\forall x \in I$, $h'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

iii) La fonction $k : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $\forall x \in I$, $k'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$.

iv) Si $\forall x \in I$, $u(x) \neq 0$ alors la fonction $L : x \mapsto Log|u(x)|$ est dérivable sur I et on a :

$\forall x \in I$, $L'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

5) Proposition

Soit I un intervalle de IR et $f : I \to IR$ une fonction dérivable sur I. Alors :

i) f est constante sur I $\Leftrightarrow \forall x \in I$, $f'(x) = 0$

ii) f est croissante sur I $\Leftrightarrow \forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$
iii) f est décroissante sur I $\Leftrightarrow \forall x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
Si $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) alors f strictement croissante (resp. strictement décroissante).

6) <u>Règle de l'Hospital</u>
Soit f et g deux fonctions sur un intervalle I contenant a et dérivable sur I sauf peut être en a tel que f(a) = g(a) = 0 alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \;;\; \lambda \in \overline{\mathbb{R}}.$$

<u>Remarque</u>
Cette règle est appliquée dans le calcul des limites.
Par exemple : calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$
Posons $f(x) = \cos x - 1$ et $g(x) = x^2$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\sin x}{2x} \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{2} \quad \text{car} \quad \lim_{0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

d'où $\lim\limits_{0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

7) <u>Notation différentielle</u>
- Soit f une fonction dérivable en un point a. On appelle différentielle de f en a et on note df_a la fonction : $df_a : h \to f'(a)h$.
ainsi $\forall h \in IR$, $df_a(h) = f'(a)h$.
- Lorsqu'on donne la fonction f sous la forme $y = f(x)$, sa différentielle en a s'écrit :

$$dy = f'(a)h \quad \text{ou} \quad dy = f'(a)dx$$

dx désigne la variable de la différentielle dy.
- Soit $y = f(x)$ une fonction dérivable au point x alors sa différentielle en x s'écrit :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

on dit que $\frac{dy}{dx}$ est la notation différentielle de la dérivée de $y = f(x)$.

II- Fonctions circulaires.

II-1- <u>Fonctions circulaires directes</u>
1) <u>Rappel</u>
Nous supposons connues la définition et les propriétés usuelles des fonctions circulaires directes : sin , cos , tg et cotg.
Rappelons que :
- Les fonctions sin, cos, tg et cotg sont indéfiniment dérivables sur leurs ensembles de définition et que :

$\forall x \in IR$, $\sin' x = \cos x$; $\cos' x = -\sin x$

$\forall x \in IR \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi Z)$; $tg' x = 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\forall x \in IR \setminus \pi Z$; $cotg' x = -(1 + cotg^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

- La fonction sin est 2π- périodique, impaire et $\forall\, x \in IR$ on a :

$$\sin(\pi+x) = -\sin x \quad ; \quad \sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x$$

- La fonction cos est 2π- périodique, paire et $\forall\, x \in IR$ on a :

$$\cos(\pi+x) = -\cos x \quad ; \quad \cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin x$$

- La fonction tg est π- périodique, impaire et $\forall\, x \in IR\backslash\pi Z$ on a :

$$tg(\frac{\pi}{2}+x) = -\mathrm{cotg}x.$$

2) <u>Quelques formules</u>

* $\forall\, x \in IR$, on a : $\cos^2x + \sin^2x = 1$; $\sin 2x = 2\sin x \cos x$;
  $\cos 2x = \cos^2x - \sin^2x = 2\cos^2x - 1 = 1 - 2\sin^2x$.
* $\forall\, a,b \in IR$; $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
  $tg(a+b) = \dfrac{tga + tgb}{1 - tga\, tgb}$ (lorsque ces éléments sont définis).
* En notant $t = tg\dfrac{x}{2}$, on a : $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $tgx = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

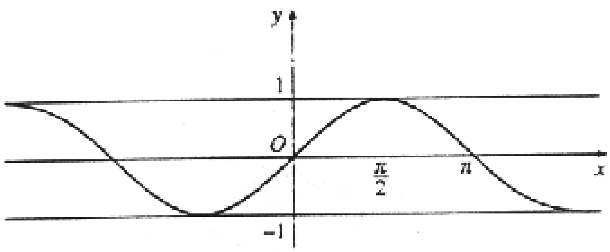
3) <u>Les équations</u>

* $\forall\, a,b \in IR$; $\cos a = \cos b \iff \begin{cases} a \equiv b(2\pi) \\ a \equiv -b(2\pi) \end{cases}$

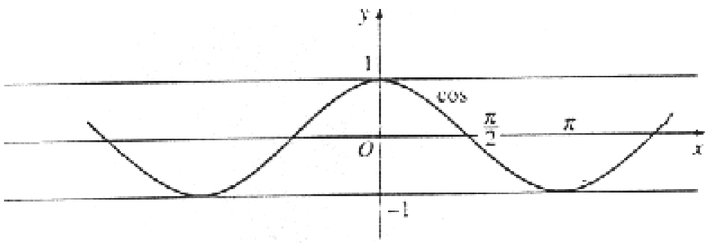
  $\sin a = \sin b \iff \begin{cases} a \equiv b(2\pi) \\ a \equiv \pi - b(2\pi) \end{cases}$

* $\forall\, a,b \in IR \setminus (\frac{\pi}{2}+\pi Z)$; $tga = tgb \iff a \equiv b\ (\pi)$.

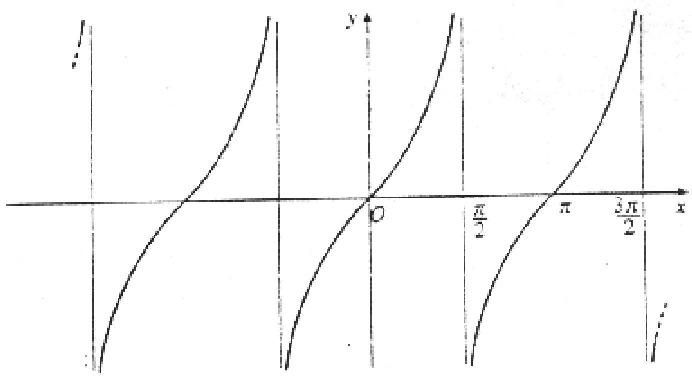
4) <u>Les représentations graphiques :</u> (voir page suivante)



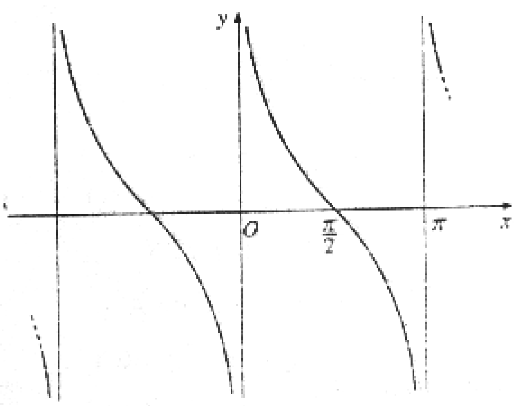
Représentation graphique de sin



Représentation graphique de cos



Représentation graphique de tan



Représentation graphique de cotan

II-2- Les fonctions circulaires réciproques

1) Arc sin

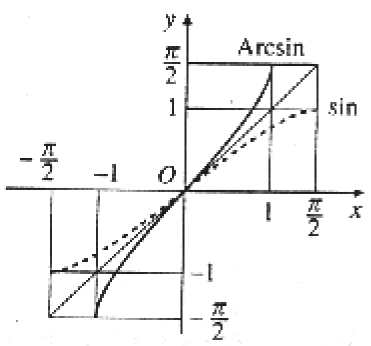
* L'application sin : $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ est continue, strictement croissante et $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Elle admet donc une application réciproque notée Arc sin : $[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

On a ainsi : $\forall (x,y) \in [-1,1] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$; $y = \text{Arc}\sin x \Leftrightarrow x = \sin y$.

* La fonction Arc sin est impaire.

Arc $\sin 0 = 0$, Arc $\sin 1 = \frac{\pi}{2}$, Arc $\sin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

* Arc sin est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$; Arc $\sin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



Représentation graphique de Arcsin

2) Arc cos

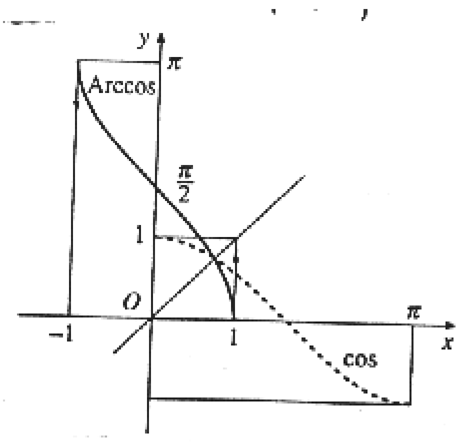
* L'application cos : $[0,\pi] \to [-1,1]$ est continue et strictement décroissante et $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$, elle admet donc une application réciproque notée Arc cos : $[-1,1] \to [0,\pi]$.

On a ainsi :

$\forall (x,y) \in [-1,1] \times [0,\pi]$ $y = \text{Arc}\cos x \Leftrightarrow x = \cos y$.

* La fonction Arc cos n'est ni paire ni impaire.

* Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$; Arccos'$x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.



Représentation graphique de Arccos

Proposition

$$\forall x \in [-1,1],\quad \text{Arc sin}x + \text{Arc cos}x = \frac{\pi}{2}$$

Preuve :

$\forall x \in [-1,1]$, posons $u = \text{Arc cos}x$ alors $u \in [0,\pi]$ et $\cos u = x$, or $\cos u = \sin(\frac{\pi}{2}-u)$

d'où $x = \sin(\frac{\pi}{2}-u)$ et comme $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}-u \le \frac{\pi}{2}$

alors $\text{Arc sin}x = \frac{\pi}{2}-u$.

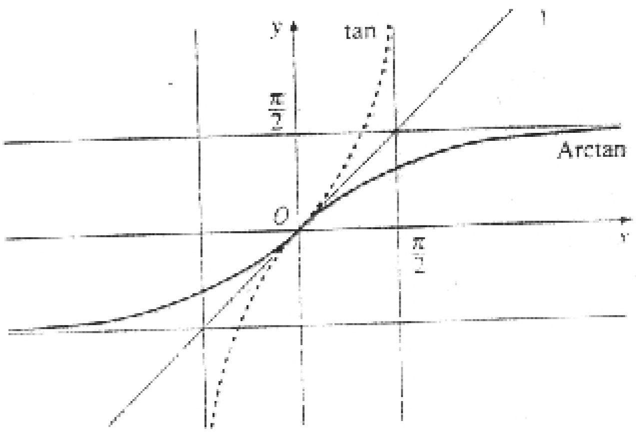
Donc $\text{Arc sin}x + \text{Arc cos}x = \frac{\pi}{2}$.

3) Arc tg

L'application $tg :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to IR$ est continue, strictement croissante et $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} tg = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} tg = +\infty$. Elle admet donc une application réciproque, notée $\text{Arctg} : IR \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

On a ainsi :

- $\forall (x,y) \in IR\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$; $y = \text{Arctg}x \iff x = tgy$
- La fonction Arc tg est impaire.
- Arc tg est dérivable sur IR et $\forall x \in IR$, $\text{Arc tg}'x = \frac{1}{1+x^2}$



Représentation graphique de Arctan

<u>Proposition</u>

$\forall x \in IR^*$; $Arctgx + Arctg\frac{1}{x} = \varepsilon\frac{\pi}{2}$ avec $\varepsilon = 1$ si $x > 0$ et $\varepsilon = -1$ si $x < 0$.

Preuve :

Pour $x > 0$; on a $\frac{\pi}{2}$ - Arc tgx $\in]0,\frac{\pi}{2}[$ et alors $tg(\frac{\pi}{2}-Arctgx) = \frac{1}{tg(Arctgx)} = \frac{1}{x}$, il en résulte que $\frac{\pi}{2}$ - Arc tgx = Arc tg$\frac{1}{x}$.

Pour $x < 0$, raisonner de façon analogue (ou utiliser un argument de parité).

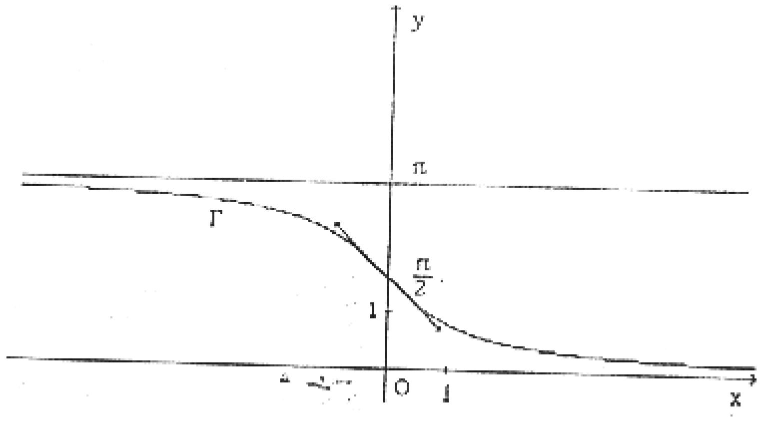
4) <u>Arc cotg</u>

L'application cotg : $]0,\pi[\rightarrow IR$ est continue, strictement décroissante et $\lim_{x\to\pi^-} \cot gx = -\infty$; $\lim_{x\to 0^+} \cot gx = +\infty$.

Elle admet donc une application réciproque notée Arc cotg : $3 \rightarrow]0,\pi[$

On a ainsi :

- $\forall (x,y) \in IR \times]0,\pi[$; y = Arc cotgx $\Leftrightarrow$ x = cotgy.
- La fonction Arc cotg est dérivable sur 3 et $\forall x \in IR$ Arc cotg'x = $-\frac{1}{1+x^2}$.
- On a : $\forall x \in IR$, Arc cotgx + Arc cotg(-x) = π.



Proposition :

$$\forall x \in IR \; ; \; \text{Arc tg}x + \text{Arc cotg}x = \frac{\pi}{2}$$

Preuve :

Soit $h : IR \to IR$ définie par $\forall x \in IR$, $h(x) = \text{Arc tg}x + \text{Arc cotg}x$

On a : $\forall x \in IR$, $h'(x) = 0$ et comme $h(0) = \dfrac{\pi}{2}$

Alors $\forall x \in IR$, $h(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

III- Fonction Logarithme népérien - Fonction exponentielle.

III-1- Logarithme népérien

1) Préliminaire

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.

On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et F' = f

- Si F et G sont deux primitives de f sur I alors il existe $\alpha \in IR$ tel que $G = F + \alpha$; ($\forall x \in I$; $G(x) = F(x) + \alpha$).
- Une fonction f admet une primitive et une seule sur I qui prend une valeur donnée y_0 en un point donné $x_0 \in I$.

2) Définition

On appelle fonction logarithme népérien et on note Log, ou Ln, la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

On écrit $\forall x \in]0,+\infty[$; $\text{Log}x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$.

3) Propriétés immédiates

i) $\text{Log}1 = 0$.

ii) $\forall x > 0$, $\text{Log}'x = \dfrac{1}{x}$. La fonction Log est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

iii) $\forall a > 0,\ \forall b > 0,$ $a = b \Leftrightarrow \text{Log}a = \text{Log}b$

$a < b \Leftrightarrow \text{Log}a < \text{Log}b$

iv) $\forall x > 0$, on a : $x > 1 \Leftrightarrow \text{Log}x > 0$

$x < 1 \Leftrightarrow \text{Log}x < 0.$

4) Proposition

$\forall a > 0,\ \forall b > 0$ on a :

i) $\text{Log}(ab) = \text{Log}a + \text{Log}b.$

ii) $\text{Log}(\frac{a}{b}) = \text{Log}a - \text{Log}b$; $\text{Log}\frac{1}{a} = -\text{Log}a.$

iii) $\text{Log}(a^n) = n\text{Log}a$; $\forall n \in \mathbb{Z}.$

iv) $\text{Log}(a^r) = r\text{Log}a$; $\forall n \in \mathbb{Q}.$

5) Des limites

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Log}x = +\infty.$

ii) $\lim\limits_{x\to0^+} \text{Log}x = -\infty$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\text{Log}x}{x} = 0.$

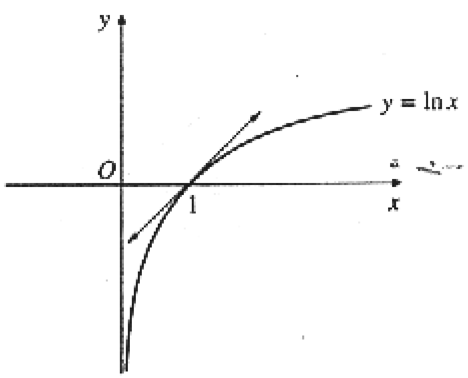
iv) $\lim\limits_{x\to0^+} x\text{Log}x = 0.$

v) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\text{Log}(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to1} \frac{\text{Log}x}{x-1} = 1.$

6) Représentation graphique

* Désignons par C la représentation graphique de la fonction Log.

- La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe car $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty.$
- La courbe C admet une branche parabolique de direction asymptotique (x'x) car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\text{Log}x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Log}x = +\infty.$
- La courbe C passe par le point I(1,0) et la tangente en ce point est la droite d'équation $y = x-1$ (car Log'1 = 1).
- Il existe un unique réel noté e vérifiant Loge = 1 (e est un nombre irrationnel, une valeur approchée de e est 2,71828…).



III-2- La fonction exponentielle

1) Définition

La fonction logarithme népérien Log : $]0,+\infty[\to$ IR est continue, strictement croissante et $\lim_{x\to 0^+} \text{Log}x = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \text{Log}x = +\infty$. Elle admet donc une fonction réciproque appelée exponentielle notée exp : IR $\to$ IR$^*_+$.

On a ainsi :

- $\forall (x,y) \in$ IR $\times$ IR$^*_+$, $y = \exp(x) \Leftrightarrow \text{Log}y = x$.
- $\forall x \in$ IR, on note $\exp(x) = e^x$.

2) Propriétés

i) $e^0 = 1$; $e^1 = e$.

ii) $\forall x \in$ IR, $e^x \geq 0$.

$\forall x \in$ IR, $x > 0 \Leftrightarrow e^x = 1$.

$x < 0 \Leftrightarrow e^x < 1$.

iii) $\forall x \in$ IR, $\exp'(x) = \exp(x)$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur 3.

3) Proposition

$\forall a,b \in$ IR, on a :

i) $e^{a+b} = e^a . e^b$.

ii) $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.

iii) $\forall r \in Q$; $e^{rx} = (e^x)^r$.

4) Des limites

i) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

ii) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

iii) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

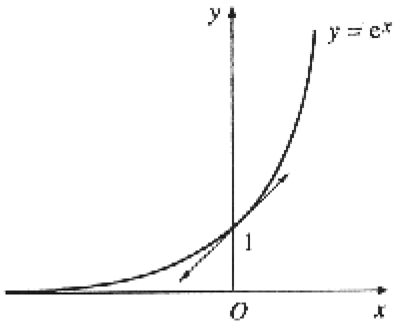
iv) $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

5) Représentation graphique

* Désignons par Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé.

- La courbe Γ est symétrique de celle de la fonction Log par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).
- La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à Γ.
- La courbe Γ admet une branche parabolique de direction asymptotique (y'y).
- La courbe Γ passe par le point A(0,1) et la tangente en ce point est la droite d'équation $y = x + 1$.



III-3- Logarithmes et exponentielles de base a

Dans tout ce paragraphe a désigne un réel fixe de $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

1) Définition

- On appelle logarithme de base a et on note $\log_a$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$\forall x\in]0,+\infty[$; $\log_a x = \dfrac{\mathrm{Log}x}{\mathrm{Log}a}$.

- On appelle fonction exponentielle de base a et on note $\exp_a$ la fonction définie sur 3 par :
  $\forall x\in \mathbb{R}$, $\exp_a(x) = e^{x\mathrm{Log}a}$.

2) Remarque

- $\forall x\in \mathbb{R}$, on note $\exp_a(x) = a^x$; ainsi on a : $\forall x\in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x\mathrm{Log}a}$.
- $\log_e = \mathrm{Log}$ car $\forall x\in \mathbb{R}$, $\log_e x = \dfrac{\mathrm{Log}x}{\mathrm{Log}e} = \mathrm{Log}x$.
- La fonction $\exp_a$ est la fonction réciproque de $\log_a$.

3) Propriétés

i) $\log_a 1 = 0$; $\exp_a(0) = 1$.

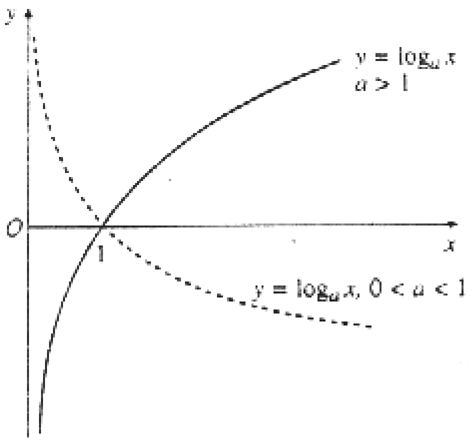
ii) $\forall x > 0$, $(\log_a)'(x) = \dfrac{1}{x\mathrm{Log}a}$; $\forall x\in \mathbb{R}$, $(\exp_a)'(x) = (\mathrm{Log}a).\exp_a(x)$.

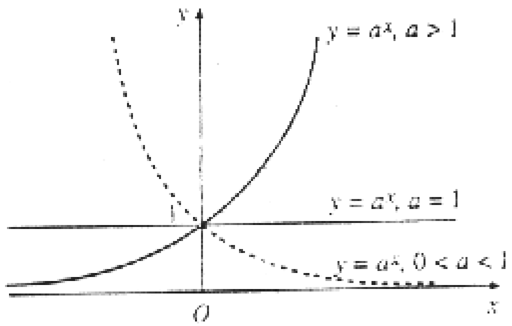
iii) $\forall x > 0$, $\forall y > 0$; $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; $\forall x\in \mathbb{R}$, $\forall y\in \mathbb{R}$, $a^{x+y} = a^x.a^y$.

iv) $\forall x > 0$, $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$; $\forall x\in \mathbb{R}$, $\exp_{\frac{1}{a}}(x) = \dfrac{1}{\exp_a(x)}$.

v) $\forall x > 0$, $\forall y > 0$; $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$; $\forall x\in \mathbb{R}$, $\forall y\in \mathbb{R}$, $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.

4) Représentation graphique





III-4- Fonctions puissances

1) Définition

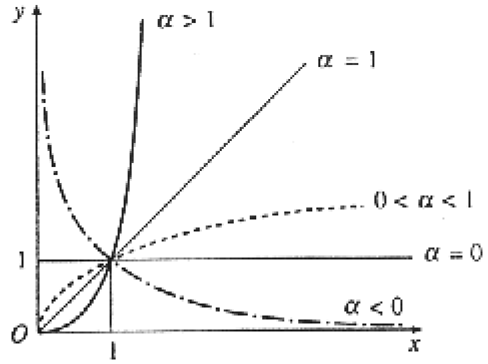
Soit $\alpha \in$ IR, on appelle puissance d'exposant α la fonction notée p_α définie sur $]0,+\infty[$ par $\forall x \in]0,+\infty[$; $p_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \text{Log} x}$.

Remarque : si $\alpha > 0$, comme $\lim\limits_{x\to 0^+} p_\alpha(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\alpha \text{Log} x} = 0$, on prolonge alors par continuité la fonction p_α en zéro en posant : $p_\alpha(0) = 0$.

2) Propriétés

- La fonction p_α est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $p_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
- Si $\alpha < 0$ alors la fonction p_α est décroissante et $p_\alpha(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$.
- Si $\alpha > 0$ alors la fonction p_α est croissante et $p_\alpha([0,+\infty[) = [0,+\infty[$.

3) Représentation graphique



Représentation graphique de $x \mapsto x^\alpha$

IV- Fonctions hyperboliques.

IV-1- Les fonctions hyperboliques directes

1) Définition1

- On appelle sinus hyperboliques et on note sh la fonction :

  sh : IR $\rightarrow$ IR

  $$x \mapsto \text{shx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- On appelle cosinus hyperboliques et on note ch la fonction :

  ch : IR $\rightarrow$ IR

  $$x \mapsto \text{chx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

2) Propriétés

i) Les fonctions sh et ch sont indéfiniment dérivables sur 3 et sh' = ch et ch' = sh c-à-d :
$\forall x \in$ IR ; sh'x = chx et $\forall x \in$ IR ch'x = shx.

ii) La fonction sh est impaire : $\forall x \in$ IR, sh(-x) = -shx
La fonction ch est paire : $\forall x \in$ IR, ch(-x) = chx.

iii) $\forall x \in$ IR, chx ≥ 1 ; ch0 = 1.
$\forall x \in]-\infty,0[$; shx < 0 ; sh0 = 0 ; $\forall x \in]0,+\infty[$, shx > 0.

iv) $\lim\limits_{+\infty} \text{shx} = +\infty$; $\lim\limits_{-\infty} \text{shx} = -\infty$; $\lim\limits_{+\infty} \frac{\text{shx}}{x} = +\infty$.

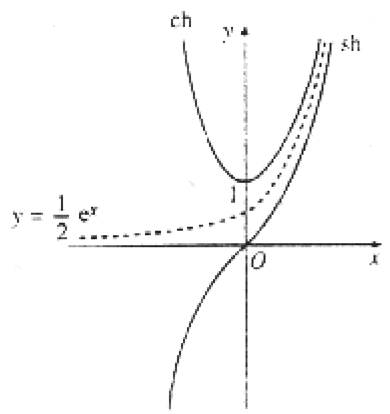
$\lim\limits_{+\infty} \text{chx} = +\infty$; $\lim\limits_{-\infty} \text{chx} = +\infty$; $\lim\limits_{+\infty} \frac{\text{chx}}{x} = +\infty$.

v) - La fonction sh est croissante sur IR et sh(IR) = IR.
- La fonction ch est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$.

3) Représentation graphique

- La courbe de la fonction sh est symétrique par rapport à 0.
Elle passe par le point 0 et admet une branche parabolique de direction asymptotique (y'y).

- La courbe de la fonction chx est symétrique par rapport à la droite $(0,\vec{j})$. Elle passe par le point I(0,1) qui est un minimum absolue et admet une branche parabolique de direction asymptotique (y'y).



4) Proposition

$\forall x \in IR$, on a : $chx + shx = e^x$

$chx - shx = e^{-x}$

$ch^2x - sh^2x = 1.$

5) Définition2

- On appelle tangente hyperbolique et on note th la fonction :

$$th : IR \to IR$$
$$x \mapsto thx = \frac{shx}{chx}$$

- On appelle cotangente hyperbolique et on note coth la fonction :

$$coth : IR^* \to IR$$
$$x \mapsto cothx = \frac{chx}{shx}$$

6) Propriétés

i) La fonction th est dérivable sur IR et $\forall x \in IR$ on a :

$$th'x = \frac{1}{ch^2x} = 1 - th^2x.$$

La fonction coth est dérivable sur IR * et $\forall x \in IR^*$ on a :

$$coth'x = -\frac{1}{sh^2x} = 1 - coth^2x.$$

ii) Les fonctions th et coth sont impaires.

iii) $\forall x \in IR$, $thx = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$; $\forall x \in IR^*$, $cothx = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.

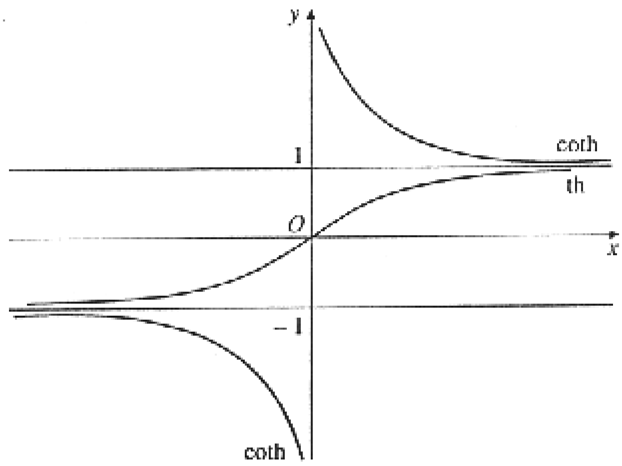
iv) $\lim\limits_{+\infty} thx = 1$; $\lim\limits_{+\infty} cothx = 1$.

v) La fonction th est croissante sur IR et th(IR) =]-1,1[.

vi) La fonction coth est décroissante sur chacun des intervalles]-∞,0 [et]0,+∞[et coth(]-∞,0 [) =]-∞,-1[et coth(]0,+∞[) =]1,+∞[.

7) <u>Représentation graphique</u>

- Les droites d'équations respectives y = 1 et y = -1 sont des asymptotes à la courbe de la fonction th.
- Les droites d'équations respectives x = 0, y = 1 et y = -1 sont des asymptotes à la courbe de la fonction coth.



8) <u>Quelques formules</u>

∀ a,b∈ IR, on a :

ch(a+b) = cha chb + sha shb ; ch(a-b) = cha chb - sha shb

sh(a+b) = sha chb + cha shb ; sh(a-b) = sha chb - cha shb

sh2a = 2 sha chb ; ch2a = $ch^2a + sh^2a = 2\,ch^2a-1 = 1+ 2sh^2a$

$th(a+b) = \dfrac{tha + thb}{1 + tha\ thb}$; $th2a = \dfrac{2tha}{1 + th^2 b}$.

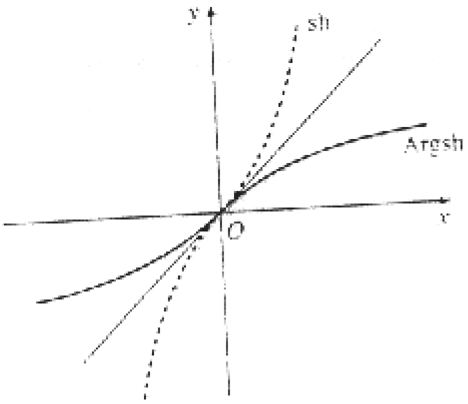
IV-2- <u>Les fonctions hyperboliques réciproques</u>

1) <u>Argsh</u>

- La fonction sh : IR → IR est continue strictement croissante et sh(IR) = IR. Elle admet donc une fonction réciproque notée Argsh : IR → IR .
  On a ∀ (x,y) ∈ IR^2 ; y = Argshx ⇔ x = shy.

- La fonction Argsh est dérivable sur IR et ∀ x∈ IR on a :
  $Argsh'x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

- La fonction Argsh est impaire.



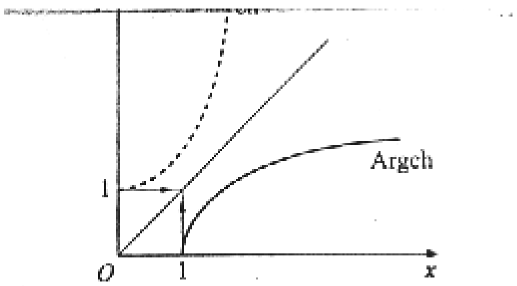
$\forall x \in IR$, on a : $\text{Argsh}x = \text{Log}(x + \sqrt{1+x^2})$.

En effet : $y = \text{Argsh}x \Leftrightarrow x = \text{sh}y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$.

Comme l'équation $Y^2 - 2xY - 1 = 0$ admet deux racines réelles $y_1 = x - \sqrt{1+x^2} < 0$ et $y_2 = x + \sqrt{1+x^2} > 0$ donc $e^y = x + \sqrt{1+x^2}$.

2) La fonction Argch

* La fonction ch : $[0,+\infty[\rightarrow IR$ est continue , strictement croissante et $ch([0,+\infty[) = [1,+\infty[$.
  Elle admet donc une fonction réciproque notée Argch : $[1,+\infty[\rightarrow [0,+\infty[$.
  On a aussi : $\forall (x,y) \in [1,+\infty[\times [0,+\infty[$, $y = \text{Argch}x \Leftrightarrow x = \text{ch}y$.
* La fonction Argth est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \in]1,+\infty[$ on a :
  $\text{Argch}'x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

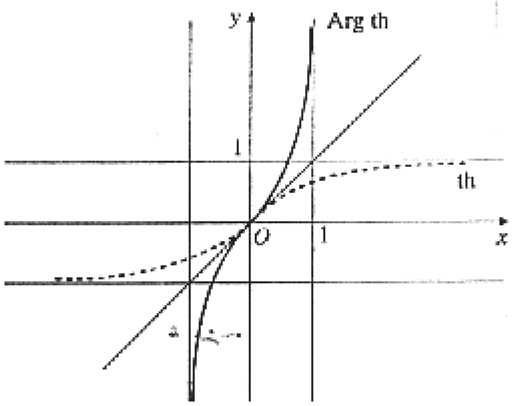


* $\forall x \in [1,+\infty[$, on a : $\text{Argch}x = \text{Log}(x + \sqrt{x^2-1})$.

3) La fonction Argth

* La fonction th : $IR \rightarrow]-1,1[$ est continue, strictement croissante et $th(IR) =]-1,1[$. Elle admet donc une fonction récproque notée Argth : $]-1,1[\rightarrow IR$.
On a ainsi : $\forall x \in]-1,1[\times IR$, $y = \text{Argth}x \Leftrightarrow x = \text{th}y$.
* La fonction Argth est impaire.
* La fonction Argth est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$ on a :

Argth'x = $\frac{1}{1-x^2}$.



* ∀ x∈]-1,1[, on a : Argthx = $\frac{1}{2}Log\frac{1+x}{1-x}$.

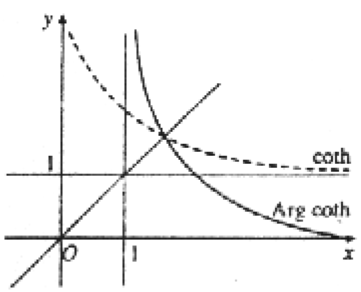
4) La fonction Argcoth

* La fonction cothx :]0,+∞[→ IR est continue, strictement décroissante et coth(]0,+∞[) =]1,+∞[. Elle admet donc une fonction réciproque notée Argcoth :]1,+∞[→]0,+∞[.

On a ainsi : ∀ x∈]1,+∞[×]0,+∞[: y = Argcothx ⇔ x = cothy.

* La fonction Argcoth est dérivable sur]1,+∞[et ∀ x∈]1,+∞[, on a :

Argcoth'x = $\frac{1}{1-x^2}$.



* ∀ x∈]1,+∞[, on a : Argcothx = $\frac{1}{2}Log\frac{x+1}{x-1}$.

V- Comparaison locale des fonctions.

Pour simplifier la rédaction, on pose $\overline{\mathrm{R}}$ = IR ∪ {-∞,+∞}, appelée : la droite numérique achevée.

V-1- Equivalence

1) Définition

On dit que deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et on écrit $f \underset{a}{\sim} g$ (ou plus simplement $f \sim g$ ou encore $f(x) \sim g(x)$ $(x \to a)$) si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

2) <u>Remarque</u>

* Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$.

* Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors il existe un voisinage V de a, tel que sur V-{a} f et g ne s'annulent pas et sont de même signe.

3) <u>Propriétés</u>

Au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

i) $f \sim f$; si $f \sim g$ alors $g \sim f$; si $f \sim g$ et $g \sim h$ alors $f \sim h$.

ii) $\begin{cases} f \sim \varphi \\ g \sim \psi \end{cases} \Rightarrow f g \sim \varphi \psi$.

iii) $f \sim \varphi \Rightarrow f^n \sim \varphi^n$; $n \in \mathbb{N}^*$.

iv) $f \sim \varphi \Rightarrow \dfrac{1}{f} \sim \dfrac{1}{\varphi}$.

v) $\begin{cases} f \sim \varphi \\ g \sim \psi \end{cases} \Rightarrow \dfrac{f}{g} \sim \dfrac{\varphi}{\psi}$.

4) <u>Exemples</u>

* On a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ ainsi $\sin x \underset{0}{\sim} x$.

* $\mathrm{Log}(1+x) \underset{0}{\sim} x$.

5) <u>Proposition</u>

i) $e^f \underset{a}{\sim} e^\varphi \Leftrightarrow f - \varphi \xrightarrow[a]{} 0$.

ii) Si φ est à valeurs > 0 dans un voisinage de a (sauf peut être en a). Alors :

Si $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} \varphi \\ \text{et} \\ \lim\limits_{a} \varphi = \ell \,;\, \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+ - \{1\} \end{cases}$ alors $\mathrm{Log} f \underset{a}{\sim} \mathrm{Log}\varphi$.

<u>Attention</u> : * Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ on ne peut pas déduire que $e^f \underset{a}{\sim} e^\varphi$.

Par exemple $x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$ mais e^{x+1} et e^x ne sont pas équivalentes au voisinage de $+\infty$ (car $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^{x+1}}{e^x} = e$).

* Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et $\varphi \underset{a}{\to} 1$ on ne peut pas conclure $\mathrm{Log} f \underset{a}{\sim} \mathrm{Log}\varphi$.

Par exemple $1+x \underset{0}{\sim} 1+2x$ mais $\text{Log}(1+x)$ et $\text{Log}(1+2x)$ ne sont pas équivalentes au voisinage de 0 (car $\text{Log}(1+x) \underset{0}{\sim} x$, $\text{Log}(1+2x) \underset{0}{\sim} 2x$ et x et $2x$ ne sont pas équivalentes au voisinage de 0).

6) <u>Remarques</u>.

On n'a pas le droit d'additionner les équivalents en général.

$\begin{cases} f \underset{a}{\sim} \varphi \\ g \underset{a}{\sim} \psi \end{cases}$ n'entraîne pas $f+g \underset{a}{\sim} \varphi+\psi$.

Par exemple : $\begin{cases} x + x^2 \underset{0}{\sim} x \\ -x + x^3 \underset{0}{\sim} -x \end{cases}$ mais $(x+x^2) + (-x+x^3) = x^2+x^3 \underset{0}{\sim} x^2$

et x^2+x^3 n'est pas équivalent à $x+(-x) = 0$.

Ce défaut de mécanisme dans l'utilisation des équivalences est une cause importante d'erreurs.

Cependant, dans des situations particulières et sous certaines hypothèses on peut "additionner des équivalences".

On a en particulier le résultat suivant :

$$\begin{cases} f(x) \underset{+\infty}{\sim} \lambda x^{\alpha} \\ \varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \mu x^{\beta} \end{cases} \Rightarrow f(x) + \varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \lambda x^{\alpha} + \mu x^{\beta}$$

Sauf si $\alpha = \beta$ et $\lambda+\mu = 0$.

V-2- <u>Equivalents usuels.</u>

1) <u>Proposition</u> :

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)\,(x - a)$ car $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

2) <u>Théorème</u> :

On a :

i) $\sin x \underset{0}{\sim} x$	;	$\text{tg}x \underset{0}{\sim} x$.
ii) $\text{Log}(1+x) \underset{0}{\sim} x$	;	$e^x-1 \underset{0}{\sim} x$
iii) $\text{sh}x \underset{0}{\sim} x$	;	$\text{th}x \underset{0}{\sim} x$
iv) $1-\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$	;	$\text{ch}x-1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
v) Pour $\alpha \in$ IR, a fixé	;	$(1+x)^{\alpha}-1 \underset{0}{\sim} \alpha x$
vi) $\arcsin x \underset{0}{\sim} x$	;	$\text{Arctg}x \underset{0}{\sim} x$.

3) <u>Remarque</u> :

Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ alors $\lim\limits_{a} \varphi(x) = \lambda \Rightarrow \lim\limits_{a} f(x) = \lambda, \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

4) <u>Propriétés</u> :

i) Tout polynôme non nul est équivalent en $+\infty$ et $-\infty$ à son terme de plus haut degré.

ii) Tout polynôme non nul est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré.

iii) Toute fraction rationnelle non nulle est équivalente en $+\infty$ et en $-\infty$ au quotient de ces termes de plus haut degré.
iv) Toute fraction rationnelle non nulle est équivalente en 0 au quotient de ses termes de plus bas degré.
Par exemple :

$$x^4+x^2+2x \underset{+\infty}{\sim} x^4 \qquad ; \qquad \frac{2x^4-x^2+x}{x^2-1} \underset{0}{\sim} x.$$

5) <u>Remarque</u> :
La plus part des équivalents sont donnés au voisinage 0. Pour chercher un équivalent d'une fonction au voisinage de $x_0 \in$ IR, on peut effectuer un changement de variable pour se ramener au voisinage de 0.
Par exemple :
- Cherchons un équivalent au voisinage de 2 de f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3+2x}{x^2+x-6}.$$

Posons $t = x-2$, alors $f(x) = f(2+t) = \dfrac{t^3+6t^2+14t+12}{5t+t^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{12}{5t}$

Ainsi $f(x) \underset{2}{\sim} \dfrac{12}{5(x-2)}$.

6) <u>Exercice</u> :

Montrons que $\text{Arccos}x \underset{1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{(1-x)}$.

7) <u>Applications</u> :
Calculer les limites suivantes :
a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{Log}(1+2\text{tg}x)}{\sin x}$;

On a : $\begin{cases} \text{Log}(1+2\text{tg}x) \underset{0}{\sim} 2\text{tg}x \underset{0}{\sim} 2x \\ \sin x \underset{0}{\sim} x \end{cases}$ alors

$\dfrac{\text{Log}(1+2\text{tg}x)}{\sin x} \underset{0}{\sim} 2$ et par suite $\lim\limits_{0} \dfrac{\text{Log}(1+2\text{tg}x)}{\sin x} = 2$.

b) $\lim\limits_{+\infty} (1+\dfrac{1}{x})^x$

On a : $\text{Log}\left[(1+\dfrac{1}{x})^x\right] = x\,\text{Log}(1+\dfrac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} x\dfrac{1}{x} = 1$

Alors $\lim\limits_{+\infty} \text{Log}\left[(1+\dfrac{1}{x})^x\right] = 1$

et puis par continuité de la fonction exponentielle en 1, $\lim\limits_{+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$.

V-3- <u>Comparaison locale des fonctions logarithmes, Puissances et exponentielles.</u>

1) <u>Proposition 1:</u>

$\forall\, \alpha,\beta \in \text{IR}^*_+$, $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{(\text{Log}x)^\alpha}{x^\beta} = 0$.

En effet : Rappelons que l'on sait que : $\lim\limits_{+\infty} \frac{\text{Log}x}{x} = 0$.

Alors $\frac{(\text{Log}x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\text{Log}x}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\text{Log}(x^{\beta/\alpha})}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

On dit que la puissance "l'emporte" sur le logarithme au voisinage de $+\infty$.

En particulier, $\forall\ \beta>0$, $\lim\limits_{+\infty} \frac{\text{Log}x}{x^\beta} = 0$.

2) <u>Proposition 2</u> :

$\forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}^*_+$, $\lim\limits_{0^+} x^\beta |\text{Log}x|^\alpha = 0$.

En effet :

Il suffit d'effectuer le changement de variable $X = \frac{1}{x}$

$x \to 0^+$ alors $X \to +\infty$ et d'appliquer la proposition 1.

On dit que la puissance "l'emporte" sur le logarithme au voisinage de 0.

En particulier, $\forall\ \beta>0$, $\lim\limits_{0^+} x^\beta \text{Log}x = 0$.

3) <u>Proposition 3</u> :

$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, on a : i) $\lim\limits_{+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

ii) $\lim\limits_{-\infty} |x|^\alpha e^x = 0$.

En effet :

i) Le changement de variable $y = e^x$ nous ramène à la proposition 1.

ii) Le changement de variable $t = -x$ nous ramène au i).

On dit que l'exponentielle "l'emporte" sur la puissance en $+\infty$ et en $-\infty$.

4) <u>Exemple</u> :

* $\lim\limits_{+\infty}(\sqrt{x} - \text{Log}(x^2))$

On a : $\sqrt{x} - \text{Log}(x^2) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{2\text{Log}x}{\sqrt{x}}\right)$

Comme $\lim\limits_{+\infty} \frac{\text{Log}x}{\sqrt{x}} = 0$ alors $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{x} - \text{Log}(x^2) = +\infty$.

* $\lim\limits_{+\infty} \frac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$

$\frac{x^3}{e^{\sqrt{x}}} = \frac{(\sqrt{x})^6}{e^{\sqrt{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercices

Exercice1 :

1) Calculer :

$$\lim_{-\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+3x+1}} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} \quad ; \quad \lim_{\pi/4} \frac{\sin x - \cos \pi/4}{x-\pi/4}.$$

2) Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
(préciser le domaine de dérivabilité).

$$f(x) = 2x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \quad ; \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1}$$

$$f(x) = (\sin(3x+2))^6 \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{\cos\sqrt{x}}.$$

Exercice2 :

1) Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad ; \quad f(x) = \frac{3x^2-6x+2}{x^2-3x+2}.$$

2) Soit $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{1-x^5}{1-x}$

a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in IR\backslash\{1\}$.

b) En déduire l'égalité :

$$1+2x+3x^2+4x^3 = \frac{1-5x^4+4x^5}{(1-x)^2}.$$

c) Généraliser le résultat précédent à $1+2x+\ldots+nx^{n-1}$.

Exercice3 :

1) Montrer que $\forall\, x \in IR :\ \cos(\text{Arctg}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2) Calculer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = \text{Arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3) On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \text{Arctg}\frac{1}{2x^2} \quad ; \quad g(x) = \text{Arctg}\frac{x}{x+1} - \text{Arctg}\frac{x-1}{x}$$

Etudier et représenter la fonction $h = f-g$.

Exercice4 :

Etudier et représenter graphiquement :

1) $f(x) = \dfrac{1+x}{1+e^{1/x}}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{\text{sh}\dfrac{1}{x}}$

3) $f(x) = \text{Logch}x$; 4) $f(x) = (x-1)\ \text{Aegth}\dfrac{1}{x}$.

Exercice5 :

1) Résoudre $\begin{cases} chx + chy = \dfrac{35}{12} \\ shx + shy = \dfrac{25}{12} \end{cases}$.

2) Montrer que : $\text{Argth}\dfrac{1+3thx}{3+thx} = x + \dfrac{1}{2}\text{Log}2$.

3) Exprimer sh^3x en fonction de shx et sh3x.

Exercice6 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{+\infty} x\text{Log}thx$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\text{Arcsin}\frac{1}{x}}$; 3) $\lim\limits_{0^+} x\text{Log}(xsh\dfrac{1}{x})$

4) $\lim\limits_{+\infty} e^{-x}(sh\sqrt{x^2+x} - sh\sqrt{x^2-x})$; 5) $\lim\limits_{+\infty}(\text{Log}x)^2 x^4 e^{-x}$.