Mathématiques pour l'ingénieur

Thomas Cluzeau

Maître de Conférences

École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges
Parc ester technopole, 16 rue d'atlantis 87068 Limoges Cedex
cluzeau@ensil.unilim.fr
http://www.ensil.unilim.fr/~cluzeau

Maths à l'ENSIL en TC1

- Harmonisation en fonction du test de la rentrée
  - Analyse
  - Algèbre linéaire
- À l'intérieur de UE - Enseignements de TC1 S1
  - Mathématiques pour l'ingénieur (coeff. 2)
- À l'intérieur de UE - Enseignements de TC1 S2
  - Analyse numérique (coeff. 2)

Maths pour l'ingénieur : organisation et évaluation

- Organisation
  - 7 séances d'1h30 de cours
  - 8 séances d'1h30 de TD
- Évaluation :
  - 1 examen intermédiaire de 30 min. sans documents en S9
    1/4 note finale $\rightsquigarrow$ Tutorat en S13
  - 1 examen final de 1h30 avec documents en S15
    3/4 note finale

Plan du cours

Chapitre 1

Introduction aux distributions

I

Pourquoi introduire les distributions ?

Historique

• Distributions : utilisées depuis très longtemps par les physiciens

• Théorie mathématique rigoureuse plus récente : Sobolev (1936), L. Schwartz (1950), Gelfand (1964)

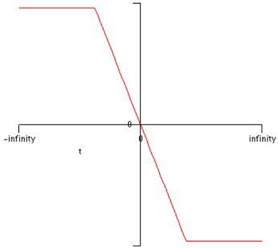
• Théorie la mieux adaptée à l'étude de nombreux systèmes physiques (systèmes linéaires continus)

• Convolution et Transformée de Fourier outils très puissants grâce aux distributions

Définition intuitive d'une distribution : outil mathématique utilisé pour représenter des phénomènes physiques que les fonctions classiques s'avèrent incapables de transcrire

Exemple introductif (1)

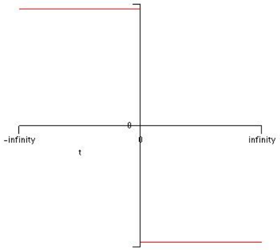
- Exemple : choc élastique & choc dur entre deux objets
  - Partie de squash : vitesse v_0 avant puis $-v_0$ après Δt



Loi de la mécanique Newtonnienne $\Rightarrow F = m\,\dot{v}$

Exemple introductif 1

- Partie de pétanque : on passe de v_0 à $-v_0$ sans Δt



On a encore $F = m\,\dot{v}$ donc $F(t) = 0,\ \forall\, t \neq 0$

De plus $\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t = v(+\infty) - v(-\infty) = -2\,v_0$

ce qui est absurde pour des fonctions

$\Rightarrow$ Problème ne pouvant être traité au sens des fonctions

$\Rightarrow$ On a besoin d'objets plus généraux : les distributions

Autres exemples

- Distributions de charges en électrostatique (cf. polycopié)
- En mécanique, dans le cadre de l'application du Principe Fondamental de la Dynamique, comment écrire l'équation du mouvement d'un solide lorsque le système est soumis à une force intense appliquée pendant un intervalle de temps très court à partir de l'instant $t = t_0$?
- En électricité, comment va se comporter un circuit dont l'entrée varie brusquement ; par exemple par fermeture d'un interrupteur sur une source de tension continue ?
- En hydraulique, comment va se comporter un système dont on ouvre brusquement une vanne à l'instant $t = t_0$?

II

Fonctionnelles et espace $\mathcal{D}$ des fonctions tests

Fonctionnelles

Définition

On dit que l'on a une fonctionnelle sur un ensemble de fonctions appelées fonctions tests, si à chacune de ces fonctions on peut associer un nombre complexe.

Fonctionnelle T sur un espace de fonctions $\mathcal{F}$:

$$T : \mathcal{F} \to \mathbb{C}, \ \varphi \mapsto < T, \varphi >$$

• Plus les conditions de régularité imposées aux fonctions tests sont sévères, plus les fonctionnelles définies sont générales

• Les distributions seront définies comme fonctionnelles sur un certain espace, noté $\mathcal{D}$, que nous allons présenter maintenant

L'espace des fonctions tests $\mathcal{D}$

RESTRICTION POUR CE COURS : fonctions à une seule variable

Définition

Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}$. Le support de f, noté $\mathrm{Supp}(f)$, est l'adhérence des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \neq 0$.

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}\,;\ f(x) \neq 0\}}.$$

Définition

On définit l'ensemble $\mathcal{D}$ comme l'espace des fonctions à valeurs complexes définies sur $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables et à support borné (compact).

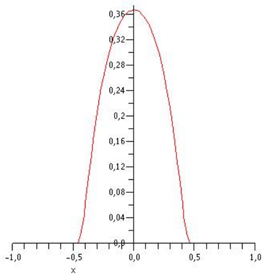
Remarques : C'est un espace vectoriel de dimension infinie.
Les fonctions de $\mathcal{D}$ ont des limites nulles en $\pm\infty$

Exemples de fonctions de $\mathcal{D}$

- Des exemples ne viennent pas immédiatement à l'esprit
- Exemple fondamental :

$$\xi_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad |\, x \,| \quad \geq \quad 1/a, \\ \exp\left(\frac{-1}{1-a^2\,x^2}\right) & \text{pour} \quad |\, x \,| \quad < \quad 1/a, \end{cases}$$

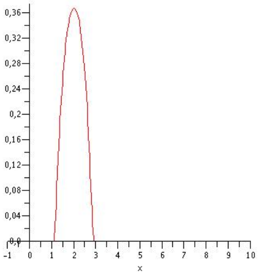
avec $a > 0$.



Exemples de fonctions de $\mathcal{D}$

Plus généralement, toute fonction ξ_{ab} définie par

$$\xi_{ab}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \notin \,]a, b[, \\ \exp\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right]\right) & \text{pour} \quad x \in \,]a, b[. \end{cases}$$



Autres exemples et théorème d'approximation

- Autre famille de fonctions de $\mathcal{D}$: $\gamma_k(x) = \frac{\xi_1(k\,x)}{\int \xi_1(k\,x)\mathrm{d}x}$

Théorème

Si $\varphi \in \mathcal{D}$ et si f est une fonction sommable (intégrable) à support borné, alors $\psi(x) = \int f(t)\,\varphi(x-t)\mathrm{d}t$ est une fonction de $\mathcal{D}$.

- Soit $\psi_k(x) = \int f(t)\,\gamma_k(x-t)\mathrm{d}t$

f continue $\Rightarrow$ $(\psi_k)_k$ converge uniformément vers f

Théorème (Théorème d'approximation)

Toute fonction continue à support borné peut être approchée uniformément par une suite $(\varphi_n)_{n>0}$ de fonctions de $\mathcal{D}$.

$$\forall\,\epsilon > 0, \exists\,N \in \mathbb{N}, \text{ tel que}, \forall\,n \geq N,\ \forall\,x,\ |\,f(x) - \varphi_n(x)\,| \leq \epsilon.$$

Topologie de $\mathcal{D}$

- Définie par un critère de convergence pour les suites

Définition

Une suite $(\varphi_n)_{n>0}$ de fonctions de $\mathcal{D}$ converge vers une fonction φ lorsque n tend vers l'infini si :

1. *Il existe un ensemble borné B (indépendant de n) de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $n > 0$, $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subset B$;*
2. *Pour tout entier $k \geq 0$, la suite des dérivées $(\varphi_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\varphi^{(k)}$.*

On peut montrer que la limite φ appartient alors à $\mathcal{D}$

III

L'espace $\mathcal{D}'$ des distributions

Définition (1)

Définition

On appelle distribution *toute fonctionnelle linéaire continue sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}$.*

Distribution T :

$$T : \mathcal{D} \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto < T, \varphi >= T(\varphi)$$

1. Linéarité

$$< T, \lambda_1\, \varphi_1 + \lambda_2\, \varphi_2 >= \lambda_1\ < T, \varphi_1 > + \lambda_2\ < T, \varphi_2 >$$

2. Continuité : $(\varphi_k)_{k>0}$ converge dans $\mathcal{D}$ vers φ
$\Rightarrow (< T, \varphi_k >)_{k>0}$ converge au sens usuel vers $< T, \varphi >$, *i.e.*,

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que}, \forall\, k > N,\ |< T, \varphi > - < T, \varphi_k >| \leq \epsilon$$

Définition (2)

- Ensemble des distributions = espace vectoriel noté $\mathcal{D}'$

- La somme de deux distributions et le produit d'une distribution par un scalaire sont définis comme suit :
  - $< S+T, \varphi > = < S, \varphi > + < T, \varphi >$
  - $< \lambda T, \varphi > = \lambda < T, \varphi >$

Exemples : distributions régulières (1)

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite localement sommable si elle est intégrable sur tout intervalle borné. À toute fonction f localement sommable, on associe la distribution T_f définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, < T_f, \varphi >= \int f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Une telle distribution est dite régulière

Lemme

Deux fonctions localement sommables définissent la même distribution ssi elle sont égales presque partout.

Exemples : distributions régulières (2)

- Valeur principale de Cauchy de $1/x$ notée $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$

$$< \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}, \varphi >= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x$$

- Distribution de Heaviside
  - Fonction H de Heavside :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \mathrm{pour} \quad x \geq 0 \\ 0 & \mathrm{pour} \quad x < 0 \end{cases}$$

  - Distribution $W = T_H$ de Heaviside :

$$< W, \varphi >=< T_H, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\, \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \varphi(x) \mathrm{d}x$$

Exemples : distributions singulières (1)

• Les distributions qui ne s'écrivent pas T_f pour f localement sommable sont dites singulières

• Distribution δ de Dirac (exemple le plus usuel)

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \; < \delta, \varphi >= \varphi(0)$$

Plus généralement, la distribution δ_a de Dirac au point a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \; < \delta_a, \varphi >= \varphi(a).$$

• **Attention** : en physique, on écrit souvent $\delta(x)$ ou $\delta(x-a)$ au lieu de δ et δ_a. Cette écriture laisse croire que δ est une fonction ce qui est faux !

Exemples : distributions singulières (2)

• Distribution de Dirac δ_a souvent interprétée comme représentant la masse (ou la charge) $+1$ au point a

• CL de distributions de Dirac = distribution singulière

En particulier, distribution peigne de Dirac :

$$\text{III} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$$

(propriétés intéressantes, joue un rôle important en physique)

• **Remarque** : généralisations à 3 dimensions des δ_a
$\rightsquigarrow$ représentation mathématique correcte des charges ponctuelles et superficielles en électrostatique

Support d'une distribution (1)

Définition

On dit que deux distributions S et T sont égales si $< S, \varphi >=< T, \varphi >$ quelque soit $\varphi \in \mathcal{D}$. On dit qu'elles sont égales sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ si $< S, \varphi >=< T, \varphi >$ quelque soit $\varphi \in \mathcal{D}$ ayant son support dans Ω.

- **Exemples** :
  - $T_{\mathbb{1}}$ et W sont égales sur $]0, +\infty[$. Si $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset]0, +\infty[$
    $< T_{\mathbb{1}}, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 1\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x =< W, \varphi >$
  - δ et $Ш$ sont égales sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Si $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$
    $< Ш, \varphi >= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(n) = \varphi(0) =< \delta, \varphi >$

Définition

Considérons la réunion de tous les ouverts sur lesquels une distribution T est nulle. Cet ensemble est alors le plus grand ouvert sur lequel T est nulle (admis). Son complémentaire (qui est un fermé) est appelé support de la distribution T ; on le note $\mathrm{Supp}(T)$.

- **Exemples** :
  - $\mathrm{Supp}(\delta_a) = \{a\}$
  - $\mathrm{Supp}(Ш) = \mathbb{Z}$

IV

Opérations sur les distributions

Méthodologie

Stratégie pour définir une opération sur les distributions :

1. étudier comment cette opération est définie pour une fonction localement sommable
2. traduire ceci avec le langage des distributions sur la distribution régulière associée
3. généraliser à toutes les distributions

Translation

- f fonction localement sommable, $a \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ translatée f_a de f est la fonction donnée par $f_a(x) = f(x - a)$

- La distribution régulière associée à f_a vérifie :

$$< T_{f_a}, \varphi >= \int f(x-a)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int f(y)\varphi(y+a)\mathrm{d}y =< T_f, \varphi_{-a} >$$

Définition

La translatée d'une distribution T, notée T_a est la distribution définie par :

$$< T_a, \varphi >=< T, \varphi_{-a} > .$$

- **Exemple** : Translatée de $\mathrm{vp}\ \frac{1}{x} = \mathrm{vp}\ \frac{1}{x-a}$

Transposition

- f fonction localement sommable, $\check{f} : x \mapsto f(-x)$ transposée de f

? Distribution associée à $\check{f}$. On a

$$< T_{\check{f}}, \varphi >= \int f(-x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int f(y)\varphi(-y)\mathrm{d}y =< T_f, \check{\varphi} > .$$

Définition

La transposée d'une distribution T, notée $\check{T}$ est la distribution définie par :

$$< \check{T}, \varphi >=< T, \check{\varphi} > .$$

- **Remarque** : Ceci permet de définir des distributions paires et impaires comme pour les fonctions.

Dilatation (homothétie ou changement d'unité)

- f fonction localement sommable, $a \in \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow$ la dilatée de la fonction f est définie par $x \mapsto f(a\,x)$

Sa distribution régulière associée vérifie :

$$< \text{“}T_{f(ax)}\text{”}, \varphi >= \int f(a\,x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int f(y)\varphi(\frac{y}{a})\frac{\mathrm{d}y}{\mid a \mid} = \frac{1}{\mid a \mid} < T_f, \text{“}\varphi(\frac{x}{a})\text{”} >$$

Définition

La dilatée d'une distribution T est la distribution définie par :

$$< \text{“}T(a\,x)\text{”}, \varphi >= \frac{1}{\mid a \mid} < T, \text{“}\varphi(\frac{x}{a})\text{”} > .$$

- **Exemple** : $\text{“}\delta(a\,x)\text{”} = \frac{1}{|a|}\,\delta.$

Multiplication des distributions (1)

- Il n'existe pas de moyen de multiplier entre elles 2 distributions !

(f, g loc. sommables n'implique pas $f\,g$ loc. sommable)

- Mais ψ indéfiniment dérivable, $\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \psi\,\varphi \in \mathcal{D}$

Du point de vue des distributions régulières, on a :

$$< T_{\psi\, f}, \varphi >= \int (\psi(x)\, f(x))\, \varphi(x) \mathrm{d}x = \int f(x)\, (\psi(x)\varphi(x))\, \mathrm{d}x =< T_f, \psi\, \varphi >$$

Définition

Soit ψ une fonction indéfiniment dérivable. Le produit $T\,\psi$ d'une distribution T par ψ est la distribution définie par :

$$< T\,\psi, \varphi >=< T, \psi\,\varphi > .$$

Multiplication des distributions (2)

• À partir de cette définition, on peut définir le produit d'une distribution quelconque T par une distribution régulière T_ψ associée à une fonction indéfiniment dérivable ψ de la manière suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \; < T_\psi \, T, \varphi > = < T, \psi \, \varphi > .$$

Lemme

$\psi \, \delta = \psi(0) \, \delta \Rightarrow$ *Solutions de* $x \, T = 0$: *multiples de* δ

• Preuve :

$$< \psi \, \delta, \varphi > = < \delta, \psi \, \varphi > = \psi(0) \, \varphi(0) = \psi(0) \; < \delta, \varphi > = < \psi(0) \, \delta, \varphi >$$

Dérivation des distributions

- f loc. sommable ET dérivable $\Rightarrow f'$ loc. sommable

Sa distribution régulière associée vérifie (IPP):

$$< T_{f'}, \varphi >= \int f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = - < T_f, \varphi' > .$$

- φ à support borné $\Rightarrow f\,\varphi$ à support borné $\Rightarrow [f(x)\,\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$!

Raison principale du choix restrictif des fonctions tests, *i.e.*, de $\mathcal{D}$

Définition

La dérivée T' d'une distribution T de $\mathcal{D}'$ est la distribution définie par :

$$< T', \varphi >= - < T, \varphi' > .$$

De même on pourra définir les dérivées successives $T^{(m)}$ par :

$$< T^{(m)}, \varphi >= (-1)^m < T, \varphi^{(m)} > .$$

Exemple et Dérivée d'un produit $T\,\psi$

- $W' = \delta$

$$
\begin{aligned}
< W', \varphi > &= - < W, \varphi' > \\
&= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -[\varphi(x)]_0^{+\infty} \\
&= \varphi(0) \\
&= < \delta, \varphi > .
\end{aligned}
$$

- T distribution quelconque, ψ indéfiniment dérivable :

$$(T\,\psi)' = T'\,\psi + T\,\psi'.$$

Exemple : $(W\,\exp(\lambda\,t))' = W'\,\exp(\lambda\,t) + W\,(\lambda\,\exp(\lambda\,t)) = \delta\,\exp(\lambda\,t) + \lambda\,W\,\exp(\lambda\,t) = \delta + \lambda\,W\,\exp(\lambda\,t)$.

Dérivation et fonction discontinue (1)

• On a vu $W' = \delta$

D'un autre coté $H'(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$ et donc $T_{H'} = 0 \neq \delta$

$$\Rightarrow (T_f)' \neq T_{f'} \text{ dès que } f \text{ admet une discontinuité}$$

• f $\mathcal{C}^1$ par morceaux, $a_1, \ldots, a_n$ points de discontinuité de f

ET $\sigma_i^{(0)}$ le saut de discontinuité de f en a_i : $\sigma_i^{(0)} = f(a_i^+) - f(a_i^-)$

D'où f somme d'une fonction g continue et de fonctions H de Heaviside :

$$f(x) = g(x) + \sum_{i=0}^{n} \sigma_i^{(0)} H(x - a_i)$$

et

$$T_{f'} = T_{g'}$$

Dérivation et fonction discontinue (2)

Théorème

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Avec les notations précédentes, on a alors

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_i \sigma_i^{(0)}\, \delta_{a_i}.$$

On notera plus simplement

$$(T_f)' = T_{f'} + \sigma^{(0)}\, \delta.$$

De même, soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux. Si l'on note $\sigma^{(j)}$ les sauts de discontinuité de $f^{(j)}$, on a

$$(T_f)^{(m)} = T_{f^{(m)}} + \sigma^{(m-1)}\, \delta + \sigma^{(m-2)}\, \delta' + \cdots + \sigma^{(0)}\, \delta^{(m-1)}.$$

Convergence (faible) dans l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions (1)

Théorème et Définition

Soit $(T_n)_n$ une suite de distributions. On dit que $(T_n)_n$ converge dans $\mathcal{D}'$ si, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, la suite $< T_n, \varphi >$ converge au sens ordinaire. Si l'on appelle $< T, \varphi >= \lim_n < T_n, \varphi >$ cette limite, alors l'application $\varphi \mapsto < T, \varphi >$ est une distribution.

Théorème

Soit $(T_n)_n$ une suite de distributions. Si $(T_n)_n$ converge dans $\mathcal{D}'$ vers une distribution T, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite de distributions $(T_n^{(m)})_n$ converge dans $\mathcal{D}'$ vers $T^{(m)}$.

Convergence (faible) dans l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions (2)

Théorème (Convergence vers δ)

Si la suite de fonctions localement sommables $(f_k)_k$ vérifie :

1. $\exists\, A > 0$ *tel que pour tout* $|\, x \,| \leq A, \quad f_k(x) \geq 0$ *;*
2. $\forall a > 0, \quad \int_{|x| \leq a} f_k(x)\mathrm{d}x \longrightarrow 1$ *lorsque* $k \longrightarrow +\infty$ *;*
3. $f_k(x) \longrightarrow 0$ *uniformément dans tout ensemble* $0 < a <|\, x \,|< \frac{1}{a} < \infty$ *(*$0 < a < 1$*) ;*

alors la suite des distributions régulières $(T_{f_k})_k$ converge dans $\mathcal{D}'$ vers δ.

• On parle de suite de fonctions de Dirac

Ex. : les gaussiennes définies par $g_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2\, x^2)$

V

Sous-espaces de $\mathcal{D}'$

Deux sous-espaces particuliers

• Espace de fonctions tests plus grand que $\mathcal{D}$ $\rightsquigarrow$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'$

• Deux espaces de fonctions tests couramment utilisés sont :

1. l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions indéfiniment dérivables quelconques ;
2. l'espace $\mathcal{S}$ des fonctions indéfiniment dérivables et qui décroissent, ainsi que leurs dérivées, plus vite que toute puissance de $1/x$ à l'infini c'est-à-dire que pour tout $k > 0$ et pour tout $h > 0$, $x^k f^{(h)}(x)$ est bornée.

$\rightsquigarrow$ Espace $\mathcal{E}'$ des distributions à support compact et l'espace $\mathcal{S}'$ des distributions dites *tempérées* (ou à croissance lente)

Distributions tempérées

Espaces de fonctions tests : $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$

Espaces de distributions : $\mathcal{D}' \supset \mathcal{S}' \supset \mathcal{E}'$

- En pratique, distributions tempérées $(\delta_a, \mathrm{vp}\,\frac{1}{x})$

Attention : f localement sommable n'implique pas T_f tempérée

Théorème (Caractérisation des distributions tempérées)

Pour qu'une fonctionnelle linéaire continue T sur $\mathcal{S}$ soit tempérée, il faut et il suffit qu'il existe $A > 0$ et $p \in \mathbb{N}^+$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, on ait :

$$|< T, \varphi >| \leq A \parallel \varphi \parallel_p,$$

où

$$\parallel \varphi \parallel_p = \left(\int \mid \varphi(t) \mid^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}.$$

VI

Distributions à plusieurs dimensions

Distributions à plusieurs dimensions

• Distributions à n dimensions : fonctionnelles sur l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^n$ et à support borné.

• **Exemple 1** : distribution régulière associée à $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ localement sommable :

$$< T_f, \varphi >= \int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

• **Exemple 2** : dans $\mathbb{R}^2$, on définit la fonction $f(x,t) = H(x)\, H(t)$, T_f la distribution régulière associé
On a

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial t} T_f = \delta(x)\, \delta(t)$$

et

$$\Delta\, T_f = \delta'(x)\, W(t) + \delta'(t)\, W(x)$$

Chapitre 2

La convolution

Introduction

- Produit de convolution = outil très important en physique
  - Transmission d'un signal par un appareil
  - Impulsion électrique fonction du temps
  - Image représentée par une fonction d'une ou deux variables
  - Diffraction

Exemple introductif : le photocopieur (1)

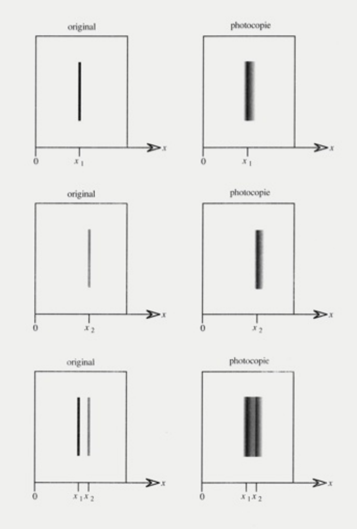
• Machine photocopieuse imparfaitement réglée :

Trait fin en x_1 sur original $\rightsquigarrow$ trait étalé centré en x_1 sur photocopie

Trait d'une intensité moindre en x_2 $\rightsquigarrow$ trait étalé centré en x_2 sur photocopie

• **Hypothèse :** Étalement de l'encre sur la photocopie identique pour les deux traits

$\rightsquigarrow$ Étalement fonction caractéristique de l'appareil : fonction d'étalement (ou fonction de réponse) $h(x)$


original
photocopie
0
x_1
0
x_1
original
photocopie
0
x_2
0
x_2
original
photocopie
0
$x_1 x_2$
0
$x_1 x_2$
x

Exemple introductif : le photocopieur (2)

- Trait en x_1 d'intensité f_1 sur original

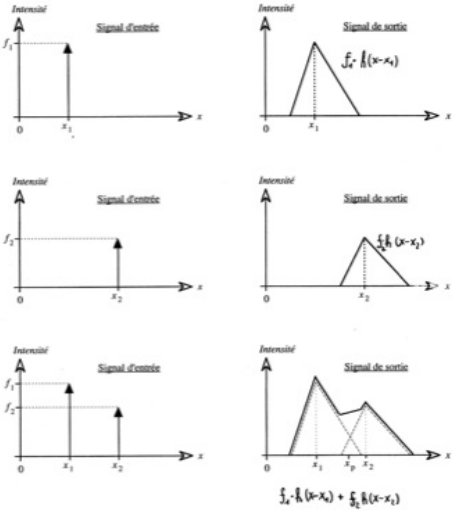
$\rightsquigarrow$ $f_1\,h(x - x_1)$ sur photocopie

- n traits placés en $x_1, \ldots, x_n$ d'intensités $f_1, \ldots, f_n$ sur original

$\rightsquigarrow$ superposition des n traits étalés sur photocopie

$\rightsquigarrow$ Signal de sortie (dans le cas discret)

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i\,h(x - x_i)$$


Intensité
Signal d'entrée
Intensité
Signal de sortie
Intensité
Signal d'entrée
Intensité
Signal de sortie
Intensité
Signal d'entrée
Intensité
Signal de sortie
$f_1 \cdot h(x-x_1) + f_2 h(x-x_2)$

Exemple introductif : le photocopieur (3)

- Signal de sortie (dans le cas discret)

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \, h(x - x_i)$$

- Si signal d'entrée = fonction continue de x, somme $\leftrightarrow$ intégrale

$$S(x) = \int f(u) \, h(x - u) \mathrm{d}u$$

(produit de convolution des fonctions f et h)

I

Produit tensoriel

Produit tensoriel de deux fonctions

Définition

Soient f et g deux fonctions. On appelle produit tensoriel (ou produit direct) de f par g la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = f(x)\, g(y)$ pour tout (x, y) appartenant à $\mathbb{R}^2$. On note alors $h = f \otimes g$.

• **Exemple :** Produit tensoriel de la fonction de Heaviside H par la fonction porte Π défini par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(H \otimes \Pi)(x, y) = H(x)\, \Pi(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, +\infty[\text{ et } y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Produit tensoriel de deux distributions : définition

- f, g deux fonctions localement sommables, $h = f \otimes g$
- $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ (indéfiniment dérivable, à support borné sur $\mathbb{R}^2$) :

$$\begin{aligned} < T_{f \otimes g}, \varphi > &= \int \int f(x)\, g(y)\, \varphi(x,y) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= \int f(x) \left(\int g(y)\, \varphi(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= < T_f(x), < T_g(y), \varphi(x,y) >> . \end{aligned}$$

Définition

*Soient S et T deux distributions. On appelle **produit tensoriel** (ou **produit direct**) de S par T la distribution notée $S \otimes T$ définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ par*

$$< S(x) \otimes T(y), \varphi(x,y) > = < S(x), < T(y), \varphi(x,y) >> .$$

- **Remarque** : ce produit est bien défini ce qui n'est pas évident : on doit vérifier que la fonction $x \mapsto < T(y), \varphi(x,y) > \in \mathcal{D}$ et que la fonctionnelle ainsi défini est linéaire et continue.

Produit tensoriel de deux distributions : propriétés

- **Exemple** : Produit tensoriel des distributions δ et W :

$$\begin{aligned} < \delta(x) \otimes W(y), \varphi(x,y) > &= < \delta(x), < W(y), \varphi(x,y) >> \\ &= < \delta(x), \int_0^{+\infty} \varphi(x,y) \mathrm{d}y > \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(0,y) \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

- Le produit tensoriel de deux distributions est :
  - commutatif : $S(x) \otimes T(y) = T(y) \otimes S(x)$;
  - associatif : $(S(x) \otimes T(y)) \otimes U(z) = S(x) \otimes (T(y) \otimes U(z))$;
  - continu : $(S_k)_k \to S \Longrightarrow (S_k(x) \otimes T(y))_k \to S(x) \otimes T(y)$.

- Dérivation : S, T distributions sur $\mathbb{R}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\partial_x^i (S(x) \otimes T(y)) = (\partial_x^i S(x)) \otimes T(y),$$

$$\partial_y^i (S(x) \otimes T(y)) = S(x) \otimes (\partial_y^i T(y)),$$

II

Produit de convolution

Produit de convolution deux fonctions (1)

Définition

Soient f et g deux fonctions localement sommables. On définit, s'il existe, le produit de convolution h de f et g par

$$h(x) = \int f(t)\, g(x-t)\mathrm{d}t,$$

pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$. On note alors $h = f * g$.

- **Remarque** : n'existe pas toujours, commutatif si défini
- **Interprétation graphique** : Si $k = f \otimes g$, alors

$$(f * g)(x) = \int f(t)\, g(x-t)\mathrm{d}t = \int k(t, x-t)\mathrm{d}t$$

(intégrale de k sur D_x de pente -1 passant par $(0, x)$)

Produit de convolution de deux fonctions (2)

• Si D_x rencontre le support de $f \otimes g$ de manière finie, le produit de convolution est alors bien défini

Théorème

Le produit de convolution de deux fonctions localement sommables f et g existe dès lors que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1. *Les fonctions f et g sont toutes les deux à support borné ;*
2. *Les fonctions f et g sont toutes les deux à support borné à gauche ;*
3. *Les fonctions f et g sont toutes les deux à support borné à droite.*

Notion de mesure floue

- Π fonction porte ($\Pi(x) = 1$ si $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et 0 sinon) , $a > 0$ et f une fonction

- $f_{(a)}$ produit de convolution de f et de la fonction porte de largeur a et de hauteur $1/a$

$$f_{(a)}(x) = f(x) * \frac{1}{a}\Pi(\frac{x}{a}) = \frac{1}{a}\int_{x-a/2}^{x+a/2} f(t)\mathrm{d}t$$

- Moyenne de f autour de x sur une largeur a

$\rightsquigarrow$ Modélisation d'une mesure imparfaite de la fonction f, pour laquelle on a un "flou" de largeur a

Les détails de largeur $l \ll a$ disparaissent, les autres restent visibles.

Produit de convolution de deux distributions (1)

- f, g deux fonctions localement sommables, $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} < T_{f*g}, \varphi > &= \int (f*g)(t)\, \varphi(t) \mathrm{d}t \\ &= \int \varphi(t) \left(\int f(s)\, g(t-s) \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \\ &= \int \int f(x)\, g(y)\, \varphi(x+y) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= < T_{f \otimes g}, \varphi(x+y) > \end{aligned}$$

Définition

Soient S et T deux distributions. On définit le produit de convolution de S et T comme la distribution notée $S*T$ définie par

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}, \quad < S*T, \varphi > = < S(x) \otimes T(y), \varphi(x+y) > .$$

- Produit de convolution appliqué à $\varphi \in \mathcal{D}$ = produit tensoriel appliqué à $(x, y) \mapsto \varphi(x+y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

Produit de convolution de deux distributions (2)

• Le produit de convolution de deux distributions n'existe pas toujours :

Si $\mathrm{Supp}(\varphi) = [a, b]$, alors $\mathrm{Supp}(\varphi(x+y)) =$ bande comprise entre les deux droites $x + y = a$ et $x + y = b$

• Puisque $\varphi(x+y)$ n'est pas à support compact, il suffit que l'une des deux distributions soit à support compact

Théorème

1. *Les distributions à support borné à gauche (resp. à droite) peuvent toujours être convoluées entre elles ;*
2. *Une distribution à support borné peut être convoluée avec n'importe quelle autre distribution.*

Convolution et distributions de Dirac

1. Soit T une distribution. On a $\delta * T = T * \delta = T$. La distribution de Dirac est donc l'élément neutre du produit de convolution.

2. Soit $a > 0$. La translatée T_a d'une distribution T est égale au produit de convolution de T par la distribution de Dirac δ_a au point a : $T_a = T * \delta_a = \delta_a * T$.

3. Les dérivations d'une distribution T s'obtiennent par convolution par les dérivées des distributions de Dirac : pour tout $m \in \mathbb{N}$, $T^{(m)} = \delta^{(m)} * T = T * \delta^{(m)}$.

Commutativité et Associativité

1. Soient S et T deux distributions. On suppose que leur produit de convolution $S * T$ existe. Alors $T * S$ existe et $S * T = T * S$.
2. Soient S, T et U trois distributions. Si $S * T$, $T * U$ **et** $S * U$ existent, alors $S * T * U$ est défini par :

$$S * T * U = S * (T * U) = (S * T) * U.$$

• **Exemple** : $T_{\mathbb{1}} * \delta' = 0$ donc $(T_{\mathbb{1}} * \delta') * W = 0$. Or on a $\delta' * W = \delta$ donc $T_{\mathbb{1}} * (\delta' * W) = T_{\mathbb{1}}$ ce qui prouve que $(T_{\mathbb{1}} * \delta') * W \neq T_{\mathbb{1}} * (\delta' * W)$. Ceci s'explique par le fait que $T_{\mathbb{1}} * W$ n'est pas définie.

Dérivée d'un produit de convolution

- $(S * T)' = \delta' * (S * T) = \delta' * S * T = S' * T$
- De même $(S * T)' = (S * T) * \delta' = S * T * \delta' = S * T'$

Lemme

Pour dériver un produit de convolution, il suffit de dériver l'un des facteurs et, pour tout S et T dans $\mathcal{D}'$, on a

$$(S * T)' = S' * T = S * T'.$$

III

Algèbre de convolution et résolution d'équations différentielles

Algèbre de convolution

Définition

On appelle algèbre de convolution $\mathcal{A}'$ tout sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'$ contenant δ tel que le produit de convolution d'un nombre fini quelconque de distributions de $\mathcal{A}'$ soit toujours défini, soit dans $\mathcal{A}'$, et que ce produit soit commutatif et associatif.

- $\mathcal{D}'$ n'est pas une algèbre de convolution
- **Exemples** :
  - Les espaces $\mathcal{D}'_+$ (resp. $\mathcal{D}'_-$) des distributions à support contenu dans $\{x \geq 0\}$ (resp. $\{x \leq 0\}$) aussi appelé espace des distributions à support borné à gauche (resp. borné à droite)
  - L'espace $\mathcal{E}'$ des distributions à support compact.

Rappel : résolution d'un système linéaire

Pour résoudre un système linéaire de la forme

$$A\,x = b,$$

où A est une matrice connue et b un vecteur connu, on peut procéder ainsi :

1. On cherche si la matrice A est inversible et si oui on calcule son inverse A^{-1} qui vérifie :

   $$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n,$$

   où I_n est l'élément neutre du produit de matrice ($A\,I_n = I_n\,A = A$).
2. Si A^{-1} existe, alors il est unique et la solution du système $A\,x = b$ est donnée par

   $$x = A^{-1}\,b.$$

Résolution d'une équation de convolution

• Dans ces algèbres de convolution, nous pouvons résoudre les équations du type

$$A * X = B,$$

où A et B sont des distributions connues et X une distribution inconnue.

1. On cherche s'il existe, dans l'algèbre considérée, une distribution notée A^{*-1} et appelée inverse de convolution de A (ou parfois fonction de Green de A) telle que

$$A * A^{*-1} = A^{*-1} * A = \delta.$$

2. Si A^{*-1} existe, alors il est unique et la solution de l'équation $A * X = B$ dans l'algèbre considérée est donnée par

$$X = A^{*-1} * B.$$

Calcul de l'inverse de convolution

- Problème difficile en général

Théorème

Soit D opérateur différentiel à coeffs constants, unitaire :

$$D = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}\,\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_1\,\frac{d}{dx} + a_0.$$

Alors $D\,\delta = \delta^{(m)} + a_{m-1}\,\delta^{(m-1)} + \cdots + a_1\,\delta' + a_0\,\delta \in \mathcal{D}'_+$ admet un inverse de convolution dans $\mathcal{D}'_+$ qui est donné par

$$(D\,\delta)^{*-1} = W\,z(t),$$

où z est l'unique solution de l'équa. diff.

$$z(t)^{(m)} + a_{m-1}\,z(t)^{(m-1)} + \cdots + a_1\,z(t)' + a_0\,z(t) = 0,$$

t.q. $z(0) = z'(0) = \cdots = z^{(m-2)}(0) = 0,\ z^{(m-1)}(0) = 1.$

Exemple : l'oscillateur harmonique

- Oscillateur harmonique caractérisé par

$$X'' + \omega^2 X = (\delta'' + \omega^2 \delta) * X = B,$$

où $B(t)$ est une distribution caractérisant le signal extérieur.

- On montre que $(\delta'' + \omega^2 \delta) * \frac{1}{\omega} W \sin(\omega t) = \delta$. (Cf résultat précédent - voir TD 2)

Or $\frac{1}{\omega} W \sin(\omega t) \in \mathcal{D}'^{+}$ donc

$$B \in \mathcal{D}'^{+} \Rightarrow X = \frac{1}{\omega} W \sin(\omega t) * B.$$

- On montre $(\delta'' + \omega^2 \delta) * -\frac{1}{\omega} W(-t) \sin(\omega t) = \delta$. Donc

$$B \in \mathcal{D}'^{-} \Rightarrow X = -\frac{1}{\omega} W(-t) \sin(\omega t) * B.$$

- L'inverse de convolution (et donc la solution de l'équation) dépend de l'algèbre de convolution dans laquelle on travaille !

Ici, l'équation n'a pas de solutions dans $\mathcal{E}'$.

Application : résolution d'une équation diff. avec CI

- Problème de Cauchy : Équa. diff. ET **Conditions initiales (CI)**
- Au premier ordre, $\dot{u} + \alpha\, u = 0$ et ? $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ avec $u(0) = u_0$.

1. Utilisation des distributions : on cherche une distribution solution de la forme $U = W\, u(t)$.
2. $u(t)$ solution & $\dot{U} = W\, \dot{u} + u_0\, \delta$

   $\Rightarrow$ U vérifie

   $\dot{U} + \alpha\, U = W\, \dot{u} + u_0\, \delta + \alpha\, (W\, u) = W\, (\dot{u} + \alpha\, u) + u_0\, \delta = u_0\, \delta$

   qui se réécrit

   $$(\delta' + \alpha\, \delta) * U = u_0\, \delta.$$

3. Inverse de convolution de $\delta' + \alpha\, \delta$ dans $\mathcal{D}'^{+}$: $W\, \exp(-\alpha\, t)$

   $\rightsquigarrow$ $U = W\, \exp(-\alpha\, t) * u_0\, \delta$ d'où

   $$U = W\, u_0\, \exp(-\alpha\, t).$$

Exemple 1 : Réponse d'un circuit LC (1)

- Équa. diff. régissant le comportement d'un circuit LC :

$$L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t=e(t).$$

- En dérivant et en posant $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, on obtient :

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2\right)\,i=\frac{1}{L}\,\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}.$$

- En régime permanent ($e(t)$ constant), on cherche i tel que :

$$\forall\, t\geq 0,\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2\right)\,i=0.$$

Exemple 1 : Réponse d'un circuit LC (2)

- Cherchons une distribution $I = W\, i(t)$ solution.
- I doit alors vérifier l'équation différentielle :

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\right) I = i(0)\,\delta' + \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0)\,\delta;$$

- Donc I doit vérifier l'équation de convolution :

$$\left(\delta'' + \omega_0^2\,\delta\right) * I = i(0)\,\delta' + \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0)\,\delta;$$

- Dans $\mathcal{D}'^{+}$, on obtient donc (Cf. Oscillateur harmonique)

$$I = \frac{1}{\omega_0}\, W\, \sin(\omega_0\, t) * \left(i(0)\,\delta' + \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0)\,\delta\right),$$

d'où en développant le calcul

$$I = W\,\left(i(0)\,\cos(\omega_0\, t) + i'(0)\,\frac{1}{\omega_0}\,\sin(\omega_0\, t)\right).$$

Exemple 2 : équation de la chaleur (1)

• Équation de la chaleur (ou équation de diffusion) à une dim. :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha \, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \, u(x,t) = 0,$$

(Ex. : $u(x,t)$ température d'une barre au point x et au temps t)

• ? Solution correspondant à une répartition initiale de température $u(x,0)$ donnée.

• ? Distribution $U(x,t) = W(t)\, u(x,t)$ vérifiant l'équa. diff.

Exemple 2 : équation de la chaleur (2)

- Dérivation au sens des distributions $\rightsquigarrow$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\, U(x,t) = u(x,0)\,\delta(t).$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\, U(x,t) &= \tfrac{\partial}{\partial t}(W(t)\,u(x,t)) - \alpha\,\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}(W(t)\,u(x,t)) \\
&= \delta(t)\,u(x,t) + W(t)\,\tfrac{\partial}{\partial t}(u(x,t)) - \alpha\,W(t)\,\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}(u(x,t)) \\
&= \delta(t)\,u(x,0) + W(t)\,\left(\tfrac{\partial}{\partial t}(u(x,t)) - \alpha\,\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}(u(x,t))\right) \\
&= \delta(t)\,u(x,0).
\end{aligned}$$

- D'où l'équation de convolution :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta(x,t) - \alpha\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta(x,t)\right) * U(x,t) = u(x,0)\,\delta(t).$$

- Inverse de convolution de $\frac{\partial}{\partial t}\delta(x,t) - \alpha\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta(x,t)$:

$$\frac{W(t)}{2\sqrt{\alpha\pi t}}\,\exp\left(-\frac{x^2}{4\,\alpha\,t}\right),$$

- Solution :

$$U(x,t) = u(x,0)\,\delta(t) * \frac{W(t)}{2\sqrt{\alpha\pi t}}\,\exp\left(-\frac{x^2}{4\,\alpha\,t}\right),$$

ou encore

$$U(x,t) = \frac{W(t)}{2\sqrt{\alpha\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,0)\,\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\,\alpha\,t}\right)\,\mathrm{d}\xi.$$

IV

Interprétation physique de la convolution

Systèmes décrits par un opérateur de convolution (1)

• Bcp de systèmes physiques (*e.g.*, systèmes de mesures) peuvent être représentés par des opérateurs de convolution.

Définition

Soit (S) un système physique décrit par un opérateur qui à un signal d'entrée $E(t)$ (ou excitation) fait correspondre un signal de sortie (ou réponse) $S(t)$. Soit R l'opérateur tel que $S(t) = R(E(t))$. Le système est dit linéaire si R est linéaire. Il est dit continu si R est continu c'est-à-dire si des excitations peu différentes conduisent à des réponses peu différentes. Un système est dit invariant par translation si l'opérateur R commute avec la translation c'est-à-dire si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E(t) & \longrightarrow & S(t) = R(E(t)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(t-a) & \longrightarrow & S(t-a) = R(E(t-a)) \end{array}$$

Systèmes décrits par un opérateur de convolution (2)

- **Remarque** : la plupart des systèmes physiques sont invariants par translation dans le temps c'est-à-dire que si l'on retarde l'entrée de τ, alors la sortie est aussi retardée de τ.

Définition

On dit qu'un système physique est décrit par un opérateur de convolution s'il existe une distribution T caractéristique du système telle que $S(t) = R(E(t)) = E(t) * T(t)$.

Définition

La distribution T telle que $R(E(t)) = E(t) * T(t)$ est appelée réponse impulsionnelle ou percussionnelle car elle correspond à la réponse d'une excitation élémentaire $E = \delta$.

Systèmes décrits par un opérateur de convolution (3)

Théorème

Un système physique peut être décrit par un opérateur de convolution ssi il est linéaire, continu et invariant par translation.

- **Exemples** :
  - Les filtres linéaires en électronique (systèmes formés de résistances, selfs, capacités, amplificateurs sans saturation).
  - Les systèmes formés de masses, de ressorts et d'amortisseurs en mécanique.

Système causal

Définition

Un système décrit par un opérateur de convolution temporel (c'est-à-dire à une variable qui représente le temps) est dit causal si sa réponse impulsionnelle $T(t)$ est nulle pour $t < 0$.

Dans le cas d'un système causal, l'effet d'un signal ne peut précéder sa cause c'est-à-dire que la réponse $S(\tau)$ d'un tel système à un temps τ ne dépend que des valeurs du signal $E(t)$ pour $t \leq \tau$.

Réponse à une excitation exponentielle (1)

• La réponse impulsionnelle d'un système décrit par un opérateur de convolution joue un rôle important.

• Une autre type de réponse joue un rôle important ; celles aux signaux exponentiels.

• Considérons un système décrit par un opérateur de convolution de réponse impulsionnelle T : $S = E * T$

Régularisation d'une distribution singulière

Théorème et Définition

Soit Ψ une fonction indéfiniment dérivable et T une distribution. On note $\Psi * T$ l'application $x \mapsto < T(t), \Psi(x-t) >$. Cette application est bien définie, indéfiniment dérivable et vérifie $T_\Psi * T = T_{\Psi * T}$. On l'appelle la régularisée de T par Ψ.

$$
\begin{aligned}
\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),\ < T_\Psi * T, \varphi > \quad &= \quad < T(t) \otimes T_\psi(x), \varphi(x+t) > \\
&= \quad < T(t), < T_\Psi(x), \varphi(x+t) >> \\
&= \quad < T(t), \int \Psi(x)\, \varphi(x+t) \mathrm{d}x > \\
&= \quad < T(t), \int \Psi(x-t)\, \varphi(x) \mathrm{d}x > \\
&= \quad < T(t), < T_\varphi(x), \Psi(x-t) >> \\
&= \quad < T(t) \otimes T_\varphi(x), \Psi(x-t) > \\
&= \quad < T_\varphi(x), < T(t), \Psi(x-t) >> \\
&= \quad \int \varphi(x)\ < T(t), \Psi(x-t) > \mathrm{d}x \\
&= \quad < T_{\Psi * T}, \varphi > .
\end{aligned}
$$

Réponse à une excitation exponentielle (2)

• Examinons la réponse à un signal $E(t) = \exp(2\, i\, \pi\, \nu\, t)$ (oscillation harmonique de fréquence ν)

La réponse sera alors

$$S = T * \exp(2\, i\, \pi\, \nu\, t),$$

• Fonction exponentielle indéfiniment dérivable donc

$$S(t) =< T(\tau), \exp(2\, i\, \pi\, \nu\, (t - \tau)) >=< T(\tau), \exp(-2\, i\, \pi\, \nu\, \tau) > \exp(2\, i\, \pi\, \nu\, t)$$

En posant $\hat{T}(\nu) =< T(\tau), \exp(-2\, i\, \pi\, \nu\, \tau) >$, on obtient

$$S(t) = \hat{T}(\nu)\, \exp(2\, i\, \pi\, \nu\, t)$$

($\hat{T}(\nu)$: transformée de Fourier de T)

Le système transforme donc $\exp(2\, i\, \pi\, \nu\, t)$ en $\hat{T}(\nu)\, \exp(2\, i\, \pi\, \nu\, t)$.

Réponse à une excitation exponentielle (3)

- Plus généralement : réponse à

$$E(t) = \exp(p\,t)$$

(p est un scalaire complexe quelconque) :

$$S(t) =< T(\tau), \exp(-p\,\tau) > \exp(p\,t).$$

($p \mapsto < T(\tau), \exp(-p\,\tau) >$: transformée de Laplace de T)

Théorème

Les fonctions exponentielles sont des fonctions propres pour les opérateurs de convolution. Les valeurs propres correspondantes sont données par les transformées de Fourier (ou de Laplace) de la réponse impulsionnelle.

Transition vers les chapitres suivants

$\rightsquigarrow$ Rôle important des transformées de Fourier et de Laplace que l'on va étudier dans les chapitres suivants

• Moyen de calculer $T * E$: décomposer E en CL de fonctions propres

$$E(t) = \int \hat{E}(\nu) \exp(2\,i\,\pi\,\nu\,t)\,\mathrm{d}\nu.$$

On verra que $\hat{E}(\nu)$ est justement la transformée de Fourier de E. En effet, par linéarité, la réponse $S(t)$ sera alors donnée par

$$S(t) = \int \hat{E}(\nu)\,\hat{T}(\nu) \exp(2\,i\,\pi\,\nu\,t)\,\mathrm{d}\nu.$$

Transformée de Fourier $\hat{T}(\nu)$: fonction de transfert du système.

Chapitre 3

La transformation de Fourier

I

Transformée de Fourier des fonctions

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes. On appelle transformée de Fourier (ou spectre) de f, si elle existe, la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\, i\, \pi\, \nu\, x)\, \mathrm{d}x.$$

On écrira symboliquement

$$\hat{f} = \mathcal{F}[\, f\,] \quad \text{ou} \quad \hat{f}(\nu) = \mathcal{F}[\, f(x)\,].$$

Existence

- La transformée de Fourier n'existe pas toujours

- **Exemple :** $x \mapsto x^2$ n'admet pas de transformée de Fourier car l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-2\, i\, \pi\, \nu\, x)\, \mathrm{d}x$$

n'existe pour aucune valeur de ν.

- Conditions d'existence difficiles à écrire mais on a le théorème :

Théorème

Toute fonction intégrable possède une transformée de Fourier.

Exemples

1. $\mathcal{F}[\Pi(x)] = \mathrm{sinc}(\pi\,\nu) := \begin{cases} \frac{\sin(\pi\,\nu)}{\pi\,\nu} & \text{pour} \quad \nu \neq 0 \\ 1 & \text{pour} \quad \nu = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(\nu) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp(-2\,i\,\pi\,\nu\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{\exp(-2\,i\,\pi\,\nu\,x)}{-2\,i\,\pi\,\nu}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\,i\,\pi\,\nu}\,(\exp(i\,\pi\,\nu) - \exp(-i\,\pi\,\nu)) \\ &= \frac{2\,i\,\sin(\pi\,\nu)}{2\,i\,\pi\,\nu} \\ &= \frac{\sin(\pi\,\nu)}{\pi\,\nu}. \end{aligned}$$

Lorsque $\nu = 0$, on obtient facilement $\hat{\Pi}(0) = 1$.

2. $\mathcal{F}[\exp(-\pi\,x^2)] = \exp(-\pi\,\nu^2)$

3. $\mathcal{F}[\exp(-a\,|\,x\,|)] = \frac{2\,a}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}$

Inversion - Transformée de Fourier inverse

• Inversement, si f est continue en x et $\hat{f}$ intégrable, on peut obtenir $f(x)$ à partir de $\hat{f}(\nu)$ par la transformée de Fourier dite inverse :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) \exp(2\,i\,\pi\,\nu\,x)\,\mathrm{d}\nu.$$

On écrira symboliquement

$$f = \bar{\mathcal{F}}[\,\hat{f}\,] = \mathcal{F}^{-1}[\,\hat{f}\,] \quad \text{ou} \quad f(x) = \bar{\mathcal{F}}[\,\hat{f}(\nu)\,] = \mathcal{F}^{-1}[\,\hat{f}(\nu)\,].$$

(formule valable lorsque f est continue et $\hat{f}$ intégrable)

• Plus généralement, si f n'est pas continue en x, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) \exp(2\,i\,\pi\,\nu\,x)\,\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2}\,\left(f(x^{+}) + f(x^{-})\right).$$

Transformée de Fourier en sinus et cosinus (1)

- f fonction de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes

- On peut tjs écrire $f = p + q$ avec p paire et q impaire :

$$p(x) = \frac{1}{2}\,(f(x) + f(-x))\,, \quad q(x) = \frac{1}{2}\,(f(x) - f(-x))\,.$$

$$\rightsquigarrow \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} (p(x) + q(x))\,(\cos(2\,\pi\,\nu\,x) - i\,\sin(2\,\pi\,\nu\,x))\,\mathrm{d}x,$$

d'où :

$$\hat{f}(\nu) = 2\int_{0}^{+\infty} p(x)\,\cos(2\,\pi\,\nu\,x)\,\mathrm{d}x - 2\,i\int_{0}^{+\infty} q(x)\,\sin(2\,\pi\,\nu\,x)\,\mathrm{d}x.$$

Transformée de Fourier en sinus et cosinus (2)

On écrit alors

$$\mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}_{\cos}[p(x)] - i\,\mathcal{F}_{\sin}[q(x)],$$

où $\mathcal{F}_{\cos}$ et $\mathcal{F}_{\sin}$ sont les transformées de Fourier respectivement en cosinus et sinus définies par :

$$\mathcal{F}_{\cos}[f(x)] = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,\cos(2\,\pi\,\nu\,x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathcal{F}_{\sin}[f(x)] = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,\sin(2\,\pi\,\nu\,x)\,\mathrm{d}x.$$

Transformée de Fourier en sinus et cosinus (3)

- f est à valeurs complexes : on décompose p et q en parties réelles et imaginaires

$$
\begin{array}{ccccccccc}
f(x) & = & \text{réelle paire} & + & \text{imag. paire} & + & \text{réelle imp.} & + & \text{imag. imp.} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & \times & \\
\hat{f}(\nu) & = & \text{réelle paire} & + & \text{imag. paire} & + & \text{réelle imp.} & + & \text{imag. imp.}
\end{array}
$$

$f(x)$	$\longrightarrow$	$\hat{f}(\nu)$
paire	$\longrightarrow$	paire
impaire	$\longrightarrow$	impaire
réelle	$\longrightarrow$	hermitienne $(\hat{f}(\nu) = \overline{\hat{f}(-\nu)})$
imaginaire	$\longrightarrow$	antihermitienne $(\hat{f}(\nu) = -\overline{\hat{f}(-\nu)})$
réelle paire	$\longrightarrow$	réelle paire
réelle impaire	$\longrightarrow$	imaginaire impaire
imaginaire paire	$\longrightarrow$	imaginaire paire
imaginaire impaire	$\longrightarrow$	réelle impaire

Propriétés (1)

- Linéarité :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\lambda\, f(x)+\mu\, g(x)] &= \int (\lambda\, f(x)+\mu\, g(x))\ \exp(-2\, i\, \pi\, \nu\, x)\, \mathrm{d}x\\ &= \lambda \int f(x) \exp(-2\, i\, \pi\, \nu\, x)\, \mathrm{d}x + \mu \int g(x) \exp(-2\, i\, \pi\, \nu\, x)\, \mathrm{d}x\\ &= \lambda\, \mathcal{F}[f(x)] + \mu\, \mathcal{F}[g(x)]\end{aligned}$$

- Transposition :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(-x)] &= \int f(-x) \exp(-2\, i\, \pi\, \nu\, x)\, \mathrm{d}x\\ &= \int f(y)\ \exp(2\, i\, \pi\, \nu\, y)\, \mathrm{d}y\\ &= \hat{f}(-\nu)\end{aligned}$$

- Conjugaison :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\overline{f(x)}] &= \int \overline{f(x)} \exp(-2\, i\, \pi\, \nu\, x)\, \mathrm{d}x\\ &= \overline{\int f(x) \exp(2\, i\, \pi\, \nu\, x)\, \mathrm{d}x}\\ &= \overline{\hat{f}(-\nu)}\end{aligned}$$

Propriétés (2)

- Changement d'échelle :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(a\,x)] &= \int f(a\,x)\exp(-2\,i\,\pi\,\nu\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int f(y)\exp\left(\frac{-2\,i\,\pi\,\nu\,y}{a}\right)\frac{1}{|a|}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{|a|}\,\hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)\end{aligned}$$

(dilatation dans le monde réel entraîne une compression dans le monde de Fourier et inversement)

- Translation :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x-a)] &= \int f(x-a)\exp(-2\,i\,\pi\,\nu\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int f(y)\exp(-2\,i\,\pi\,\nu\,(y+a))\,\mathrm{d}y \\ &= \exp(-2\,i\,\pi\,\nu\,a)\,\int f(y)\exp(-2\,i\,\pi\,\nu\,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \exp(-2\,i\,\pi\,\nu\,a)\,\hat{f}(\nu).\end{aligned}$$

(translation dans le monde réel correspond à un déphasage dans le monde de Fourier (proportionnel à la fréquence ν))

Propriétés (3)

- Modulation :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\exp(2\,i\,\pi\,\nu_0\,x)\,f(x)] &= \int \exp(2\,i\,\pi\,\nu_0\,x)\,f(x)\exp(-2\,i\,\pi\,\nu\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int f(x)\exp(-2\,i\,\pi\,(\nu-\nu_0)\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \hat{f}(\nu-\nu_0).\end{aligned}$$

(Moduler la fonction f par une exponentielle imaginaire revient à translater sa transformée de Fourier)

Dérivation par rapport à x

- f sommable, dérivable et à dérivée sommable. Par IPP, il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(x)] &= \int f'(x)\exp(-2\,i\,\pi\,\nu\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= [f(x)\,\exp(-2\,i\,\pi\,\nu\,x)]_{-\infty}^{+\infty} + 2\,i\,\pi\,\nu\int f(x)\exp(-2\,i\,\pi\,\nu\,x)\,\mathrm{d}x\\ &= 2\,i\,\pi\,\nu\,\hat{f}(\nu)\end{aligned}$$

- Plus généralement,

$$\mathcal{F}[f^{(m)}(x)] = (2\,i\,\pi\,\nu)^m\,\hat{f}(\nu).$$

- En prenant les modules : $|2\,\pi\,\nu|^m\,|\hat{f}(\nu)| \leq \int |f^{(m)}(x)|\,\mathrm{d}x$

- Plus f est dérivable, à dérivées sommables, plus $\hat{f}$ décroît rapidement à l'infini : si f est m fois dérivable et à dérivée m-ième sommable, alors $\hat{f}$ décroît au moins en $1/\nu^m$

Dérivation par rapport à ν

- On a

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial \nu}\,\hat{f}(\nu) & = & \int f(x)\frac{\partial}{\partial \nu}\,\exp(-2\,i\,\pi\,\nu\,x)\,\mathrm{d}x \\ & = & \int (-2\,i\,\pi\,x)\,f(x)\,\exp(-2\,i\,\pi\,\nu\,x)\,\mathrm{d}x \\ & = & \mathcal{F}[-2\,i\,\pi\,x\,f(x)] \end{array}$$

- De manière générale, on obtient

$$\hat{f}^{(m)}(\nu) = \mathcal{F}[(-2\,i\,\pi\,x)^m\,f(x)]$$

- En prenant les modules : $|\,\hat{f}^{(m)}(\nu)\,| \leq \int |\,2\,\pi\,x\,|^m\,|\,f(x)\,|\,\mathrm{d}x$

- Plus f décroît à l'infini, plus $\hat{f}$ est dérivable (avec ses dérivées bornées) : si f décroît en $1/x^m$ à l'infini, alors, $\hat{f}$ est m fois dérivable et sa dérivée m-ième est bornée.

Transformée de Fourier et convolution (1)

- Soient f et g sommables telles que $f * g$ existe
- On a $\mathcal{F}[f * g] = \int \exp(-2\, i\, \pi\, \nu\, x) \int f(t)\, g(x - t) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$
- Fubini $\rightsquigarrow \mathcal{F}[f * g] = \int f(t) \mathrm{d}t \int g(x - t) \exp(-2\, i\, \pi\, \nu\, x)\, \mathrm{d}x$
- $y = x - t$ dans la seconde intégrale
$\rightsquigarrow \mathcal{F}[f * g] = \int f(t) \exp(-2\, i\, \pi\, \nu\, t)\, \mathrm{d}t \ \int g(y) \exp(-2\, i\, \pi\, \nu\, y)\, \mathrm{d}y$
- Finalement : $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\, \mathcal{F}[g]$

Théorème

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est le produit ordinaire des transformées de Fourier des deux fonctions.

Transformée de Fourier et convolution (2)

- **Exemple** : ? transformée de Fourier de la fontion Λ :

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1+x & \text{pour} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{pour} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

On montre que $\Lambda(x) = (\Pi * \Pi)(x)$ et on en déduit

$$\mathcal{F}[\Lambda(x)] = \mathcal{F}[\Pi(x)]^2 = \left(\frac{\sin(\pi\,\nu)}{\pi\,\nu}\right)^2.$$

- Inversement, on montre que l'on a le résultat suivant :

Théorème

Lorsque ces expressions sont définies, on a

$$\mathcal{F}[f\,g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g].$$

Formule de Parseval-Plancherel

Théorème

Soient f et g deux fonctions de carré sommable. On a alors :

$$\int f(x)\,\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \int \hat{f}(\nu)\,\overline{\hat{g}(\nu)}\,\mathrm{d}\nu.$$

Un cas particulier important est le cas $f = g$ c'est-à-dire

$$\int |f(x)|^2 \ \mathrm{d}x = \int |\hat{f}(\nu)|^2 \,\mathrm{d}\nu.$$

Preuve : $\int f(x)\,\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \mathcal{F}[f\,\overline{g}]_{|\nu=0} = [\hat{f}(\nu) * \overline{\hat{g}(-\nu)}]_{|\nu=0} = \left[\int \hat{f}(t)\,\overline{\hat{g}(t-\nu)}\mathrm{d}t\right]_{|\nu=0} = \int \hat{f}(t)\,\overline{\hat{g}(t)}\mathrm{d}t.$

- En physique, si f est une onde ou une vibration et $x = t$:
  - $\int |f(x)|^2 \ \mathrm{d}x$ puissance (énergie) totale ds domaine temporel
  - $\int |\hat{f}(\nu)|^2 \,\mathrm{d}\nu$ puissance totale ds domaine fréquentiel

Transformée de Fourier des fonctions de carré sommable

• Il existe des fonctions non intégrables mais dont le carré l'est (ex. : la fonction sinus cardinal $x \mapsto \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ prolongée par $\mathrm{sinc}(0) = 1$)

• **En physique** : fonction d'onde d'une particule en mécanique quantique, en électricité ou traitement du signal ($\int |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$ représente l'énergie totale d'un signal temporel $t \mapsto f(t)$)

• Il existe un moyen (que nous ne traiterons pas ici) d'étendre la transformée de Fourier aux fonctions non sommables mais de carré sommable

II

Transformée de Fourier des distributions

• Intérêt de définir une notion de transformée de Fourier pour les distributions :

1. Pouvoir définir la transformée de Fourier des distributions comme δ, Ш, ...
2. Espérer pouvoir étendre la transformée de Fourier des fonctions sommables (et de carré sommable) à des fonctions intervenant tout le temps en physique et n'étant ni sommables ni de carré sommable comme H

Définition

- f fonction intégrable, T_f distribution régulière associée

- ? Distribution régulière associée à $\hat{f}$

- On a
$< T_{\hat{f}}, \varphi >= \int \hat{f}(t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t = \int (\int f(x)\exp(-2\,i\,\pi\,x\,t)\mathrm{d}x)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$

- Fubini $\rightsquigarrow$

$$< T_{\hat{f}}, \varphi >= \int f(x)(\int \exp(-2i\pi xt)\varphi(t)\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\hat{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x =< T_f, \hat{\varphi} >$$

- Problème : si $\varphi \in \mathcal{D}$ n'implique pas $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}$

- Définition satisfaisante de la transformée de Fourier des distributions dans un espace plus grand que $\mathcal{D}$

Espace $\mathcal{S}$ et transformée de Fourier

Définition

Une fonction est dite à décroissance rapide si pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\lim_{x \to \pm\infty} |x^k f(x)| = 0$. Une telle fonction décroît plus vite que toutes puissance de $1/|x|$ à l'infini. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui sont indéfiniment dérivables et à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.

- ? transformée de Fourier de telles fonctions : $\varphi \in \mathcal{S}$. On a :

$$\forall\, m \in \mathbb{N},\ \hat{\varphi}^{(m)}(\nu) = \int (-2\, i\, \pi\, x)^m \exp(-2\, i\, \pi\, \nu\, x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

$\rightsquigarrow$ $\hat{\varphi}$ ainsi que toutes ses dérivées sont aussi à décroissances rapides

Théorème

La transformation de Fourier est une application linéaire (et continue) de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.

Transformée de Fourier des distributions tempérées (1)

Définition

On appelle *distribution tempérée* *toute fonctionnelle linéaire et continue sur l'espace de fonctions $\mathcal{S}$. Les distributions tempérées forment un sous-espace de $\mathcal{D}'$ noté $\mathcal{S}'$.*

- En pratique, δ_a, $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$ tempérées mais f localement sommable n'implique pas T_f tempérée

Théorème (Caractérisation des distributions tempérées)

Pour qu'une forme linéaire continue T sur $\mathcal{S}$ soit tempérée, il faut et il suffit qu'il existe $A > 0$ et $p \in \mathbb{N}^+$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, on ait :

$$|< T, \varphi >| \leq A \parallel \varphi \parallel_p,$$

où $\parallel \varphi \parallel_p = \left(\int |\varphi(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{1/p}$.

Transformée de Fourier des distributions tempérées (2)

- Exemples de distributions tempérées
  - Distributions à support borné comme les Dirac, les dérivées des Dirac,
  - Distributions régulières associées aux fonctions à croissance lente comme les polynômes, les fonctions périodiques localement sommables ($T_{\exp}$ n'est pas tempérée car exp croit trop rapidement à l'infini).

Théorème et Définition

Toute distribution tempérée T admet une transformée de Fourier, notée $\mathcal{F}[T]$ ou $\hat{T}$, qui est également une distribution tempérée. Elle est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \; < \hat{T}, \varphi > = < T, \hat{\varphi} > .$$

Exemples

- $\mathcal{F}[T_{\mathbb{1}}] = \delta$.

$$< \hat{T}_{\mathbb{1}}, \varphi > = < T_{\mathbb{1}}, \hat{\varphi} > = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \varphi(0) = < \delta, \varphi >$$

(cf. formule de la transformée de Fourier inverse)

- $\mathcal{F}[\delta] = T_{\mathbb{1}}$.

$$< \hat{\delta}, \varphi > = < \delta, \hat{\varphi} > = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = < T_{\mathbb{1}}, \varphi >$$

- $\mathcal{F}[T_{\exp(2\,i\,\pi\,\nu_0\,x)}] = \delta(\nu - \nu_0)$
- $\mathcal{F}[T_{\cos(2\,\pi\,\nu_0\,x)}] = \frac{1}{2}\,(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0))$
- $\mathcal{F}[T_{\sin(2\,\pi\,\nu_0\,x)}] = \frac{1}{2\,i}\,(\delta(\nu - \nu_0) - \delta(\nu + \nu_0))$

Propriétés

- Transformée de Fourier inverse (comme pour les fonctions) :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{S},\; < \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[T], \varphi > = < \mathcal{F}[T], \mathcal{F}^{-1}[\varphi] > = < T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[\varphi] > = < T, \varphi >$$

Théorème

Soit T une distribution tempérée. On a alors :

- $\mathcal{F}[T^{(m)}] = (2\, i\, \pi\, \nu)^m\, \mathcal{F}[T]$;
- $\mathcal{F}[T(x-a)] = \exp(-2\, i\, \pi\, \nu\, a)\, \mathcal{F}[T]$;
- $\mathcal{F}[T(a\, x)] = \frac{1}{|a|}\, \hat{T}(\frac{\nu}{a})$;
- $\mathcal{F}[\exp(2\, i\, \pi\, a\, x)\; T] = \hat{T}(\nu - a)$.

Théorème

Si T est une distribution tempérée à support borné, alors sa transformée de Fourier $\mathcal{F}[T]$ est une distribution régulière associée à une fonction indéfiniment dérivable.

Transformée de Fourier de Ш (1)

- Rappel : distribution peigne de Dirac $\text{Ш}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n)$

Théorème

La distribution peigne de Dirac est une distribution tempérée. Elle admet donc une transformée de Fourier au sens des distributions ; sa transformée de Fourier est la distribution peigne de Dirac : $\text{Ш}(x) \xrightarrow{T.F.} \text{Ш}(\nu)$, *ou encore :*

$$\mathcal{F}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n).$$

De plus, on a :

$$\mathcal{F}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n\,T)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right).$$

Formule sommatoire de Poisson

• Décomposition en série de Fourier de $\Sha$:

$$\mathcal{F}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\delta(x-n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-2\, i\, \pi\, n\, \nu)\; T_{\mathbb{1}}.$$

D'où

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(2\, i\, \pi\, n\, \nu)\;\; T_{\mathbb{1}}.$$

• À partir de cette formule, on montre la formule sommatoire de Poisson très importante :

Formule sommatoire de Poisson

Théorème

Soit f une fonction continue admettant une transformée de Fourier. Lorsque ces sommes on un sens, on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n).$$

D'une manière plus générale, on montre que :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x - n\,T) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right) \exp\left(\frac{2\,i\,\pi\,x\,n}{T}\right).$$

III

Séries de Fourier et échantillonnage

Développement en série de Fourier d'un fonction (1)

- f fonction périodique de période T : $f(x) = f(x + n\,T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $V_0 = \frac{1}{T}$, développement de $f(x)$ en série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(2\,\pi\,n\,V_0\,x) + b_n \sin(2\,\pi\,n\,V_0\,x)\right),$$

avec

$$a_n = 2\,V_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(2\,\pi\,n\,V_0\,t)\mathrm{d}t,$$

et

$$b_n = 2\,V_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(2\,\pi\,n\,V_0\,t)\mathrm{d}t.$$

Développement en série de Fourier d'un fonction (2)

• En transformant les cosinus et sinus en exponentielles complexes, on peut encore écrire

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(2\,i\,\pi\,n\,V_0\,x),$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - i\,b_n) = V_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\exp(-2\,i\,\pi\,n\,V_0\,t)\mathrm{d}t.$$

Théorème (formule de Parseval)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mid c_n \mid^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mid f(x) \mid^2 \,\mathrm{d}x = \parallel f \parallel^2,$$

ce qui peut aussi s'écrire $\parallel f \parallel^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2)$.

Théorème

Si F est une distribution périodique de période T, alors il existe une distribution F_0 dont le support a une longueur inférieure à T et telle que

$$F = F_0 * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\,T).$$

Sa transformée de Fourier est alors un peigne de Dirac modulé dont les Dirac sont en $\frac{n}{T}$ avec $n \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{F}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right), \quad c_n = \frac{1}{T}\, \hat{F}_0\left(\frac{n}{T}\right).$$

Transformée de Fourier d'une distribution périodique (2)

Théorème

Si f est une fonction périodique de période T et si l'on note c_n les coefficients dans son développement en série de Fourier complexe, alors on a

$$\mathcal{F}[T_f] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right).$$

Problème de l'échantillonnage

• Problème récurrent de l'expérimentateur : il ne dispose que d'une suite de mesures de la valeur d'une fonction en certains points

• Supposons que les x_i soient équidistants ($x_j - x_{j-1} = c$ où c est une constante) et suffisamment rapprochés

• Question : peut-on déterminer f ?

• Réponse : oui si $\hat{f}$ à support borné. Dans ce cas, on va déterminer l'intervalle maximal entre deux valeurs de x successives permettant de reconstruire f

Échantillonnage (1)

- Considérons le produit $\text{Ш}(\frac{n}{T})\, f(x)$.

- En prenant la transformée de Fourier, on obtient

$$\text{Ш}(T\,\nu)\, T * \hat{f}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - \frac{n}{T}\right) * \hat{f}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\nu - \frac{n}{T}\right).$$

- $\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset [-V_0, V_0] \Rightarrow \mathrm{Supp}(\hat{f}(\nu - \frac{n}{T})) \subset [-V_0 + \frac{n}{T}, V_0 + \frac{n}{T}]$.

- Pour T donné, on prélève $(f(n\,T),\ n \in \mathbb{N})$

- Si $\frac{1}{T} > 2\,V_0$, *i.e.*, $T < \frac{1}{2\,V_0}$, alors on obtient une série de fonctions à support disjoint.

Échantillonnage (2)

- On peut alors multiplier par $\Pi(\frac{\nu}{2\,V_0})$ pour obtenir $\hat{f}(\nu)$

Théorème (Théorème d'échantillonnage)

Une fonction réelle ayant une transformée de Fourier dont le support est contenu dans l'intervalle $[-V_0, V_0]$ est entièrement déterminée par ses valeurs aux points $x = n\,T$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $T < \frac{1}{2\,V_0}$.

Reconstruction (interpolation)

- Problème : reconstruire f à partir des valeurs des $f(n\,T)$ (processus appelé l'interpolation)

- Si $\hat{f}(\nu) = 0$ pour $|\nu| \geq V_0$, alors

$$\hat{f}(\nu) = (T\,\text{Ш}(T\,\nu) * \hat{f}(\nu))\Pi\left(\frac{\nu}{2\,V_0}\right), \quad T < \frac{1}{2\,V_0}$$

- Fourier inverse $\rightsquigarrow$ $f(x) = \text{Ш}(\frac{x}{T})\,f(x) * \frac{\sin(2\,\pi\,V_0\,x)}{\pi\,x}$

- Au final on trouve :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T\,f(n\,T)\,\frac{\sin(2\,\pi\,V_0(x - n\,T))}{\pi(x - n\,T)},$$

que l'on peut aussi écrire

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n}{2\,V_0}\right)\,\frac{\sin(2\,\pi\,V_0\,x - n\,\pi)}{2\,\pi\,V_0\,x - n\,\pi}.$$

Annexe

La décomposition en éléments simples

Motivation et principe

- Très utile pour appliquer la méthode de Laplace pour résoudre les équations différentielles

- Fraction rationnelle $F = \frac{N}{D}$, avec N et D polynômes, $D \neq 0$ unitaire et $\mathrm{pgcd}(N, D) = 1$

- F définie partout en dehors de ses pôles (racines de D)

- Décomposition en éléments simples (DES) de F en deux étapes :

  1. Décomposer F en partie entière et partie polaire
  2. Décomposer partie polaire en somme d'éléments simples

I

Décomposition en partie entière et partie polaire

Théorème

Toute fraction rationnelle F admet une unique décomposition

$$F = E + \tilde{F} = E + \frac{P}{Q},$$

où E est un polynôme appelé partie entière de F et $\tilde{F} = P/Q$ est une fraction rationnelle vérifiant $\deg(P) < \deg(Q)$ appelée partie polaire de F.

Calcul pratique

$$F = \frac{N}{D} = E + \tilde{F}, \quad \tilde{F} = \frac{P}{Q}, \quad \deg(P) < \deg(Q)$$

- Si $\deg(N) < \deg(D)$, alors $E = 0$, $\tilde{F} = N/D$
- Si $\deg(N) \geq \deg(D)$, alors division euclidienne de N par D:

$$\exists\, Q,\ R, \quad N = Q\,D + R, \quad \deg(R) < \deg(D)$$

(en pratique on peut poser la division)

$\rightsquigarrow$ $E = Q$ et $\tilde{F} = R/D$

Exemple

$$F = \frac{N}{D}, \quad N(x) = x^2\,(2\,x+1), \quad D(x) = x^2+1$$

- Division euclidienne

$$N(x) = \underbrace{(2\,x+1)}_{Q(x)}\,D(x) + \underbrace{(-2\,x-1)}_{R(x)}$$

$\rightsquigarrow$ Partie entière $E(x) = 2\,x+1$, partie polaire $\tilde{F}(x) = -\frac{2\,x+1}{x^2+1}$

II

Décomposition de la partie partie polaire en éléments simples

Objectif

- Soit $F = \frac{N}{D}$ avec $\deg(N) < \deg D$

- Factorisation du polynôme $D(x)$:

1. Sur $\mathbb{C}$, $D(x) = (x - a_1)^{m_1} \, (x - a_2)^{m_2} \cdots (x - a_r)^{m_r}$
2. Sur $\mathbb{R}$,

$$D(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r} \, (x^2 + b_1 \, x + c_1)^{n_1} \cdots (x^2 + b_s \, x + c_s)^{n_s}$$

$\rightsquigarrow$ On distingue la DES :

1. Sur $\mathbb{C}$:

$$\frac{x^2 \, (2\,x+1)}{x^2+1} = (2\,x+1) + \frac{-1+\frac{1}{2}\,i}{x-i} + \frac{-1-\frac{1}{2}\,i}{x+i}$$

2. Sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{x+1}{(x-3)\,(x^2+1)^2} = \frac{1/25}{x-3} + \frac{-1/25\,x - 3/25}{x^2+1} + \frac{-2/5\,x - 1/5}{(x^2+1)^2}$$

DES sur $\mathbb{C}$: résultat théorique

- Soit $F = \frac{N}{D}$ avec $\deg(N) < \deg D$
- Élément simple : $\frac{c}{(x-a)^m}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{N}^*$
- $D(x) = (x - a_1)^{m_1} (x - a_2)^{m_2} \cdots (x - a_r)^{m_r}$

Théorème

Il existe d'uniques constantes $c_{i,j} \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \ldots, r, \, j = 1, \ldots, m_i$ *telles que*

$$F(x) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{i,j}}{(x - a_i)^j}$$

DES sur $\mathbb{C}$: exemple

- Soit $F = \frac{N}{D}$ avec $\deg(N) < \deg D$
- $D(x) = (x+1)\,(x-2)\,(x-1)^3$

$\rightsquigarrow \exists!\, c_{i,j} \in \mathbb{C}$ telles que :

$$F(x) = \frac{c_{1,1}}{x+1} + \frac{c_{2,1}}{x-2} + \frac{c_{3,1}}{x-1} + \frac{c_{3,2}}{(x-1)^2} + \frac{c_{3,3}}{(x-1)^3}$$

- Comment calculer les $c_{i,j}$?

DES sur $\mathbb{C}$: calcul des constantes

- Méthode générale :

1. Réduire au même dénominateur dans $\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{i,j}}{(x-a_i)^j}$

   $\rightsquigarrow$ P/D, où P polynôme en la variable x dont les coefficients dépendent des $c_{i,j}$,

2. $F = N/D = P/D \Longrightarrow N(x) = P(x)$

   $\rightsquigarrow$ Identification : coeff. constant (en x^0) de N égal à celui de P, coeff. en x^1 de N égal à celui de P, ...

   $\rightsquigarrow$ Système linéaire pour les $c_{i,j}$ (théorie $\Rightarrow$ Solution unique)

DES sur $\mathbb{C}$: exemple

- Partie polaire trouvée à l'exemple précédent : $\tilde{F}(x) = -\frac{2x+1}{x^2+1}$
- Factorisation du dénominateur : $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$

théorie $\rightsquigarrow \exists\, c_{1,1},\ c_{2,1}$ tels que

$$-\frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{c_{1,1}}{x-i} + \frac{c_{2,1}}{x+i}$$

- Réduction au même dénominateur dans le membre de droite :

$$-\frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{c_{1,1}(x+i) + c_{2,1}(x-i)}{(x-i)(x+i)} = \frac{(c_{1,1}+c_{2,1})\,x + (c_{1,1}-c_{2,1})\,i}{x^2+1}$$

$\rightsquigarrow -2x - 1 = (c_{1,1} + c_{2,1})\,x + (c_{1,1} - c_{2,1})\,i$ qui mène au système

$$\{-2 = c_{1,1} + c_{2,1}, \quad -1 = (c_{1,1} - c_{2,1})\,i\}$$

En résolvant, on trouve $c_{1,1} = -1 + \frac{1}{2}\,i$ et $c_{2,1} = -1 - \frac{1}{2}\,i$ d'où

$$F(x) = (2x+1) - \frac{2x+1}{x^2+1} = (2x+1) + \frac{-1+\frac{1}{2}\,i}{x-i} + \frac{-1-\frac{1}{2}\,i}{x+i}$$

DES sur $\mathbb{C}$: autre méthode pour trouver les coeffs

- Des astuces existent pour calculer certains $c_{i,j}$ sans écrire le système linéaire

- Si F admet un pôle simple en $\alpha \in \mathbb{C}$, *i.e.*, $D(x) = (x-\alpha)\,\tilde{D}(x)$ avec $\tilde{D}(\alpha) \neq 0$, le coefficient c apparaissant dans l'élément simple $c/(x-\alpha)$ de la DES de F vaut $c = \frac{N(\alpha)}{\tilde{D}(\alpha)}$

- Si F admet un pôle d'ordre $m > 1$, *i.e.*, $B(x) = (x-\alpha)^m\,\tilde{B}(x)$ avec $\tilde{B}(\alpha) \neq 0$, alors partie de la DES correspondant à ce pôle :

$$\frac{c_{1,1}}{(x-\alpha)} + \frac{c_{1,2}}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{c_{1,m}}{(x-\alpha)^m}.$$

Dans ce cas, la méthode précédente donne seulement $c_{1,m} = \frac{N(\alpha)}{\tilde{B}(\alpha)}$

Pour les autres coeffs, revenir au système (ou autres astuces)

DES sur $\mathbb{C}$: exemple

- Exemple précédent : $\tilde{F}$ admet un pôle simple en $x = i$ avec $\tilde{D}(x) = x + i$. On a donc :

$$c_{1,1} = \frac{N(i)}{\tilde{D}(i)} = \frac{-2\,i-1}{i+i} = -1 + \frac{1}{2}\,i.$$

Explication : en multipliant par $(x - i)$, on obtient

$$-\frac{(2\,x+1)\,(x-i)}{x^2+1} = \frac{c_{1,1}\,(x-i)}{x-i} + \frac{c_{2,1}\,(x-i)}{x+i},$$

d'où, en simplifiant,

$$-\frac{(2\,x+1)}{x+i} = c_{1,1} + \frac{c_{2,1}\,(x-i)}{x+i},$$

et en évaluant en $x = i$, $-\frac{(2\,i+1)}{i+i} = c_{1,1} + 0$.

- Dans cet exemple, pareil pour $c_{2,1}$.

DES sur $\mathbb{R}$: résultat théorique

- Soit $F = \frac{N}{D}$ avec $\deg(N) < \deg D$
- Élément simple : $\frac{c}{(x-a)^m}$ ou $\frac{c_1\,x+c_2}{(x^2+a\,x+b)^l}$.
- Factorisation du dénominateur :

$$D(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdots (x-a_r)^{m_r}\,(x^2+b_1\,x+c_1)^{n_1} \cdots (x^2+b_s\,x+c_s)^{n_s}$$

Théorème

Il existe d'uniques constantes $d_{i,j} \in \mathbb{R}$, $\quad i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, m_i$ *et* $e_{k,l}$, $f_{k,l} \in \mathbb{R}$, $\quad k = 1, \ldots, s$, $l = 1, \ldots, n_s$ *telles que*

$$F(x) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{d_{i,j}}{(x-a_i)^j} + \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{n_s} \frac{e_{k,l}\,x + f_{k,l}}{(x^2 + b_k\,x + c_k)^l}.$$

DES sur $\mathbb{R}$: exemple

- Soit $F = \frac{N}{D}$ avec $\deg(N) < \deg D$
- $D(x) = (x+1)\,(x-1)^2\,(x^2+1)\,(x^2+x+1)^2$

$\rightsquigarrow$ $\exists!\ d_{i,j},\ e_{i,j},\ f_{i,j} \in \mathbb{R}$ telles que :

$$F(x) = \frac{d_{1,1}}{x+1} + \frac{d_{2,1}}{x-1} + \frac{d_{2,2}}{(x-1)^2} + \frac{e_{1,1}\,x + f_{1,1}}{x^2+1} + \frac{e_{2,1}\,x + f_{2,1}}{x^2+x+1} + \frac{e_{2,2}\,x + f_{2,2}}{(x^2+x+1)^2}$$

- Comment calculer les $d_{i,j},\ e_{i,j},\ f_{i,j}$?

Comme dans le cas de la décomposition sur $\mathbb{C}$!

DES sur $\mathbb{R}$: exemple

- $F = \frac{N}{D}, \quad N(x) = x + 1, \quad D(x) = (x-3)\,(x^2+1)^2$

$\exists\, ! d_{i,j},\ e_{k,l},\ f_{k,l} \in \mathbb{R}$ telles que :

$$F(x) = \frac{d_{1,1}}{x-3} + \frac{e_{1,1}\,x + f_{1,1}}{x^2+1} + \frac{e_{1,2}\,x + f_{1,2}}{(x^2+1)^2}.$$

- $x = 3$ pôle simple $\rightsquigarrow$ $d_{1,1} = (3+1)/(3^2+1)^2 = 4/100 = 1/25.$

- $\times (x^2+1)^2$ puis $x = i$ $\rightsquigarrow$ $e_{1,2}\,i + f_{1,2} = -1/5 - 2/5\,i$ d'où $e_{1,2} = -2/5$ et $f_{1,2} = -1/5.$

- Réduction au même dénominateur et identification :
  1. Coeffs constants : $1 = d_{1,1} - 3\,f_{1,1} - 3\,f_{1,2}$ d'où $f_{1,1} = -3/25$
  2. Coeffs en x^4 : $0 = d_{1,1} + e_{1,1}$ d'où $e_{1,1} = -1/25.$

$$\rightsquigarrow F(x) = \frac{1/25}{x-3} + \frac{-1/25\,x - 3/25}{x^2+1} + \frac{-2/5\,x - 1/5}{(x^2+1)^2}.$$

Chapitre 4

La transformation de Laplace

Introduction

- Transformation de Laplace = sorte de généralisation de la transformation de Fourier

- Elle permet
  - d'éviter d'utiliser les distributions lorsqu'une fonction n'admet pas de transformée de Fourier
  - de résoudre des équations différentielles en prenant en compte les conditions initiales (et sans passer par les distributions)
  - de calculer des inverses de convolution (et donc de résoudre des équations de convolution)

I

Transformée de Laplace des fonctions

Définition

Définition

Soit f une fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et à valeurs réelles ou complexes. La transformée de Laplace de f notée $\mathcal{L}[f(t)]$ ou $L(s)$ est alors donnée, lorsqu'elle existe, par la fonction de la variable complexe $s \in \mathbb{C}$ définie par :

$$\mathcal{L}[f(t)] = L(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, \exp(-s\, t) \mathrm{d}t.$$

• Sans hypothèse sur f, l'intégrale n'existe pas forcément (ex: $f(t) = \exp(t^2)$)

Existence

Théorème

Soit f une fonction continue par morceaux sur tout intervalle de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et vérifiant de plus

$$\forall\, t \geq 0, \quad |f(t)| \leq M \exp(\gamma\, t),$$

pour certaines constantes réelles $M > 0$ et γ. Alors la transformée de Laplace de f existe pour tout $s = x + i\,\omega \in \mathbb{C}$ avec $x > \gamma$.

- Suffisant pour la plupart des applications

- Condition suffisante mais pas nécessaire (ex: $f(t) = 1/\sqrt{t}$ avec $\mathcal{L}[1/\sqrt{t}] = \sqrt{\pi/s}$)

Domaine de définition, abscisse de sommabilité

- Soit f vérifiant les conditions précédentes

- $s = x + i\,\omega$:
$t \mapsto f(t)\,\exp(-s\,t)$ intégrable $\Leftrightarrow$ $t \mapsto f(t)\,\exp(-x\,t)$ intégrable

Définition

On appelle abscisse de sommabilité de la fonction f et on note α la borne inférieure de tous les x pour lesquels il y a sommabilité :

$$\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R}\,;\; t \mapsto |f(t)|\,\exp(-x\,t)\,\mathrm{est\,sommable}\}$$

- La transformée de Laplace F de f est donc défini pour tout $s = x + i\,\omega$ avec $x > \alpha$ où α est l'indice de sommabilité de f.

(Dans certains cas, F est aussi définie pour $x = \alpha$)

Lien entre transformées de Laplace et Fourier

- f fonction de la variable t nulle pour $t < 0$
- Supposons que f admette une transformée de Fourier $\hat{f}$
- On a alors

$$\begin{aligned} F(i\,\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \exp(-i\,\omega\, t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \exp(-2\,i\,\pi\,(\tfrac{\omega}{2\,\pi})\,t)\mathrm{d}t \\ &= \hat{f}(\tfrac{\omega}{2\,\pi}). \end{aligned}$$

- Transfo. de Laplace = Extension de la transpo. de Fourier :

$F(x + i\,\omega)$ est la transformée de Fourier de $t \mapsto f(t)\, \exp(-x\,t)$ prise en $\omega/(2\,\pi)$

Exemple

- On considère la fonction de Heaviside H

- Sa transformée de Laplace est alors

$$\mathcal{L}[H(t)] = \int_0^{+\infty} H(t)\exp(-s\,t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}\left[\exp(-st)\right]_0^{+\infty}$$

- L'indice de sommabilité de H est donc $\alpha = 0$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{L}[H(t)]$ est donc défini pour tout complexe s ayant une partie réelle > 0 et on a alors

$$\mathcal{L}[H(t)] = \frac{1}{s}$$

Formule d'inversion (1)

- Soit f admettant pour transfo. de Laplace F pour $x > \alpha$
- $F(x + 2\,i\,\pi\,\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\,f(t)\,\exp(-x\,t)\,\exp(-2\,i\,\pi\,\nu\,t)\mathrm{d}t$
- D'où $F(x + 2\,i\,\pi\,\nu) = \mathcal{F}[H(t)\,f(t)\,\exp(-x\,t)]$
- En impliquant Fourier inverse il vient :

$$H(t)\,f(t)\,\exp(-x\,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + 2\,i\,\pi\,\nu)\,\exp(2\,i\,\pi\,\nu\,t)\mathrm{d}\nu$$

- Ceci entraîne

$$H(t)\,f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + 2\,i\,\pi\,\nu)\,\exp(x\,t)\,\exp(2\,i\,\pi\,\nu\,t)\mathrm{d}\nu$$

Formule d'inversion (2)

- D'où

$$H(t)\,f(t) = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{D_x} F(s)\,\exp(s\,t)\mathrm{d}s$$

où $s = x + 2\,i\,\pi\,\nu$ et $D_x = \{x + i\,\omega\,;\,\omega \in \mathbb{R}\}$ (contour de Bromwich)

Théorème (Inversion de la transformée de Laplace)

Soit f une fonction vérifiant les conditions d'existence d'une transformée de Laplace F qui est de plus supposée intégrable. Si l'on note α l'abscisse de sommabilité de f, on a la formule d'inversion suivante (valable en tout point de continuité de f) :

$$f(t) = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{x_0 - i\,\infty}^{x_0 + i\,\infty} F(s)\,\exp(s\,t)\,\mathrm{d}s,$$

avec $x_0 > \alpha$ quelconque.

Unicité

- Transformée de Laplace d'une fonction existe $\Rightarrow$ elle est unique.

Théorème

Soient f et g deux fonctions qui vérifient les conditions d'existence de la transformée de Laplace.

- *Si $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, alors $f(t) = g(t)$ en tout point t où f et g sont continues.*

En particulier, si deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ ont la même transformée de Laplace, alors elles sont identiques.

Propriétés

- Dérivation : $\mathcal{L}[f'(t)] = -f(0) + s\,\mathcal{L}[f(t)]$ (IPP)

Plus généralement,

$$\mathcal{L}[f^{(m)}(t)] = s^m\,\mathcal{L}[f(t)] - s^{m-1}\,f(0) - \cdots - s\,f^{(m-2)}(0) - f^{(m-1)}(0)$$

- Intégration : $\mathcal{L}[\int_0^t f(u)\mathrm{d}u] = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}[f(t)]$
- Translation : $\mathcal{L}[f(t-T)] = \exp(-s\,T)\,\mathcal{L}[f(t)]$
- Produit de convolution : $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\,\mathcal{L}[g]$

Exemples

- $\mathcal{L}[\mathbb{1}(t)] = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}] = H(t)$
- $\mathcal{L}[\frac{t^n}{n!}] = \frac{1}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^{n+1}}] = H(t)\,\frac{t^n}{n!}$
- $\mathcal{L}[\exp(-a\,t)] = \frac{1}{s+a}, \quad \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+a}] = H(t)\,\exp(-a\,t)$
- $\mathcal{L}[\frac{t^n}{n!}\,\exp(-a\,t)] = \frac{1}{(s+a)^{n+1}}, \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+a)^{n+1}}] = H(t)\,\frac{t^n}{n!}\,\exp(-a\,t)$
- $\mathcal{L}[\cos(\omega\,t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+\omega^2}] = H(t)\,\cos(\omega\,t)$
- $\mathcal{L}[\sin(\omega\,t)] = \frac{\omega}{\omega^2+s^2}, \quad \mathcal{L}^{-1}[\frac{\omega}{\omega^2+s^2}] = H(t)\,\sin(\omega\,t)$

II

Transformée de Laplace des distributions

Définition

Définition

Soit T une distribution à support bornée à gauche. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > \alpha$, la distribution $\exp(-x\,t)\,T(t)$ soit tempérée, alors on définit la transformée de Laplace de T par

$$\mathcal{L}[T] = < T, \exp(-s\,t) >: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},\; s \mapsto < T, \exp(-s\,t) > .$$

• La transformée de Laplace d'une distribution n'est pas une distribution mais une fonction qui à un nombre complexe s associe le nombre complexe $< T(t), \exp(-s\,t) >$

• La borne inférieure des α est encore appelée abscisse de sommabilité

Exemples

- $\mathcal{L}[\delta](s) = 1$
- $\mathcal{L}[\delta'](s) = s$
- $\mathcal{L}[\coprod\!\coprod_+](s) = \frac{1}{1-\exp(-s)}$ où $\coprod\!\coprod_+(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-n)$
- $\mathcal{L}[W * T](s) = \frac{\mathcal{L}[T](s)}{s}$

Lien entre transformées de Laplace et Fourier

- f une fonction loc. sommable, T_f la distribution associée
- $\mathcal{L}[T_f]$ transfo. de Laplace de T_f d'abscisse de sommabilité α

1. Si $\alpha > 0$, alors T_f n'est pas tempérée et n'admet donc pas de transformée de Fourier
2. Si $\alpha < 0$, alors $\hat{T}_f(\nu) = \mathcal{L}[T_f](2\,i\,\pi\,\nu)$
3. Si $\alpha = 0$, formule compliquée :

$$\mathcal{L}[T_f](s) = \mathcal{L}[T_g](s) + \sum_{n \in I} \frac{\lambda_n}{(s - i\,\omega_n)^{m_n}}$$

$$\hat{T}_f(\nu) = \mathrm{Pf}\,\mathcal{L}[T_g](2\,i\,\pi\,\nu) + \sum_{n \in I} \frac{(2\,i\,\pi)^{m_n - 1}}{2\,(m_n - 1)!}\,\lambda_n\,\delta^{(m_n-1)}(\nu - \nu_n)$$

III

Application à la résolution de problèmes de Cauchy apparaissant en physique

Exemple 1 : Calcul des fonctions transfert en électronique

- On considère un circuit RLC

- Problème de Cauchy associé :

1. Équation : $v(t) = L\,\frac{\mathrm{d}\,i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\,\int_0^t i(u)\mathrm{d}u + R\,i(t)$
2. Conditions initiales : $i(0) = 0$

- En prenant la transformée de Laplace, il vient alors

$$V(s) = (L\,s + \frac{1}{C\,s} + R)\,I(s),$$

d'où

$$Z(s) := \frac{V(s)}{I(s)} = L\,s + \frac{1}{C\,s} + R$$

Ce rapport de la tension à l'intensité en régime exponentiel est appelé fonction de transfert du circuit en régime exponentiel.

Exemple 2 : En mécanique (1)

- On considère une cabine en translation le long de l'axe Oz d'un référentiel galiléen $Oxyz$ et une masse m suspendue à son plafond par l'intermédiaire :
  - d'un ressort de constante de raideur k
  - d'un amortisseur de coefficient a

- PFD $\rightsquigarrow m\,\ddot{z} = -a\,\dot{z} - k\,z - m\,\ddot{u}$

- On prend $\ddot{u} = a\,H(t)$ et les conditions initiales $z(0) = z'(0) = 0$

$\rightsquigarrow$ En appliquant la transformée de Laplace

$$Z(s) = \frac{-m\,a}{s\,(m\,s^2 + a\,s + k)} = \frac{-a}{s\,(s^2 + \frac{a}{m}\,s + \frac{k}{m})}.$$

Exemple 2 : En mécanique (2)

- On pose $w_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\epsilon_1 = \frac{a}{2\sqrt{m\,k}} \rightsquigarrow Z(s) = \frac{-a}{s\,(s^2+2\,\epsilon_1\,\omega_0\,s+\omega_0^2)}$

- En supposant $\epsilon_1 > 1$ on a $s^2 + 2\,\epsilon_1\,\omega_0\,s + \omega_0^2 = (s - s_1)\,(s - s_2)$ avec $s_1 = -\omega_0\,\epsilon_1 + \omega_0\,\sqrt{\epsilon_1^2 - 1}$ et $s_2 = -\omega_0\,\epsilon_1 - \omega_0\,\sqrt{\epsilon_1^2 - 1}$

- Décomposition en éléments simples de $Z(s)$:

$$Z(s) = \frac{-a}{s\,(s - s_1)\,(s - s_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2}$$

avec $A = \frac{-a}{s_1\,s_2} = \frac{-a}{\omega_0^2}$, $B = \frac{-a}{s_1\,(s_1-s_2)} = \frac{-a}{2\,\omega_0\,\sqrt{\epsilon_1^2-1}\,s_1}$, $C = \frac{-a}{s_2\,(s_2-s_1)} = \frac{a}{2\,\omega_0\,\sqrt{\epsilon_1^2-1}\,s_2}$.

Exemple 2 : En mécanique (3)

- Finalement, en prenant la transformée de Laplace inverse, il vient

$$z(t) = \frac{-a}{\omega_0^2}\, H(t) + \frac{-a\, \exp(s_1\, t)}{2\, \omega_0\, \sqrt{\epsilon_1^2 - 1}\, s_1}\, H(t) + \frac{a\, \exp(s_2\, t)}{2\, \omega_0\, \sqrt{\epsilon_1^2 - 1}\, s_2}\, H(t).$$

IV

Application à la résolution d'équations de convolution

Calcul d'inverses de convolution par Laplace (1)

- Laplace permet de calculer des inverses de convolution dans $\mathcal{D}'_+$
- Équation de convolution $A * X = B$, A, $B \in \mathcal{D}'_+$
- Solution unique dans $\mathcal{D}'_+$: $X = A^{*-1} * B$ s'il existe $A^{*-1} \in \mathcal{D}'_+$
- Si A, B et X admettent une transformée de Laplace, alors

$$\mathcal{L}[X] = \frac{\mathcal{L}[B]}{\mathcal{L}[A]}$$

$\rightsquigarrow$ la transformée de Laplace inverse donne donc $X \in \mathcal{D}'_+$

- **Question** : $\mathcal{L}[X]$ transformée de Laplace de $X \in \mathcal{D}'_+$?

Calcul d'inverses de convolution par Laplace (2)

Théorème

Une fonction R de la variable complexe s est la transformée de Laplace d'une distribution $T \in \mathcal{D}'_+$ si et seulement si il existe un demi-plan dans lequel R est holomorphe et $R(s)$ est majorée en module par un polynôme en $|s|$.

$\rightsquigarrow$ Si $\mathcal{L}[B]/\mathcal{L}[A]$ vérifie les conditions du thm, son image inverse $X \in \mathcal{D}'_+$ par Laplace est l'unique solution de $A * X = B$ dans $\mathcal{D}'_+$

$\rightsquigarrow$ Si $A \in \mathcal{D}'_+$ admet une transformée de Laplace $\mathcal{L}[A]$ et si $1/\mathcal{L}[A]$ vérifie les conditions du thm, A^{*-1} est donnée par l'image inverse par Laplace de $1/\mathcal{L}[A]$.

Exemple 1

- $D\,\delta \in \mathcal{D}'_+$ où D est un opérateur diff. unitaire à coeff. constants.
  1. $\mathcal{L}[D\,\delta]$ existe et c'est un polynôme $P(s)$ de la variable s
  2. $\frac{1}{P(s)}$ vérifie les conditions du thm

$\rightsquigarrow$ $(D\,\delta)^{*-1}$ donné par l'image inverse par Laplace de $\frac{1}{P(s)}$

- Décomposition en éléments simples : $\frac{1}{P(s)} = \sum_k \frac{a_k}{(s-s_k)^{\alpha_k}}$
- Finalement (par Laplace inverse) et résultat du chapitre 2

$$(D\,\delta)^{*-1} = W \sum_k a_k \exp(-s_k\,t)\,\frac{t^{\alpha_k-1}}{(\alpha_k-1)!}$$

- **Ex.** : $D = \frac{d^2}{dt^2} - 2\,\frac{d}{dt} + 1 \rightsquigarrow (\delta'' - 2\,\delta' + \delta)^{*-1} = W\,\exp(-t)\,t$

Exemple 2

- $A = \delta' + W \in \mathcal{D}'_+ \Longrightarrow \mathcal{L}[A] = s + 1/s = (s^2+1)/s$
- $1/\mathcal{L}[A] = s/(s^2+1)$ vérifient les conditions du thm

$\rightsquigarrow$ Candidat naturel : $A^{*-1} = W\ \cos(t)$

- Pas de résultat analogue à celui pour les distrib. de la forme $D\,\delta$

$\rightsquigarrow$ On doit vérifier que $(\delta' + W) * W\ \cos(t) = \delta$ (calcul direct)