

Mathématiques pour l'ingénieur 1

Martine Olivi¹

11 décembre 2007

¹INRIA, BP 93, 06902 Sophia-Antipolis Cedex, FRANCE, {olivi}@sophia.inria.fr, phone : 33 4 92 38 78 77, fax : 33 4 92 38 78 58

Chapitre 1

Signaux et systèmes

Les notions de signaux et systèmes apparaissent dans de nombreux domaines des sciences et technologies. Pour les décrire et les étudier, on dispose de puissants outils mathématiques, suffisamment généraux pour s'appliquer à des domaines très divers. L'objectif de ce cours est de présenter l'essentiel de ces outils mathématiques.

Lorsque on observe des phénomènes physiques, la notion de signal correspond aux variations d'une quantité en fonction d'une ou plusieurs variables, par exemple :

- l'intensité d'un courant électrique
- la différence de potentiel
- la position d'un mobile au cours du temps
- les niveaux de gris des points d'une image
- l'intensité d'un son

Nous nous bornerons au cas d'une variable qui peut être le temps, mais aussi la profondeur en géophysique, l'altitude en météorologie, etc... La notion de fonction, en mathématiques permet de modéliser de nombreux signaux. Cependant, la notion de distribution est une modélisation à la fois plus générale et plus satisfaisante des signaux.

On distingue les *signaux analogiques* $x : t \rightarrow x(t)$ pour lesquels la variable t est continue et les *signaux discrets* $x : n \rightarrow x_n, n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels la variable n est discrète. En économie, l'indice hebdomadaire Dow-Jones est un signal discret. Dans les études démographiques, on trouve aussi de nombreux signaux discrets. Cependant, un signal discret résulte souvent de l'échantillonnage d'un signal analogique.

On appelle système, un processus dans lequel on peut distinguer des signaux d'entrée et des signaux de sortie. En théorie du signal, on ne s'intéresse pas nécessairement aux composantes du système, mais surtout à la façon dont il transforme un signal d'entrée en signal de sortie. C'est une

“boite noire”. Elle sera modélisée par un opérateur agissant sur des signaux

$$\Sigma : \begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ x(t) \rightarrow y(t) \end{array}$$

avec $x(t) \in X$, l'ensemble des signaux d'entrées et $y(t) \in Y$, l'ensemble des signaux de sorties.

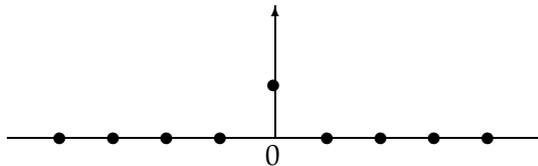
Un *système analogique* transforme un signal analogique en un autre signal analogique. Un *système discret* transforme un signal discret en un autre signal discret.

1.1 Exemples et applications

1.1.1 Signaux discrets

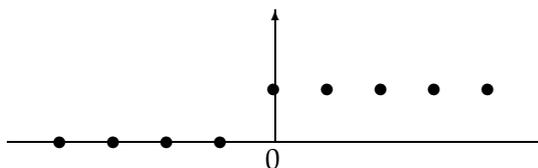
1. Impulsion unité

$$\begin{cases} \delta_0 = 1 \\ \delta_n = 0 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$$



2. Echelon unité

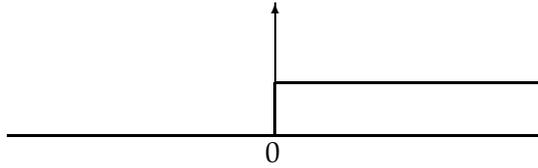
$$\begin{cases} u_n = 0, & n \text{ entier négatif} \\ u_n = 1 & \text{si } n \text{ entier positif ou nul} \end{cases}$$



1.1.2 Signaux analogiques

1. Echelon unité de Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

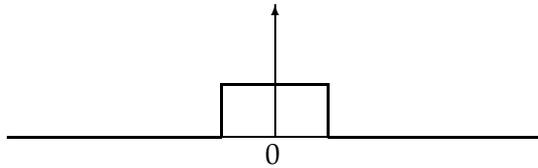


Ce signal modélise l'établissement instantané d'un régime constant.

La valeur en $t = 0$ peut être précisée ou non. On verra que pour l'intégration cette valeur n'a pas d'importance.

2. Créneau centré

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| < a \\ 1 & \text{si } |t| > a \end{cases} \quad a > 0 \text{ donné}$$



1.1.3 Signaux exponentiels et sinusoidaux

Signaux exponentiels réels

Les signaux exponentiels réels sont de la forme

$$x(t) = Ce^{at},$$

ou C et a sont des nombres réels.

Signaux sinusoidaux

Les valeurs d'un signal sont souvent en pratique des nombres réels. Cependant pour des raisons de commodité on utilise couramment des fonctions à valeurs complexes. En particulier, le *signal monochromatique*

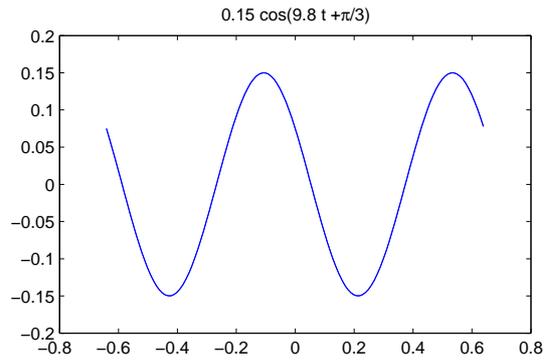
$$x(t) = e^{i\omega t},$$

ou ω est un nombre réel positif appelé la *pulsation*. Ce signal est périodique de période $T = 2\pi/\omega$: $x(t + T) = x(t)$. La *fréquence* de ce signal est $f = \frac{\omega}{2\pi}$, elle mesure le nombre de cycles par seconde, ou hertz (Hz). Plus généralement, on considèrera les signaux de la forme

$$x(t) = Ae^{i(\omega t + \phi)},$$

ou A est l'amplitude du signal et ϕ la phase initiale. La partie réelle de ce signal est de la forme

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi).$$



Signaux exponentiels complexes.

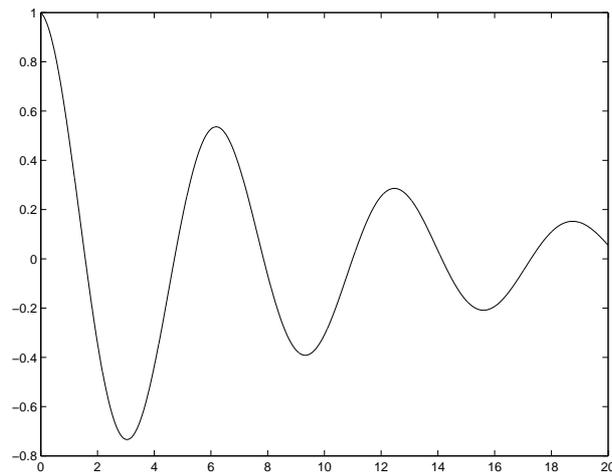
Il s'agit de signaux de la forme

$$x(t) = Ae^{rt+i(\omega t+\phi)},$$

et leurs parties réelles

$$x(t) = Ae^{rt} \cos(\omega t + \phi).$$

Elles sont représentées par des sinusoides croissantes ($r > 0$) ou décroissantes ($r < 0$).



1.1.4 Systèmes

1. amplificateur idéal

$$y(t) = kx(t), \quad k \text{ constante}$$

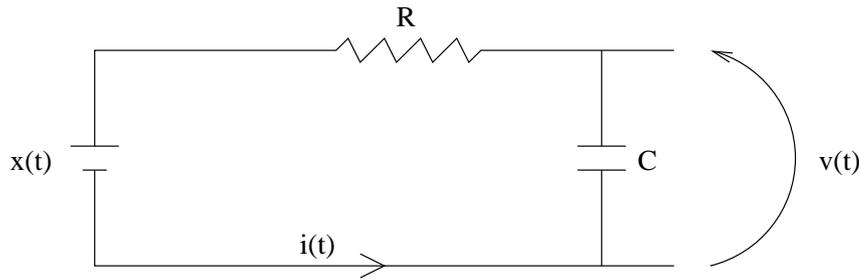
2. ligne à retard

$$y(t) = x(t - a), \quad a \text{ constante}$$

3. dérivateur

$$y(t) = x'(t)$$

4. circuit RC



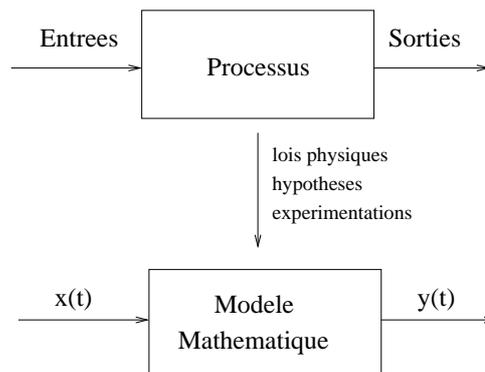
L'entrée est la tension $x(t)$, la sortie la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur :

$$\Sigma : x(t) \rightarrow v(t)$$

1.1.5 Applications

L'objet de la théorie des systèmes ou théorie du contrôle est l'étude des processus entrée-sortie en vue de prédire leur comportement ou de les commander, c'est à dire de déterminer l'entrée qui produira un comportement donné. Pour cela, il faut tout d'abord établir un modèle mathématique du système : équation différentielle, fonction dite de transfert, qui va relier les signaux d'entrée aux signaux de sortie. Pour cela, on utilise la connaissance que l'on a du processus : lois physiques, hypothèses raisonnables (linéarité, invariance, causalité ...) et les mesures expérimentales dont on dispose. Pour mesurer l'adéquation du modèle au processus réel on comparera pour un même signal d'entrée la sortie numérique avec le signal réel. Cette comparaison s'effectuera au moyen de normes qui mesurent la distance entre deux fonctions.

CONCRET



ABSTRAIT

Dans la suite de ce chapitre, nous allons introduire quelques notions essentielles en théorie des systèmes.

1.2 Propriétés algébrique des systèmes

L'ensemble X des signaux d'entrée et celui Y des signaux de sortie sont supposés munis d'une structure d'espaces vectoriels : on peut additionner deux signaux, multiplier un signal par une constante ...

Linéarité. On l'appelle aussi *principe de superposition*. Le système

$$\Sigma : X \rightarrow Y,$$

est linéaire si $\forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

$$\begin{aligned}\Sigma(x_1 + x_2) &= \Sigma(x_1) + \Sigma(x_2) \\ \Sigma(\lambda x_1) &= \lambda \Sigma(x_1)\end{aligned}$$

Invariance. Un système est dit *invariant* ou *stationnaire* si une translation du temps sur l'entrée entraîne la même translation du temps sur la sortie : si $\Sigma x(t) = y(t)$, alors $\Sigma x_a(t) = y_a(t)$ ou $x_a(t)$ et $y_a(t)$ sont les signaux traduits définis par

$$\begin{aligned}x_a(t) &= x(t - a) \\ y_a(t) &= y(t - a).\end{aligned}$$

Causalité. Un système est dit *causal* si pour deux signaux d'entrée qui coïncident jusqu'au temps $t = t_0$, les signaux de sortie coïncident au moins jusqu'au temps t_0 .

$$\forall t \leq t_0, x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow \forall t \leq t_0, y_1(t) = y_2(t).$$

Cette propriété est naturelle pour un système où la variable est le temps. Elle exprime le fait que la réponse d'un système ne dépend que du passé.

Pour les systèmes discrets, a est un nombre entier. Un système linéaire invariant est causal si et seulement si

$$\forall t \leq 0, x(t) = 0 \Rightarrow \forall t \leq 0, y(t) = 0.$$

1.3 Continuité d'un système

Un système est dit *continu* si, lorsque la suite (x_n) tend vers x , la suite $(y_n = \Sigma x_n)$ tend vers $y = \Sigma x$. On suppose pour cela qu'une notion de convergence est définie sur les ensembles X et Y des signaux d'entrée et de sortie. La continuité est une hypothèse naturelle. Elle exprime que deux signaux d'entrée proches conduisent à des sorties proches.

La notion de limite est souvent définie à l'aide d'une norme. Pour les signaux analogiques les normes les plus courantes sont :

(i) la norme de la convergence uniforme

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)|, t \in I\},$$

I intervalle utile,

(ii) la norme de la convergence en moyenne

$$\|x\|_1 = \left(\int_I |x(t)| dt \right)$$

(iii) l'énergie du signal :

$$\|x\|_2 = \left(\int_I |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

(énergie dissipée dans une résistance : $\int_I \frac{v(t)^2}{R} dt$). Cette dernière à l'avantage d'être associée à un produit scalaire, et permet de disposer d'une notion d'orthogonalité de deux signaux.

Un système linéaire est continu s'il existe $M > 0$ tel que pour tout signal $x \in X$

$$\|\Sigma x\|_Y \leq M \|x\|_X,$$

où $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_Y$ désignent les normes respectives sur les espaces X et Y .

1.4 Filtres analogiques

Un *filtre analogique* est un système analogique qui est linéaire, invariant et continu. On montre qu'un tel système est décrit par un *produit de convolution*

$$\Sigma : x(t) \rightarrow (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s) x(s) ds,$$

où h la *réponse impulsionnelle* du système. La réponse impulsionnelle est caractéristique du filtre, puisque sa connaissance entraîne celle de la sortie correspondant à une entrée quelconque.

La réponse d'un système de convolution à un signal de type exponentielle complexe

$$x(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

est donné, lorsque l'intégrale converge, par

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s) e^{\lambda s} ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{\lambda(t-s)} ds = e^{\lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{-\lambda s} ds.$$

C'est un signal de la forme

$$y(t) = H(\lambda) e^{\lambda t}.$$

Le signal d'entrée a juste été multiplié par un nombre complexe constant $H(\lambda)$. On dit que le signal $e^{\lambda t}$ est une *fonction propre* du système associé à la *valeur propre* $H(\lambda)$. De là vient l'importance des signaux de type exponentiel pour l'étude des systèmes de convolution. La fonction $H(\lambda)$ est la *transformée de Laplace* de la réponse impulsionnelle $h(t)$

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-\lambda s} ds,$$

elle est appelée *fonction de transfert* du système. La fonction de transfert du circuit RC s'écrit

$$H(\lambda) = \frac{1}{1 + \lambda RC}.$$

En particulier, la réponse d'un système de convolution à un signal *monochromatique* $x(t)$ de la forme $x(t) = e^{i\omega t}$ est un signal de même fréquence

$$y(t) = H(i\omega)e^{i\omega t},$$

dont l'amplitude est donnée par la *transformée de Fourier* de la réponse impulsionnelle $h(t)$

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-i\omega s} ds.$$

Le système ne change pas la fréquence d'un signal monochromatique mais modifie son amplitude, qui devient $H(i\omega)$, d'où le nom de *filtre*.

Si on envoie successivement au système des signaux monochromatiques de la forme $e^{i\omega_n t}$ où ω_n prend un certain nombre de valeurs, pour $n = 1, \dots, N$, dans un intervalle (bande de fréquence), on obtient ainsi des mesures de la fonction de transfert sur l'axe imaginaire $H(i\omega_n)$, $n = 1, \dots, N$. On appelle ces mesures des *mesures harmoniques*. En pratique, de telles mesures sont souvent disponibles et le problème de *l'identification harmonique* consiste à obtenir un modèle mathématique du système à partir de telles mesures.

1.5 Conclusion

Nous avons vu qu'il était nécessaire d'intégrer les signaux pour définir une norme, ou exprimer la sortie d'un système LTI comme un produit de convolution. Or, un signal n'est pas toujours une fonction bien régulière (continue, analytique). On aura donc besoin d'une notion d'intégrale pour laquelle beaucoup de fonctions sont intégrables. C'est pourquoi nous allons aborder l'intégrale de Lebesgue. Cela va nous permettre de définir les espaces L^p de fonctions intégrables qui fournissent des espaces de signaux avec lesquels on pourra travailler. Dans ce cadre, on étudiera les produits de convolution.

Les signaux exponentiels complexes jouent un rôle essentiel en traitement du signal. Nous verrons que tout signal périodique peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie de signaux monochromatiques

$$x(t) = \sum c_n e^{i\omega_n t},$$

ou série de Fourier. Ces signaux interviennent aussi dans l'étude des systèmes de convolution : ce sont des fonctions propres. Ils sont à l'origine des transformées de Fourier et de Laplace, qui permettent de définir la fonction de transfert d'un système de convolution. La transformée de Laplace a la propriété de transformer un produit de convolution en produit, une équation différentielle en équation algébrique ... de transformer certains problèmes difficiles en des problèmes plus faciles à résoudre.

Bibliographie : C. Gasquet, P. Witomski [3] ; A.V. Oppenheim et al. [5].

Chapitre 2

Intégration

2.1 Introduction

Les développements de la théorie de la mesure et de l'intégration peuvent se grouper en quatre grandes périodes.

Les origines sont très anciennes et remontent au IV^{ème} siècle avant J.C. Avec Eudoxe apparaît le calcul d'aires et de volumes pour des cônes, pyramides, etc... Archimède calcule les aires de certaines parties du plan en introduisant les notions de polygone intérieur et de polygone extérieur (approximation par des fonctions linéaires par morceaux).

Le XVII^{ème} siècle voit la création, essentiellement par Newton et Leibniz, du *calcul différentiel et intégral*. Grâce à la notion d'infiniments petits, on détermine la tangente à une courbe, on calcule l'aire d'une surface en la découpant en bandes infimes et on s'aperçoit que détermination de tangentes et calcul d'aires sont deux facettes d'un même phénomène ; en fait deux opérations réciproques l'une de l'autre. Les fonctions élémentaires sont définies (par des expressions analytiques). Les intégrales les plus simples apparaissent ($\int_a^x t^2 dt$) et Newton découvre le logarithme (par $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$).

On ne se pose pas alors la question de l'intégrabilité, pour cela, il faut attendre le début du XIX^{ème} siècle. Fourier découvre que toute fonction continue peut se représenter par une série trigonométrique, et constate la nécessité de procéder à des intégrations sur de telles représentations. C'est pour répondre à ce besoin que Cauchy et surtout Riemann créent, en reprenant l'idée d'Archimède d'approximation par des fonctions en escalier, l'*intégrale de Riemann* (1867).

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *bornée* définie sur un intervalle *borné* $[a, b]$. Soit Δ_n une subdivision de l'intervalle $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

On considère la somme de Riemann

$$I(\Delta_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \xi_i \in]x_{i-1}, x_i[.$$

Lorsque $I(\Delta_n)$ admet une limite finie, lorsque n tend vers l'infini et la plus grande des longueurs $x_i - x_{i-1}$ tend vers 0, on dit que f est intégrable au sens de Riemann (R-intégrable). La limite est appelée intégrale de Riemann sur a, b et notée

$$\int_a^b f(x) dx.$$

On peut aussi définir l'intégrale de Riemann à l'aide de *fonctions en escalier* : une fonction $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier si il existe une subdivision Δ_n de $[a, b]$ telle que ϕ ait une valeur constante c_i sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, \dots, n$. L'intégrale $I(\phi)$ de ϕ est définie par

$$I(\phi) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}).$$

L'intégrale inférieure $\underline{I}(f)$ et l'intégrale supérieure $\overline{I}(f)$ de f sont alors définies par

$$\begin{aligned} \underline{I}(f) &= \sup\{I(\phi), \phi \text{ fonction en escalier}, \phi \leq f\} \\ \overline{I}(f) &= \inf\{I(\psi), \psi \text{ fonction en escalier}, \psi \geq f\}. \end{aligned}$$

La fonction f étant bornée, $\underline{I}(f)$ et $\overline{I}(f)$ existent et $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$. Lorsque $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, f est R-intégrable.

Propriétés :

- l'application $I : f \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ est une forme linéaire
- si f est une fonction *bornée*, continue sur $[a, b]$ sauf en un nombre *fini* de points, alors f est R-intégrable
- Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions R-intégrable sur $[a, b]$ et si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *uniformément* vers une fonction f , alors f est R-intégrable et

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

- théorème fondamental de l'analyse : si f est continue sur $[a, b]$ alors la fonction F définie sur $[a, b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

est dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée est égale à f .

Bien que cette approche semble parfaitement naturelle et simple, l'intégrale de Riemann est imparfaite et son maniement est malaisé et limité. Cela tient à une raison unique dont nous donnons trois aspects :

1. Elle demande beaucoup de régularité à la fonction que l'on intègre et pas "assez" de fonctions sont intégrables. Par exemple, la fonction de Dirichlet sur $[0, 1]$: fonction caractéristique des rationnels, qui vaut 1 pour x rationnel et 0 pour x irrationnel, n'est pas intégrable.
2. Il se peut qu'une suite (f_n) de fonctions R-intégrables converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction f qui n'est pas R-intégrable. Par exemple, si on numérote les rationnels de l'intervalle $[0, 1]$ (dénombrables !) : $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$ et si pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction caractéristique g_n de l'ensemble $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Les g_n sont R-intégrables et la suite (g_n) converge simplement vers la fonction de Dirichlet, qui ne l'est pas.
Il en résulte une difficulté ou une impossibilité de combinaison avec les autres opérations de l'analyse, i.e. d'écrire les relations suivantes

$$\begin{aligned} \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b f(x, t) dt &= \int_a^b \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) dt \\ \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x, t) dt &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt \end{aligned}$$

qui sont pourtant très utiles ...

3. Si l'on munit l'espace $C^0[a, b]$ des fonctions continues sur $[a, b]$ de la norme

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx,$$

on obtient un espace qui n'est pas complet (une suite de Cauchy peut ne pas converger). Pour les fonctions de $C^0[a, b]$, les notions d'intégrale de Riemann et de Lebesgue coïncident. Pour obtenir un espace complet, il faut considérer la classe des fonctions Lebesgue intégrables.

Les travaux de Riemann suscitent de nombreuses études pour définir une notion d'intégrale dans les cas les plus généraux. C'est vers 1900 que Lebesgue propose sa théorie de l'intégration. Les sommes de Riemann ne conviennent que pour des fonctions discontinues qui varient peu dans l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. Le point de vue de Lebesgue est différent (voir [3, 11.3]). En créant son intégrale, Lebesgue l'a lui-même comparée à l'intégrale de Riemann : " Imaginez que je doive payer une certaine somme ; je peux sortir les pièces de mon porte-monnaie comme elles viennent pour arriver à la somme indiquée, ou sortir toutes les pièces et les choisir selon leur valeur. La première méthode est l'intégrale de Riemann, la deuxième correspond à mon intégrale." L'intégration de Riemann *parcourt* le segment et mesure la *hauteur* de la fonction au fur et à mesure, tandis que l'intégrale de Lebesgue considère la *taille* des ensembles de niveau. Au lieu de découper l'ensemble de départ en petits morceaux, on découpe l'ensemble d'arrivée, i.e. l'espace des y :

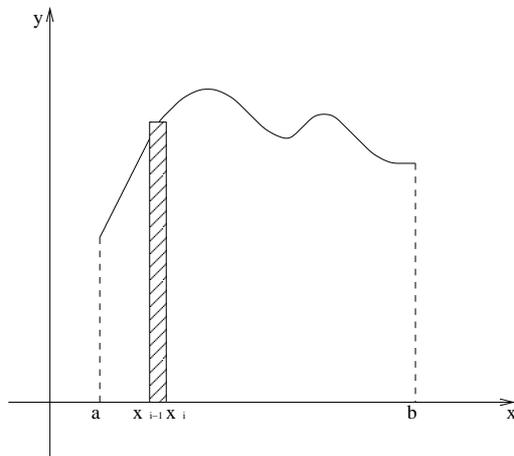
$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 \cdots < y_{n-1} < y_n = \beta,$$

ou $[\alpha, \beta]$ est l'intervalle des variations de $f(x)$. A l'intervalle $J_i =]y_{i-1}, y_i[$, il associe

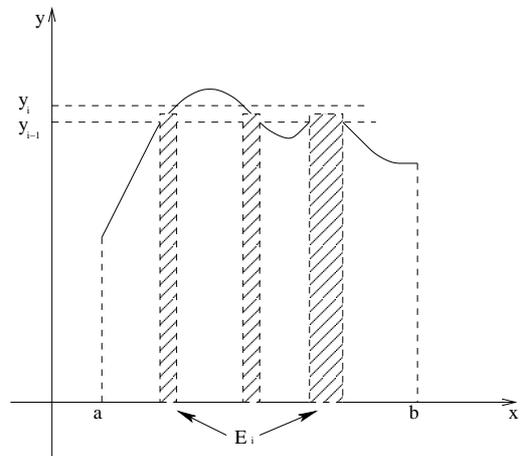
$$E_i = \{x \in [a, b], y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}.$$

Ces ensembles peuvent être très compliqués et la difficulté est de définir convenablement leur mesure $m(E_i)$. On remplace alors les sommes de Riemann par les sommes

$$\sum_{i=1}^n \eta_i m(E_i), \quad y_{i-1} < \eta_i < y_i.$$



Partition de Riemann



Partition de Lebesgue

La situation pour les ensembles de fonctions est la même que pour les ensembles de nombres : si les calculs pratiques se font sur l'ensemble des rationnels, l'ensemble complet des réels est très utile pour l'étude de la convergence des suites. Ce sont les intégrales de Riemann que l'on calcule. Par contre, les combinaisons de l'intégration avec les autres opérations de l'analyse (passages à la limite, dérivation sous le signe somme ...) sont facilitées avec l'intégrale de Lebesgue. Si le manuel de l'utilisateur de l'intégrale de Lebesgue est simple, sa construction est difficile ... nous ne ferons que la survoler.

2.2 Ensembles mesurables

L'idée est d'étendre la notion de mesure d'un intervalle, d'aire d'un rectangle ... On donne ici les propriétés ensemblistes fondamentales des ensembles mesurables.

Définition 2.2.1 *Un ensemble \mathcal{T} de parties de \mathbb{R}^p est une tribu si et seulement si*

- (i) $\emptyset \in \mathcal{T}, \mathbb{R}^p \in \mathcal{T}$
- (ii) $S \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathbb{R}^p \setminus S \in \mathcal{T}$ (le complémentaire de S par rapport à \mathbb{R}^p)
- (iii) $S_1, S_2, \dots \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathcal{T}$.

Les éléments de \mathcal{T} sont appelés ensembles mesurables.

Définition 2.2.2 Une mesure sur une tribu \mathcal{T} est une application $m : \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty]$ qui possède les propriétés suivantes :

(i) $m(\emptyset) = 0$

(ii) Additivité dénombrable : Si S_n est une suite d'ensembles mesurables, deux à deux disjoints, on a :

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(S_n)$$

La notion de mesure est définie pour un ensemble quelconque et joue un rôle essentiel en probabilité.

On appelle *tribu des boréliens*, notée \mathcal{B} , la plus petite tribu contenant (ou tribu engendrée par) l'ensemble des ouverts de \mathbb{R}^p . Pour construire la mesure de Lebesgue, on commence par définir la mesure d'un pavé de \mathbb{R}^p

$$P =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[, \quad a_i < b_i.$$

de la façon suivante :

$$m(P) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n).$$

Puis, on montre qu'on peut étendre cette mesure à la tribu des boréliens (difficile). C'est la mesure de Lebesgue, on la notera m . Elle est *invariante par translation* $m(x + E) = m(E)$.

En fait, la tribu des boréliens n'est pas tout fait la plus grande possible sur laquelle on puisse définir la mesure de Lebesgue. Elle ne contient pas tous les ensembles *négligeables*, c'est-à-dire contenus dans un borélien de mesure nulle. On aimerait bien que les négligeables soient de mesure nulle. C'est pourquoi, on est amené à considérer la *tribu de Lebesgue*, notée \mathcal{L} , engendrée par les boréliens et les négligeables. La mesure de Lebesgue s'étend à \mathcal{L} .

Les ensembles de mesure nulle jouent un rôle primordial pour l'intégration. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle. La réciproque est fautive : par exemple, l'ensemble de Cantor dans $[0, 1]$ est négligeable mais a la puissance du continu (il est en bijection avec l'ensemble des réels). Notons que les inclusions $\mathcal{B} \subset \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^p$ sont strictes. Cependant, la tribu des boréliens contient tous les ouverts, tous les fermés, toutes les réunions dénombrables de fermés, intersections dénombrables d'ouverts, etc... il y a donc énormément d'ensembles mesurables, *tous les ensembles se présentant naturellement sont mesurables*. L'impossibilité de mesurer tous les ensembles se révélera sans gravité. Il est au contraire difficile de construire un ensemble non mesurable (Vitali, 1905), il faut pour cela utiliser l'axiome du choix : dans l'intervalle $[0, 1]$, on considère la relation d'équivalence : x et y sont dits équivalents si $x - y$ est rationnel. Soit A un sous-ensemble de $[0, 1]$ obtenu en prenant un élément dans chacune des classes d'équivalences ; A n'est pas mesurable !

2.3 Fonctions mesurables

Dans le chapitre précédent on a introduit les ensembles sur lesquels on va pouvoir intégrer. De même, on ne pourra pas travailler avec n'importe quelles fonctions ... les fonctions devront être mesurables.

On note $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Si on définit la *borne supérieure* d'une partie non vide, non majorée comme étant $+\infty$, alors toute partie non vide de $\bar{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure.

Proposition 2.3.1 Une fonction $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si pour tout réel a l'ensemble

$$f^{-1}(]a, +\infty[) = \{x \in \mathbb{R}^p; f(x) > a\}$$

est mesurable.

Remarques.

1. En fait, f est mesurable si et seulement si l'image réciproque de tout borélien est mesurable. On peut choisir pour le montrer n'importe quelle partie génératrice de \mathcal{B} : les intervalles de la forme $]a, +\infty[$, ou $[a, +\infty[$...
2. Le lien entre ensembles mesurables et fonctions mesurables est le suivant : l'ensemble A est mesurable si et seulement si la fonction caractéristique χ_A de A définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

est mesurable.

3. Il y a une analogie de démarche entre la topologie et la théorie de la mesure :
ouverts \leftrightarrow ensembles mesurables
fonctions continues \leftrightarrow fonctions mesurables.

Exemples.

1. Toute fonction continue est mesurable. Il existe beaucoup de fonctions mesurables non continues.
2. La fonction caractéristique χ_A d'un ensemble mesurable A , est mesurable. En particulier, la fonction caractéristique des rationnels est mesurable.

Proposition 2.3.2 Soient f et g des fonctions mesurables de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} . Alors, les fonctions suivantes sont mesurables : λf (λ réel); $f + g$ (lorsque cette somme est définie); fg ; $|f|$; $\sup(f, g)$, $\inf(f, g)$; $f^+ = \sup(f, 0)$; $f^- = -\inf(f, 0) = \sup(-f, 0)$.

Remarque : $f \circ g$ peut ne pas être mesurable.

Proposition 2.3.3 Soient (f_n) une suite de fonctions mesurables. La limite ponctuelle de la suite (f_n) , si elle existe, est mesurable.

Comme pour les ensembles, la famille des fonctions mesurables est très étendue.

Nous allons maintenant définir les fonctions simples. Il s'agit des fonctions les plus élémentaires, qui jouent pour l'intégrale de Lebesgue le rôle des fonctions en escalier pour l'intégrale de Riemann. Ce sont des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques.

Définition 2.3.1 Une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est dite étagée ou simple si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Elle peut se représenter sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}, \quad (2.1)$$

ou les a_i sont des réels et les E_i des ensembles mesurables.

La représentation (2.1) n'est bien sûr pas unique, mais il existe une représentation unique, dite *standard* de f dans laquelle les a_i sont distincts et les E_i disjoints. On a alors $E_i = \{x \in \mathbb{R}^p; f(x) = a_i\}$.

La somme, le produit, le module de fonctions simples sont simples. L'importance des fonctions simples réside dans le théorème d'approximation suivant :

Théorème 2.3.1 Toute fonction mesurable positive est la limite d'une suite croissante de fonctions simples.

On va définir l'intégrale de Lebesgue en procédant par étapes, en considérant des fonctions de plus en plus compliquées :

1. fonctions caractéristiques
2. fonctions simples
3. fonctions mesurables positives
4. fonctions mesurables

2.4 Intégrale de Lebesgue

2.4.1 Intégrale des fonctions simples positives.

Définition 2.4.1 Soit s simple positive, et

$$s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i},$$

sa représentation standard. L'intégrale de Lebesgue de s est le nombre positif (éventuellement $+\infty$)

$$\int s \, dm = \sum_{i=1}^n a_i m(E_i).$$

On dit que s est intégrable si $\int s \, dm$ est finie.

2.4.2 Intégrale des fonctions mesurables positives.

Le passage à une fonction mesurable positive se fait grâce au Théorème 2.3.1.

Définition 2.4.2 Soit f une fonction mesurable positive. L'intégrale de Lebesgue de f est le nombre positif (éventuellement $+\infty$)

$$\int f \, dm = \sup \left\{ \int s \, dm, 0 \leq s \leq f, s \text{ simple} \right\}.$$

On dit que f est intégrable si $\int f \, dm$ est finie.

Le premier théorème fondamental de la théorie de l'intégration est le suivant :

Théorème 2.4.1 (convergence monotone) Soit f_n une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge vers une fonction f . Alors,

$$\int f \, dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dm.$$

Remarques.

1. Les deux membres de l'égalité sont finis ou infinis, la suite $(\int f_n \, dm)$ étant croissante dans $\bar{\mathbb{R}}$.
2. L'intégrale de la fonction de Dirichlet (fonction caractéristique des rationnels) est nulle. Elle n'est pas intégrable au sens de Riemann.
3. Le théorème tombe si (f_n) n'est pas croissante.

2.4.3 Intégrale des fonctions mesurables.

L'intégrale d'une fonction f mesurable s'obtient en décomposant f en $f = f^+ - f^-$, où les fonctions $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = -\inf(f, 0) = \sup(-f, 0)$ sont mesurables et positives. On a aussi $|f| = f^+ + f^-$.

Définition 2.4.3 Une fonction f mesurable est dite intégrable ou sommable si les fonctions f^+ et f^- ont chacune une intégrale finie. L'intégrale de f est alors définie par

$$\int f \, dm = \int f^+ \, dm - \int f^- \, dm.$$

Si E est un ensemble mesurable, l'intégrale de f sur E est

$$\int_E f \, dm = \int f \chi_E \, dm.$$

Exemples :

Une fonction constante non nulle est non intégrable.

Nous verrons que la fonction $\frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable.

Propriétés :

1. L'application $f \rightarrow \int f \, dm$ est linéaire
2. f, g mesurables, $f \leq g \Rightarrow \int_E f \, dm \leq \int_E g \, dm$ (E mesurable)
3. $E \subset F$ mesurables et f mesurable positive $\Rightarrow \int_E f \, dm \leq \int_F f \, dm$
4. E, F mesurables et $E \cap F = \emptyset \Rightarrow \int_{E \cup F} f \, dm = \int_E f \, dm + \int_F f \, dm$
5. $E = \bigcup_n E_n$, (E_n) suite croissante d'ensembles mesurables, alors

$$\int_E f \, dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f \, dm$$

Proposition 2.4.1 Une fonction f mesurable est intégrable si et seulement si $|f|$ est intégrable. On a l'inégalité de la valeur absolue

$$\left| \int f \, dm \right| \leq \int |f| \, dm.$$

Si f est mesurable, g L -intégrable et si $|f| \leq |g|$, alors f est intégrable et

$$\left| \int f \, dm \right| \leq \int |g| \, dm.$$

Ceci marque une nouvelle différence avec l'intégrale de Riemann. Une fonction f peut ne pas être Riemann intégrable alors que $|f|$ l'est ... la notion d'intégrale semi-convergente est particulière à l'intégrale de Riemann et n'existe pas pour l'intégrale de Lebesgue.

On définit l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes $f(x) = u(x) + i v(x)$, où les fonctions u et v sont à valeurs réelles, par

$$\int f(x) dm = \int u(x) dm + i \int v(x) dm.$$

2.4.4 La notion de "presque partout".

Une propriété liée à un point $s \in \mathbb{R}^p$ est vérifiée presque partout (p.p.) si l'ensemble des points pour lesquels elle n'est pas vérifiée est de mesure nulle :

- deux fonctions mesurables f et g sont dites *égales presque partout* :

$$f = g \text{ p.p.}$$

si l'ensemble $E = \{x, f(x) \neq g(x)\}$ est de mesure nulle.

- $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est *définie presque partout* si le complémentaire de E dans \mathbb{R}^p est de mesure nulle.

Proposition 2.4.2 Soit f mesurable positive et E tel que $m(E) > 0$. Alors $\int_E f dm = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p. sur E .

Une conséquence de cette proposition est que l'on peut modifier une fonction intégrable sur un ensemble de mesure nulle sans changer son intégrale. En particulier, si f est mesurable *définie presque partout* et s'il existe g intégrable telle que $f = g$ p.p., on définit l'intégrale de f par

$$\int f dm = \int g dm.$$

Du point de vue des propriétés de l'intégrale, on ne distinguera plus deux fonctions égales p.p. Elles sont équivalentes par la relation d'équivalence "égales p.p.". Cette relation permet de quotienter l'espace vectoriel des fonctions intégrables.

Définition 2.4.4 On note $L^1(\mathbb{R}^p)$ l'espace vectoriel des classes de fonctions intégrables sur \mathbb{R}^p . La quantité

$$\int |f| dm$$

est une norme sur $L^1(\mathbb{R}^p)$.

Une conséquence de la proposition 2.4.1 est que si $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, bornée presque partout sur un ensemble de mesure finie E , alors f est L-intégrable. Cependant f intégrable n'implique pas f bornée p.p., mais f finie p.p. Grâce la notion de presque partout, on peut aussi caractériser les fonctions R-intégrables : on montre qu'une fonction f bornée sur un intervalle borné $[a, b]$ est R-intégrable si et seulement si elle est continue p.p.

2.5 Calcul intégral

Dans cette section, on va donner les règles qui permettent de calculer en pratique des intégrales.

2.5.1 Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue

C'est le résultat le plus important de la théorie de l'intégration.

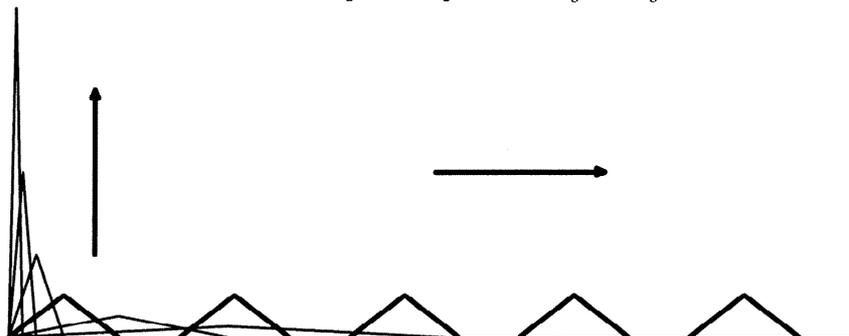
Théorème 2.5.1 Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables qui converge presque partout vers une fonction f . On suppose qu'il existe une fonction positive intégrable g telle que, pour tout n , on ait

$$|f_n| \leq g \text{ p.p.}$$

Alors f est intégrable et on a

$$\int f \, dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dm$$

FIG. 4 - On n'a pas toujours $\lim \int f_n = \int \lim f_n$



Remarques.

1. Ce théorème fournit un nouvel exemple de situation où on a la possibilité d'invertir le signe \lim et celui d'intégration. Le gain est manifeste sur l'intégrale de Riemann, où il fallait la convergence uniforme.
2. Il fournit également un critère d'intégrabilité et un moyen de calcul de l'intégrale. Attention, l'hypothèse de domination n'est pas toujours satisfaite, comme le montre la figure (fonctions de plus en plus effilées ou fonctions qui se décalent vers l'infini).
3. Cas particulier : **Théorème de la convergence bornée (Beppo Levi).**

Si (f_n) est une suite de fonctions intégrables sur un ensemble E de mesure finie convergeant simplement vers une fonction f , et si la suite (f_n) est uniformément bornée sur E :

$$\exists M > 0, \forall x \in E, \forall n \quad |f_n(x)| \leq M,$$

alors f est intégrable sur E et

$$\int_E f \, dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, dm$$

4. Supposons que l'ensemble des rationnels soit ordonné en une suite $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ et considérons la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite f_n converge ponctuellement vers la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Les fonctions f_n sont R-intégrable (d'intégrale nulle), mais f n'est pas R-intégrable. Le théorème de Lebesgue permet de résoudre ce problème : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq 1$ et l'intégrale de Lebesgue de f_n est nulle car f_n est nulle presque partout. Le théorème de convergence dominée s'applique : f est L-intégrable et son intégrale est nulle.

2.5.2 Comparaison avec l'intégrale de Riemann.

Théorème 2.5.2 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée, R-intégrable, alors elle est L-intégrable et les deux intégrales sont égales :

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f \, dm}_{\text{Lebesgue}} = \underbrace{\int_a^b f(x) \, dx}_{\text{Riemann}}$$

Pour l'intégrale de Riemann, on donne un sens au symbole $\int_b^a f(x) \, dx$, pour $a < b$:

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx.$$

On adoptera la même convention pour l'intégrale de Lebesgue :

$$\int_1^0 f(x) \, dx = - \int_{[0,1]} f \, dm.$$

L'intégrale de Riemann n'est définie que pour des fonctions bornées sur un intervalle borné. Lorsque ce n'est pas le cas, on peut définir les *intégrales de Riemann généralisées*. Nous allons maintenant examiner les relations qui existent entre intégrale de Riemann généralisée et intégrale de Lebesgue.

Proposition 2.5.1 Soit $[a, b]$ un intervalle borné de \mathbb{R} . Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, l'intégrale de Riemann

$$I_\epsilon = \int_{a+\epsilon}^b |f(x)| \, dx$$

existe.

(i) Si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon = I < \infty$, alors f est L -intégrable sur $[a, b]$ et

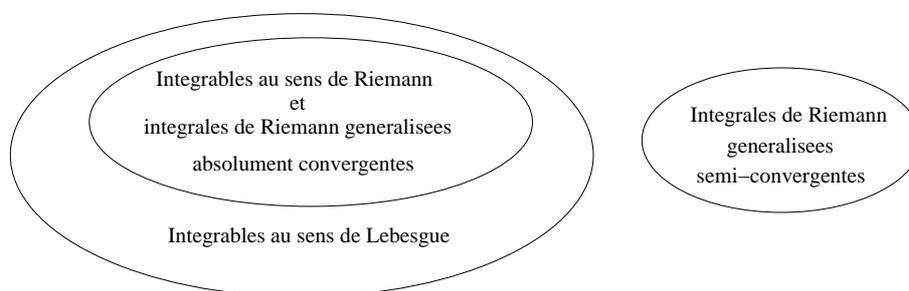
$$\int_{[a,b]} |f(x)| dm = I.$$

(ii) Si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon = \infty$, alors f n'est pas L -intégrable sur $[a, b]$.

Dans le cas (i), l'intégrale de Riemann généralisée

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx,$$

existe (on dit qu'elle est absolument convergente). Dans le cas (ii), si f est positive, l'intégrale de Riemann généralisée n'existe pas non plus. Par contre si f est de signe quelconque, l'intégrale généralisée de Riemann peut exister (on dit qu'elle est semi-convergente).



On a des résultats analogues sur un intervalle non borné, par exemple $[a, +\infty[$. L'intégrale de Riemann généralisée est alors

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) dx.$$

Exemples :

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, 1]$ est L -intégrable (intégrale de Riemann généralisée absolument convergente).
- $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0, 1]$ n'est pas L -intégrable.
- $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $[0, \infty[$ n'est pas L -intégrable. Cependant elle admet une intégrale de Riemann généralisée semi-convergente : $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

2.5.3 Fonctions définies par des intégrales.

Soit $f : E \times I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , borné ou non, et $E \subset \mathbb{R}^p$ un ensemble mesurable. Considérons la fonction de I dans \mathbb{R} définie par l'intégrale

$$F(t) = \int_E f(x, t) dm(x), \quad t \in I. \tag{2.2}$$

La fonction à intégrer dépend d'un paramètre $t \in I$. C'est un moyen de définir de nouvelles fonctions. Les résultats suivants concernent les propriétés de continuité et de dérivabilité de cette fonction.

Proposition 2.5.2 (Continuité) *Si la fonction $f(x, t)$ est telle que*

1. *pour tout $t \in I$, la fonction $x \rightarrow f(x, t)$ est mesurable*
2. *pour presque tout $x \in E$, la fonction $t \rightarrow f(x, t)$ est continue au point t_0*
3. *il existe $g(x)$ positive intégrable sur E telle que pour tout $t \in I$ et pour presque tout x*

$$|f(x, t)| \leq g(x)$$

alors la fonction $f(x, t)$ est intégrable sur E et la fonction $F(t)$ est continue en t_0 :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \int_E f(x, t_0) dm(x).$$

On considère une suite t_n qui converge vers t_0 et on pose $f_n(x) = f(t_n, x)$. Pour presque tout x , $f_n(x)$ converge vers la fonction $x \rightarrow f(t_0, x)$ et $|f_n(x)| \leq g(x)$. Le théorème de la convergence dominée s'applique et donne le résultat.

Exemple : La transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$,

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx} f(x) dx.$$

Proposition 2.5.3 (Dérivation) *Si la fonction $f(x, t)$ est telle que*

1. *pour tout $t \in I$, la fonction $x \rightarrow f(x, t)$ est intégrable sur E*
2. *pour presque tout $x \in E$, $t \rightarrow f(x, t)$ est continûment dérivable sur I*
3. *il existe $g(x)$ positive intégrable sur E telle que pour tout $t \in I$ et pour presque tout $x \in E$*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$$

Alors, pour tout $t \in I$, la fonction $x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ est intégrable, la fonction F est dérivable et on a

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dm(x).$$

On pose $f_n(x) = \frac{f(t_n, x) - f(t_0, x)}{t_n - t_0}$ et on utilise le théorème des accroissements finis.

On a des résultats analogues lorsque t est une variable complexe.

2.5.4 Changement de variable

Soit $f : \Delta \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et

$$\phi : \begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \Delta \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) & \rightarrow & y = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)), \end{array}$$

où Δ et Ω sont deux ouverts connexes de \mathbb{R}^p et un ϕ un *difféomorphisme de classe C^1* , c'est à dire que ϕ est une bijection continument différentiable ainsi que ϕ^{-1} . On appelle Jacobienne de ϕ en x , la matrice des dérivées partielles de ϕ calculées en x :

$$\text{Jac } \phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

On note $J_\phi(x)$ le déterminant de la matrice Jacobienne et $|J_\phi(x)|$ la valeur absolue de ce déterminant.

Théorème 2.5.3 (Changement de variable) *Si f une fonction mesurable positive (resp. intégrable) définie sur Δ . Alors la fonction $x \rightarrow (f \circ \phi)(x)|J_\phi(x)|$ est mesurable positive (resp. intégrable) sur Ω et on a*

$$\int_{\Delta} f(y) dm(y) = \int_{\Omega} (f \circ \phi)(x) |J_\phi(x)| dm(x)$$

2.5.5 Le théorème de Fubini

Le théorème de Fubini précise les règles de permutation dans les intégrales doubles.

Théorème 2.5.4 (Fubini) *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $E \times F$ un ensemble mesurable de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

(i) *Si f est positive sur $E \times F$, on a*

$$\int_{E \times F} f(x, y) dx dy = \int_E \left(\int_F f(x, y) dy \right) dx = \int_F \left(\int_E f(x, y) dx \right) dy \quad (2.4)$$

(ii) *Si f est intégrable sur $E \times F$, la fonction $x \rightarrow \int_F f(x, y) dy$ est intégrable pour presque tout x , la fonction $y \rightarrow \int_E f(x, y) dx$ est intégrable pour presque tout y , et (2.4) est vérifiée.*

(iii) *f est intégrable sur $E \times F$ si et seulement si*

$$\int_E \left(\int_F |f(x, y)| dy \right) dx < \infty \quad \text{ou} \quad \int_F \left(\int_E |f(x, y)| dx \right) dy < \infty$$

L'aspect pratique à retenir est que l'on peut calculer une intégrale double en choisissant l'ordre d'intégrabilité que l'on veut, pourvu que l'une au moins des intégrales en module existe. L'existence des deux intégrales $\int_E dx \int_F f(x, y) dy$ et $\int_F dy \int_E f(x, y) dx$ n'implique pas l'intégrabilité de f sur $E \times F$.

2.5.6 Intégration et dérivation

Quand on intègre, au sens de Riemann une fonction continue f sur \mathbb{R} , on constate que

(i) la fonction $x \rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est continue, dérivable et de dérivée $f(x)$ au point x . En ce sens-là, on peut dire que les deux opérations de dérivation et d'intégration sont réciproques l'une de l'autre.

(ii) si f est continûment différentiable sur $[a, b]$ alors pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt. \quad (2.5)$$

Qu'en est-il de l'intégrale de Lebesgue ?

Le point (i) se généralise de la façon suivante :

Proposition 2.5.4 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction L -intégrable. Alors la fonction F définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (2.6)$$

est continue sur $[a, b]$. Elle est dérivable p.p. sur $[a, b]$ et on a

$$F'(x) = f(x) \text{ p.p.}$$

Examinons maintenant la formule (2.5). Pour qu'elle ait un sens, il faut que f soit dérivable p.p. avec f' intégrable sur $[a, b]$. On en déduit alors que f est continue sur $[a, b]$. Ces conditions ne sont pas suffisantes. On peut en effet construire une fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue, strictement croissante, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, et admettant presque partout une dérivée nulle (escalier de Cantor). Dans ce cas (2.5) n'est pas vérifiée. Les fonctions pour lesquelles (2.5) est vérifié sont appelées *absolument continues*. C'est le cas de la fonction *primitive* $F(x)$ définie par (2.6). On montre qu'une fonction est absolument continue si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe α tel que, pour toute suite finie d'intervalles disjoints (x_i, x'_i) , $i = 1, \dots, n$ tels que $\sum_{i=1}^n |x'_i - x_i| < \alpha$ on ait $\sum_{i=1}^n |f(x'_i) - f(x_i)| < \epsilon$. Pour les fonctions absolument continues, on a le résultat suivant :

Théorème 2.5.5 (intégration par parties) Soient u et v deux fonctions absolument continues sur (a, b) . Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

2.6 conclusion

Le principal avantage de la théorie de Lebesgue sur celle de Riemann et qu'elle *admet de bons théorèmes de convergence*. Pour la théorie de Riemann, les fonctions intégrables sont essentiellement

continues et les théorèmes de convergence nécessitent la convergence uniforme. Ces hypothèses sont trop fortes dans de nombreuses applications pratiques du calcul intégral. Par exemple, en traitement du signal, on approxime un signal très bruité par des échantillons obtenus par superposition de signaux sinusoidaux. Mais ces échantillons ne convergent que rarement de manière uniforme vers le signal original. On a besoin pour approcher des invariants du signal définis par une intégrale (énergie) d'avoir des théorèmes de convergence qui fonctionnent pour un mode de convergence plus faible (convergence simple p.p.). La théorie de Lebesgue fournit un cadre approprié pour le traitement du signal (séries et transformées de Fourier), celui des espaces de fonctions intégrables qui font l'objet du chapitre suivant.

Par contre l'intégrale de Lebesgue ne possède pas de notion d'intégrale semi-convergente. De ce fait, les rapports entre la théorie de l'intégration et le calcul différentiel sont ambigus (cf. section 2.5.6).

Chapitre 3

Espaces de fonctions intégrables Convolution

3.1 Les espaces L^p

Définition 3.1.1 Soit $p > 0$ réel et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné ou non. On appelle $L^p(I)$ l'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, mesurables et de puissance p -ième intégrable

$$\int_I |f|^p dm < \infty.$$

Définition 3.1.2 On appelle $L^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, mesurables, bornées presque partout.

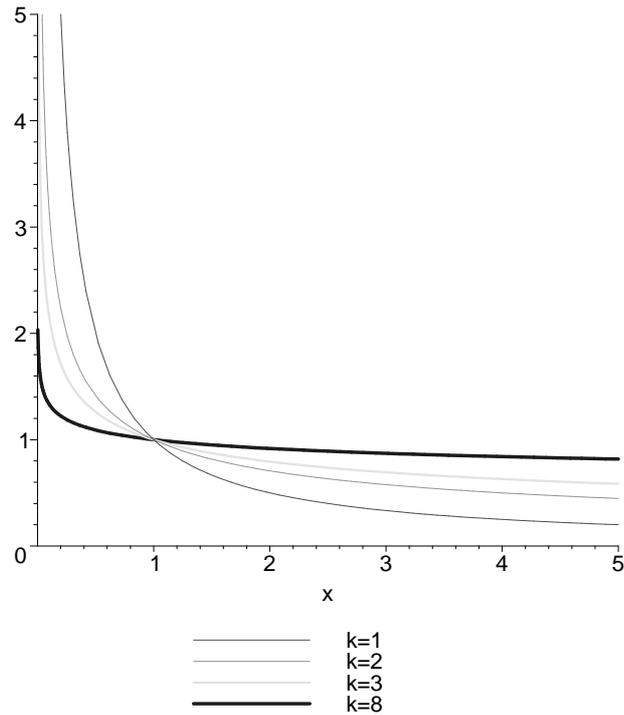
Lorsque $I = \mathbb{R}$ on note simplement L^p pour $L^p(\mathbb{R})$.

L'idée qui est derrière l'introduction des espaces L^p est de fournir une échelle permettant de quantifier le degré d'intégrabilité d'une fonction. Intuitivement, le paramètre p sert à amplifier les grandes valeurs de $|f|$ et l'appartenance à L^p signifie que ces grandes valeurs ne pèsent pas trop lourd. Il est souhaitable de compléter cette échelle d'espaces $(L^p, 1 \leq p < \infty)$ en lui adjoignant le cas limite $p = \infty$.

Exemple : pour $1 \leq p < \infty$, et $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f(x) = x^{-1/k}$ appartient à

- $L^p([0, 1])$ si et seulement si $k > p$
- $L^p([1, \infty[)$ si et seulement si $p < k$.

Ces fonctions sont représentées sur la figure ci-dessous.



Proposition 3.1.1 Pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(I)$ est un espace vectoriel muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f|^p dm, \quad 1 \leq p \right)^{1/p}. \quad (3.1)$$

$L^\infty(I)$ est un espace vectoriel muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \inf\{c \geq 0, |f(x)| < c \text{ p.p.}\} \quad (3.2)$$

Exemple : Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, et $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $g(x) = f(x)$ sauf en 0 où $g(0) = 2$ et en $\pm 1/2$ où $g(\pm 1/2) = 4$. Alors,

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)| = 1, \quad \sup_{x \in [-1, 1]} |g(x)| = 4, \quad \|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1.$$

Remarques. Rappelons que deux fonctions égales presque partout sont équivalentes du point de vue de l'intégration. Un élément de L^p n'est pas une fonction mais un ensemble de fonctions égales p.p. Néanmoins, pour simplifier le langage, nous parlons de fonctions de L^p . Il suffit de garder en mémoire le fait que lorsque deux fonctions sont égales p.p., elles sont considérées comme une seule et même fonction.

C'est cette notion de presque partout qui fait de (3.1) une norme (cf. proposition 2.4.2) : $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ p.p. Pour $p = \infty$, on a $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ p.p. et donc $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$ p.p.

Pour montrer la Proposition 3.1.1 on utilise les inégalités suivantes :

Proposition 3.1.2 (Inégalité de Holder) Soit $f \in L^p(I)$, $g \in L^q(I)$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$ et

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Alors, $fg \in L^1(I)$ et

$$\int_I |f(t)g(t)| dt \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

On démontre cette inégalité en utilisant la convexité de l'exponentielle [8, chap.3]. On en déduit :

Proposition 3.1.3 (Inégalité de Minkowsky) Soit $f \in L^p(I)$, $g \in L^p(I)$, avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors, $f + g \in L^p(I)$ et

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Cela prouve l'inégalité triangulaire. Il en résulte que $L^p(I)$ est un espace vectoriel normé pour $1 \leq p \leq \infty$. Pour $0 < p < 1$, $L^p(I)$ n'est pas un espace vectoriel.

Théorème 3.1.1 Pour $1 \leq p \leq \infty$, les espaces $L^p(I)$ sont des espaces vectoriels normés complets.

Toute suite de Cauchy ($\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m, n > N, \|f_m - f_n\|_p < \epsilon$) converge. Ce théorème est très important. Il confirme la supériorité de l'intégrale de Lebesgue (l'espace des fonctions R-intégrables n'est pas complet).

On introduit ainsi une nouvelle notion de convergence, la *convergence en norme p* : la suite (f_n) converge en norme p vers f si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

On définit aussi la *convergence p.p.* : la suite (f_n) converge presque partout vers f si l'ensemble des points x tels que $f_n(x)$ n'ait pas pour limite $f(x)$ est de mesure nulle. On a

$$\text{convergence uniforme} \Rightarrow \text{convergence ponctuelle} \Rightarrow \text{convergence p.p.}$$

Il n'y a pas de lien entre la convergence p.p. et la convergence en norme p . La convergence en norme p entraîne seulement la convergence presque partout d'une sous-suite.

3.2 Propriétés d'inclusion et de densité.

Proposition 3.2.1 On suppose $m(I) < \infty$, on a

$$L^q(I) \subset L^p(I), \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

On a donc $L^\infty(I) \subset L^2(I) \subset L^1(I)$.

Certains sous-ensembles des L^p , constitués par des fonctions assez élémentaires ont des propriétés de densité (relativement à la norme $\| \cdot \|_p$). On peut donc effectuer des approximations des fonctions de L^p par des fonctions plus particulières.

Théorème 3.2.1 *L'ensemble des fonctions simples intégrables est dense dans $L^p(I)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

On appelle *support* d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ou \mathbb{C} l'adhérence de $\{x; f(x) \neq 0\}$.

Théorème 3.2.2 *L'espace $C_c^0(I)$ des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, continues à support compact est dense dans $L^p(I)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

Ce résultat est faux pour $p = \infty$ (prendre la fonction $\chi_{[0,1]}$ dans $L^\infty([0,1])$).

L'espace $C_c^0(I)$ muni de la norme définie par l'intégrale de Riemann $\int_I |f(t)| dt$ est un espace métrique non complet. Si X est un sous-espace d'un espace métrique complet Y , dense dans Y , on dit que Y est le complété de X . Tout espace métrique possède un complété, unique à isomorphisme près. Le Théorème 3.2.2 affirme que le *complété* de $C_c^0(I)$ n'est autre que $L^1(I)$. En ce sens, l'intégrale de Lebesgue est la meilleure généralisation possible de l'intégrale de Riemann.

Le complété de $C_c^0(\mathbb{R})$ dans L^∞ n'est pas L^∞ mais le sous espaces des fonctions qui "s'annulent" à l'infini : pour tout ϵ , il existe un compact hors duquel $|f(x)| < \epsilon$.

3.3 Convolution

La convolution est avec la transformée de Fourier un des outils essentiels du traitement du signal.

Définition 3.3.1 *Soit f et g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . On appelle convolution de f et g la fonction $f * g$, définie lorsque l'intégrale est convergente par*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u) du.$$

Exemples :

(a) $f = g = \chi_{[0,1]}$ alors

$$f * g(x) = \int_{[0,1]} \chi_{[0,1]}(x-t) dt = \int_{[x-1,x]} \chi_{[0,1]}(s) ds = m([0,1] \cap [x-1,x]),$$

soit

$$f * g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Il est facile sur cet exemple d'effectuer une convolution graphique. La fonction $f * g$ est continue, bien que f et g soient discontinues.

(b) $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g = \frac{1}{2h}\chi_{[-h,h]}$. On a

$$f * g(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x-t) dt = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(s) ds.$$

Là encore, la fonction $f * g$ est continue, d'après la proposition (2.6).

Comme on a pu le voir sur ces exemples, la propriété essentielle de la convolution est de régulariser en effectuant une moyenne.

Propriétés : Lorsque ces fonctions existent, on a :

$$f * g = g * f;$$

$$(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g;$$

$$(\lambda f) * g = \lambda f * g, \text{ ou } \lambda \text{ est un nombre complexe.}$$

3.3.1 Convolution et théorie du signal.

En théorie du signal, l'importance du produit de convolution résulte surtout du fait qu'il sert à modéliser des filtres (voir chapitre 1). Un filtre analogique est caractérisé par une fonction $h(t)$ appelée *réponse impulsionnelle*, et la réponse $v(t)$ à une entrée $u(t)$ est $v = h * u$. Pour connaître la nature des signaux qu'on peut admettre à l'entrée du filtre, il faut des critères d'existence du produit de convolution.

Théorème 3.3.1 Si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g$ existe p.p. et appartient à $L^1(\mathbb{R})$. On a

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \quad (3.3)$$

L'inégalité (3.3) dit que pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, l'opérateur linéaire $g \rightarrow f * g$ de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$ est continu. Pour $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, on a $(f * g) * h = f * (g * h)$ que l'on note $f * g * h$. Cette propriété permet de chaîner plusieurs filtres, la sortie d'un filtre servant d'entrée à un autre filtre :

$$u \rightarrow h_1 * u = v_1 \rightarrow h_2 * v_1 = v_2 \rightarrow \dots \rightarrow h_n * v_{n-1} = v_n.$$

Il en résulte un filtre dont la réponse impulsionnelle est $h = h_1 * h_2 * \dots * h_n$.

Le Théorème 3.3.1 est encore vrai dans le cas de signaux causaux, c'est à dire pour des signaux et réponses impulsionnelles dans $L^1(\mathbb{R}^+)$:

$$u \in L^1(\mathbb{R}^+), h \in L^1(\mathbb{R}^+) \Rightarrow v = h * u \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

Dans ce cas particulier, on a

$$h * u(x) = \int_0^x h(t)u(x-t) dt.$$

Théorème 3.3.2 Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $f * g$ est partout définie, continue et bornée sur \mathbb{R} et on a

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

On notera deux cas particulièrement important en théorie du signal :

1. $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$
2. $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$

La continuité de l'opérateur correspond à une notion de stabilité du filtre correspondant. Dans le cas 1., il s'agit de la notion la plus simple, la stabilité BIBO (de Bounded Input Bounded Output) : un système est dit BIBO stable lorsque la sortie correspondant à une entrée bornée est bornée. C'est le cas lorsque la réponse impulsionnelle est L^1 . Un tel filtre n'est pas seulement stable, mais il jouit de nombreuses autres propriétés qui résultent du caractère régularisant de la convolution, comme par exemple :

Proposition 3.3.1 Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ et g une fonction de classe C^p . On suppose que $g^{(k)}$ est bornée pour $k = 0, 1, \dots, p$. Alors $f * g$ est de classe C^p et

$$(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}.$$

Une autre notion de stabilité importante est la stabilité dans L^2 : la sortie correspondant à une entrée d'énergie finie (i.e. dans L^2) est d'énergie finie. C'est le cas lorsque la réponse impulsionnelle est dans $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 3.3.3 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$, alors $f * g$ existe p.p. et appartient à $L^2(\mathbb{R})$. On a

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2.$$

Chapitre 4

Signaux périodiques et séries de Fourier

4.1 Introduction

Une fonction $f(t)$ est dite périodique de période T (nombre réel strictement positif) si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t + T) = f(t). \quad (4.1)$$

La *période fondamentale* de $f(t)$ est le plus petit nombre réel positif T qui satisfait (4.1). Les signaux périodiques les plus simples sont les signaux sinusoidaux pur

$$\cos \frac{2\pi}{T}t, \quad \sin \frac{2\pi}{T}t, \quad e^{i \frac{2\pi}{T}t}.$$

Pour tout entier $n > 0$, les signaux sinusoidaux

$$\cos 2\pi n t / T, \quad \sin 2\pi n t / T, \quad e^{2i \pi n t / T}$$

ont aussi pour période T , même si leur période fondamentale est T/n .

Comme il est souvent plus facile de calculer avec des exponentielles, nous allons d'abord considérer la famille de signaux $e^{2i \pi n t / T}$, $n \in \mathbb{Z}$. On appelle *polynôme trigonométrique* de degré inférieur ou égal à N , un polynôme de la forme

$$p(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{2i \pi n t / T}, \quad c_n \in \mathbb{C}. \quad (4.2)$$

On note \mathcal{P}_N l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à N . Le polynôme $p(t)$ prend des valeurs réelles si et seulement si $c_{-n} = \bar{c}_n$.

Nous avons vu que les signaux sinusoidaux purs sont des fonctions propres des systèmes de convolution (section 1.4), ce qui explique leur importance. L'idée d'utiliser des signaux trigonométrique pour décrire des phénomènes périodiques ou vibratoires est apparue assez tôt. Les

Babyloniens les utilisaient pour prédire les mouvements des planètes. Au XVIII^{ème} siècle la question de savoir si une large classe de fonctions périodiques pouvait être décomposée en une somme trigonométrique

$$f(t) = \sum c_n e^{i2\pi nt/T} \quad ? \quad (4.3)$$

était au centre des débats. Si on ne s'autorise que des sommes *finies*, la réponse est clairement non : la somme trigonométrique est indéfiniment différentiable, alors que la fonction $f(t)$ n'a aucune raison de l'être, comme par exemple le créneau périodique. Dans un mémoire daté de 1807, Joseph Fourier affirma que la réponse à la question précédente était oui, pourvu qu'on s'autorise des sommes infinies ... Ces résultats ont longtemps été controversés avant de donner naissance à l'analyse de Fourier.

4.2 Le cadre de l'espace $L^2(0, T)$

Nous considérons ici les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, périodiques de période T telles que

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (4.4)$$

La restriction de la fonction f à l'intervalle $[0, T]$ est donc dans l'espace $L^2(0, T)$. Rappelons qu'une fonction f périodique de période T est entièrement déterminée par sa restriction à $[0, T]$. Rappelons aussi que (4.4) représente l'énergie du signal $f(t)$ tandis que la quantité

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt, \quad (4.5)$$

représente sa *puissance moyenne*. L'espace $L^2(0, T)$ sera muni de la **norme** $\| \cdot \|_2$ définie par (4.5). Cette norme est équivalente à la norme définie en (3.1). Le facteur $1/T$ dans (4.5), qui revient considérer la mesure de Lebesgue divisée par T , est là pour simplifier le formalisme : par exemple, la norme de la fonction constante 1 est 1. L'espace $L^2(0, T)$ est donc un espace vectoriel normé complet. De plus, la norme (4.5) est associée à un produit scalaire

$$(f, g) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\bar{g}(t) dt.$$

Un tel espace s'appelle un espace de Hilbert. Les propriétés de ces espaces vont nous permettre de donner une réponse simple et complète à la question (4.3).

Si l'égalité (4.3) ne peut avoir lieu pour une somme finie, on peut, étant donné un entier N , chercher un polynôme trigonométrique $p \in \mathcal{P}_N$, i.e. de la forme (4.2), qui approche au mieux la fonction $f(t)$, c'est à dire, tel que $\|f - p\|_2$ soit minimum. On utilise la norme $\| \cdot \|_2$ pour "mesurer" la distance entre deux fonctions. \mathcal{P}_N est un sous-espace vectoriel de $L^2(0, T)$, de dimension finie, engendré par les fonctions $e_n(t) = e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$, $n = -N, \dots, N$. On peut alors reformuler le problème de la façon suivante : trouver un élément s_N de \mathcal{P}_N qui soit à distance minimum de f .

Dans un espace de Hilbert, c'est facile, grâce à la propriété dite de la *projection orthogonale*, qui assure que la distance minimum de f à un sous-espace de dimension finie (ici \mathcal{P}_N) est toujours atteinte en un point $s_N \in \mathcal{P}_N$. De plus, s_N est la projection orthogonale de f sur \mathcal{P}_N . En fait, pour un sous-espace de dimension finie, tout se passe comme dans un espace Euclidien.

Il reste à calculer la projection s_N de f sur \mathcal{P}_N , c'est à dire l'unique élément de \mathcal{P}_N tel que $f - s_N \perp \mathcal{P}_N$. Les coefficients $c_n(f)$ du polynôme trigonométrique s_N se calculent en écrivant que $f - s_N$ est orthogonal aux $e_n(t) = e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$, $n = -N, \dots, N$ (puisqu'ils engendrent \mathcal{P}_N) :

$$(f - s_N, e_n) = 0, \quad -N \leq n \leq N.$$

Un calcul simple montre que les $e_n(t)$ sont orthogonaux deux à deux :

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{mi\frac{2\pi}{T}t} e^{-ni\frac{2\pi}{T}t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases} \quad (4.6)$$

et donc

$$(f, e_n) = (s_N, e_n) = \left(\sum_{k=-N}^N c_k(f) e_k, e_n \right) = c_n(f).$$

Définition 4.2.1 Les nombres

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

sont appelés les coefficients de Fourier de f .

Théorème 4.2.1 Soit $f \in L^2(0, T)$. Il existe un polynôme trigonométrique $s_N \in \mathcal{P}_N$ et un seul tel que

$$\|f - s_N\|_2 = \min\{\|f - p\|_2, \quad p \in \mathcal{P}_N\},$$

c'est la projection orthogonale de f sur \mathcal{P}_N

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n(f) e^{i\frac{2\pi}{T}nt}.$$

De plus, s_N tend vers f dans $L^2(0, T)$ quand N tend vers l'infini :

$$\|f - s_N\|_2 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

La convergence des *sommes partielles de Fourier* s_N est une conséquence du fait que les fonctions $e_n(t)$ forment une base Hilbertienne de $L^2(0, T)$. On écrit alors

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{i\frac{2\pi}{T}nt}.$$

Mais attention, il s'agit d'une égalité en norme $L^2(0, T)$. Elle ne signifie pas qu'il y ait égalité ponctuelle, c'est à dire que pour tout t , $f(t)$ soit égal à la somme de la série de Fourier. C'est en fait seulement vrai p.p. (résultat difficile, Carleson, 1966) même pour une fonction continue (voir [4]).

Proposition 4.2.1 (Égalité de Parseval.) Pour toute fonction $f \in L^2(0, T)$

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 \quad (4.7)$$

Remarque. Si $f = g$ p.p., alors $c_n(f) = c_n(g)$. Réciproquement, étant donné une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes, tels que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty,$$

il existe une unique (classe de) fonction $f \in L^2(0, T)$ dont les coefficients soient les c_n . Autrement dit $f \rightarrow \hat{f}$, $\hat{f}(n) = c_n(f)$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert entre $L^2(0, T)$ et ℓ^2 .

4.3 Séries de Fourier en sinus et cosinus.

Nous avons vu qu'une fonction $f(t) \in L^2(0, T)$ s'écrit (égalité en norme $L^2(0, T)$)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2\pi}{T} nt},$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt.$$

On peut réécrire cette série comme une somme de sinus et de cosinus :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T},$$

où

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt, \quad n > 0.$$

Les a_n et les b_n sont aussi appelés coefficients de Fourier, les relations entre les a_n et b_n d'une part et les c_n d'autre part sont les suivantes : pour $n \geq 0$

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_n = (a_n - ib_n)/2 \\ c_{-n} = (a_n + ib_n)/2. \end{cases}$$

Lorsque la fonction f est paire, $b_n = 0, n > 0$, tandis que lorsque f est impaire, $a_n = 0, n \geq 0$. La fonction

$$h_n(t) = a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T},$$

est appelée *harmonique* de rang n . L'harmonique de rang 1, h_1 , s'appelle le *fondamental*. Cette terminologie fait référence au vocabulaire musical (voir [3, leçon 7 : Fréquences, spectres et gammes]).

L'égalité de Parseval nous dit que la répartition de l'énergie ou de la puissance d'un signal (à valeurs réelles) sur ces différents harmoniques est caractérisée par les coefficients de Fourier : la puissance de h_0 est a_0^2 , et celle de $h_n, n > 0$ est

$$\frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2) = 2|c_n|^2$$

On représente cette répartition en portant en abscisse pour chaque harmonique, sa fréquence $\frac{n}{T}$, et en ordonnée $|c_n|$, c'est ce qu'on appelle le *spectre d'amplitude*.

Un signal de $L^2(0, T)$ peut donc être caractérisé soit par son évolution temporelle soit par son spectre : c'est ce qu'on appelle la *dualité temps-fréquence*. Nous verrons qu'à certaines propriétés dans l'espace des temps correspondent des propriétés dans l'espace des fréquences.

4.4 Représentation ponctuelle d'une fonction par sa série de Fourier

En calcul numérique, une fonction est réduite à un certain nombre de valeurs ponctuelles, il est donc important de s'interroger sur la convergence ponctuelle des séries de Fourier. Cependant, l'étude de la convergence ponctuelle ou uniforme des séries de Fourier est beaucoup plus délicate que celle de leur convergence dans $L^2(0, T)$.

Pour un signal dans $L^2(0, T)$, il est aussi important de savoir si $|c_n|$ tend rapidement vers 0 quand n tend vers l'infini : en effet, on ne peut généralement considérer qu'un nombre fini de termes (harmoniques), si ce nombre est fixé, on perd d'autant moins d'énergie que $|c_n|$ tend rapidement vers 0.

Les coefficients de Fourier d'une fonction f périodique existent dès que f est intégrable (f L-intégrable $\Leftrightarrow |f|$ L-intégrable), i.e. $f \in L^1(0, T)$. On considère sur $L^1(0, T)$ la norme

$$\|f\|_1 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt.$$

A toute fonction $f \in L^1(0, T)$ on peut associer une série de Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

dont on ne sait plus si elle converge, selon quel mode et vers quelle limite. Un premier résultat positif :

Proposition 4.4.1 Soit $f \in L^1(0, T)$. Les coefficients de Fourier sont bornés : $\forall n \in \mathbb{Z}, |c_n(f)| \leq \|f\|_1$, et tendent vers 0 quand $|n| \rightarrow \infty$ (lemme de Riemann-Lebesgue)

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n(f) = 0.$$

Le lemme de Riemann-Lebesgue s'établit facilement lorsque $f \in \mathcal{C}^1(0, T)$, à l'aide d'une intégration par parties. On utilise ensuite la densité de $\mathcal{C}^1(0, T)$ dans $L^1(0, T)$.

On définit le produit de convolution de deux fonctions de $L^1(0, T)$ comme suit

$$f * g(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x-t)g(t) dt. \quad (4.8)$$

Proposition 4.4.2 Soit $f, g \in L^1(0, T)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g).$$

Le polynôme trigonométrique $s_N(x)$ se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} s_N(x) &= \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x} = \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt \right) e^{in\frac{2\pi}{T}x} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sum_{n=-N}^N e^{in\frac{2\pi}{T}(x-t)} dt = f * D_N(x) \end{aligned}$$

où

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{in\frac{2\pi}{T}t} = \frac{\sin((2N+1)\pi\frac{t}{T})}{\sin(\pi\frac{t}{T})}. \quad (4.9)$$

On montre que D_N satisfait les propriétés suivantes :

1. $D_N(0) = 2N + 1$
2. $D_N(t)$ est une fonction paire
3. $\frac{1}{T} \int_0^T D_N(t) dt = 1$.

$D_N(t)$ est appelé *noyau de Dirichlet*.

Remarque. Les difficultés pour prouver la convergence ponctuelle de s_N vers f viennent du fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} D_N(t)$ n'existe pas. En effet, on peut écrire

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(x+t) - f(x)] D_N(t) dt,$$

et pour prouver la convergence, on est amené à rendre infiniment petit le second membre, auquel on ne peut pas appliquer les théorèmes de convergence puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} D_N(t)$ n'existe pas ...

On note

$$\begin{aligned} f(x+) &= \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x+h) \\ f(x-) &= \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x-h) \end{aligned}$$

les limites à droite et à gauche de la fonction f en x .

Théorème 4.4.1 (Convergence locale de Dirichlet) Soit $f \in L^1(0, T)$. Si en un point x , les limites à droite et à gauche, $f(x+)$ et $f(x-)$ existent, ainsi que les dérivées à droite et à gauche, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

□ La démonstration ([3]) repose sur l'expression du reste

$$s_N(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} [f(x+t) - f(x+) + f(x-t) - f(x-)] D_N(t) dt.$$

Les hypothèses impliquent que la fonction

$$\phi(t) = \frac{f(x+t) - f(x+) + f(x-t) - f(x-)}{\sin(\pi t/T)},$$

est majorée par une fonction intégrable donc intégrable. La fonction

$$\int_0^{T/2} \phi(t) \sin(\pi(2N+1)t/T) dt,$$

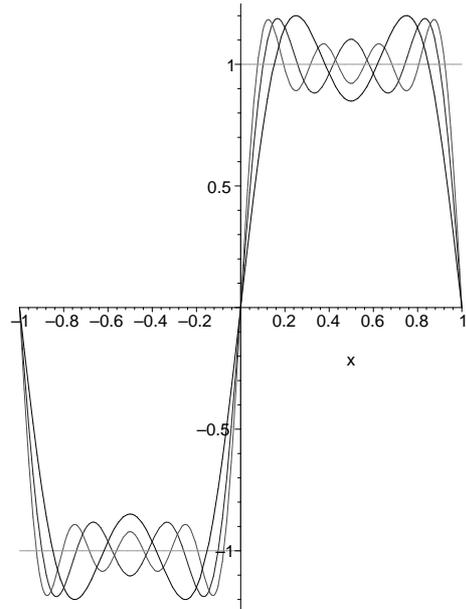
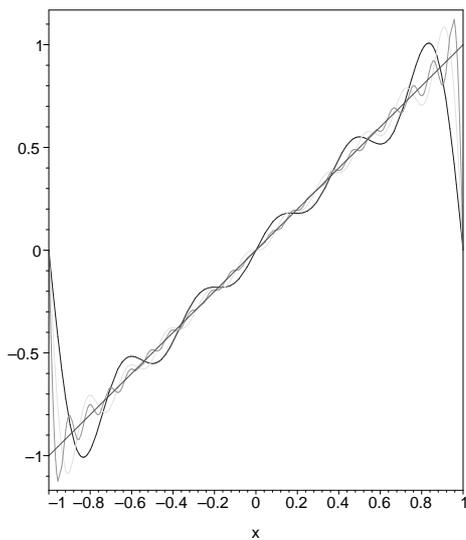
tend vers 0 quand N tend vers l'infini d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. □

Une fonction $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ est *continue par morceaux* si elle est continue sur $[0, T]$, sauf peut-être en un nombre fini de points, en lesquels elle admet une limite finie à droite et à gauche. Une fonction est \mathcal{C}^1 par morceaux si elle est continue par morceaux et admet une dérivée, sauf éventuellement en un nombre fini de points, et si cette dérivée est elle-même continue par morceaux.

Théorème 4.4.2 (Dirichlet) Soit f de période T , \mathcal{C}^1 par morceaux. Alors,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

En particulier, en tout point où f est continue s_N converge vers f .



On peut tracer les approximants de Fourier de quelques fonctions classiques sur les sites internet suivants :

<http://www.jhu.edu/signals/fourier2>

<http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/divers/fourier.html>

Des fonctions pour lesquelles ça ne marche pas :

1. $f(t) = \sin \frac{2\pi}{t}$, $0 < t \leq 1$.
 $f \in L^1(0, 1)$, mais a un nombre infini de minima et de maxima.
2. La fonction de période 8 définie par
 $x(t) = 1$, $0 \leq t < 4$, $x(t) = 1/2$, $4 \leq t < 6$, $x(t) = 1/4$, $6 \leq t < 7$, $x(t) = 1/8$, $7 \leq t < 7,5, \dots$
 qui a un nombre infini de discontinuités.

Théorème 4.4.3 Soit f de période T , continue et C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f' s'obtient en dérivant terme à terme celle de f .

Les coefficients de Fourier vérifient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| < \infty.$$

La série de Fourier de f converge uniformément vers f .

□ Les hypothèses ont été mises pour que l'on puisse intégrer par parties et pour que f' soit dans $L^2(0, T)$.

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t}$$

$$= \frac{1}{-2i\pi n} [f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}]_0^T - \frac{1}{2i\pi n} \int_0^T f'(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt.$$

Comme f est continue, le terme entre crochets est nul et on a

$$c_n(f') = \frac{2i\pi n}{T} c_n(f).$$

On a l'inégalité (en utilisant $2ab \leq a^2 + b^2$)

$$|c_n(f)| \leq \frac{T}{2\pi|n|} |c_n(f')| \leq \frac{T}{4\pi} \left(\frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2 \right).$$

Les séries $\sum_n \frac{1}{n^2}$ et $\sum_n |c_n(f')|^2$ convergent, la deuxième car $f' \in L^2(0, T)$ (égalité de Parseval). Donc la série $\sum_n |c_n(f')|$ converge aussi. \square

En fait, plus la fonction est régulière, plus vite les coefficients de Fourier tendent vers 0. Si $f \in \mathcal{C}^k(0, T)$, $f^{(k)} \in L^2(0, T)$ et

$$c_n(f^{(k)}) = \left(\frac{2i\pi n}{T} \right)^k c_n(f);$$

d'après Parseval, la série $\sum_n n^{2k} |c_n(f)|^2$ converge (ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} |n^k c_n(f)| = 0$).

En résumé, on a :

$$\begin{aligned} f \in L^1(0, T) &\Rightarrow c_n(f) \rightarrow 0 \\ f \in L^2(0, T) &\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 < \infty \\ f \in \mathcal{C}^1(0, T) &\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < \infty \\ f \in \mathcal{C}^k(0, T) &\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{2k} |c_n(f)|^2 < \infty \\ f \in \mathcal{C}^\infty(0, T) &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} |n^k c_n(f)| = 0 \end{aligned}$$

Lorsque

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} |n^k c_n(f)| = 0$$

on dit que la suite des coefficients de Fourier est à décroissance rapide.

4.5 Conclusion.

Avec les séries de Fourier, une nouvelle façon de décrire les fonctions périodiques (représentation fréquentielle) est apparue. Des opérations telles que la dérivation s'écrivent simplement en termes de coefficients de Fourier. La construction d'une fonction périodique solution d'une équation différentielle peut ainsi se ramener à la construction des coefficients de Fourier correspondants. Les séries de Fourier font encore actuellement l'objet de recherches actives pour elles-mêmes, et ont suscité plusieurs branches nouvelles : analyse harmonique, théorie du signal, ondelettes, etc. Elles se rencontrent usuellement dans l'étude des courants électriques, des ondes cérébrales, dans la synthèse sonore, le traitement d'images, etc.

Chapitre 5

Transformée de Fourier.

Un signal *périodique* (de période T) se décompose en *séries de Fourier*. Ainsi, il apparait comme une somme d'harmoniques de fréquences $\nu_n = n/T, n = 0, 1, 2, \dots$. Ces fréquences ν_n sont des valeurs isolées dans \mathbb{R} . Les fréquences présentes dans un signal non périodique ne sont pas isolées. Elles prennent toutes les valeurs d'un intervalle. La décomposition fréquentielle d'un tel signal est possible grâce à la transformation de Fourier. La décomposition et la reconstitution se calculent par des intégrales.

5.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$.

Définition 5.1.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de f est définie sur \mathbb{R} par

$$\mathcal{F}f(\nu) = \hat{f}(\nu) = \int e^{-2i\pi\nu t} f(t) dt \quad (5.1)$$

On définit aussi la transformée de Fourier conjuguée

$$\bar{\mathcal{F}}f(\nu) = \int e^{2i\pi\nu t} f(t) dt \quad (5.2)$$

Comme $|e^{\pm 2i\pi\nu t}| = 1$, ces deux intégrales sont bien définies. Nous verrons que $\bar{\mathcal{F}}$ est en général la transformée inverse de \mathcal{F} . Pour $f = \chi_{[a,b]}$, on montre que

$$\hat{f}(\nu) = \begin{cases} b - a & \text{si } \nu = 0 \\ \frac{\sin \pi(b-a)\nu}{\pi\nu} e^{-i\pi(a+b)\nu} & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : \hat{f} n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ puisque $\frac{\sin \pi(b-a)\nu}{\pi\nu}$ n'est pas intégrable.

Théorème 5.1.1 (Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors

(i) \hat{f} est une fonction continue et bornée sur \mathbb{R} .

(ii) $\mathcal{F} : f \rightarrow \hat{f}$ est un opérateur linéaire et continu de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

(iii) $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \hat{f}(\nu) = 0$.

□ Pour tout t , la fonction $\nu \rightarrow e^{-2i\pi\nu t} f(t)$ est continue sur \mathbb{R} et $|e^{-2i\pi\nu t} f(t)| \leq |f(t)|$ qui est intégrable. Le théorème de continuité sous le signe \int assure la continuité de \hat{f} .

D'après l'inégalité de la valeur absolue,

$$|\hat{f}(\nu)| \leq \int |f(t)| dt = \|f\|_1,$$

ce qui prouve (ii).

Pour $f = \chi_{[a,b]}$, $|\hat{f}(\nu)| \leq \frac{1}{\pi|\nu|}$ pour $\nu \neq 0$ et donc (iii) est vérifié. On le montre pour toute fonction de $L^1(\mathbb{R})$ en utilisant la densité des fonctions simples dans $L^1(\mathbb{R})$. □

Propriétés :

1. linéarité

2. changement d'échelle de temps

$g(t) = f(at)$, $a \in \mathbb{R}^* \rightarrow \hat{g}(\nu) = \frac{1}{|a|} \hat{f}(\nu/a)$ Si on étale les valeurs de f son spectre se concentre, si on concentre les valeurs de f son spectre s'étale.

3. théorème du retard

$g(t) = f(t - t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \hat{g}(\nu) = e^{-2i\pi\nu t_0} \hat{f}(\nu)$

4. $g(t) = e^{-2i\pi\nu_0 t} f(t)$, $\nu_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \hat{g}(\nu) = \hat{f}(\nu - \nu_0)$

Proposition 5.1.1 (Formule d'échange) Soit f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. Alors $f\hat{g}$ et $\hat{f}g$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et

$$\int f(x)\hat{g}(x) dx = \int \hat{f}(x)g(x) dx.$$

□ Comme \hat{g} est bornée (théorème de Riemann-Lebesgue), et $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. De même pour $\hat{f}g$. L'égalité résulte du théorème de Fubini car l'application

$$(x, y) \rightarrow e^{-2i\pi xy} f(x)g(y)$$

est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. □

Proposition 5.1.2 (Transformée de Fourier et dérivation)

1. dérivation temporelle : si $f \in C^n$ et pour $k = 0, 1, \dots, n$, $f^{(k)}(t) \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\nu) = (2i\pi\nu)^k \hat{f}(\nu), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

2. dérivation fréquentielle : si pour $k = 0, 1, \dots, n$, $t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^n$ et

$$\hat{f}^{(k)} = \mathcal{F}((-2i\pi t)^k f(t)).$$

□

1. On le montre pour $n = 1$, puis par récurrence. Comme $f' \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}(f')(v) = \int e^{-2i\pi vt} f'(t) dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-2i\pi vt} f'(t) dt.$$

On fait alors une intégration par parties

$$\int_{-a}^a e^{-2i\pi vt} f'(t) dt = \left[e^{-2i\pi vt} f(t) \right]_{-a}^a + \int_{-a}^a (2i\pi v) e^{-2i\pi vt} f(t) dt.$$

Lorsque $a \rightarrow \infty$, le terme entre crochet tend vers 0 : comme $f \in \mathcal{C}^1$,

$$f(a) = f(0) + \int_0^a f'(t) dt,$$

et comme $f' \in L^1(\mathbb{R})$, $\int_0^a f'(t) dt$, et par conséquent $f(a)$, ont une limite lorsque $a \rightarrow \infty$. Cette limite est nulle car f est intégrable. On a donc $\mathcal{F}(f')(v) = (2i\pi v)\mathcal{F}(f)(v)$.

2. On applique le théorème de dérivation sous le signe \int .

□

Remarques. On retiendra que plus $f(t)$ est dérivable, avec des dérivées intégrables, plus \hat{f} décroît rapidement à l'infini. En effet d'après Riemann-Lebesgue, sous les hypothèses du 1. de la proposition, $|2\pi v|^n |\hat{f}(v)| \rightarrow 0$ quand v tend vers l'infini, et donc $\hat{f}(v)$ se comporte à l'infini comme un infiniment petit de l'ordre de $1/|v|^n$ au moins. En particulier, une fonction indéfiniment dérivable a une transformée de Fourier qui décroît plus rapidement que toute puissance de $1/|v|$ quand $v \rightarrow \infty$.

C'est notamment parce que la transformation de Fourier transforme l'opération de dérivation (par rapport à t) en une multiplication (par $2i\pi v$) qu'elle est importante. Par transformation de Fourier, une équation différentielle devient une équation algébrique :

$$f'' + f = g \xrightarrow{\mathcal{F}} (-4\pi v^2 + 1)\hat{f} = \hat{g}.$$

Proposition 5.1.3 (Transformée de Fourier et convolution) Si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \mathcal{F}g \tag{5.3}$$

Si de plus \hat{f} et \hat{g} sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$$

□ On a vu que lorsque f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. On peut donc calculer sa transformée de Fourier. La formule (5.3) découle du théorème de Fubini qui s'applique puisque la fonction $(x, t) \rightarrow e^{-2i\pi vt} f(x)g(t-x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. □

Théorème 5.1.2 Si f et \hat{f} sont dans $L^1(\mathbb{R})$,

$$f(t) = \mathcal{F}(\hat{f})(t) = \int e^{2i\pi vt} \hat{f}(v) dv, \quad (5.4)$$

en tout point où f est continue.

Pour la démonstration voir [3, th.18.1.1]. La formule (5.4) s'appelle *représentation spectrale* de f . Ainsi, f est déterminée soit dans l'espace des temps par $f(t)$ soit dans celui des fréquences par $\hat{f}(v)$. Notons que pour connaître $f(t)$ pour une valeur fixée de t , il faut connaître \hat{f} sur \mathbb{R} tout entier, et pour connaître \hat{f} pour une fréquence fixée v , il faut connaître f sur tout l'axe des temps.

5.2 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Rappelons qu'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement intégrable, comme par exemple $\sin t/t$. On ne sait donc pas définir la transformée de Fourier par l'intégrale

$$\mathcal{F}f(v) = \int f(t)e^{-2i\pi vt} dt.$$

L'idée est d'utiliser un sous-espace dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et stable par \mathcal{F} en vue d'obtenir une formule d'inversion.

5.2.1 L'espace \mathcal{S} des fonctions à décroissance rapide.

Définition 5.2.1 On dit qu'une fonction f indéfiniment dérivable est à décroissance rapide si pour tout entiers positifs p et q

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |t^p f^{(q)}(t)| = 0.$$

On note \mathcal{S} l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivable à décroissance rapide.

La décroissance de f est qualifiée de rapide par comparaison avec celle des fonctions $1/t^p$ puisque la limite du quotient de $f(t)$ par $1/t^p$ est 0. De plus toutes les dérivées de f décroissent plus rapidement que ces fonctions.

Un représentant caractéristique de l'espace \mathcal{S} est la Gaussienne

$$g(t) = \beta e^{-\alpha(t-t_0)^2}.$$

La transformée de Fourier de la fonction $g(t) = e^{-\pi t^2}$ est $\hat{g}(\nu) = e^{-\pi \nu^2}$. Cette fonction est donc invariante par transformation de Fourier.

On vérifie très facilement que si $f \in \mathcal{S}$, pour tout p , il existe M_p tel que

$$|f(t)| \leq \frac{M_p}{1 + |t|^p},$$

ce qui implique que f est bornée, elle est dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 5.2.1 *La transformée de Fourier \mathcal{F} est une application linéaire bijective de \mathcal{S} dans \mathcal{S} . L'application inverse est $\mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}}$.*

□ On a vu que $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R})$. D'après la propriété de dérivation fréquentielle, comme $t^p f(t)$ est intégrable pour tout entier p , la fonction \hat{f} est indéfiniment différentiable, et

$$\hat{f}^{(p)} = \mathcal{F}((-2i\pi t)^p f(t)).$$

On veut maintenant montrer que $\nu^q \hat{f}^{(p)}(\nu)$ tend vers 0 lorsque $|\nu| \rightarrow \infty$. On a

$$(2i\pi\nu)^q \hat{f}^{(p)}(\nu) = (2i\pi\nu)^q \mathcal{F}((-2i\pi t)^p f(t))(\nu) = \mathcal{F}(g^{(q)}(t))(\nu)$$

d'après la propriété de dérivation temporelle appliquée à la fonction $g(t) = (-2i\pi t)^p f(t)$. D'après le théorème de Riemann-Lebesgue, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{F}(g^{(q)}(t))(\nu) = 0$ et donc $\hat{f} \in \mathcal{S}$. La formule d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$ s'applique en tout point puisque f est continue. Les relations

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu) &= \int f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \\ f(t) &= \int \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu \end{aligned}$$

sont donc équivalentes pour un élément de \mathcal{S} . □

L'ensemble \mathcal{S} est stable pour de nombreuses opérations : si f, g sont dans \mathcal{S} , P est un polynôme et k un entier, alors $f^{(k)}$, fP , fg et $f * g$ sont dans \mathcal{S} .

Nous avons vu que l'ensemble \mathcal{S} est contenu dans $L^2(\mathbb{R})$. De plus, on a

Proposition 5.2.1 *Soit f et g dans \mathcal{S} ,*

$$\int \hat{f}(\nu) \bar{\hat{g}}(\nu) = \int f(t) \bar{g}(t) dt.$$

Pour $f = g$, on obtient l'égalité de Parseval

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

□ C'est la formule d'échange appliquée à f et $h = \hat{g}$. Comme $\hat{g} = \mathcal{F}\bar{g}$, d'après la formule d'inversion, $\hat{h} = \bar{g}$. □

5.2.2 Extension de la transformée de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$.

Nous allons étendre \mathcal{F} à $L^2(\mathbb{R})$ en utilisant la densité de \mathcal{S} dans $L^2(\mathbb{R})$, que nous admettrons. Soit donc f_n une suite de fonctions de \mathcal{S} qui converge vers f dans $L^2(T)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0.$$

La suite f_n étant convergente, elle est de Cauchy. Or, d'après l'égalité de Parseval dans \mathcal{S} ,

$$\|f_n - f_m\|_2 = \|\mathcal{F}(f_n - f_m)\|_2 = \|\mathcal{F}(f_n) - \mathcal{F}(f_m)\|_2,$$

ce qui montre que la suite $\mathcal{F}(f_n)$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$. Elle admet donc une limite, puisque $L^2(\mathbb{R})$ est complet. Par définition cette limite est $\mathcal{F}(f)$. On étend de la même façon $\bar{\mathcal{F}}$.

Théorème 5.2.2 Soit f et g dans $L^2(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier \mathcal{F} possède les propriétés suivantes :

1. formule d'échange

$$\int f(t)\hat{g}(t) dt = \int \hat{f}(t)g(t) dt.$$

2. formule d'inversion

$$f = \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\bar{\mathcal{F}}(f)).$$

3. isomorphisme d'espaces de Hilbert

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

4. identité de Plancherel-Parseval

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

5. si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(v) = \int f(t)e^{-2i\pi vt} dt.$$

5.3 Application aux filtres analogiques

La transformée de Fourier et la consolution vont être utilisés ici pour étudier les filtres analogiques gouvernés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$\sum_{k=0}^q b_k g^{(k)} = \sum_{j=0}^p a_j f^{(j)}, \quad a_p \neq 0, \quad b_q \neq 0. \quad (5.5)$$

f est l'entrée et g la sortie du filtre. Celle-ci demande encore à être précisée parmi toutes les solutions de (5.5).

5.3.1 Cas où l'entrée et la sortie sont dans \mathcal{S}

Ce cas est très particulier mais c'est une étape vers des cas plus généraux. On suppose que $f \in \mathcal{S}$ et on cherche une solution $g \in \mathcal{S}$. Si une telle fonction existe, on a par transformée de Fourier :

$$\sum_{k=0}^q b_k (2i\pi\nu)^k \hat{g}(\nu) = \sum_{j=0}^p a_j (2i\pi\nu)^j \hat{f}(\nu).$$

Considérons les deux polynômes

$$P(x) = \sum_{j=0}^p a_j x^j, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^q b_k x^k,$$

et supposons que la fraction rationnelle $P(x)/Q(x)$ n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire. Pour tout $\nu \in \mathbb{R}$, $Q(2i\pi\nu) \neq 0$ et on a

$$\hat{g}(\nu) = H(\nu)\hat{f}(\nu), \quad H(\nu) = \frac{P(2i\pi\nu)}{Q(2i\pi\nu)}.$$

Dans ce cas, comme par hypothèse $f \in \mathcal{S}$, \hat{f} et $H\hat{f}$ sont aussi dans \mathcal{S} . $\mathcal{F}^{-1}(H\hat{f})$ est bien une solution de (5.5) dans \mathcal{S} .

Remarque. L'équation (5.5) a une solution unique sans pour autant comporter de conditions initiales. C'est le fait d'imposer à g d'être dans \mathcal{S} , et donc nulle à l'infini ainsi que toutes ses dérivées, qui en tient lieu.

5.3.2 Cas où $P(x)/Q(x)$ n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire et $\deg P < \deg Q$

Dans ce cas, on peut exprimer la sortie sous forme d'un produit de convolution. En effet, on montre alors que $H(\nu)$ est dans $L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. H admet donc une transformée de Fourier inverse et la relation $\hat{g}(\nu) = H(\nu)\hat{f}(\nu)$ entraîne $g = h * f$ (voir (5.3)). La réponse du filtre est la convolution de l'entrée avec une fonction fixe h qu'on appelle *réponse impulsionnelle*. Pour calculer h , on décompose H en éléments simples. Si les pôles de H sont simples, z_1, z_2, \dots, z_q , on a

$$H(\nu) = \sum_{k=0}^q \frac{\beta_k}{2i\pi\nu - z_k}.$$

Pour $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > 0$ on obtient les transformées de Fourier suivantes (la seconde découle de la première par changement d'échelle de temps) :

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a + 2i\pi\nu} \quad (5.6)$$

$$e^{at}u(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a - 2i\pi\nu}. \quad (5.7)$$

Par transformation inverse, on a donc :

$$h(t) = \left(\sum_{k, \operatorname{Re} z_k < 0} \beta_k e^{z_k t} \right) u(t) - \left(\sum_{k, \operatorname{Re} z_k > 0} \beta_k e^{z_k t} \right) u(-t).$$

Plus généralement, pour des pôles multiples, on obtient une réponse impulsionnelle de la forme

$$h(t) = \left(\sum_{k, \operatorname{Re} z_k < 0} P_k(t) e^{z_k t} \right) u(t) - \left(\sum_{k, \operatorname{Re} z_k > 0} P_k(t) e^{z_k t} \right) u(-t), \quad (5.8)$$

où les $P_k(t)$ sont des polynômes. On voit que la réponse impulsionnelle est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

La formule $g = h * f$, obtenue lorsque f est dans \mathcal{S} , conserve un sens dans des cas beaucoup plus généraux (cf. section 3.3.1) et définit encore un filtre dont on peut étudier les propriétés :

Stabilité : un système analogique Σ est stable s'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall f \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad \|\Sigma f\|_\infty \leq M \|f\|_\infty.$$

C'est le cas puisque la réponse impulsionnelle h est dans $L^1(\mathbb{R})$ (cf. section 3.3.1).

Causalité : un système est dit causal, si deux signaux d'entrée identiques pour $t < t_0$ donnent des sorties identiques pour $t < t_0$. On montre qu'un système de convolution $f \rightarrow h * f$ est causal si et seulement si $\operatorname{Supp}(h) \subset [0, \infty[$. D'après la formule (5.8), le filtre est causal si et seulement si le facteur en $u(-t)$ n'est pas présent et donc si tous les pôles de $H(v)$ sont à partie réelle négative.

Remarque. Les cas où $\deg P \geq \deg Q$ et où Q a des zéros sur l'axe imaginaire nécessitent l'introduction de fonctions "généralisées" appelées distributions.

5.4 Transformée de Fourier discrète

En pratique, pour calculer la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$, on ne dispose que d'un nombre fini de ses valeurs. On les suppose régulièrement espacées. On peut faire un changement de variable pour que ces valeurs soient $0, 1, \dots, k, \dots, N-1$. On devra alors calculer

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi v k}, \quad y_k = f(k).$$

Lorsque k est fixé, $e^{-2i\pi v k}$ est une fonction de v de période 1. Donc la somme précédente est de période 1 et pour la connaître, on peut se borner pour v au segment $[0, 1]$. Enfin, on ne pourra calculer $\mathcal{F}(f)$ qu'en un nombre fini de valeurs de v . On convient de prendre la suite $0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{n}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$. On calculera donc

$$Y_n = \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi k \frac{n}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Définition 5.4.1 Soit y_0, y_1, \dots, y_{N-1} une suite de N nombres, on appelle transformée de Fourier discrète de cette suite la suite Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1} de N nombres définie par

$$Y_n = \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi k \frac{n}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} y_k w_N^{kn}, \quad w_N = e^{-\frac{2i\pi}{N}}. \quad (5.9)$$

Il est facile de retrouver la suite $(y_k)_{k=0, \dots, N-1}$ lorsqu'on connaît la suite $(Y_n)_{n=0, \dots, N-1}$.

Théorème 5.4.1 On a la formule d'inversion suivante :

$$Y_n = \sum_{k=0}^{N-1} y_k w_N^{kn} \Leftrightarrow y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k w_N^{-kn}$$

On peut écrire (5.9) comme le produit matriciel :

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \\ \vdots \\ Y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N & \dots & w_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^n & \dots & w_N^{n(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{N-1} & \dots & w_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$$

Le calcul des valeurs Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1} par la formule (5.9) nécessite

$(N-1)^2$ multiplications complexes

$N(N-1)$ additions complexes,

si on suppose préalablement stockées les valeurs w_N^j .

Une valeur courante de N est de l'ordre de 1000 ce qui fait un million d'opérations de chaque sorte. Vu la fréquence de ce calcul, on a cherché à en diminuer le coût. Deux chercheurs américains, J.W. Cooley et J.W. Tuckey mettent au point en 1965 un algorithme beaucoup plus économique, qu'on désigne sous le nom de "transformée de Fourier rapide" (T.F.R.) ou "fast Fourier transform" (F.F.T.) en anglais. Cet algorithme tient compte de la forme particulière de la matrice de transformation construite à partir des racines de l'unité.

Supposons que N soit pair, $N = 2m$, et regroupons dans (5.9) les termes d'indices pair et impair respectivement :

$$Y_n = P_n + w_N^n I_n,$$

avec

$$\begin{cases} P_n &= y_0 + y_2 w_N^{2n} + \dots + y_{N-2} w_N^{(N-2)n} \\ Y_n &= y_1 + y_3 w_N^{2n} + \dots + y_{N-1} w_N^{(N-2)n} \end{cases}$$

On remarque qu'on a les relations

$$P_{n+m} = P_n; \quad I_{n+m} = I_n,$$

et

$$w_N^{n+m} = -w_N^n.$$

D'où l'idée d'organiser les calculs de la façon suivante : pour $n = 0, 1, \dots, m-1$,

Phase 1 : on calcule P_n et $w_N^n I_n$

Phase 2 : on forme $Y_n = P_n + w_N^n I_n$

Phase 3 : on en déduit $Y_{n+m} = P_n - w_N^n I_n$

La phase 1 nécessite $2(m-1)^2 + m - 1$ multiplications et les phases 2 et 3 ne nécessitent aucune multiplication. On a donc divisé environ par 2 le nombre de multiplications à effectuer pour obtenir le même résultat.

On peut alors remarquer que P_n et I_n sont à leur tour deux transformées de Fourier discrètes d'ordre moitié $m = N/2$, indépendantes l'une de l'autre

$$\begin{aligned} (y_0, y_2, \dots, y_{2m-2}) &\rightarrow (P_0, P_1, \dots, P_{m-1}) \\ (y_1, y_3, \dots, y_{2m-1}) &\rightarrow (I_0, I_1, \dots, I_{m-1}). \end{aligned}$$

On peut alors réitérer la décomposition précédente et diminuer encore le coût de l'algorithme, à condition que m soit pair. La bonne situation est celle où N est une puissance paire de 2, $N = 2^p$. On peut alors poursuivre ces dichotomies jusqu'à obtenir des transformées de Fourier discrètes d'ordre 2. Dans ce cas, le coût de l'algorithme est évalué à $N/2(\log_2 N - 2) + 1$ multiplications et $N \log_2 N$ additions (voir [3]).

Transformées de Fourier usuelles :

Fonction $f(t)$	Transformée de Fourier $F(\nu)$
$\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$	$\frac{\sin((b-a)\pi\nu)}{\pi\nu} e^{-i(a+b)\pi\nu}$
$\Pi(t) = \frac{1}{T} \chi_{[-T/2, T/2]}$	$\frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}$
$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ -t+1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$	$\left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2$
$e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{a+2i\pi\nu}$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}$
$e^{-at^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$

Propriétés :

Fonction $f(t)$	transformée de Fourier $F(\nu)$
$f(t)$	$\hat{f}(\nu)$
$f(t - t_0)$	$e^{-2i\pi\nu t_0} \hat{f}(\nu)$
$e^{-2i\pi\nu_0 t} f(t)$	$\hat{f}(\nu - \nu_0)$
$f(at), a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{ a } \hat{f}(\nu/a)$
$f^{(k)}(t)$	$(2i\pi\nu)^k \hat{f}(\nu)$
$(-2i\pi t)^k f(t)$	$\hat{f}^{(k)}(\nu)$
$f * g$	$\hat{f} \hat{g}$
fg	$\hat{f} * \hat{g}$

$u(t)$ échelon unité vaut 1 pour $t \geq 0$ et 0 pour $t < 0$.

Chapitre 6

Transformée de Laplace.

Nous avons vu au chapitre précédent que de beaucoup de signaux peuvent se représenter grâce à la transformée de Fourier comme une combinaison linéaire de signaux monochromatiques $t \rightarrow e^{i\omega t}$. Cette représentation est particulièrement intéressante car les signaux monochromatiques sont des fonctions propres des systèmes de convolution. Or, plus généralement, les signaux exponentiels complexes $t \rightarrow e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$, sont des fonctions propres de ces systèmes (voir chapitre 1). D'où l'idée d'introduire une transformation qui généralise la transformée de Fourier. C'est la transformée de Laplace. La transformée de Laplace est très utilisée dans l'étude des systèmes causaux et sera définie pour des fonctions causales, c'est à dire nulle pour $t < 0$.

6.1 Transformée de Laplace des fonctions causales

On appelle \mathcal{E} l'ensemble des fonctions $f(t)$ à valeurs réelles ou complexes, nulles pour $t < 0$, définies pour presque tout $t > 0$ et localement intégrables (intégrables sur tout intervalle fermé et borné de \mathbb{R}). Une fonction f de \mathcal{E} n'est pas nécessairement intégrable, i.e. dans $f \in L^1(0, \infty)$.

Définition 6.1.1 Soit $f(t)$ une fonction de \mathcal{E} . La transformée de Laplace de f au point $s \in \mathbb{C}$ est définie, lorsque cette intégrale existe, par

$$F(s) = \mathcal{L}f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Proposition 6.1.1 1) Soit $s = x + iy$, alors $\mathcal{L}f(s)$ existe si et seulement si $\mathcal{L}f(x)$ existe.
2) Si $\mathcal{L}f(x_0)$ existe, alors $\mathcal{L}f(s)$ existe pour tout s tel que $\operatorname{Re}(s) \geq x_0$.

□ En effet, $|f(t)e^{-st}| = |f(t)|e^{-xt}$ ce qui prouve 1). De plus, $|f(t)|e^{-xt} \leq |f(t)|e^{-x_0t}$ et la proposition 2.4.1 implique 2). □

L'ensemble des s pour lesquels $\mathcal{L}f(s)$ existe est appelé *domaine de sommabilité*. Il est donc soit vide, comme par exemple pour la fonction $f(t) = e^{t^2} \chi_{[0, \infty[}(t)$, soit un demi-plan complexe. Lorsqu'il n'est pas vide, on appelle *abscisse de sommabilité* de f le plus petit nombre réel a tel que $\mathcal{L}f(s)$ existe pour $\operatorname{Re} s > a$ et n'existe pas pour $\operatorname{Re} s < a$. Il se peut que $\mathcal{L}f(a)$ existe mais il est également possible que $\mathcal{L}f(a)$ n'existe pas.

Proposition 6.1.2 Si $f \in \mathcal{E}$ est à croissance exponentielle : pour t suffisamment grand ($t > T$),

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t}, \quad M > 0, \sigma \in \mathbb{R},$$

alors l'abscisse de sommabilité de $\mathcal{L}f$ est inférieure ou égale à σ .

□ Comme f est à croissance exponentielle :

$$\int_T^\infty |f(t)e^{-st}| dt \leq M \int_T^\infty e^{-(x-\sigma)t} dt,$$

qui converge pour $x > \sigma$. Par ailleurs, $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$ puisque f est localement intégrable et si $A = \sup_{t \in [0, T]} e^{-xt}$, alors

$$\int_0^T |e^{-xt} f(t)| dt < A \int_0^T |f(t)| dt < \infty.$$

Donc, $\mathcal{L}f(s)$ existe pour tout s tel que $\operatorname{Re}(s) > \sigma$. □

En particulier :

- si f est bornée, alors $\mathcal{L}f(s)$ existe pour tout s tel que $\operatorname{Re}(s) > 0$,
- si f est à support compact, f est à croissance exponentielle pour tout σ , et $\mathcal{L}f(s)$ existe pour tout $s \in \mathbb{C}$.

Remarque :

1) Si $f \in L^1(0, +\infty)$, alors $\mathcal{L}f(s)$ existe pour tout s tel que $\operatorname{Re}(s) \geq 0$. En particulier, $\mathcal{L}f$ est définie sur l'axe imaginaire et

$$\mathcal{L}f(iy) = \mathcal{F}f\left(\frac{y}{2\pi}\right),$$

où \mathcal{F} désigne la transformée de Fourier de f (5.1).

2) Si f n'est pas causale, sa transformée de Laplace est $\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-st} dt$. Le domaine de sommabilité est soit vide, soit une bande, soit un demi-plan (droit ou gauche) du plan complexe. Pour un système linéaire stationnaire causal, sa réponse impulsionnelle h est

une fonction causale et le domaine de sommabilité de sa transformée de Laplace est un demi-plan droit. La réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple suivant :

$$h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1) \quad \mathcal{L}h = \frac{e^s}{s+1}, \quad \operatorname{Re} s > -1,$$

où h n'est pas causale, mais le domaine de sommabilité de $\mathcal{L}h$ est un demi-plan droit. Lorsque $\mathcal{L}h$ est rationnelle, h est causale si et seulement si son domaine de sommabilité est le demi-plan droit délimité par son pôle le plus à droite. **R Exemples :**

Echelon unité

$$u(t) = \chi_{[0, \infty)}, \quad \mathcal{L}u(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

Impulsion unité.

$$\pi_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{si } x \in [0, \epsilon[\\ 0 & \text{si } x \notin [0, \epsilon[\end{cases}, \quad \mathcal{L}\pi_\epsilon(s) = \frac{1 - e^{-s\epsilon}}{s\epsilon}$$

Fonction rampe

$$f(t) = tu(t), \quad \mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

Fonctions exponentielles

$$f(t) = e^{-at}u(t), \quad a \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re}(s+a) > 0$$

Fonctions trigonométriques

$$\begin{cases} f(t) = \cos(\omega t)u(t) \\ g(t) = \sin(\omega t)u(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathcal{L}f(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}g(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{cases}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

6.2 Premières propriétés

Linéarité : si f et g ont une transformée de Laplace et λ et m sont deux nombres complexes, alors $\lambda f + mg$ a aussi une transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(\lambda f + mg) = \lambda \mathcal{L}f + m \mathcal{L}g.$$

Si a est l'abscisse de sommabilité de $\mathcal{L}f$ et b celle de $\mathcal{L}g$, alors l'abscisse de sommabilité de $\mathcal{L}(\lambda f + mg)$ est inférieure ou égale à $\sup(a, b)$.

Soit $f \in \mathcal{E}$ dont la transformée de Laplace existe pour $\operatorname{Re} s > a$:

Théorème du retard : soit $t_0 > 0$. La fonction retardée $g(t) = f(t - t_0)$ a une transformée de Laplace donnée par

$$\mathcal{L}g(s) = e^{-st_0} \mathcal{L}f(s), \quad \operatorname{Re} s > a.$$

Décalage dans le plan de Laplace : si $g(t) = e^{-s_0 t} f(t)$, $s_0 \in \mathbb{C}$ alors

$$\mathcal{L}g(s) = \mathcal{L}f(s + s_0), \quad \operatorname{Re}(s + s_0) > a.$$

Changement d'échelle : si $g(t) = f(mt)$, $m > 0$ alors

$$\mathcal{L}g(s) = \frac{1}{m} \mathcal{L}f(s/m), \quad \operatorname{Re}(s/m) > a.$$

6.3 Comportement de $\mathcal{L}f$

Théorème 6.3.1 Soit $f \in \mathcal{E}$ dont la transformée de Laplace a pour abscisse de sommabilité a .

1. Pour tout entier m , l'abscisse de sommabilité de $\mathcal{L}(t^m f(t))$ est a ,
2. soit x réel, $x > a$ alors $\mathcal{L}f$ est indéfiniment dérivable au point x , et

$$[\mathcal{L}f]^{(m)}(x) = \int_0^\infty e^{-xt} (-t)^m f(t) dt,$$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{L}f(x) = 0$

□

1. Soit $x > x_1 > a$, alors

$$e^{-xt} t^m |f(t)| = e^{-(x-x_1)t} e^{-x_1 t} t^m |f(t)|.$$

Or, il existe $T > 0$, tel que pour $t > T$, $t^m e^{-(x-x_1)t} < 1$, et donc

$$\int_T^\infty e^{-xt} t^m |f(t)| dt < \int_T^\infty e^{-x_1 t} |f(t)| dt < \infty,$$

puisque $\mathcal{L}f$ a pour abscisse de sommabilité a . Comme $f \in \mathcal{E}$, $e^{-xt} t^m f(t)$ est intégrable sur $[0, T]$ et $\mathcal{L}(t^m f(t))$ existe pour $\operatorname{Re} s > a$.

Par contre, si $\operatorname{Re} s = x < a$, alors

$$\infty = \int_1^\infty e^{-xt} |f(t)| dt < \int_1^\infty e^{-xt} t^m |f(t)| dt$$

et $\mathcal{L}(t^m f(t))$ n'existe pas.

2. Soit $x > x_1 > a$, $f(x, t) = e^{-xt}|f(t)|$ et $g(t) = e^{-x_1 t}|f(t)|$. La fonction $x \rightarrow f(x, t)$ est différentiable, sa différentielle est la fonction $x \rightarrow -te^{-xt}f(t)$. La fonction $g(t)$ est intégrable, et pour $t > 0$, $|f(x, t)| < g(t)$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe \int :

$$[\mathcal{L}f]'(x) = \int_0^{\infty} (-t)e^{-xt}f(t) dt.$$

Par récurrence, on obtient le résultat pour $m > 1$.

3. D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\mathcal{L}f(x)| \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-xt}|f(t)| dt = \int_0^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-xt}|f(t)| dt = 0.$$

□

Remarque : En fait, $\mathcal{L}f$ est dérivable au sens des fonctions de la variable complexe, dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > a$ ($\mathcal{L}f$ est holomorphe [8]). C'est une propriété très forte. Cela entraîne que si $\mathcal{L}f_1(x) = \mathcal{L}f_2(x)$ pour tout x dans un intervalle de \mathbb{R} alors elles coïncident sur tout le demi-plan.

Théorème 6.3.2 (de la valeur initiale) Soit $f \in \mathcal{E}$, admettant une transformée de Laplace et telle que $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+)$, alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x\mathcal{L}f(x) = f(0^+).$$

Théorème 6.3.3 (de la valeur finale) Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = l < \infty$, alors $\mathcal{L}f(s)$ existe pour $\operatorname{Re} s > 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x\mathcal{L}f(x) = l.$$

6.4 Transformées de Laplace de primitives et de dérivées

Théorème 6.4.1 Soit $f \in \mathcal{E}$, a l'abscisse de sommabilité de $\mathcal{L}f$. Alors

$$\mathcal{L}\left(\int_0^u f(t) dt\right)(s) = \frac{\mathcal{L}f(s)}{s}, \quad \operatorname{Re} s > \sup(0, a).$$

□ Soit $x = \operatorname{Re} s > 0$. D'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives, on a

$$\int_0^{\infty} e^{-xu} \left(\int_0^u |f(t)| dt\right) du = \int_0^{\infty} |f(t)| \left(\int_t^{\infty} e^{-xu} du\right) dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{x} |f(t)| dt.$$

Si $\operatorname{Re} x > a$, cette intégrale est finie. On en déduit que la fonction $(t, u) \rightarrow e^{-su} f(t)$ est intégrable sur le domaine considéré et le théorème de Fubini s'applique :

$$\int_0^\infty e^{-su} \left(\int_0^u f(t) dt \right) du = \int_0^\infty f(t) \left(\int_t^\infty e^{-su} du \right) dt = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s} f(t) dt = \frac{\mathcal{L}f(s)}{s}.$$

□

Théorème 6.4.2 Soit $f \in \mathcal{C}^1(0, +\infty)$. On suppose que f et f' sont dans \mathcal{E} et à croissance exponentielle : il existe A_0, A_1, T et a tels que, pour $t > T$, $|f(t)| \leq A_0 e^{at}$, $|f'(t)| \leq A_1 e^{at}$. Alors, $f(t)$ a une limite finie lorsque $t \rightarrow 0^+$ et

$$\mathcal{L}f'(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0^+).$$

□ Comme f est \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[\epsilon, X]$, $\epsilon > 0$,

$$f(X) = f(\epsilon) + \int_\epsilon^X f'(t) dt.$$

Comme $f' \in \mathcal{E}$, $\int_0^X f'(t) dt < \infty$ et donc $f(\epsilon) = f(X) - \int_\epsilon^X f'(t) dt$ a une limite finie lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Par hypothèse, f et f' ont une transformée de Laplace pour $\operatorname{Re} s > a$ et en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \int_0^X f'(t) e^{-st} dt &= [f(t) e^{-st}]_0^X + s \int_0^X f(t) e^{-st} dt \\ &= f(X) e^{-sX} - f(0^+) + s \int_0^X f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

Pour $X > T$, on a $|f(X) e^{-sX}| < A_0 e^{aX} e^{-sX}$ et donc $\lim_{X \rightarrow \infty} f(X) e^{-sX} = 0$ si $\operatorname{Re} s > a$, ce qui donne le résultat. □

On démontre plus généralement : si $f \in \mathcal{C}^m(0, +\infty)$ et si $f, f^{(1)}, \dots, f^{(m)}$ sont dans \mathcal{E} et à croissance exponentielle : il existe A_0, A_1, \dots, A_m, T et a tels que, pour $t > T$,

$$|f^{(k)}(t)| \leq A_k e^{at}, k = 0, 1, \dots, m.$$

Alors, $f(t), f'(t), \dots, f^{(m-1)}(t)$ ont une limite finie lorsque $t \rightarrow 0^+$ et

$$\mathcal{L}(f^{(m)})(s) = s^m \mathcal{L}f(s) - s^{m-1} f(0^+) - s^{m-2} f'(0^+) - \dots - f^{(m-1)}(0^+).$$

Ces propriétés permettent de transformer une équation différentielle linéaire en une équation algébrique.

6.5 Transformée de Laplace et convolution

Théorème 6.5.1 Soit f et g deux fonctions de \mathcal{E} . Alors, $f * g$ existe et appartient à \mathcal{E} . Si $\mathcal{L}f$ et $\mathcal{L}g$ existent pour $\operatorname{Re} s > a$, alors $\mathcal{L}(f * g)$ existe pour $\operatorname{Re} s > a$ et

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}f \mathcal{L}g.$$

C'est encore une application du théorème de Fubini.

La transformée de Laplace transforme un produit de convolution en produit et permet donc d'exprimer un système de convolution

$$y(t) = h * u(t) = \int_0^\infty h(t - \tau)u(\tau) d\tau$$

en un opérateur de multiplication

$$Y(s) = H(s)U(s),$$

où

$$Y(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st} dt, \quad H(s) = \int_0^\infty h(t)e^{-st} dt, \quad U(s) = \int_0^\infty u(t)e^{-st} dt,$$

sont les transformées de Laplace. La fonction $H(s)$ est appelée *fonction de transfert* du système. La transformée de Laplace s'avère donc un outil efficace pour étudier les systèmes de convolution, en particulier leur stabilité. Un système est stable (BIBO cf. section 3.3.1) si sa réponse impulsionnelle est intégrable et donc, si l'axe imaginaire est contenu dans le domaine de sommabilité de sa fonction de transfert $H = \mathcal{L}h$. Lorsque H est rationnelle, le système est stable si et seulement si ses pôles sont à partie réelle strictement négative.

6.6 Transformée inverse, recherche des originales

Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $\mathcal{L}f$ existe pour $\operatorname{Re} s > a$. Soit $x > a$. La fonction $g(t) = f(t)e^{-xt}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ et a une transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(g)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu t} e^{-xt} f(t) dt = \mathcal{L}f(x + 2i\pi\nu).$$

Cette remarque permet de montrer :

Théorème 6.6.1 Deux fonctions f_1 et f_2 de \mathcal{E} telles que $\mathcal{L}f_1 = \mathcal{L}f_2$ sont égales presque partout. En particulier si f_1 et f_2 sont continues elles sont identiques.

Lorsque $\mathcal{L}f = g$ on dit que f est une *originale* de g . Si f est unique, on dit que f est l'*originale* de g .

Il existe des formules qui permettent de calculer $f(t)$ en fonction de $\mathcal{L}f$; celles-ci utilisent la théorie des fonctions de variables complexes. En pratique, on peut souvent se contenter d'utiliser les tableaux de transformées et les propriétés relatives à la convolution, la dérivation, le retard, la valeur initiale ...

6.7 Transformations de Laplace et de Fourier.

Lorsqu'une fonction admet une transformée de Fourier, elle admet une transformée de Laplace et son abscisse de sommabilité est inférieur ou égal à zéro. Dans ce cas, la transformée de Fourier peut être vue comme la restriction de la transformée de Laplace à l'axe imaginaire. Rappelons que la transformée de Laplace est une fonction de la variable complexe s . Par contre, certaines fonctions (comme $e^{at}u(t)$, $a > 0$) ont une transformée de Laplace sans avoir de transformée de Fourier.

Les deux transformations facilitent la résolution des équations différentielles (linéaires à coefficients constants). En les transformant en équations algébriques, elles permettent d'en obtenir des solutions particulières. Il se peut que les deux transformées donnent des solutions particulières différentes (associées à des conditions initiales différentes). Rappelons que la solution générale d'une équation différentielle est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre.

La transformée de Laplace est par ailleurs très utile pour les études de stabilité des systèmes linéaires invariants.

Transformées de Laplace usuelles :

fonction	transformée de Laplace	convergence
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\pi_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{si } x \in [0, \epsilon[\\ 0 & \text{si } x \notin [0, \epsilon[\end{cases}$	$\frac{1-e^{-s\epsilon}}{s\epsilon}$	
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$e^{-at}u(t), a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}(s+a) > 0$
$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	

Propriétés :

fonction causale	transformée de Laplace	convergence
f	F	$\text{Re } s > a$
$\lambda f + \mu g$	$\lambda F + \mu G$	
$f(t-t_0), t_0 > 0$	$e^{-st_0}F(s)$	$\text{Re } s > a$
$e^{-s_0 t}f(t), s_0 \in \mathbb{C}$	$F(s+s_0)$	$\text{Re}(s+s_0) > a$
$f(\mu t), \mu > 0$	$\frac{1}{\mu}F(s/\mu)$	$\text{Re}(s/\mu) > a$
$\int_0^t f(u) du$	$\frac{F(s)}{s}$	$\text{Re } s > \sup(0, a)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0^+)$	$\text{Re } s > a$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$	$\text{Re } s > a$
$f * g$	FG	

Bibliographie

- [1] BASS, *Cours de Mathématiques-Tome 2*, Masson, 1961
- [2] J.C. BELLOC, P. SCHILLER, *Mathématiques pour l'électronique*, Masson, 1994
- [3] C. GASQUET, P. WITOMSKI, *Analyse de Fourier et applications*, Masson, 1990
- [4] T. KOERNER, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988
- [5] A.V. OPPENHEIM AND A.S. WILLSKY AND S.H. NAWAB, *Signals and Systems*, Prentice-Hall, 1997
- [6] R. PETIT, *L'outil mathématique pour la physique*, Dunod, 1998
- [7] H. REINHARD, *Éléments de mathématique du signal- Tome 1- Signaux déterministes*, Dunod, 1997
- [8] W. RUDIN, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 1998