

# **Méthodes mathématiques pour le Traitement du Signal**

5 septembre 2009

M. Bergounioux

MASTER

Ce cours est issu d'un enseignement donné depuis 5 ans au sein du MASTER de Mathématiques d'Orléans et s'adresse à des mathématiciens désireux de connaître les techniques de base de traitement du signal. A contrario, il peut aussi intéresser des spécialistes de traitement du signal qui souhaitent avoir un point de vue mathématique sur les outils qu'ils utilisent fréquemment. Cet ouvrage se veut donc une introduction à la discipline plus qu'un ouvrage pointu destiné à des spécialistes du domaine. Pour le lecteur qui souhaite en savoir davantage nous renvoyons à la bibliographie qui permet d'approfondir les différents sujets. Nous avons souhaité donner de nombreuses applications tout au long de l'ouvrage et proposons comme tout livre de « cours » qui se respecte quelques exercices ou sujets de travaux pratiques. Le signal 1D le plus accessible par excellence étant le signal sonore nous avons consacré un court chapitre à l'analyse vocale (ou traitement de la parole), là aussi sous forme d'introduction. Pour le traitement du son musical nous renvoyons à l'ouvrage de P. Guillaume [8] qui fourmille d'exemples en liaison directe avec la musique.

# Chapitre 1

## Introduction

L'utilisation de mathématiques de haut niveau en traitement du signal et pour l'apprentissage est une tendance nouvelle rendue nécessaire par la quantité et la complexité croissantes d'information aujourd'hui disponible, qui génèrent un besoin d'automatisation des méthodes d'analyse, de traitement de l'information et de la prise de décisions.

Les applications les plus classiques concernent l'analyse et la transformation d'informations sonores et d'images, mais des problèmes similaires sont posés par d'autres signaux tels que des enregistrements de séquences d'ADN, des séries financières ou des données atmosphériques.

L'information ainsi traitée peut ensuite servir à la réalisation d'une tâche qu'il s'agit d'optimiser.

La notion de signal fait intervenir la notion d'observation de phénomène. Elle fait intervenir des quantités dépendantes du temps, de l'espace ou de la fréquence. Pour étudier ces quantités on a une modélisation sous forme de fonction d'une variable. Les signaux sont des objets qui peuvent être

- unidimensionnels (1D) : c'est le cas de tous les phénomènes ondulatoires, dont l'exemple le plus connu est le son. La variable est alors le **temps**  $t$ . L'étude des signaux 1D fait l'objet du présent cours.
- bidimensionnels (2D) : il s'agit dans ce cas d'images. La variable est une variable d'**espace** représentant les deux coordonnées  $(x, y)$  d'un point du plan de l'image. L'étude de ces signaux, plus connue sous le nom de Traitement d'Image fait l'objet d'un autre volume [2].
- tridimensionnels (3D) : il peut s'agir, soit d'images 3D (dans l'espace) dont la reconstruction et la description se font par exemple à partir de projections stéréographiques ou tomographiques, soit d'une séquence d'images 2D dans le temps (**vidéo**). Dans le premier cas, La variable est une variable d'**espace** représentant les trois coordonnées d'un point  $(x, y, z)$  de l'image. Dans le second cas il s'agit des deux coordonnées  $(x, y)$  dans le plan et du temps  $t$ .

- quadridimensionnels (4D) : c'est le cas, par exemple, d'images 3D (volumes) évoluant dans le temps.

Dans cet ouvrage nous allons nous concentrer sur l'études des signaux 1D. Les méthodes décrites relèvent de ce qu'il est communément appelé le « traitement du signal ». Nous donnons quelques exemples pour commencer.

1. Le **Son** est le signal (1D) le plus connu. Les applications du traitement du son sont nombreuses. On peut citer, par exemple, la synthèse et analyse vocale, la musique numérique (standard MP3- instruments numériques)

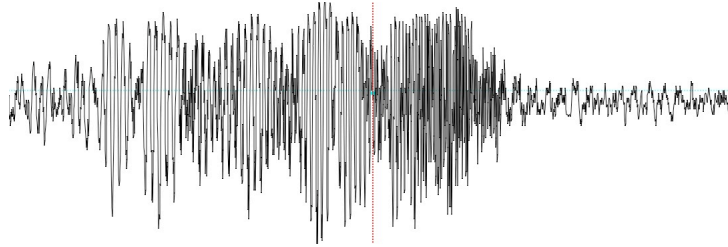


FIGURE 1.1 – Extrait d'un chant de baleine à bosse

2. **Signaux électriques** : ces signaux sont particulièrement intéressants en médecine (électrocardiogramme- électroencéphalogramme).

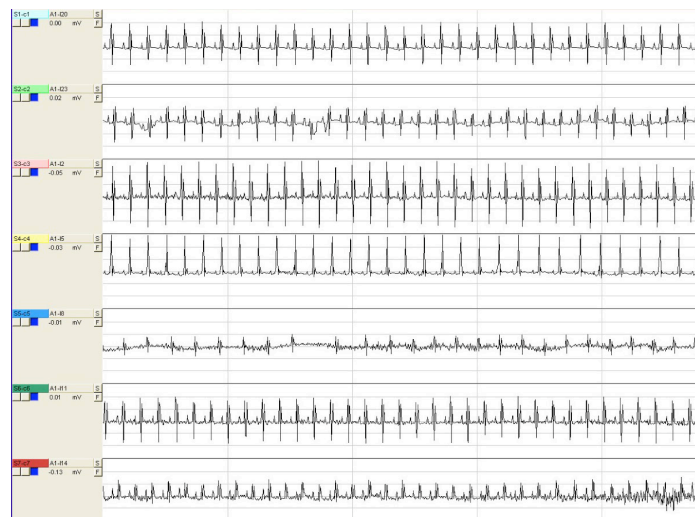


FIGURE 1.2 – Electrocardiogramme (ECG )

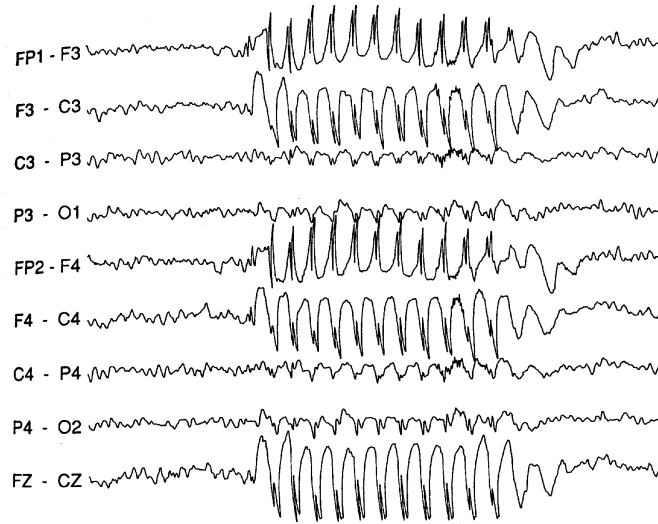


FIGURE 1.3 – Electro-encéphalogramme (EEG)

### 3. Autres exemples

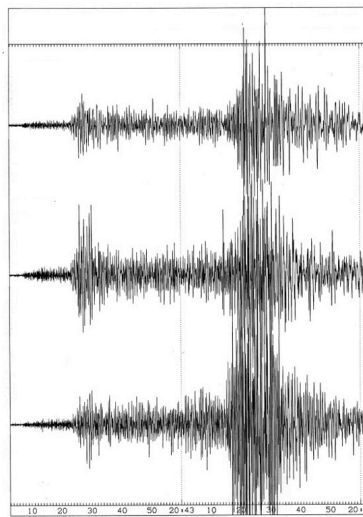


FIGURE 1.4 – Onde sismique

*Applications* : Astrophysique - détection (radars- prospection pétrolière)

Un signal peut être modélisé de façon **déterministe** ou **aléatoire**. Lorsque la fonction  $x(t)$  est continue le signal est **analogique**. Si la variable est discrète le signal est discret. Souvent un signal discret est le résultat de la discrétisation d'un signal analogique. On parle alors d'**échantillonnage**.

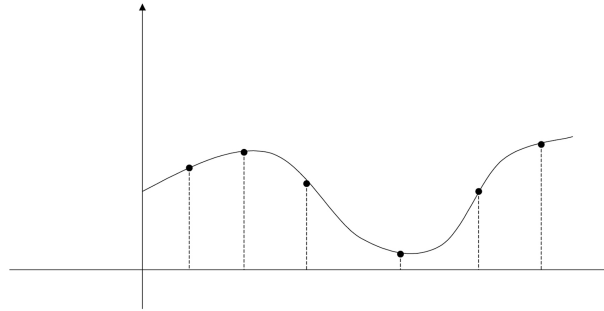


FIGURE 1.5 – Signal échantillonné

Quand on discrétise un signal en vue d'un traitement numérique, on a fait une **quantification** (stockage sur ordinateur). Un signal discret quantifié est un signal **numérique**.

#### Exemples de signaux « théoriques »

– *Echelon unité de Heaviside* : La fonction est donnée par

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Ce signal modélise l'établissement instantané d'un régime constant.

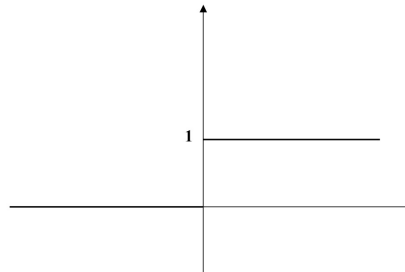


FIGURE 1.6 – Echelon unité de Heaviside

- *Signal rectangle ou créneau centré* : La fonction est donnée par

$$v(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < a, \\ 0 & \text{si } |t| > a. \end{cases}$$

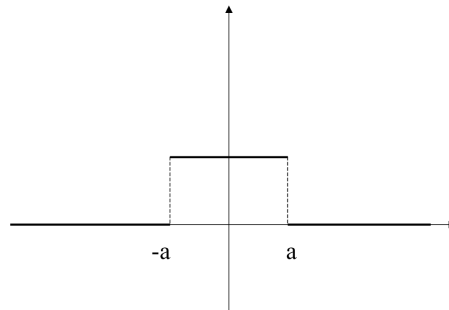


FIGURE 1.7 – Créneau centré

- *Signal sinusoidal ou monochromatique* : Le signal est représenté par la fonction  $x(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}$  est l'**amplitude** du signal,  $\omega \in \mathbb{R}$  est la **pulsation** et  $\varphi \in [0, 2\pi]$  la phase initiale. On appelle  $a = \frac{2\pi}{\omega}$  la **période** et

$$\lambda = \frac{1}{a} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ la fréquence.}$$

On peut donc écrire que  $x(t) = \alpha \cos(2\pi \lambda t + \varphi)$ . On étudiera en général le signal  $z(t) = \alpha \exp(2i\pi \lambda t + i\varphi) = c \exp(2i\pi \lambda t)$  où  $c = \alpha \exp(i\varphi) \in \mathbb{C}$ . On a donc  $c = \text{Re}(z(t))$ .

Le traitement du signal repose essentiellement sur l'utilisation d'opérateurs linéaires qui modifient les propriétés d'un signal de façon homogène dans le temps. Les transformées de Fourier et de Laplace qui diagonalisent des opérateurs sont les principaux outils d'analyse mathématique.

On étudie un signal de deux points de vue :

- le point de vue **temporel** (ou spatial s'il s'agit d'une image) : étude du signal dans le temps, tel qu'il est enregistré ou dans l'espace physique (pour une image par exemple)
- le point de vue **fréquentiel** : on extrait du signal des informations « cachées » mais qui sont caractéristiques de chaque signal. Les outils mathématiques sont essentiellement la transformation de Fourier et la transformation de Laplace (et leurs analogues « discrets », la transformation de Fourier discrète et la transformation en  $z$ ).

Le traitement du signal (analogique ou numérique) consiste

- à étudier le signal, l'**analyser**, en extraire les informations pertinentes.

- à modifier le signal (pour enlever les parasites d'un son, accentuer les basses d'un morceau de musique ou éclaircir une image )
- à synthétiser/reproduire des signaux nouveaux (« voix artificielles »)

Sans prétendre à l'exhaustivité, nous allons présenter les principaux d'analyse et de traitement des signaux, au premier rang desquels les outils d'analyse spectrale qui font l'objet du chapitre 2. Le chapitre 3 présente des techniques élémentaires de traitement des signaux aléatoires. Le chapitre 4 présente des outils de filtrage (analogique et numérique) : le filtrage est une étape fondamentale et incontournable dans tout traitement de signal. Le chapitre 5 est consacré à l'échantillonnage, à savoir le passage d'un signal analogique (« continu ») à un signal numérique (discret). Nous y présentons le célèbre théorème d'échantillonnage de Shannon ainsi que les difficultés posées par le mauvais choix d'une fréquence d'échantillonnage (aliasing). Le chapitre 6 est consacré à l'analyse temps-fréquence d'un signal, avec la transformation de Gabor et la STFT<sup>1</sup> qui conduisent à la notion de spectrogramme. Tout naturellement, le chapitre 7 présente une alternative, complémentaire à l'analyse temps-fréquence, qui est l'analyse temps-échelle avec l'introduction des ondelettes et de l'analyse multi-résolution. Nous terminerons par une application (chapitre 8) à l'analyse vocale.

---

1. Short Time Fourier Transform ou Transformée de Fourier à fenêtre glissante



## Chapitre 2

# Analyse spectrale des signaux unidimensionnels

### 2.1 Signaux analogiques périodiques

Un signal sinusoïdal « pur »  $t \mapsto \sin(2\pi\lambda t)$  a une signification « physique » : cela correspond à une onde qui se propage. On va montrer dans ce qui suit que tout signal périodique d'énergie finie (ce que nous allons préciser) est la superposition d'un nombre infini d'ondes.

#### 2.1.1 Les séries de Fourier

On considère dans ce qui suit des signaux périodiques de période  $a$  et d'énergie finie. L'espace de ces signaux est

$$H = L_p^2(0, a) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ de période } a, \int_0^a f^2(t) dt < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire (hermitien)

$$(f, g) = \int_0^a f(t)\bar{g}(t) dt .$$

L'énergie du signal est tout simplement

$$E(f) = \|f\|_2^2 = \int_0^a f^2(t) dt .$$

Soit  $\mathcal{T}_N$  l'espace vectoriel engendré par la famille  $(e_k)_{-N \leq k \leq N}$  avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ e_n : t \mapsto \exp(2i\pi n \frac{t}{a}) \end{array} \right. . \quad (2.1.1)$$

On vérifie facilement que cette famille est orthogonale et vérifie  $(e_k, e_k) = a$ .  $\mathcal{T}_N$  est l'espace des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à  $N$ . C'est un sous-espace de  $L_p^2(0, a)$  de dimension finie (donc fermé). Nous avons un résultat d'approximation (qui est un cas particulier d'un théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert) que nous allons démontrer de manière indépendante.

**Théorème 2.1.1** Soit  $f \in L_p^2(0, a)$ . Il existe un unique polynôme  $f_N \in \mathcal{T}_N$  (appelé polynôme de **meilleure approximation** de  $f$  dans  $\mathcal{T}_N$ ) projection de  $f$  sur  $\mathcal{T}_N$  qui réalise le minimum de

$$\min_{P \in \mathcal{T}_N} \|f - P\|_2.$$

De plus il s'écrit sous la forme

$$f_N = \sum_{k=-N}^{k=N} c_k(f) e_k,$$

où

$$\forall N, \forall k \in \{-N, \dots, N\} \quad c_k(f) = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) \exp(-2i\pi k \frac{t}{a}) dt. \quad (2.1.2)$$

*Démonstration* - Soit  $f \in L_p^2(0, a)$ . Un polynôme trigonométrique peut toujours s'écrire sous la forme  $P = \sum_{k=-N}^{k=N} x_k e_k$  (quitte à compléter par des coefficients nuls) où  $x_k \in \mathbb{C}$ . Calculons donc

$$\|f - P\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|P\|_2^2 - 2\Re(f, P).$$

Comme la famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est orthogonale on a

$$\|P\|_2^2 = \sum_{k=-N}^{k=N} |x_k|^2 a.$$

D'autre part

$$(f, P) = \sum_{k=-N}^{k=N} \bar{x}_k (f, e_k);$$

si on pose

$$\forall k \in \{-N, \dots, N\} \quad c_k(f) = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)} = \frac{1}{a} (f, e_k),$$

il vient

$$\|f - P\|_2^2 = \|f\|_2^2 + a \sum_{k=-N}^{k=N} (|c_k(f) - x_k|^2 - |c_k(f)|^2). \quad (2.1.3)$$

Il est donc clair que le minimum est atteint lorsque  $x_k = c_k(f)$  et pour cette valeur seulement.  $\square$

Les coefficients  $c_k(f)$  sont les **coefficients de Fourier** de  $f$ .

**Théorème 2.1.2** Soit  $f \in L_p^2(0, a)$  à valeurs réelles et  $c_k(f)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ses coefficients de Fourier.

1. Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $c_{-k} = \overline{c_k}$  et donc particulier  $|c_{-k}| = |c_k|$ .
2. Si  $f$  est paire, alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $c_k$  est réel.
3. Si  $f$  est impaire, alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $c_k$  est imaginaire pur.

*Démonstration* - Soit  $k \in \mathbb{Z}$  et  $f \in L_p^2(0, a)$  à valeurs réelles.

$$c_{-k}(f) = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) \exp(2i\pi k \frac{t}{a}) dt = \overline{\frac{1}{a} \int_0^a f(t) \exp(-2i\pi k \frac{t}{a}) dt} = \overline{c_k}.$$

Les autres propriétés se démontrent de manière similaire.  $\square$

**Théorème 2.1.3 (Inégalité de Bessel)** Sous les hypothèses et notations précédentes, on a

$$\sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(t)|^2 dt.$$

*Démonstration* - Lorsque  $x_k = c_k(f)$  la relation (2.1.3) s'écrit

$$\|f - P\|_2^2 = \|f\|_2^2 - a \sum_{k=-N}^{k=N} |c_k(f)|^2,$$

c'est à dire

$$\sum_{k=-N}^{k=N} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{a} \|f\|_2^2,$$

ce qui est la relation annoncée.  $\square$

En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(t)|^2 dt. \quad (2.1.4)$$

En réalité, on a le résultat précis suivant :

**Théorème 2.1.4** Si  $f \in L_p^2(0, a)$  et  $f_N$  est le polynôme de meilleure approximation de  $f$  dans  $\mathcal{T}_N$  c'est-à-dire

$$f_N = \sum_{k=-N}^N c_k e_k,$$

alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\|^2 = 0,$$

c'est-à-dire que la suite  $f_N$  converge vers  $f$  dans  $L_p^2(0, a)$ .

*Démonstration* - Nous avons vu que

$$\|f - f_N\|^2 = \int_0^a |f(t)|^2 dt - a \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 = \int_0^a |f(t)|^2 dt - \|f_N\|^2 = \|f\|^2 - \|f_N\|^2. \quad (2.1.5)$$

On sait que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f_N\|^2$  existe, donc  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\|^2$  existe ; toutefois il n'est pas évident que cette limite soit nulle.

Commençons par montrer le résultat pour une fonction  $\mathcal{C}^1$  donc continue :  $f$ . Alors la fonction

$$\varphi(x) = \int_0^a f(x+t) \bar{f}(t) dt$$

est périodique de période  $a$  et continue sur  $\mathbb{R}$  (intégrale dépendant d'un paramètre). De plus, les coefficients de Fourier  $\gamma_n$  de  $\varphi$  sont donnés par  $\gamma_n = a|c_n|^2$ . En effet

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{a} \int_0^a \varphi(x) \exp(-2i\pi \frac{n}{a} x) dx = \frac{1}{a} \int_0^a \int_0^a f(x+t) \bar{f}(t) \exp(-2i\pi \frac{n}{a} x) dt dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \int_0^a f(x+t) \exp(-2i\pi \frac{n}{a} (x+t)) \bar{f}(t) \exp(2i\pi \frac{n}{a} t) dt dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a f(x+t) \exp(-2i\pi \frac{n}{a} (x+t)) \left[ \int_0^a \bar{f}(t) \exp(2i\pi \frac{n}{a} t) dt \right] d(x+t) \\ &= a c_n \bar{c}_n = a |c_n|^2. \end{aligned}$$

La série de Fourier de  $\varphi$  est donc normalement convergente ( et donc **uniformément convergente**) vers une fonction  $\psi$ , périodique et continue sur  $\mathbb{R}$  car

$$\sum_n \|\gamma_n e_n\| = \sqrt{a} \sum_n |\gamma_n| \leq a \sqrt{a} \sum_n |c_n|^2 < +\infty.$$

On admettra le lemme suivant corollaire du théorème de Dirichlet, que nous démontrons dans la section suivante :

**Lemme 2.1.1** Soient  $\varphi$  et  $\psi$ ,  $\mathcal{C}^1$ , périodiques sur  $\mathbb{R}$ . Alors

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(\varphi) = c_n(\psi) \iff \varphi = \psi .$$

Ici  $\psi$  a les mêmes coefficients de Fourier que  $\varphi$  et est continue donc  $\psi(x) = \varphi(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On peut résumer en disant que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n \exp(2i\pi \frac{n}{a}x) = \varphi(x) = \int_0^a f(x+t)\bar{f}(t) dt .$$

Prenons alors  $x = 0$  : on obtient

$$\int_0^a |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 .$$

Si on reporte cette égalité dans (2.1.5) on obtient alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^a |f(t) - f_N(t)|^2 dt = 0 .$$

Le théorème est donc démontré pour toute fonction continue. On conclut en utilisant la densité de l'ensemble  $\mathcal{C}_c^\infty(0, a)$  des fonctions continues à support compact dans  $L_p^2(0, a)$ .

Soit  $f \in L_p^2(0, a)$ . Par densité, on peut trouver une suite  $g_k \in \mathcal{C}_c^\infty(0, a) \cap L_p^2(0, a)$  telle que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f - g_k\|_{L^2} = 0$ .

D'autre part, si on note  $c_n(f)$  le coefficient de Fourier numéro  $n$  de  $f$  on a  $c_n(f - g_k) = c_n(f) - c_n(g_k)$  et d'après l'inégalité de Bessel

$$a \sum_{n=-N}^N |c_n(f - g_k)|^2 \leq \|f - g_k\|_{L^2}^2 .$$

On obtient

$$\|f - f_N\|_{L^2} \leq \|f - g_k\|_{L^2} + \|g_k - \sum_{n=-N}^N c_n(g_k)e_k\|_{L^2} + \|\sum_{n=-N}^N (c_n(g_k) - c_n(f))e_k\|_{L^2} ,$$

$$\leq \|f - g_k\|_{L^2} + \|g_k - \sum_{n=-N}^N c_n(g_k)e_k\|_{L^2} + \|f - g_k\|_{L^2} .$$

Soit  $\varepsilon > 0$ ; on peut trouver  $k_0$  tel que  $\forall k \geq k_0$ ,  $\|f - g_k\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}$  grâce à la densité. Pour  $k$  fixé ( $\geq k_0$ ), on peut trouver  $N(k)$  tel que

$$\|g_k - \sum_{n=-N}^N c_n(g_k) e_k\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

car le théorème est vrai pour les fonctions continues. Finalement  $\|f - f_N\|_{L^2} \leq \varepsilon$ .  $\square$

La série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k$  converge normalement, donc elle converge presque partout vers  $f$ . On notera

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e_k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N}^N c_k e_k,$$

la convergence étant prise au sens de la norme de  $L_p^2(0, a)$ . La série est la **série de Fourier** de  $f$ .

**Corollaire 2.1.1 (Egalité de Parseval)** *Sous les hypothèses précédentes*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{a} \int_0^a |f(t)|^2 dt.$$

L'énergie d'un signal périodique est la somme des énergies de ses harmoniques.

**Remarque 2.1.1** 1.  $\|f - f_N\| \rightarrow 0 \implies \|f_N\| \rightarrow \|f\|$  car  $|\|f_N\| - \|f\|| \leq \|f - f_N\|$ . En revanche, la réciproque est fautive.

Nous avons obtenu une « décomposition » des fonctions de  $L_p^2(0, a)$  en série trigonométrique : la question se pose de savoir maintenant si cette décomposition est unique.

**Théorème 2.1.5 (Unicité des coefficients de Fourier)**

Soient  $f$  et  $g$  dans  $L_p^2(0, a)$ .

$$f = g \text{ presque partout} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z} \quad c_k(f) = c_k(g).$$

*Démonstration* - Il est clair que si  $f = g$  presque partout leurs coefficients de Fourier sont égaux. Montrons la réciproque : par linéarité, on se ramène à démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad c_k(f) = 0 \implies f = 0 \text{ presque partout.}$$

D'après l'égalité de Parseval, nous savons que

$$\int_0^a |f(t)|^2 dt = a \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N |c_k|^2.$$

Donc  $\int_0^a |f(t)|^2 dt = \|f\|^2 = 0$  ce qui entraîne  $f = 0$  presque partout.  $\square$

**Corollaire 2.1.2** La famille  $(e_k)_{-N \leq k \leq N}$  est une **base hilbertienne** de  $L_p^2(0, a)$ .

**Remarque 2.1.2** On a choisi  $[0, a]$  pour simplifier l'exposé mais tout ce qui précède fonctionne de la même manière sur un intervalle  $[\tau, \tau + a]$  où  $\tau \in \mathbb{R}$  car

$$\int_0^a f(t) \exp(-2i\pi N \frac{t}{a}) dt = \int_\tau^{\tau+a} f(t) \exp(-2i\pi N \frac{t}{a}) dt .$$

### Représentation ponctuelle d'une série de Fourier

Remarquons que les coefficients de Fourier définis ci-dessus pour des fonctions de  $L_p^2(0, a)$  sont également définis pour des fonctions de  $L_p^1(0, a)$  où

$$L_p^1(0, a) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ périodique de période } a \text{ vérifiant } \int_0^a |f(t)| dt < +\infty\} .$$

On peut aussi définir une série de Fourier pour  $f \in L_p^1(0, a)$  par

$$S(t) := \sum_{N=-\infty}^{+\infty} c_N(f) \exp(2i\pi N \frac{t}{a}) .$$

Nous avons vu que si  $f \in L_p^2(0, a)$  sa série de Fourier converge dans  $L_p^2(0, a)$  vers  $f$ . La question se pose de savoir si on peut étendre ce résultat aux fonctions de  $L_p^1(0, a)$ . La réponse est (partiellement) donnée par le théorème suivant.

### Théorème 2.1.6 (Riemann - Lebesgue)

Soit  $(a, b)$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$  et  $f \in L^1(a, b)$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \exp(2i\pi nx) dx = 0 .$$

*Démonstration* - Supposons tout d'abord que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ . On note

$$I_n = \int_a^b f(x) \exp(2i\pi nx) dx .$$

En faisant une intégration par parties sur  $I_n$ , on trouve :

$$I_n = \frac{1}{2i\pi n} [f(x) \exp(2i\pi nx)]_a^b - \frac{1}{2i\pi n} \int_a^b f'(x) \exp(2i\pi nx) dx .$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |I_n| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi n} (|f(b)| + |f(a)|) + \frac{1}{2\pi n} \int_a^b |f'(x)| dx = 0.$$

On conclut ensuite par un argument de densité. En effet, on sait que lorsque  $I$  est un intervalle borné l'espace  $C_c^\infty(I)$  est **dense** dans  $L^1(I)$ .

Par conséquent, si  $f \in L^1_p(a, b)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists f_\varepsilon \in C^1(a, b) \text{ telle que } \|f - f_\varepsilon\|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a

$$I_n = \int_a^b (f(x) - f_\varepsilon(x)) \exp(2i\pi n x) dx + I_{n,\varepsilon},$$

où on a posé

$$I_{n,\varepsilon} = \int_a^b f_\varepsilon(x) \exp(2i\pi n x) dx.$$

D'après ce qui précède  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n,\varepsilon} = 0$ , donc il existe  $n_o > 0$  vérifiant

$$\forall n \geq n_o \quad |I_{n,\varepsilon}| \leq \frac{\varepsilon}{2};$$

finalement  $\forall n \geq n_o, |I_n| \leq \varepsilon$  ce qui permet de conclure.  $\square$

Une conséquence de ce qui précède est le théorème suivant qui fournit un résultat de convergence ponctuelle pour les séries de Fourier. Dans ce qui suit on note  $f(t_o^+)$  (respectivement  $f(t_o^-)$ ), la limite  $\lim_{\substack{t \rightarrow t_o \\ t > t_o}} f(t)$  (respectivement  $\lim_{\substack{t \rightarrow t_o \\ t < t_o}} f(t)$ ).

### **Théorème 2.1.7 (Dirichlet)**

Soit  $f \in L^1_p(0, a)$  et  $t_o \in \mathbb{R}$  tel que  $f(t_o^+)$  et  $f(t_o^-)$  existent et  $f'(t_o^+)$  et  $f'(t_o^-)$  existent. Alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N c_k \exp(2i\pi k \frac{t_o}{a}) = \frac{1}{2} (f(t_o^+) + f(t_o^-)).$$

*Démonstration - Posons*

$$f_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k \exp(2i\pi k \frac{t}{a})$$

avec

$$c_k = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(s) \exp(-2i\pi k \frac{s}{a}) ds.$$



On obtient :

$$\begin{aligned} f_N(t_o) &= \frac{1}{a} \sum_{k=-N}^N \left( \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(s) \exp(-2i\pi k \frac{s}{a}) ds \right) \exp(2i\pi k \frac{t_o}{a}) \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left( \sum_{k=-N}^N \exp(2i\pi k \frac{t_o - s}{a}) \right) ds ; \end{aligned}$$

or

$$\sum_{k=-N}^N \exp(2i\pi k \frac{t_o - t}{a}) = \exp(-2i\pi N \frac{t_o - t}{a}) \sum_{p=0}^{2N} \exp(2i\pi p \frac{t_o - t}{a})$$

en posant  $p = k + N$ . De plus

$$\sum_{p=0}^{2N} \exp(2i\pi p \frac{t_o - t}{a}) = \sum_{p=0}^{2N} \left( \exp(2i\pi \frac{t_o - t}{a}) \right)^p = \frac{1 - \exp(2i\pi(2N + 1) \frac{t_o - t}{a})}{1 - \exp(2i\pi \frac{t_o - t}{a})}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N}^N \exp(2i\pi k \frac{t_o - t}{a}) &= \exp(-2i\pi N \frac{t_o - t}{a}) \left( \frac{1 - \exp(2i\pi(2N + 1) \frac{t_o - t}{a})}{1 - \exp(2i\pi \frac{t_o - t}{a})} \right) \\ &= \frac{\exp(-2i\pi N \frac{t_o - t}{a}) - \exp(2i\pi(N + 1) \frac{t_o - t}{a})}{\exp(i\pi \frac{t_o - t}{a}) (\exp(-i\pi \frac{t_o - t}{a}) - \exp(i\pi \frac{t_o - t}{a}))} \\ &= \frac{\exp(-i\pi(2N + 1) \frac{t_o - t}{a}) - \exp(i\pi(2N + 1) \frac{t_o - t}{a})}{\exp(-i\pi \frac{t_o - t}{a}) - \exp(i\pi \frac{t_o - t}{a})} \\ &= \frac{\sin(\pi(2N + 1) \frac{t_o - t}{a})}{\sin(\pi \frac{t_o - t}{a})}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} f_N(t_o) &= \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\sin((2N + 1)\pi \frac{t_o - t}{a})}{\sin(\pi \frac{t_o - t}{a})} f(t) dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2} - t_o}^{\frac{a}{2} - t_o} \frac{\sin((2N + 1)\pi \frac{x}{a})}{\sin(\pi \frac{x}{a})} f(x + t_o) dx. \end{aligned}$$

après avoir posé  $x = t - t_o$ . Par périodicité,

$$\begin{aligned} f_N(t_o) &= \frac{1}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\sin((2N+1)\pi\frac{x}{a})}{\sin(\pi\frac{x}{a})} f(x+t_o) dx \\ &+ \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^0 \frac{\sin((2N+1)\pi\frac{x}{a})}{\sin(\pi\frac{x}{a})} f(x+t_o) dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} [f(t_o+x) + f(t_o-x)] S_N(x) dx, \end{aligned}$$

avec

$$S_N(x) = \frac{\sin((2N+1)\pi\frac{x}{a})}{\sin(\pi\frac{x}{a})}.$$

En particulier si  $f \equiv 1$  alors  $f_N = 1$  et on a

$$\frac{1}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} S_N(x) dx = 1.$$

Soit  $y_o = \frac{1}{2}(f(t_o^+) + f(t_o^-))$ ; on a

$$f_N(t_o) - y_o = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} [f(t_o+x) + f(t_o-x) - f(t_o^+) - f(t_o^-)] S_N(x) dx.$$

L'application  $x \mapsto \frac{f(t_o+x) - f(t_o^+)}{x}$  a une limite finie quand  $x$  tend vers  $0^+$  et la fonction

$$\varphi : x \mapsto \frac{f(t_o+x) - f(t_o^+) + f(t_o-x) - f(t_o^-)}{\sin(\pi\frac{x}{a})}$$

a une limite finie  $\ell$  quand  $x \rightarrow 0$ . Il existe donc  $\alpha > 0$  (petit) tel que  $\varphi$  est bornée sur  $]0, \alpha]$ , c'est-à-dire

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in ]0, \alpha] \quad |\varphi(x)| \leq M.$$

D'autre part  $\varphi$  est intégrable sur  $[\alpha, \frac{a}{2}]$ , car  $f \in L^1(0, a)$ , donc

$$\forall x \in ]0, \frac{a}{2}] \quad |\varphi(x)| \leq M + |\varphi(x)| \chi_{[0, \frac{a}{2}]}(x).$$

La fonction  $|\varphi|$  est donc majorée par une fonction de  $L^1(0, a)$  : elle est donc dans  $L^1(0, a)$ . Comme

$$f_N(t_o) - y_o = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} \varphi(x) \sin\left((2N+1)\frac{\pi x}{a}\right) dx$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{Im} \left( \int_0^{\frac{a}{2}} \varphi(x) \exp \left( (2N+1)i \frac{\pi x}{a} \right) dx \right),$$

on peut appliquer le théorème de Riemann-Lebesgue et conclure.  $\square$

**Corollaire 2.1.3** Soient  $f$  et  $g$ ,  $C^1$ , périodiques sur  $\mathbb{R}$ . Alors

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = c_n(g) \iff f = g.$$

*Démonstration* - On applique le théorème de Dirichlet à  $f$  et  $g$  qui sont  $C^1$  périodiques donc dans  $L^1(0, a)$ . En tout point  $t$  de  $\mathbb{R}$  on a bien sûr

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

La conclusion est immédiate.  $\square$

## 2.1.2 Exemples et terminologie

### Spectres et fréquences

On suppose que  $f$  est un signal périodique de période  $a$ , développé en série de Fourier donc

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left( 2i\pi n \frac{t}{a} \right).$$

Dans cette section, nous allons donner quelques définitions qui seront utilisées largement par la suite.

**Définition 2.1.1 (Fréquence, Spectre)** Lorsque  $a$  est la période de  $f$ ,  $\lambda = \frac{1}{a}$  est la **fréquence fondamentale** du signal  $f$ .

Les fréquences multiples de  $\lambda$ , sont appelées les **harmoniques** du signal.

L'ensemble  $(n\lambda, c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est le **spectre** de  $f$ .

On peut, pour décrire  $f$ , représenter  $|c_n|$  en fonction de  $n\lambda$ . On obtient un diagramme en bâtons appelé **spectre d'amplitude**. On peut aussi représenter  $\arg(c_n)$  en fonction de  $n\lambda$  : on obtient un **spectre de phase**.

Nous allons illustrer ce qui précède sur un exemple : soit la fonction périodique de période  $2a$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{sur } [-a, 0] \\ 1 & \text{sur } [0, a]; \end{cases}$$

c'est un signal en créneau.

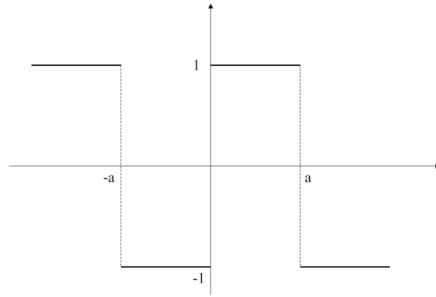


FIGURE 2.1 – Signal en créneau

On peut calculer sa série de Fourier :

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) \exp\left(-2i\pi n \frac{t}{2a}\right) dt \\
 &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^0 -\exp\left(-2in\pi \frac{t}{2a}\right) dt + \frac{1}{2a} \int_0^a \exp\left(-2i\pi n \frac{t}{2a}\right) dt \\
 &= \frac{1}{2a} \int_0^a \left( \exp\left(-i\pi n \frac{t}{a}\right) - \exp\left(i\pi n \frac{t}{a}\right) \right) dt = -\frac{i}{a} \int_0^a \sin\left(\pi n \frac{t}{a}\right) dt ;
 \end{aligned}$$

soit après le changement de variables  $t = ax$

$$c_n = -i \int_0^1 \sin(\pi n x) dx.$$

On obtient donc

$$c_0 = 0 \text{ et } c_n = -i \frac{1 - \cos(\pi n)}{\pi n}, \forall n \neq 0 ;$$

remarquons que  $c_{-n} = -c_n$  de sorte

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i\pi n \frac{t}{a}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left[ \exp\left(i\pi n \frac{t}{a}\right) - \exp\left(-i\pi n \frac{t}{a}\right) \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2i c_n \sin\left(\pi n \frac{t}{a}\right).
 \end{aligned}$$

De plus  $c_n = 0$  si  $n$  est pair et  $c_{2k+1} = -\frac{2i}{(2k+1)\pi}$ . On obtient

$$f(x) = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)\pi} \sin\left(\pi(2k+1) \frac{t}{a}\right).$$

En particulier si  $a = \pi$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{(2k+1)}.$$

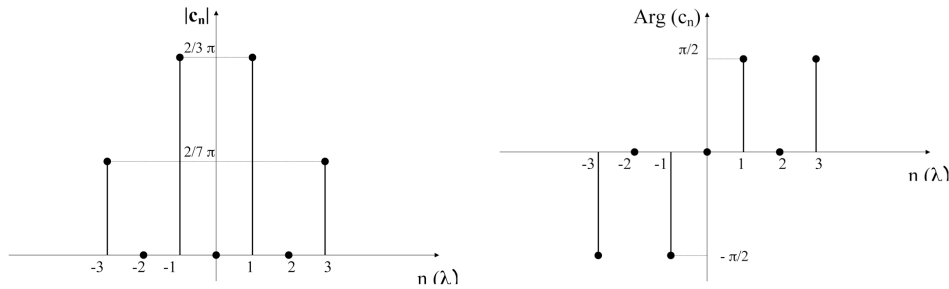


FIGURE 2.2 – Spectre d’amplitude (à gauche) et de phase (à droite)

Les résultats de ce chapitre sont approfondis et détaillés dans [6].

### Quelques exemples de fréquences (fondamentales) usuelles

1. Courant électrique domestique : 50 Hz
2. Quartz de montre :  $10^5$  Hz
3. Onde radar :  $10^{10}$  Hz
4. Ondes hertziennes :
  - (a) Très longues (télégraphe) :  $1.5 \cdot 10^4$  à  $6 \cdot 10^4$  Hz
  - (b) Radio :  $6 \cdot 10^4$  à  $3 \cdot 10^7$  Hz
  - (c) TV :  $3 \cdot 10^7$  à  $3 \cdot 10^8$  Hz
  - (d) Radar :  $3 \cdot 10^8$  à  $10^{11}$  Hz
  - (e) Lumière visible :  $3.7 \cdot 10^{14}$  à  $7.5 \cdot 10^{14}$  Hz.

On remarque que plus la longueur d’onde est courte plus la fréquence est élevée

5. L’oreille humaine perçoit les sons dont les fréquences vont, dans le meilleur des cas, de 20 à 20 000 Hz.

### Un peu de musique

Pour les sons, la représentation temporelle est celle de la propagation d’une onde sonore, mesurée par les variations périodiques de la pression de l’air dans l’oreille.

On appelle **octave** l'intervalle entre deux sons dont l'un est à la fréquence  $f$  et l'autre à la fréquence  $2f$ . L'octave est l'intervalle qui sépare la fréquence fondamentale de la première harmonique.

Quand on entend un Do, on entend aussi (si l'instrument est complexe), immédiatement derrière la première harmonique qui est un Do, une octave au dessus. Une note de la gamme est donc déterminée modulo la multiplication par une puissance de 2 qui détermine l'octave où elle se trouve.

Exemple : le diapason donne le La<sub>3</sub> à 440 Hz. L'échelle des La, en Hertz, est donc la suivante

27,5	55	110	220	440	880	...
La <sub>-1</sub>	La <sub>0</sub>	La <sub>1</sub>	La <sub>2</sub>	La <sub>3</sub>	La <sub>4</sub>	...

Lorsqu'on entend un Do de fréquence  $f$ , on entend aussi les harmoniques  $2f$ ,  $3f$ , etc. :

$f$	$2f$	$3f$	$4f$	$5f$	$6f$
Do	Do	Sol	Do	Mi	Sol

On trouve ainsi dans le Do, l'accord parfait « Do, Mi, Sol ».

En se ramenant au même octave on a

$f$	$5f/4$	$3f/2$	$2f$
Do	Mi	Sol	Do

## 2.2 La transformation de Fourier discrète (DFT) et la FFT

### 2.2.1 Calcul des coefficients de Fourier

Soit  $f$  une fonction périodique de période  $a$  et on connaît un nombre fini  $N$  de valeurs de  $f$  régulièrement espacées sur une période. On dit que  $f$  est **échantillonnée** à des intervalles de temps réguliers. Ceux-ci sont espacés de  $\frac{a}{N}$  (la fréquence est  $\frac{1}{a}$ ).

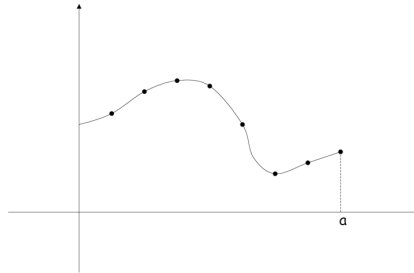


FIGURE 2.3 – Signal échantillonné régulièrement

On pose

$$t_k = \frac{ka}{N} \text{ et } f(t_k) = y_k \text{ pour } k = 0, \dots, N-1.$$

**Remarque 2.2.1** Échantillonner un signal à une fréquence  $F$  Hertz revient à discrétiser sur des intervalles de temps espacés de  $\frac{1}{F}$ . Un signal échantillonné à  $1000\text{Hz}$  revient à mesurer le signal sur des intervalles de temps de  $10^{-3}$  secondes.

On suppose que la série de Fourier de  $f : \mathcal{S}(f)$  converge vers  $f$  ponctuellement (voir le théorème de Dirichlet 2.1.7). On va calculer  $N$  coefficients de Fourier  $c_n$  pour  $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ . On sait que

$$c_n = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) \exp(-2i\pi n \frac{t}{a}) dt.$$

Pour estimer numériquement l'intégrale, nous allons utiliser une méthode de quadrature globale. Pour plus de détails sur les méthodes de quadrature on peut se référer à [?].

Dans ce qui suite on pose

$$\omega_N = \exp\left(\frac{2i\pi}{N}\right) \text{ (racine Nième de l'unité).}$$

On cherche un polynôme trigonométrique qui interpole  $f$  aux points  $t_k$ . Il est donc de la forme

$$p(t) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \gamma_n^N \exp(2i\pi n \frac{t}{a}),$$

avec

$$p(t_k) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \gamma_n^N \exp(2i\pi n \frac{k}{N}) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \gamma_n^N \omega_N^{nk} = f(t_k) = y_k.$$

En posant  $p = n + N$ , on a

$$\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{-1} \gamma_n^N \omega_N^{nk} = \sum_{p=\frac{N}{2}}^{N-1} \gamma_{p-N}^N \omega_N^{k(p-N)} = \sum_{p=\frac{N}{2}}^{N-1} \gamma_{p-N}^N \omega_N^{pk},$$

car  $\omega_N^{-Nk} = 1$ . On pose ensuite

$$Y_n = \begin{cases} \gamma_n^N & \text{si } 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1, \\ \gamma_{n-N}^N & \text{si } \frac{N}{2} \leq n \leq N - 1. \end{cases}$$

On obtient donc

$$y_k = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \omega_N^{nk} \text{ pour } k = 0, \dots, N - 1.$$

Cherchons maintenant à exprimer  $Y_k$  en fonction des  $(y_k)$ . Soit  $p \in \{0, \dots, N - 1\}$  : on a

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-kp} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \omega_N^{nk-kp} = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \left( \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{(n-p)k} \right).$$

Or

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{(n-p)k} = \begin{cases} N & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Finalement, on obtient  $\sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-kp} = NY_p$  c'est-à-dire

$$\forall p \in \{0, \dots, N - 1\} \quad Y_p = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-kp}.$$

On peut résumer dans le théorème suivant :

**Théorème 2.2.1**

$$y_k = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \omega_N^{nk} \text{ pour } k = 0, \dots, N - 1. \quad (2.2.6)$$

$$Y_p = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-kp} \text{ pour } p = 0, \dots, N - 1. \quad (2.2.7)$$

*Les coefficients de Fourier approchés sont*

$$C_n = \gamma_n^N = \begin{cases} Y_n & \text{si } 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1, \\ Y_{n+N} & \text{si } -\frac{N}{2} \leq n \leq 0 \end{cases}$$



**Définition 2.2.1 (Transformation de Fourier discrète)**

Les formules (2.2.6) et (2.2.7) avec  $C_n = \gamma_n^N$  définissent une transformation  $\mathcal{F}_N$  de  $\mathbb{C}^N$  dans  $\mathbb{C}^N$  telle que  $\mathcal{F}_N(y) = Y$  avec  $y = (y_k)_{0 \leq k \leq N-1}$  et  $Y = (Y_p)_{0 \leq p \leq N-1}$  qui s'appelle la **transformation de Fourier discrète d'ordre  $N$** .

Ces transformations sont **linéaires** et réciproques l'une de l'autre. La matrice  $\Omega_N$  de l'application  $Y \mapsto y$  est

$$\Omega_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \cdots & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}. \quad (2.2.8)$$

De plus  $\Omega_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{\Omega_N}$ . C'est la matrice de l'application  $\mathcal{F}_N$ .

**2.2.2 Propriétés de la transformée de Fourier discrète**

Si  $y \in \mathbb{C}^N$  est le vecteur  $y_k = f\left(\frac{ka}{N}\right)$  et on convient que  $y$  est une suite  $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  périodique. Toutes les suites considérées sont complexes périodiques de période  $N$ .

**Définition 2.2.2 (Suite paire, suite impaire)**

On dit que  $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est **paire** si  $y_{-n} = y_n$  pour tout  $n$ . La suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est **impaire** si  $y_{-n} = -y_n$ .

**Proposition 2.2.1** Soit  $\mathcal{F}_N$  la TFD qui à  $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  associe  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Alors :

1.  $\mathcal{F}_N$  associe  $(Y_{-n})_{n \in \mathbb{Z}}$  à  $(y_{-k})_{k \in \mathbb{Z}}$
2.  $\mathcal{F}_N$  associe  $(\overline{Y_{-n}})_{n \in \mathbb{Z}}$  à  $(\overline{y_k})_{k \in \mathbb{Z}}$
3.  $\mathcal{F}_N$  associe  $(\overline{Y_n})_{n \in \mathbb{Z}}$  à  $(\overline{y_{-k}})_{k \in \mathbb{Z}}$

*Démonstration* - La suite  $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est  $N$ -périodique donc on a  $y_{k+N} = y_k$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

1. Soit  $Y' = \mathcal{F}_N(y')$  où  $y'_k = y_{-k}$ . On a alors :

$$Y'_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_{-k} \omega_N^{-nk};$$

or

$$Y_{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{nk}.$$

De plus

$$Y'_n = \frac{1}{N} \sum_{p=-(N-1)}^0 y_p \omega_N^{np} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} y_p \omega_N^{np} = Y_{-n}.$$

2. Soit  $Y''_n = \mathcal{F}_N(\bar{y})$ ; donc

$$Y''_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{y}_k \omega_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{y}_k \omega_N^{nk}$$

car  $\overline{\omega_N} = \omega_N^{-1}$ . On a donc bien  $Y''_n = \overline{Y_{-n}}$ .

3. C'est une conséquence directe des deux points précédents. □

### Définition 2.2.3 (Convolution circulaire discrète)

Soit deux suites complexes  $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de période  $N$ . On appelle **convolution circulaire discrète** l'application définissant  $z$  :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad z_k = \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q}.$$

On note  $z = x * y$ .

**Théorème 2.2.2** Soit  $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  deux suites complexes de période  $N$ . Alors :

1.  $\mathcal{F}_N(x * y) = N \mathcal{F}_N(x) \cdot \mathcal{F}_N(y)$ .

En d'autres termes, si  $z = x * y$  et  $Z = \mathcal{F}_N(z)$ ,  $X = \mathcal{F}_N(x)$ ,  $Y = \mathcal{F}_N(y)$  alors  $Z_k = N X_k Y_k$ .

2. La suite produit  $(x_k y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  a pour transformée de Fourier discrète la suite

$$P_n = \sum_{q=0}^{N-1} X_q Y_{n-q}, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\mathcal{F}_N(x \cdot y) = \mathcal{F}_N(x) * \mathcal{F}_N(y).$$

*Démonstration -*

1. On peut écrire que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_N(x * y) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q} \right) \omega_N^{-nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} x_q \sum_{k=0}^{N-1} y_{k-q} \omega_N^{-nk+nq-nq} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} x_q \omega_N^{-nq} \sum_{k=0}^{N-1} y_{k-q} \omega_N^{-n(k-q)}.\end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{F}_N(x * y) = \frac{1}{N} NX \cdot NY = NX \cdot Y = N \mathcal{F}_N(x) \cdot \mathcal{F}_N(y).$$

2. Soit  $P_n = \sum_{q=0}^{N-1} X_q Y_{n-q}$  avec  $X = \mathcal{F}_N(x)$  et  $Y = \mathcal{F}_N(y)$ .

On pose  $z = \mathcal{F}_N^{-1}(P)$ . On a alors :

$$\begin{aligned}z_k &= \sum_{n=0}^{N-1} P_n \omega_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} X_q Y_{n-q} \omega_N^{nk-nq+qk} \\ &= \sum_{q=0}^{N-1} X_q \omega_N^{qk} \left( \sum_{n=0}^{N-1} Y_{n-q} \omega_N^{(n-q)k} \right)\end{aligned}$$

$$\text{Donc } z_k = y_k \sum_{q=0}^{N-1} X_q \omega_N^{qk} \text{ avec } y_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_{n-q} \omega_N^{qk}.$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{F}_N(x \cdot y) = P = \mathcal{F}_N(x) * \mathcal{F}_N(y). \quad \square$$

**Proposition 2.2.2** Soit  $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  une suite  $N$  périodique. Si  $\mathcal{F}_N(y) = Y$  alors

$$\sum_{k=0}^{N-1} |y_k|^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} |Y_n|^2.$$

*Démonstration* - On peut écrire que

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{N-1} |y_k|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} (y_k, y_k) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \omega_N^{nk}, \sum_{i=0}^{N-1} Y_i \omega_N^{ik} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} Y_n \bar{Y}_i (\omega_N^{nk}, \omega_N^{ik}) \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \bar{Y}_i \left( \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{(n-i)k} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} N |Y_n|^2 \\
 &= N \sum_{n=0}^{N-1} |Y_n|^2.
 \end{aligned}$$

□

### 2.2.3 L'algorithme de FFT

#### L'algorithme de Cooley et Tukey

Cet algorithme célèbre a été inventé par Cooley et Tukey, ingénieurs dans le centre de recherche d'IBM au début des années 1960. Il a eu, du fait de son efficacité, un impact considérable sur le développement des applications en traitement numérique des signaux. Un calcul de transformée de Fourier discrète est un calcul de produit d'une matrice par un vecteur. Il nécessite donc  $N^2$  multiplications/additions de nombres complexes. Si on suppose qu'un ordinateur effectue  $10^9$  opérations par seconde, un calcul de transformée sur un signal de  $N = 10^3$  échantillons nécessitera  $10^{-3}$ s. Un calcul sur une image de taille  $N \times N = 10^6$  nécessitera  $N^4$  soit  $10^{12}$  opérations et une quinzaine de minutes de calcul. Si on envisage de traiter des données dans un domaine à trois dimensions (sur des vecteurs de taille  $N \times N \times N$ ) il faudrait alors effectuer  $N^6$  soit  $10^{18}$  opérations, ce qui nécessite quelques dizaines d'années. La transformée de Fourier rapide réduit considérablement le nombre d'opérations à effectuer : au lieu d'effectuer  $N^2$  opérations il suffira d'en faire  $N \log_2 N$ . Dans les trois exemples précédents on aura à faire  $10^4$ ,  $2 \times 10^7$  et  $3 \times 10^{10}$  opérations ce qui nécessitera respectivement  $10^{-5}$ s,  $2 \times 10^{-2}$ s et 30s ... Pour expliquer cet algorithme, nous utiliserons la récursivité en montrant que le calcul d'une transformée de Fourier de taille  $N$  se ramène au calcul de deux transformées de Fourier de taille  $N/2$  suivi

de  $N/2$  multiplications. On veut calculer pour  $k = 0, \dots, N - 1$

$$X(k) = \sum_{t=0}^{N-1} x(t) \exp(-2i\pi \frac{k.t}{N})$$

On pose  $t = 2n$  si  $t$  est pair et  $t = 2n + 1$  si  $t$  est impair.  $X(k)$  s'écrit alors, en posant  $m = N/2$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{m-1} x(2n) \exp(-2i\pi \frac{k.2n}{N}) \\ &+ \sum_{n=0}^{m-1} x(2n + 1) \exp(-2i\pi \frac{k.(2n + 1)}{N}). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Nommons les suites :

$$t = 0, \dots, 2m - 1 : x_{2m}(t) = x(t), \quad X_{2m}(k) = X(k),$$

$$n = 0, \dots, m - 1 : x_m^p(n) = x(2n) \quad \text{et} \quad x_m^{imp}(n) = x(2n + 1).$$

Avec ces notations, l'équation (2.2.9) devient

$$\begin{aligned} X_{2m}(k) &= \left[ \sum_{n=0}^{m-1} x_m^p(n) \exp(-2i\pi \frac{k.n}{m}) \right] \\ &+ \exp(-2i\pi \frac{k.n}{2m}) \left[ \sum_{n=0}^{m-1} x_m^{imp}(n) \exp(-2i\pi \frac{k.n}{m}) \right]. \end{aligned}$$

Dans la deuxième sommation du membre de droite de l'équation précédente, le facteur  $\exp(-2i\pi \frac{k}{2m})$  ne dépend pas de  $n$ . On a donc l'écriture, pour  $k = 0, \dots, 2m-1$

$$\begin{aligned} X_{2m}(k) &= \left[ \sum_{n=0}^{m-1} x_m^p(n) \exp(-2i\pi \frac{k.n}{m}) \right] \\ &+ \exp(-2i\pi \frac{k}{2m}) \left[ \sum_{n=0}^{m-1} x_m^{imp}(n) \exp(-2i\pi \frac{k.n}{m}) \right] \end{aligned}$$

Si  $0 \leq k \leq m - 1$  on reconnaît dans les deux expressions entre crochets les transformées de Fourier discrètes des séquences des échantillons de numéro pair  $x_m^p(n)$  et des échantillons de numéro impair  $x_m^{imp}(n)$  que nous nommons  $X_m^p(k)$  et  $X_m^{imp}(k)$ . Pour  $k = 0, \dots, m - 1$

$$X_{2m}(k) = X_m^p(k) + \exp(-i\pi \frac{k}{m}) X_m^{imp}(k).$$

Lorsque  $m \leq k \leq 2m - 1$ , on peut écrire  $k = \ell + m$  et remarquer que

$$\exp(-i\pi \frac{k}{m}) = -\exp(-i\pi \frac{\ell}{m}).$$

On obtient donc pour  $\ell = 0, \dots, m - 1$

$$\begin{aligned} X_{2m}(\ell + m) &= \left[ \sum_{n=0}^{m-1} x_m^p(n) \exp(-2i\pi \frac{(\ell + m).n}{m}) \right] \\ &+ \exp(-2i\pi \frac{\ell + m}{2m}) \left[ \sum_{n=0}^{m-1} x_m^{imp}(n) \exp(-2i\pi \frac{(\ell + m).n}{m}) \right] \end{aligned}$$

et, en remarquant que

$$\exp(-2i\pi \frac{(\ell + m).n}{m}) = \exp(-2i\pi \frac{\ell.n}{m})$$

on a pour  $\ell = 0, \dots, N - 1$

$$X_{2m}(\ell + m) = X_m^p(\ell) - \exp(-i\pi \frac{\ell}{m}) X_m^{imp}(\ell).$$

On peut changer le nom de la variable  $\ell$  en  $k$  et regrouper : pour  $k = 0, \dots, m - 1$

$$X_{2m}(k) = X_m^p(k) + \exp(-i\pi \frac{k}{m}) X_m^{imp}(k)$$

et

$$X_{2m}(k + m) = X_m^p(k) - \exp(-i\pi \frac{k}{m}) X_m^{imp}(k).$$

Les calculs correspondants sont représentés dans la figure ci-dessous :

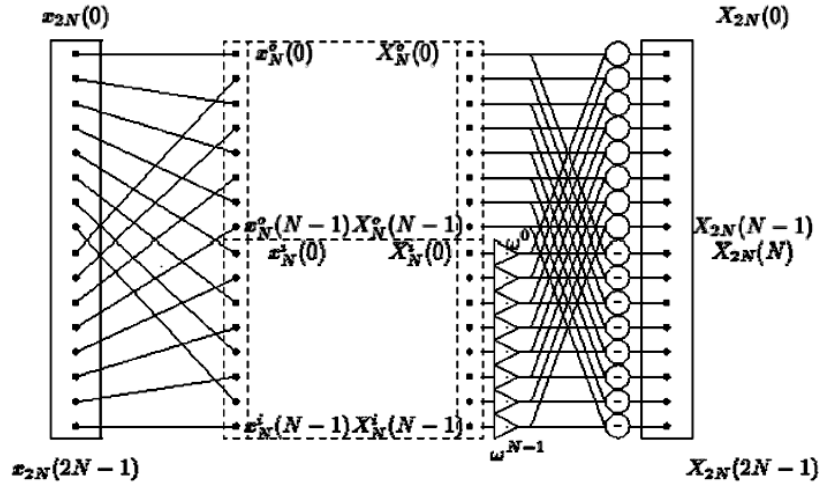


FIGURE 2.4 – Enchaînement des calculs de la transformée de Fourier rapide (1)

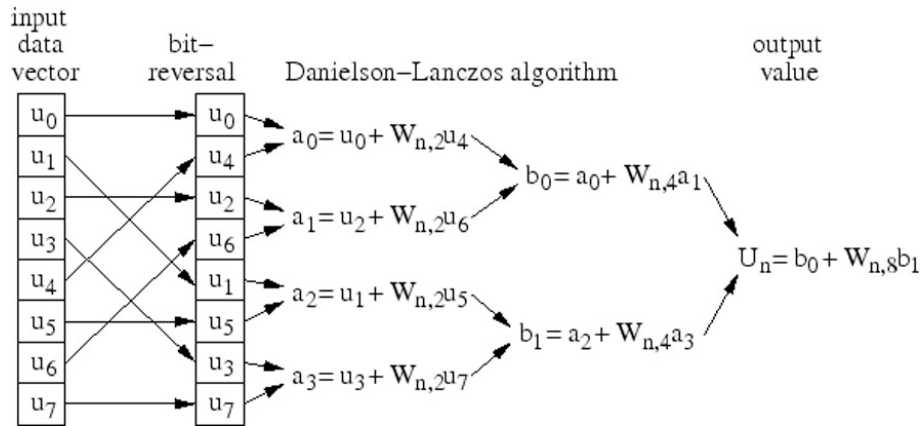


FIGURE 2.5 – Enchaînement des calculs de la transformée de Fourier rapide (2)

Cette formulation se traduit directement par une implémentation récursive. Toutefois la programmation de la plupart des processeurs est fondée sur une implémentation différente.

abcd	bcda	cdba	dcba
0000	0000	0000	0000
0001	0010	0100	1000
0010	0100	1000	0100
0011	0110	1100	1100
0100	1000	0010	0010
0101	1010	0110	1010
0110	1100	1010	0110
0111	1110	1110	1110
1000	0001	0001	0001
1001	0011	0101	1001
1010	0101	1001	0101
1011	0111	1101	1101
1100	1001	0011	0011
1101	1011	0111	1011
1110	1101	1011	0111
1111	1111	1111	1111

TABLE 2.1 – Réordonnement des données préalable dans le calcul de la transformée de Fourier rapide abcd

On commence par effectuer toutes les opérations de réarrangement des données : pour un vecteur de longueur  $N$ , construction d'un tableau de données d'adresses paires et d'un tableau de données d'adresses impaires de longueur  $N/2$ , ce rangement étant reproduit pour les deux moitiés de tableau de taille  $N/2$ , puis les quatre quarts de tableau de taille  $N/4$ , etc... Ceci revient à ranger la donnée  $x(t)$  à l'adresse obtenue en lisant le code binaire de  $t$  en sens inverse comme on peut le voir dans la table 2.1.

On effectue ensuite la même opération sur chacun des deux tableaux. Ensuite on effectue séquentiellement les multiplications par les nombres complexes de la forme  $\exp 2\pi i \frac{kn}{m}$  pour calculer les  $N/2$  transformées de Fourier de taille 2, puis les  $N/4$  transformées de taille 4, et ainsi de suite jusqu'à obtenir les 2 transformées de Fourier de taille  $N/2$  et finalement la transformée de Fourier de taille  $N$ .

### Applications de la FFT

Le type le plus courant d'enregistrement audio numérique est appelé modulation par impulsions codées (pulse code modulation, PCM). C'est la technique utilisée par les disques compacts et la plupart des fichiers WAV. Dans un système d'enregistrement PCM, un microphone convertit les variations de pression de l'air (ondes so-



nores) en variations de voltage. Ensuite, un convertisseur analogique-numérique mesure (échantillonne) le voltage à intervalles de temps réguliers. Par exemple, sur un disque compact, il y a exactement 44 100 échantillons par seconde. Chaque voltage est converti en un entier de 16 bits. Un CD contient deux canaux de données : un pour l'oreille droite et un pour l'oreille gauche, afin de produire l'effet stéréophonique. Les deux canaux sont des enregistrements indépendants placés « côte à côte » sur le disque compact. (En fait, les données des deux canaux alternent... gauche, droite, gauche, droite, ... comme les pieds pendant la marche.)

L'algorithme FFT convient mieux à l'analyse des enregistrements audio numériques qu'au filtrage ou à la synthèse sonore. Elle permet par exemple d'obtenir l'équivalent logiciel d'un analyseur de spectre, que les ingénieurs utilisent pour tracer le graphe des fréquences contenues dans un signal électrique. La FFT s'utilise aussi dans des domaines qui n'ont rien à voir avec le son, tels que le traitement d'image (avec une version bi-dimensionnelle de la FFT). La FFT a aussi des applications scientifiques ou statistiques, par exemple pour essayer de détecter des fluctuations périodiques dans les prix du marché, les populations animales, etc. La FFT s'applique aussi à l'analyse des informations sismographiques, qui permettent de prendre des « sonagrammes » de l'intérieur de la Terre. Même l'analyse des séquences d'ADN utilise la transformée de Fourier !

#### 2.2.4 Utilisation de la FFT sous SCILAB<sup>©</sup> ou MATLAB<sup>©</sup>

On ne peut calculer la FFT que pour une fonction périodique. Si la fonction considérée ne l'est pas, on la restreint à un intervalle de longueur  $a$  (fenêtrage) et on la périodise. La période de la fonction est alors  $a$  et sa « **fréquence fondamentale** » est  $\lambda = \frac{1}{a}$ . Cette période n'est pas une caractéristique du signal. C'est un choix de l'utilisateur : c'est la taille de la fenêtre d'étude.

On échantillonne la fonction sur l'intervalle  $[0, a]$  (ou  $[t_o, t_o + a]$ ) en discrétisant avec  $N$  échantillons.

$$t_k = \frac{ka}{N}, k = 0, \dots, N.$$

$T_e = \frac{a}{N}$  est le pas de la discrétisation : c'est aussi la **période d'échantillonnage**.

$F_e = \frac{1}{T_e} = \frac{N}{a}$  est la **fréquence d'échantillonnage**. On calcule

$$Y(p) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_e) e^{-\frac{2i\pi kp}{N}}, p = 0, \dots, N-1,$$

la TFD de  $f$ . On sait alors que les coefficients de Fourier approchés sont

$$c_n = \begin{cases} Y_n & \text{si } 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1, \\ Y_{n+N} & \text{si } -\frac{N}{2} \leq n \leq 0 \end{cases}$$

En particulier si la fonction  $f$  est réelle, ses coefficients de Fourier sont « pairs » au sens suivant :  $c_{-n} = c_n$ . Pour construire le spectre énergie-fréquence des couples  $(n\lambda, |c_n|)$  il suffit de considérer des indices  $n \geq 0$ .

Pour des **fonctions réelles** on ne gardera donc que la partie  $Y(n)$ ,  $0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$  qui fournira les fréquences entre 0 et  $(\frac{N}{2} - 1)\lambda$ . La fonction `fft` de SCILAB<sup>©</sup> ou de MATLAB<sup>©</sup> calcule

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-\frac{2i\pi kp}{N}}, \quad p = 1, \dots, N-1.$$

Il faut donc

1. Remplacer  $x(k)$  par  $f(kT_e)$
2. Normaliser en divisant par  $N$
3. Ne garder que les  $Y(n)$ ,  $0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$  qui représenteront les coefficients de Fourier (approchés) correspondants aux fréquences  $n\lambda$ .
4. Dessiner le spectre énergie-fréquence, pour des fréquences variant de 0 à  $(\frac{N}{2} - 1)\lambda$ :

$$x = \text{lambda} * [ 0 : \frac{N}{2} - 1 ] ;$$

$$y = Y(1 : \frac{N}{2}) ;$$

$$\text{plot}(x, y)$$

## 2.3 La transformation de Fourier

Avec les séries de Fourier, on peut représenter des fonctions périodiques sur  $\mathbb{R}$  ou des fonctions définies sur un intervalle borné  $[a, b]$  (dans ce cas on les périodise). Comme on l'a vu avec le théorème de Dirichlet, on peut envisager des coefficients de Fourier (et des séries de Fourier) pour des fonctions qui ne sont pas dans  $L^2$  mais dans  $L^1$ . Ce sont les propriétés de convergence de ces séries qui changent mais pas

leur définition. Dans un premier temps, nous allons donc parler de Transformation de Fourier dans l'espace  $L^1(\mathbb{R})$ . On rappelle que

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty \right\}.$$

On peut considérer que la transformation de Fourier est un passage « à la limite » des coefficients de Fourier lorsque la période  $T$  de la fonction (ou **signal**) tend vers  $+\infty$  (signal aperiodique)).

Soit  $f$  un signal quelconque et  $N \in \mathbb{N}$ . On le restreint à  $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$  et on le périodise (on le note encore  $f$ ). Soit  $k \in \mathbb{Z}$  et  $\omega := \frac{k}{N} \in \mathbb{R}$ . Le  $k$  ième coefficient de Fourier de  $f$  (restreint à  $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$  et périodisé) vérifie

$$Nc_k = \int_{-N/2}^{N/2} f(t) \exp(-2i\pi \frac{k}{N}t) dt = \int_{-N/2}^{N/2} f(t) \exp(-2i\pi\omega t) dt.$$

La quantité  $Nc_k$  dépend de  $\omega$  via  $k$  et  $N$ . Si on passe à la limite formellement lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$  on obtient :

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{N \rightarrow +\infty} Nc_{\omega N} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-2i\pi\omega t) dt,$$

ou encore

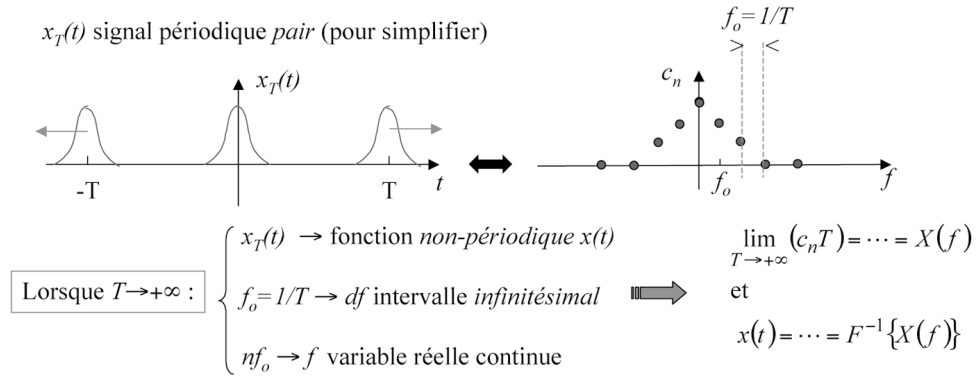
$$c_k \simeq \frac{1}{N} \hat{f}\left(\frac{k}{N}\right).$$

### Définition 2.3.1 (Transformée de Fourier)

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . On appelle  $\hat{f}$  la **transformée de Fourier** de  $f$  la fonction définie par :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-2i\pi\omega t) dt.$$

La fonction  $\hat{f}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et  $|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \|f\|_{L^1}$  pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ .



\*  $X(f)$  = “généralisation” de la série de Fourier aux fonctions non-périodiques

\*  $|X(f)| df$  = amplitude de la composante sinusoïdale de fréquence  $\in [f, f+df]$

\*  $\text{Arg}[X(f)]$  = phase ...

\*  $x(t)$  et  $X(f)$  sont deux descriptions *équivalentes* du même signal

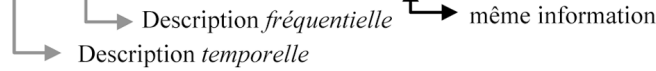


FIGURE 2.6 – Relation coefficients de Fourier -transformation de Fourier

**Exemple 2.3.1** On considère la fonction créneau :

$$f(t) = \begin{cases} b & \text{si } |t| \leq a \\ 0 & \text{si } |t| > a \end{cases}$$

Dans ce cas :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-a}^a e^{-2i\pi\omega t} b dt \text{ pour } \omega \neq 0.$$

Donc

$$\hat{f}(\omega) = b \left[ \frac{e^{-2i\pi\omega t}}{-2i\pi\omega} \right]_{-a}^a = \frac{b}{-2i\pi\omega} (e^{-2i\pi\omega a} - e^{2i\pi\omega a}) = \frac{b}{\pi\omega} \sin(2\pi\omega a).$$

Pour  $\omega = 0$ , on a  $\hat{f}(0) = 2ab$ . On remarque donc que la transformée de Fourier a un effet régularisant : on passe d’une fonction discontinue à une fonction continue.

**Définition 2.3.2 (Sinus cardinal)** *On appelle sinus cardinal la fonction*

$$\text{sinc}(t) \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

### 2.3.1 Propriétés de la transformation de Fourier

**Proposition 2.3.1 ( Régularisation - Continuité)**

*Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  alors  $\hat{f}$  est continue sur tout intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\hat{f}$  est bornée ( $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ ).*

*Démonstration* - Soient  $\omega$  dans un intervalle de  $\mathbb{R}$  donné.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi\omega t) f(t) dt .$$

C'est une intégrale dépendant d'un paramètre. La fonction  $\omega \mapsto \exp(-2i\pi\omega t)$  est continue pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .  $\hat{f}$  est donc continue. De plus, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$

$$|\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi\omega t) f(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \|f\|_1 .$$

Donc  $\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)| \leq \|f\|_1$ . □

**Corollaire 2.3.1** *La transformation de Fourier est une application linéaire continue de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ .*

*Démonstration* - Tout d'abord, il est clair qu'elle est linéaire :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \quad \widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g} .$$

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  :  $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$  et  $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ , ce qui permet de conclure □

**Proposition 2.3.2 (Parité)**

*Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , vérifiant  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . On a les implications suivantes :*

$$f \text{ paire} \implies \hat{f} \text{ réelle}$$

et

$$f \text{ impaire} \implies \hat{f} \text{ imaginaire} .$$

*Démonstration* - Montrons que  $f$  paire  $\implies \hat{f}$  réelle.

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi\omega t) f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 f(t) e^{2i\pi\omega t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} [e^{-2i\pi\omega t} f(t) + e^{2i\pi\omega t} f(-t)] dt.\end{aligned}$$

Comme  $f$  est paire,  $f(t) = f(-t)$  et

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} [e^{-2i\pi\omega t} + e^{2i\pi\omega t}] f(t) dt = \int_0^{+\infty} 2 \cos(2\pi\omega t) f(t) dt \in \mathbb{R}.$$

La deuxième propriété se montre de la même façon. □

**Proposition 2.3.3 (Décalage en temps (Time shifting))**

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . On pose  $g(t) = f(t - \tau)$  où  $\tau > 0$ . Alors

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \hat{g}(\omega) = \exp(-2i\pi\omega\tau) \hat{f}(\omega).$$

*Démonstration* - Comme  $g(t) = f(t - \tau)$  pour tout  $t$ ,

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) \exp(-2i\pi\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi\omega(t - \tau)) f(t - \tau) \exp(-2i\pi\omega\tau) dt \\ &= \exp(-2i\pi\omega\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) \exp(-2i\pi\omega(t - \tau)) dt.\end{aligned}$$

Par conséquent  $\hat{g}(\omega) = \exp(-2i\pi\omega\tau) \hat{f}(\omega)$ . □

En d'autres termes, un retard de  $\tau$  dans le domaine temporel de  $f$  correspond à un décalage de  $\omega\tau$  de la phase à la fréquence  $\omega$  dans le domaine fréquentiel.

**Proposition 2.3.4 (Changement d'échelle (Time scaling))**

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et on pose  $g(t) = f(\gamma t)$  avec  $\gamma > 0$ . Alors

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \hat{g}(\omega) = \frac{1}{\gamma} \hat{f}\left(\frac{\omega}{\gamma}\right).$$

*Démonstration* - On pose  $s = \gamma t$ . On obtient

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi\omega t) f(\gamma t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi\omega \frac{s}{\gamma}) f(s) \frac{ds}{\gamma} \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi \frac{\omega}{\gamma} s) f(s) ds = \frac{1}{\gamma} \hat{f}(\frac{\omega}{\gamma}).\end{aligned}$$

□

**Corollaire 2.3.2** Soit  $g(t) = f(\gamma t - \tau)$  avec  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\tau > 0, \gamma > 0$ . Alors

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\gamma} \exp(-2i\pi\omega \frac{\tau}{\gamma}) \hat{f}(\frac{\omega}{\gamma}).$$

**Définition 2.3.3 (Convolution)**

Soit  $f_1$  et  $f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ . La **convolée** de  $f_1$  par  $f_2$  notée  $f_1 * f_2$  est définie par :

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-s) f_2(s) ds.$$

Si on prend  $f_2 \in L^\infty(\mathbb{R})$  et  $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$ , on a :

$$|(f_1 * f_2)(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t-s)| |f_2(s)| ds \leq \|f_2\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t-s)| ds = \|f_2\|_\infty \|f_1\|_1.$$

Donc dans ce cas  $f_1 * f_2$  est bien définie et appartient à  $L^\infty(\mathbb{R})$ .

De même si  $f_1$  et  $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$  alors  $|(f_1 * f_2)(t)| \leq \|f_2\|_2 \|f_1\|_2$ . Donc  $f_1 * f_2$  est bien définie et appartient encore à  $L^\infty(\mathbb{R})$  (grâce à l'inégalité de Hölder).

**Remarque 2.3.1** Si  $f_1$  et  $f_2$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  alors  $f_1 * f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ .

**Théorème 2.3.1** Soit  $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$  telles que  $g = f_1 * f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors  $\hat{g}(w) = \hat{f}_1(w) \cdot \hat{f}_2(w)$  (c'est-à-dire  $\widehat{f_1 * f_2} = \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2$ .)

*Démonstration* - La transformée de Fourier de  $g = f_1 * f_2$  est

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\omega t} f_1 * f_2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-s) f_2(s) ds \right] dt.$$

Posons  $h(t, s) = e^{-2i\pi\omega t} f_1(t-s) f_2(s) \in L^1(\mathbb{R})$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |h(t, s)| dt ds &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f_1(t-s) f_2(s)| dt ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t-s)| dt \right) |f_2(s)| ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |h(t, s)| dt ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \|f_1\|_1 |f_2(s)| ds = \|f_1\|_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(s)| ds = \|f_1\|_1 \|f_2\|_1.$$

On peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \exp(-2i\pi\omega t) f_1(t-s) f_2(s) ds dt \\ &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \exp(-2i\pi\omega(t-s)) \exp(-2i\pi\omega s) f_1(t-s) f_2(s) ds dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi\omega(t-s)) f_1(t-s) dt \right) \exp(-2i\pi\omega s) f_2(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_1(\omega) \exp(-2i\pi\omega s) f_2(s) ds \\ &= \hat{f}_1(\omega) \hat{f}_2(\omega). \end{aligned}$$

□

### **Théorème 2.3.2 (Dérivation)**

On suppose que  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$  et que  $Df = f' \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors  $\widehat{Df}(\omega) = 2i\pi\omega \hat{f}(\omega)$ .

*Démonstration* - On peut écrire que

$$\widehat{Df}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi\omega t) Df(t) dt = \lim_{(a,b) \rightarrow \pm\infty} \int_a^b \exp(-2i\pi\omega t) Df(t) dt ;$$



donc, par intégration par parties :

$$\widehat{Df}(\omega) = [\exp(-2i\pi\omega t)f(t)]_a^b + \int_a^b 2i\pi\omega \exp(-2i\pi\omega t) f(t) dt .$$

Or  $|\exp(-2i\pi\omega t)f(t)| \leq |f(b)| + |f(a)| \rightarrow 0$  quand  $(a, b) \rightarrow \pm\infty$  car  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $f' \in L^1(\mathbb{R})$  (voir lemme ci-dessous). Par conséquent

$$\widehat{Df}(\omega) = 2i\pi\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi\omega t) f(t) dt = 2i\pi\omega \hat{f}(\omega).$$

□

**Lemme 2.3.1** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$  telle que  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 .$$

*Démonstration* - On considère le cas où  $x \rightarrow +\infty$ , l'autre se traite de la même façon. Montrons d'abord que  $f(x)$  admet une limite quand  $x \rightarrow +\infty$ . On a

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt ,$$

puisque  $f'$  est continue.

Comme  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f'(t) dt$  existe et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  admet une limite  $\ell$  nécessairement nulle. En effet si  $\ell \neq 0$  (par exemple si  $\ell > 0$ ), on peut trouver  $A \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \geq A \quad |f(x)| \geq \frac{\ell}{2} ,$$

ce qui contredit le fait que  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . □

Nous pouvons préciser un peu la régularité de la transformée de Fourier d'une fonction de  $L^1(\mathbb{R})$  :

**Théorème 2.3.3** 1. Si  $t \mapsto t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$  pour tout  $0 \leq k \leq p$ , alors  $\hat{f}$  est  $p$  fois dérivable et

$$\forall k = 1, 2, \dots, p \quad \hat{f}^{(k)}(\omega) = (-2i\pi)^k \widehat{t^k f}(\omega) .$$

2. Si  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^p$  et si toutes les dérivées  $f^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, p$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  alors

$$\forall k = 1, 2, \dots, p \quad \widehat{f^{(k)}}(\omega) = (2i\pi\omega)^k \hat{f}(\omega) .$$

3. Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  est à support borné alors  $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

*Démonstration* - La fonction  $h : \omega \mapsto \overline{f(t) \exp(-2i\pi\omega t)}$  est indéfiniment dérivable et on a

$$h^{(k)}(\omega) = (-2i\pi t)^k \exp(-2i\pi\omega t) f(t).$$

Donc  $|h^{(k)}(\omega)| \leq (2\pi)^k |t^k f(t)|$  avec  $t \mapsto t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ . On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale pour  $k = 1, 2, \dots, p$ . On obtient

$$\hat{f}^{(k)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi t)^k \exp(-2i\pi\omega t) f(t) dt = (-2i\pi)^k \widehat{t^k f}(\omega).$$

*Rappel* : Soit  $\mathcal{V}$  un voisinage de  $\omega^*$  dans  $\mathbb{R}$  tel que

i.  $\omega \mapsto \varphi(\omega, t)$  est continuellement dérivable sur  $\mathcal{V}$  pour presque tout  $t$  et

$\varphi(\omega, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}), \forall \omega \in \mathcal{V}$ .

ii. Il existe  $g \in L^1(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $\omega \in \mathcal{V}$

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}(\omega, t) \right| \leq g(t) \text{ p.p. .}$$

Alors la fonction

$$I : \omega \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega, t) dt$$

est dérivable en  $\omega^*$  et  $I'(\omega^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}(\omega, t) dt$ .

2. Le résultat s'obtient par récurrence en utilisant le théorème 2.3.2.

3. Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  est à support borné, il est clair que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  la fonction  $t \mapsto t^k f(t)$  est intégrable et donc d'après (1)  $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .  $\square$

Donnons un exemple montrant que la transformée de Fourier d'une fonction  $L^1$  peut-être « mieux » que continue.

### Exemple 2.3.2

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \exp(-t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Calculons la transformée de Fourier de  $f$  :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_0^{+\infty} \exp(-2i\pi\omega t) \exp(-t) dt = \int_0^{+\infty} \exp(-(2i\pi\omega + 1)t) dt \\ &= -\frac{1}{1 + 2i\pi\omega} [\exp(-(2i\pi\omega + 1)t)]_0^{+\infty}. \end{aligned}$$

Finalement  $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1 + 2i\pi\omega}$ . De plus

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega + \alpha) - \hat{f}(\omega)| &= \left| \frac{1}{1 + 2i\pi(\omega + \alpha)} - \frac{1}{1 + 2i\pi\omega} \right| \\ &= \left| \frac{-2i\pi\alpha}{(1 + 2i\pi(\omega + \alpha))(1 + 2i\pi\omega)} \right| \\ &= \frac{2\pi|\alpha|}{\sqrt{(1 + 4\pi^2\omega^2)(1 + 4\pi^2(\omega + \alpha)^2)}} \\ &\leq 2\pi|\alpha|. \end{aligned}$$

Donc  $\hat{f}$  est uniformément continue.

Montrons un exemple d'application des théorèmes de dérivation pour déterminer la transformée de Fourier d'une fonction :

**Exemple 2.3.3 (Transformée de Fourier de la gaussienne)** Nous allons calculer la transformée de Fourier de  $x \mapsto f(x) = e^{-ax^2}$  avec  $a > 0$  sans utiliser une méthode d'intégration dans le plan complexe.

Remarquons que  $f'(x) = -2axf(x)$ . Prenons la transformée de Fourier de chaque membre de l'égalité :

$$2i\pi\omega\hat{f}(\omega) = \frac{a}{i\pi}(2i\pi x \widehat{f(x)}) = \frac{a}{i\pi}(\hat{f})'(\omega),$$

d'où

$$\hat{f}'(\omega) + \frac{2\pi^2}{a}\omega\hat{f}(\omega) = 0.$$

Une solution particulière de cette équation est  $e^{-\frac{\pi^2}{a}\omega^2}$ .

En cherchant  $\hat{f}(\omega)$  sous la forme  $K(\omega)e^{-\frac{\pi^2}{a}\omega^2}$  on trouve  $K(\omega) = K = K(0)$ .

Comme  $K = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$  on obtient

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\omega^2}.$$

On constate que la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne d'écart-type  $\sigma = \frac{1}{\sqrt{a}}$  est encore une fonction gaussienne d'écart-type  $\frac{1}{\pi\sigma}$ .

Terminons par un résultat sur la transformée de Fourier et l'opérateur de translation

**Théorème 2.3.4 (Transformée de Fourier et translation)** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{T}_a$  l'opérateur de translation défini par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathcal{T}_a(f)(x) = f(x - a);$$

Alors  $\mathcal{T}_a f \in L^1(\mathbb{R})$  et :

i.  $\widehat{\mathcal{T}_a f}(\omega) = e^{-2i\pi a\omega} \hat{f}(\omega)$

ii.  $\mathcal{T}_a \hat{f}(\omega) = e^{2i\pi a\omega} \hat{f}(\omega)$

*Démonstration* - Montrons le point i.

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{T}_a f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - a) e^{-2i\pi x\omega} dx \\ &= e^{-2i\pi a\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - a) e^{-2i\pi(x-a)\omega} d(x - a) \\ &= e^{-2i\pi a\omega} \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

Le point ii. s'obtient de la même manière □

### 2.3.2 Théorème d'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Il est naturel de se demander si la transformation de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$  possède une réciproque. Bien sûr, c'est faux car l'espace d'arrivée n'est pas  $L^1(\mathbb{R})$  mais un espace plus petit :  $L^\infty(\mathbb{R})$ . Il faut donc ajouter des hypothèses sur  $f$ . Donnons un exemple pour illustrer cela :

**Exemple 2.3.4** Soit  $[a, b]$  un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$  et  $f = \chi_{[a,b]}$  sa fonction indicatrice. Un calcul immédiat donne

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} b - a & \text{si } \omega = 0 \\ \frac{\sin \pi(b-a)\omega}{\pi\omega} e^{-i\pi(a+b)\omega} & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit que  $\hat{f}$  n'est pas dans  $L^1(\mathbb{R})$  car  $\omega \mapsto \left| \frac{\sin \pi(b-a)\omega}{\pi\omega} \right|$  n'est pas intégrable.

### Théorème 2.3.5 (Théorème de Riemann-Lebesgue)

Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  alors  $\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} |\hat{f}(\omega)| = 0$ .

*Démonstration* - Soit  $[a, b]$  un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$  et  $f = \chi_{[a,b]}$  sa fonction indicatrice.

L'exemple 2.3.4 montre que  $|\hat{f}(w)| \leq \frac{1}{\pi|w|}$  si  $w \neq 0$ . Donc  $\lim_{|w| \rightarrow +\infty} |\hat{f}(w)| = 0$ .

Soit maintenant  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Les fonctions caractéristiques d'intervalles sont denses dans  $L^1(\mathbb{R})$  : il existe une suite  $g_n$  de telles fonctions telles que  $\|f - g_n\|_1 \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et pour tout  $n$   $\lim_{|w| \rightarrow +\infty} |\hat{g}_n(w)| = 0$ . Soit  $w \in \mathbb{R}$  :

$$|\hat{f}(w)| \leq |\hat{f}(w) - \hat{g}_n(w)| + |\hat{g}_n(w)| \leq \|\hat{f} - \hat{g}_n\|_\infty + |\hat{g}_n(w)| \leq \|f - g_n\|_1 + |\hat{g}_n(w)|.$$

Il s'ensuit que  $\lim_{|w| \rightarrow +\infty} |\hat{f}(w)| = 0$ .  $\square$

**Remarque 2.3.2** Ce lemme est à rapprocher du théorème de Riemann-Lebesgue pour les séries :

$$\lim_{|N| \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T f(t) \exp(-2i\pi Nt) dt = 0 ;$$

$T$  est ici « remplacé » par  $+\infty$  et  $N$  par  $\omega$ .

**Proposition 2.3.5** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^1(\mathbb{R})$ . Alors  $f\hat{g}$  et  $\hat{f}g$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{g}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)g(t) dt .$$

*Démonstration* - On a vu que  $\hat{g}$  est bornée, donc  $f\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ . De la même façon,  $\hat{f}g \in L^1(\mathbb{R})$ . D'autre part, il est clair que  $(t, s) \mapsto f(t)g(s)e^{-2i\pi ts} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ . Donc, on peut appliquer le théorème de Fubini et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{g}(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{-2i\pi st} ds \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi st} dt \right] ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s)g(s) ds . \end{aligned}$$

$\square$

Nous avons vu que si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f}$  n'est a priori pas un élément de  $L^1(\mathbb{R})$  : on ne peut donc envisager une formule d'inversion sans hypothèses supplémentaires. Le moyen le plus simple est donc de supposer  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ .

**Théorème 2.3.6 (Théorème d'inversion de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$ )** *Supposons que  $f$  et  $\hat{f}$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ . Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \exp(2i\pi\omega t) d\omega = f(t),$$

en tout point  $t$  où  $f$  est continue.

*Démonstration* - Soit  $g_n$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $g_n(x) = e^{-\frac{2\pi}{n}|x|}$ ; sa transformée de Fourier est  $\hat{g}_n(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2\omega^2}$ . Les fonctions  $g_n$  et  $\hat{g}_n$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ . La proposition 2.3.5 appliquée à  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $x \mapsto e^{2i\pi tx} g_n(x)$  donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) g_n(\omega) e^{2i\pi t\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \widehat{g_n(\omega) e^{2i\pi t\omega}} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \hat{g}_n(u-t) du.$$

En effet la proposition 2.3.4 montre que

$$g_n(\widehat{\omega} e^{2i\pi t\omega}) = \mathcal{T}_t \hat{g}_n(\omega) = \hat{g}_n(\omega - t).$$

Lorsque  $n \rightarrow +\infty$  on peut passer à la limite dans  $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) g_n(\omega) e^{2i\pi t\omega} d\omega$  grâce au théorème de Lebesgue : en effet

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = 1 \text{ pour tout } x \text{ et } \left| \hat{f}(x) g_n(x) e^{2i\pi tx} \right| \leq |\hat{f}(x)|.$$

On obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) g_n(\omega) e^{2i\pi t\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{2i\pi t\omega} d\omega.$$

Supposons que  $f$  est continue en  $t$ . Il reste à montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \hat{g}_n(u-t) du$  converge vers  $f(t)$ . Comme  $\hat{g}_n \in L^1(\mathbb{R})$  on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_n(\omega) d\omega = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2\omega^2} d\omega = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \hat{g}_n(u-t) du - f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \hat{g}_n(x) dx - f(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+t) - f(t)] \hat{g}_n(x) dx. \end{aligned}$$

Comme  $f$  est continue en  $t$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $|y - t| \leq \eta$  implique  $|f(y) - f(t)| \leq \varepsilon$ . Décomposons

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+t) - f(t)] \hat{g}_n(x) dx &= \int_{|x| \leq \eta} [f(x+t) - f(t)] \hat{g}_n(x) dx \\ &+ \int_{|x| \geq \eta} [f(x+t) - f(t)] \hat{g}_n(x) dx . \end{aligned}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x| \leq \eta} [f(x+t) - f(t)] \hat{g}_n(x) dx \right| &\leq \int_{|x| \leq \eta} |f(x+t) - f(t)| |\hat{g}_n(x)| dx \\ &\leq \varepsilon \int_{|x| \leq \eta} |\hat{g}_n(x)| dx \leq \varepsilon . \end{aligned}$$

Estimons le deuxième terme :  $\int_{|x| \geq \eta} [f(x+t) - f(t)] \hat{g}_n(x) dx$ . Tout d'abord

$$\left| \int_{|x| \geq \eta} f(t) \hat{g}_n(x) dx \right| = \left| f(t) \int_{|x| \geq \eta} \hat{g}_n(x) dx \right| = |f(t)| \left( 1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(n\eta) \right) .$$

D'autre part, comme  $\hat{g}_n$  est paire et décroissante sur  $\mathbb{R}^+$

$$\left| \int_{|x| \geq \eta} f(x+t) \hat{g}_n(x) dx \right| \leq \hat{g}_n(\eta) \|f\|_1 .$$

Les deux majorants convergent vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|x| \geq \eta} [f(x+t) - f(t)] \hat{g}_n(x) dx = 0 .$$

□

Si on définit  $\bar{\mathcal{F}}$  sur  $L^1(\mathbb{R})$  par

$$\bar{\mathcal{F}}(g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \exp(2i\pi\omega t) d\omega ,$$

le théorème ci-dessus s'écrit  $\bar{\mathcal{F}}\hat{f}(t) = f(t)$  en tout point  $t$  où  $f$  est continue. En fait, on a un résultat plus fin que nous admettrons :

**Théorème 2.3.7** Si  $f$  et  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  alors  $\bar{\mathcal{F}}\hat{f} = f$  presque partout.

Enfin, il n'est pas toujours facile de savoir si  $\hat{f}$  est dans  $L^1(\mathbb{R})$ . Le résultat suivant nous donne un critère basé uniquement sur la connaissance de  $f$ .

**Proposition 2.3.6** *Si  $f \in C^2(\mathbb{R})$  et si  $f, f'$  et  $f''$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  alors  $\hat{f}$  est intégrable.*

*Démonstration* - Le résultat de dérivation donne  $\widehat{f''}(\omega) = -4\pi^2\omega^2\hat{f}(\omega)$ . D'autre part le lemme de Riemann-Lebesgue 2.3.5 montre que  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |\widehat{f''}(\omega)| = 0$ . Il existe donc  $M > 0$  tel que pour tout  $|\omega| \geq M$  on a  $4\pi^2|\omega^2||\hat{f}(\omega)| \leq 1$ . Comme  $|\hat{f}|$  est continue et majorée par  $\frac{1}{4\pi^2\omega^2}$  à l'infini,  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Corollaire 2.3.3** *Si  $f$  est une fonction continue, intégrable telle que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :*

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f)(x) = \check{f}(x) := f(-x),$$

où  $\mathcal{F}$  désigne la transformation de Fourier « directe ».

*Démonstration* - Posons  $g = \hat{f}$  on a

$$\hat{g}(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{2i\pi x\omega} d\omega = \bar{\mathcal{F}}\hat{f}(x).$$

Comme  $f$  est continue, avec le théorème d'inversion on obtient  $\hat{g}(-x) = f(x)$  c'est-à-dire  $\hat{g}(x) = f(-x) = \check{f}(x)$ . Donc  $\hat{\hat{f}} = \check{f}$ .  $\square$

Nous terminons enfin par un résultat d'unicité qui résulte du théorème 2.3.7 :

**Théorème 2.3.8** *Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\hat{f}(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  est nulle presque partout.*

## 2.4 La transformation de Fourier-Plancherel

Nous avons observé dans les sections précédentes qu'on devait restreindre l'espace  $L^1(\mathbb{R})$  pour les formules de dérivation par exemple. Nous allons introduire un sous-espace de  $L^1(\mathbb{R})$  stable par transformation de Fourier, par dérivation et par multiplication par un polynôme.

### 2.4.1 Les fonctions à décroissance rapide

**Définition 2.4.1** *Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite à décroissance rapide si*

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x^p f(x)| = 0.$$



Cette définition signifie que  $f$  tend vers 0 à l'infini plus vite que tous les inverses des polynômes : c'est le cas par exemple des fonctions à support compact ou de la fonction  $x \mapsto e^{-|x|}$ . On notera que malgré le terme « décroissance », la fonction  $f$  n'est pas nécessairement monotone au voisinage de l'infini (exemple :  $f(x) = \sin x e^{-|x|}$ ).

Donnons une propriété d'intégrabilité de ces fonctions :

**Proposition 2.4.1** *Si  $f$  est une fonction de  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  à décroissance rapide alors pour tout  $p \in \mathbb{N}$  la fonction  $x \mapsto x^p f(x)$  appartient à  $L^1(\mathbb{R})$ .*

*Démonstration* - Soit  $p \in \mathbb{N}$ ;  $f$  étant à décroissance rapide, il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $|x| \geq M$  on a  $|x^{p+2} f(x)| \leq 1$ . D'où

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x^p f(x)| dx &\leq \int_{|x| \leq M} |x^p f(x)| dx + \int_{|x| \geq M} \frac{1}{x^2} |x^{p+2} f(x)| dx \\ &\leq M^p \int_{|x| \leq M} |f(x)| dx + \int_{|x| \geq M} \frac{1}{x^2} dx < +\infty. \end{aligned}$$

□

On en déduit une propriété remarquable de la transformée de Fourier des fonctions à décroissance rapide :

**Proposition 2.4.2** *Soit  $f$  est une fonction de  $L^1(\mathbb{R})$  à décroissance rapide. Alors  $\hat{f}$  est  $C^\infty$ .*

*Démonstration* - On applique le point 1. du théorème 2.3.3 et la proposition 2.4.1. □  
Nous avons un résultat « symétrique » :

**Proposition 2.4.3** *Soit  $f$  est une fonction de  $C^\infty(\mathbb{R})$  à décroissance rapide. Si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(k)}$  est dans  $L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\hat{f}$  est à décroissance rapide.*

*Démonstration* - Grâce au théorème 2.3.3 (point 2.),  $\widehat{f^{(k)}}(\omega) = (2i\pi\omega)^k \hat{f}(\omega)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

En appliquant le théorème de Riemann-Lebesgue il vient  $\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} |\omega^k \hat{f}(\omega)| = 0$ . □

En résumé nous venons de voir que

- |  |
|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>i. plus <math>f</math> décroît rapidement à l'infini, plus <math>\hat{f}</math> est régulière</li> <li>ii. plus <math>f</math> est régulière, plus <math>\hat{f}</math> décroît rapidement à l'infini.</li> </ul> |
|--|

En particulier si  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  est à décroissance rapide, il en est de même pour  $\hat{f}$ .

### 2.4.2 L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

**Définition 2.4.2** On appelle  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  (espace de Schwarz) l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  qui vérifient les deux propriétés suivantes

- i.  $f$  est  $C^\infty$
- ii.  $f$  et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide

On peut donner des propriétés immédiates

**Proposition 2.4.4** L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  a les propriétés suivantes :

- i.  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est stable par multiplication par un polynôme
- ii.  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est stable par dérivation ( $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ )
- iii.  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ .

Remarquons que  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  contient l'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  des fonctions  $C^\infty$  à support compact. Or nous savons que cet espace est dense dans  $L^p(\mathbb{R})$  pour  $p \in [1, +\infty[$ . Donc  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est en particulier dense dans  $L^1(\mathbb{R})$ .

Le résultat suivant est le résultat essentiel de cette section :

**Théorème 2.4.1**  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est stable par transformation de Fourier :

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

*Démonstration* - Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Comme  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et à décroissance rapide,  $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ . D'autre part, comme  $f^{(k)}$  est à décroissance rapide pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(k)}$  est intégrable. Donc  $\hat{f}$  est à décroissance rapide. Il reste à examiner les dérivées de  $\hat{f}$ .

$$\omega^k \hat{f}^{(p)}(\omega) = \omega^k \widehat{(-2i\pi x)^p f(x)} = \frac{1}{(2i\pi)^k} \mathcal{F}([(-2i\pi x)^p f(x)]^{(k)}). \quad (2.4.10)$$

Comme toutes les dérivées de  $f$  sont à décroissance rapide  $x \mapsto [(-2i\pi x)^p f(x)]^{(k)}$  est intégrable.

Avec le Théorème de Riemann-Lebesgue il vient  $\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} |\omega^k \hat{f}^{(p)}(\omega)| = 0$ .  $\square$

Nous aurons besoin d'une notion de convergence séquentielle sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  :

**Définition 2.4.3** On dit que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  tend vers 0 (quand  $n$  tend vers l'infini) si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p f_n^{(q)}(x)| = 0.$$

Cette définition entraîne la convergence uniforme de  $f$  et de toutes ses dérivées. Le résultat suivant permet de comparer cette notion de convergence avec la convergence  $L^1$ .

**Proposition 2.4.5** *Si la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  alors*

- i.  $f_n' \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  (continuité de la dérivation)
- ii. Pour tout polynôme  $P$ ,  $Pf_n \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .
- iii.  $f_n \rightarrow 0$  dans  $L^1(\mathbb{R})$  (l'injection de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans  $L^1(\mathbb{R})$  est continue)
- iv.  $\hat{f}_n \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  (continuité de la transformée de Fourier sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ )

*Démonstration* - i. évident.

ii. Il suffit de faire la démonstration pour  $P(x) = x^k$  et de prouver que  $x^p(x^k f_n(x))^{(q)}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  ce qui découle de la formule de Leibniz et de la définition de la convergence dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

iii. Comme  $f_n \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R} \quad |(1+x^2)f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\forall n \geq N, \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)| dx \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \varepsilon \pi.$$

Donc  $f_n \rightarrow 0$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ .

iv. Utilisons l'équation (2.4.10) :  $|\omega^p \hat{f}_n^{(q)}(\omega)| = (2\pi)^{q-p} |\mathcal{F}(x^q f_n(x))^{(p)}(\omega)|$ . Posons  $g_n(x) = (x^q f_n(x))^{(p)}$ . On sait que  $g_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et avec i). et ii) que  $g_n \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Donc grâce à iii.  $g_n \rightarrow 0$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ . Comme  $|\hat{g}_n(\omega)| \leq \|g_n\|_1$ , iv. est démontré.  $\square$

### 2.4.3 Transformation de Fourier inverse sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Si  $f$  est un élément de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f}$  est dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  et donc est intégrable. De plus  $f$  est continue partout : le théorème d'inversion donne donc

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \exp(2i\pi\omega t) d\omega$$

ou encore

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad f = \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f).$$

De la même façon  $f = \mathcal{F}(\bar{\mathcal{F}}f)$ .  $\mathcal{F}$  est donc une bijection de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  et son inverse est  $\mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}}$ . On peut encore affiner ce résultat

**Théorème 2.4.2** *La transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  est une application linéaire bijective et bicontinue de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . L'application inverse est  $\bar{\mathcal{F}}$  c'est-à-dire que les relations*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\omega t} dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{2i\pi\omega t} d\omega$$

sont équivalentes pour un élément  $f$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

*Démonstration* - La continuité de  $\mathcal{F}$  a été montrée dans la sous-section précédente. Celle de  $\bar{\mathcal{F}}$  se montre de la même manière.  $\square$

**Exemple 2.4.1** *Nous avons vu dans l'exemple 2.3.3 que la transformée de Fourier de  $g : x \mapsto g(x) = e^{-\pi x^2}$  est elle-même. La fonction gaussienne  $g$  est clairement dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Elle est **invariante** par transformation de Fourier.*

## 2.5 Transformation de Fourier-Plancherel

On souhaite étendre la transformation de Fourier aux fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  et si possible obtenir des propriétés liées à la structure hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$ . On rappelle que

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}.$$

Le produit hermitien de  $L^2(\mathbb{R})$  est donné par

$$(f, g)_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{g}(t) dt$$

et la norme associée est

$$\|f\|_2 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Comme  $L^1(\mathbb{R})$  et  $L^2(\mathbb{R})$  ne sont pas inclus l'un dans l'autre (alors que dans le cas d'un intervalle borné  $I$ ,  $L^2(I) \subset L^1(I)$ ) nous ne pouvons pas définir « directement » la transformée de Fourier d'une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$ . En revanche nous pouvons tout-à-fait considérer la transformée de Fourier d'une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  qui est un sous-espace de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Nous allons partir de cette observation pour étendre ensuite la notion de transformée de Fourier à tout l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  par densité. Ce n'est plus exactement la Transformation de Fourier : elle porte le nom de Transformation de **Fourier-Plancherel**.

**Proposition 2.5.1**  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel dense de  $L^2(\mathbb{R})$ .

*Démonstration* - Vérifions que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ . Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . On peut trouver  $A > 0$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a  $|(1+x^2)f(x)| \leq A$ . On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \leq A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} < +\infty.$$

La densité découle de la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ .  $\square$

Avant de prolonger  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  à tout l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  donnons l'équivalent de l'égalité de Parseval pour des fonctions de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Proposition 2.5.2 (Egalité de Plancherel-Parseval)** Soient  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . On a

i.  $(\hat{f}, \hat{g})_2 = (f, g)_2$

ii.  $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ .

*Démonstration* - Posons  $h(\omega) = \bar{\hat{g}}(\omega)$ . Or

$$h(\omega) = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2i\pi\omega t} dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(t)e^{2i\pi\omega t} dt = \bar{\mathcal{F}}(\bar{g})(\omega);$$

donc  $\hat{h} = \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}(\bar{g}) = \bar{g}$  Appliquons maintenant la proposition 2.3.5 à  $f$  et  $h$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)h(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{h}(t) dt,$$

ce qui est équivalent à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\bar{\hat{g}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{g}(t) dt.$$

Le point ii. se montre en appliquant i. avec  $f = g$ .  $\square$

On peut à présent étendre la transformation  $\mathcal{F}$  de l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  à tout l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  en utilisant le résultat d'analyse fonctionnelle suivant :

**Proposition 2.5.3** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés,  $F$  banach et  $G$  un sous-espace dense de  $E$ . Soit  $A$  un opérateur linéaire continu de  $G$  dans  $F$ . Alors il existe un prolongement unique  $\tilde{A}$  de  $A$ , linéaire continu de  $E$  dans  $F$  et la norme de  $\tilde{A}$  est égale à la norme de  $A$ .

Comme  $\mathcal{F}$  est une isométrie sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  muni de la norme de  $L^2(\mathbb{R})$ , on peut appliquer le résultat précédent avec  $E = F = L^2(\mathbb{R})$  et  $G = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . On obtient :

**Théorème 2.5.1 (Transformation de Fourier - Plancherel)** *La transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  (respectivement la transformation inverse  $\bar{\mathcal{F}}$ ) se prolonge en une isométrie de  $L^2(\mathbb{R})$  sur  $L^2(\mathbb{R})$ . On note de la même façon ce prolongement. On a*

i.  $\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}f = \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$  presque partout.

ii.  $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}) \quad (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)_2 = (f, g)_2.$

iii.  $\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2.$

*Démonstration* - Il suffit de passer à la limite dans les égalités similaires obtenues dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .  $\square$

Précisons un peu ce prolongement. Tout d'abord nous avons l'analogie de la proposition 2.3.5 p.45

**Proposition 2.5.4** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$ . Alors  $f \cdot \mathcal{F}g$  et  $g \cdot \mathcal{F}f$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  et on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f(t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathcal{F}g(t) dt .$$

*Démonstration* - On a vu précédemment que  $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R})$ . Donc  $g \cdot \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ . Approchons  $f$  et  $g$  par des suites  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . On a

$$\mathcal{F}f_n = \hat{f}_n, \quad \mathcal{F}g_n = \hat{g}_n .$$

Comme  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$  la proposition 2.3.5 donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f_n(t)g_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\mathcal{F}g_n(t) dt ;$$

le résultat voulu s'obtient par passage à la limite.  $\square$

**Théorème 2.5.2** i.) *La transformation de Fourier définie sur  $L^1(\mathbb{R})$  et celle obtenue par prolongement sur  $L^2(\mathbb{R})$ , coïncident sur  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ .*

ii.) *Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{F}f$  est la limite dans  $L^2(\mathbb{R})$  de la suite  $g_n$  définie par*

$$g_n(\omega) = \int_{-n}^n f(t)e^{-2i\pi t\omega} dt .$$

*Démonstration* - i.) Notons (comme d'habitude)  $\hat{f}$  la transformée de Fourier de  $f$  dans  $L^1(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{F}f$  celle sur  $L^2(\mathbb{R})$  obtenue par prolongement.

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . En appliquant les propositions 2.3.5 et 2.5.4 on obtient pour toute fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\hat{f}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(t)f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\varphi(t)f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\mathcal{F}f(t) dt .$$

Donc

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)(\hat{f}(t) - \mathcal{F}f(t)) dt = 0 .$$

Comme  $\hat{f} - \mathcal{F}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  on en déduit que  $\hat{f} = \mathcal{F}f$  p.p.

ii.) Posons  $f_n = f \cdot \chi_{[-n,n]}$ . Avec le théorème de Lebesgue on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_2 = 0 .$$

Comme  $f_n \in L^1(\mathbb{R})$  on sait que  $g_n = \hat{f}_n = \mathcal{F}f_n$  et par continuité de  $\mathcal{F}$  on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n - \mathcal{F}f\|_2 = 0 .$$

□

**Remarque 2.5.1** 1. Dans la suite, on notera indifféremment  $\hat{f}$  la transformée de Fourier et la transformée de Fourier-Plancherel de  $f$ . On sait maintenant quel sens il faut lui donner suivant que  $f \in L^1(\mathbb{R})$  ou  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

2. La suite  $g_n$  ci-dessus converge aussi presque partout vers  $f$ .

3. Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\bar{\mathcal{F}}f$  est la limite dans  $L^2(\mathbb{R})$  de la suite  $h_n$  définie par

$$h_n(\omega) = \int_{-n}^n f(t)e^{2i\pi t\omega} dt .$$

### 2.5.1 Coefficient de Fourier versus transformation de Fourier

Nous avons vu en introduction (Fig. 2.6 page 36) que la transformée de Fourier pouvait être interprétée comme un « passage à la limite » des coefficients de Fourier. Nous allons préciser cela de deux façons.

Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $T > 0$ . Soit  $f_T$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ . On note encore  $f_T$  le signal obtenu par périodisation. Il est clair que  $f_T \in L^2_p(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ . Le  $k^e$  coefficient de Fourier de  $f_T$  est

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-2i\pi \frac{k}{T}t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)e^{-2i\pi \frac{k}{T}t} dt ,$$

où

$$g(t) = \frac{1}{T} \chi_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}$$

et  $\chi_{[a,b]}$  est la fonction indicatrice de  $[a, b]$ . Par conséquent

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad c_k = \widehat{fg} \left( \frac{k}{T} \right).$$

On peut pousser un peu plus l'analyse ; nous avons déjà vu que  $g = \mathcal{F}(\text{sinc}(\pi T \cdot))$ . De même, grâce au théorème d'inversion de Fourier, nous avons  $f = \mathcal{F}(\check{f})$ . On obtient donc :  $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} c_k &= \mathcal{F} \left( \mathcal{F}(\text{sinc}(\pi T \cdot)) \mathcal{F}(\check{f}) \right) \left( \frac{k}{T} \right) \\ &= \mathcal{F} \left( \mathcal{F}(\text{sinc}(\pi T \cdot) * \check{f}) \right) \left( \frac{k}{T} \right) \\ &= (\text{sinc}(\pi T \cdot) * \check{f}) \left( -\frac{k}{T} \right) \\ &= (\text{sinc}(\pi T \cdot) * f) \left( \frac{k}{T} \right). \end{aligned}$$

En résumé, pour tout  $T > 0$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad c_k(f_T) = (\text{sinc}(\pi T \cdot) * f) \left( \frac{k}{T} \right). \quad (2.5.11)$$

Nous préciserons encore cela dans le chapitre 5 consacré à l'échantillonnage.

## 2.5.2 Application : calcul de certaines transformées de Fourier

Nous savons a priori calculer la transformée de Fourier de fonctions de  $L^1(\mathbb{R})$ , mais que se passe-t'il si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ? On peut calculer  $\mathcal{F}f$  de manière « détournée ».

**Proposition 2.5.5** i.) Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . On a  $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = \check{f}$  p.p.

ii.) Si  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  on  $\mathcal{F}(\hat{f}) = \check{f}$ .

*Démonstration* - i. Soit  $f_n$  une suite de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  qui converge vers  $f$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ . On a donc

$$\mathcal{F}f_n = \overline{\mathcal{F}(f_n)}.$$

En passant à la limite on obtient le résultat.

ii) est immédiat. □

Soit  $H$  est la fonction de Heaviside définie par :  $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  et  $\chi_I$  la fonction indicatrice de l'intervalle  $I$ .



Fonction $f : x \mapsto f(x)$	Transformée de Fourier $\hat{f} : \xi \mapsto \hat{f}(\xi)$
$e^{-ax} H(x)$	$\frac{1}{a + 2i\pi\xi}$
$e^{ax} H(-x)$	$\frac{-1}{-a + 2i\pi\xi}$
$\frac{x^k}{k!} e^{-ax} H(x)$	$\frac{1}{(a + 2i\pi\xi)^{k+1}}$
$\frac{x^k}{k!} e^{ax} H(-x)$	$\frac{-1}{(-a + 2i\pi\xi)^{k+1}}$
$e^{-a x }$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$
$\text{sign}(x) e^{-a x }$	$\frac{-4i\pi\xi}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$
$\frac{1}{a + 2i\pi x}$	$e^{\alpha\xi} H(-\xi)$
$\frac{1}{a - 2i\pi x}$	$e^{-\alpha\xi} H(\xi)$

TABLE 2.2 –  $a \in \mathbb{C}$  et  $\Re(a) > 0$

Fonction $f : x \mapsto f(x)$	Transformée de Fourier $\hat{f} : \xi \mapsto \hat{f}(\xi)$
$e^{-ax^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a} \xi^2}$
$\chi_{[-a,a]}(x)$	$\frac{\sin 2a\pi\xi}{\pi\xi}$
$\frac{\sin x}{x}$	$\pi\chi_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(\xi)$

TABLE 2.3 –  $a \in \mathbb{R}$  et  $a > 0$ 

## 2.6 La transformation de Laplace

La transformation de Laplace est l'extension de la transformée de Fourier à tout le plan complexe. Elle est définie formellement par  $\mathcal{L}(f) = \tilde{f}$  avec

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \tilde{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-zt} dt .$$

L'intégrale de Laplace ne converge que pour certaines valeurs de  $z \in \mathbb{C}$  qui définissent sa **région de convergence**. En effet  $\tilde{f}(z)$  n'existe que si  $t \mapsto |f(t) e^{-zt}|$  est intégrable.

**Proposition 2.6.1** *La région de convergence de la transformée de Laplace est une bande verticale du plan complexe. Il existe  $a_1$  et  $a_2$  réels (pouvant être  $\pm\infty$ ) tels que  $\tilde{f}(z)$  est toujours convergente pour  $a_1 < \Re(z) < a_2$  et toujours divergente pour  $\Re(z) > a_2$  ou  $\Re(z) < a_1$ .*

*Démonstration* - Soit  $z = s + i\omega \in \mathbb{C}$ . Comme  $|f(t) e^{-zt}| = |f(t) e^{-st}|$

$$|\tilde{f}(z)| \leq I(s) = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| e^{-st} dt ,$$

la convergence de  $|\tilde{f}(z)|$  ne dépend que de  $s$  la partie réelle de  $z$ . Comme

$$I(s) = \int_{-\infty}^0 |f(t)| e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-st} dt ,$$

alors si  $I(s_1)$  et  $I(s_2)$  convergent, on vérifie que  $I(s)$  converge pour tout  $s \in [s_1, s_2]$ .  
En effet

$$\int_{-\infty}^0 |f(t)| e^{-st} dt \leq \int_{-\infty}^0 |f(t)| e^{-s_2 t} dt$$

et

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-s_1 t} dt .$$

On en déduit donc que le domaine de convergence de  $I(s)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Un signal est **stable** et **causal** si  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$  et  $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$ . (Nous détaillerons dans le chapitre 4) Cela implique donc que  $\tilde{f}(z)$  est convergente pour tout  $z$  de partie réelle positive ou nulle.

**Exemple 2.6.1** 1. Si  $f(t) = 1_{[-a,a]}(t)$  où  $a > 0$ ,

$$\tilde{f}(z) = \int_{-a}^a e^{-tz} dt = \frac{e^{az} - e^{-az}}{z} ,$$

et la région de convergence est tout le plan complexe :  $R(\tilde{f}) = \mathbb{C}$ .

2. Si  $f(t) = e^{-\alpha|t|}$  où  $\alpha > 0$ ,

$$\tilde{f}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tz} e^{-\alpha|t|} dt = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - z^2} ,$$

et  $R(\tilde{f}) = \{z \in \mathbb{C} \mid -\alpha < \Re(z) < \alpha\}$ .

3. Si  $f(t) = e^{-\alpha t} u(t)$  où  $\alpha > 0$ , et  $u$  est la fonction échelon de Heaviside

$$\tilde{f}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha + z} ,$$

et  $R(\tilde{f}) = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > -\alpha\}$ .

L'axe imaginaire  $i\mathbb{R}$  appartient au domaine de convergence de la transformation de Laplace de  $f$  si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Dans ce cas la transformée de Fourier est la **restriction** de  $\tilde{f}$  à  $i\mathbb{R}$  :

$$\hat{f}(\omega) = \tilde{f}(i\omega) .$$

Les propriétés de la transformation de Laplace sont analogues à celles de la transformée de Fourier sur sa région de convergence. En particulier

**Théorème 2.6.1** • Si  $f$  est  $C^n(\mathbb{R})$  alors  $\mathcal{L}(f^{(n)}) : z \mapsto z^n \mathcal{L}(f)$  .

• Pour tous  $f, h$  telles que le produit de convolution  $g = h * f$  existe la transformée de Laplace est  $\tilde{g}(z) = \tilde{f}(z)\tilde{h}(z)$  , et sa région de convergence est  $R(\tilde{g}) = R(\tilde{f}) \cap R(\tilde{h})$  .



## Chapitre 3

# Analyse corrélative des signaux

L'analyse corrélative étudie les relations de nature statistique qui existent entre deux séries de données ou entre deux signaux. Des relations peuvent porter sur des motifs d'un même signal. On parle alors d'**autocorrélation**. C'est le cas des signaux périodiques où la connaissance du signal sur une période permet de connaître l'ensemble ou d'un signal parasité par des échos.

L'analyse corrélative a beaucoup d'applications. Parmi les plus courantes : la détection de signaux noyés dans du bruit, la détection de périodicité cachée, la localisation de sources vibratoires.

### 3.1 Relations statistiques entre plusieurs variables

#### 3.1.1 Notation -Abréviations

Les grandeurs scalaires sont représentées par un symbole en caractère standard. Les grandeurs vectorielles et matricielles sont représentées par un symbole en caractère gras.

##### **Pour l'étude d'une variable particulière**

Nous considérons  $M$  observations d'une variable  $x$  qui peuvent être mises sous la forme vectorielle :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix}.$$

Nous notons par la suite

– la somme des observations :  $s = \sum_{i=1}^M x_i$

- la moyenne des observations :  $m = \frac{s}{M}$
- la somme des carrés des observations :  $c = \sum_{i=1}^M x_i^2 = \mathbf{x}^t \mathbf{x}$
- la somme des carrés des écarts entre observations et moyenne :

$$s_2 = \sum_{i=1}^M (x_i - m)^2 = c \frac{s^2}{M}$$

- la variance des observations :  $v = \frac{s_2}{M} = \frac{c}{M} - m^2$

### Pour l'étude de plusieurs variables

La notation  $x_{i,j}$  correspond à la  $i^e$  observation de la  $j^e$  variable.

### 3.1.2 Matrice des covariances

L'ensemble des  $M$  observations de  $N$  variables peut être mis sous la forme d'une matrice d'observation  $\mathbf{X}$  de dimension  $M \times N$  :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & x_{i,j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{M,1} & \cdots & x_{M,N} \end{bmatrix}$$

La matrice **des covariances** s'écrit

$$\mathbf{V} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & v_{i,j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{M,1} & \cdots & v_{M,N} \end{bmatrix}$$

avec

$$v_{jk} = \frac{1}{M} \left[ p_{jk} \frac{s_j s_k}{M} \right] \text{ avec } p_{jk} = \sum_{i=1}^M x_{ij} x_{ik} \text{ et } s_j = \sum_{i=1}^M x_{ij}.$$

La matrice de **corrélation** est :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & r_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{N,1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } r_{jk} = \frac{v_{jk}}{\sqrt{v_{jj}v_{kk}}} .$$

Dans le cas particulier de deux variables  $x_1$  et  $x_2$ , la matrice

$$\mathbf{V} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} c_1 - \frac{s_1^2}{M} & p_{12} - \frac{s_1 s_2}{M} \\ p_{21} - \frac{s_1 s_2}{M} & c_2 - \frac{s_2^2}{M} \end{bmatrix}$$

est symétrique avec

$$c_j = \sum_{i=1}^M x_{ij}^2, \quad s_j = \sum_{i=1}^M x_{ij}, \quad p_{12} = p_{21} = \sum_{i=1}^M x_{i1}x_{i2}, \quad i = 1, 2 .$$

### Analyse en composantes principales

Soient  $N$  variables à moyennes nulles (variables dites centrées) et  $M$  observations de ce  $N$ -uplet. Les **composantes principales** sont les combinaisons linéaires des variables  $x_1, \dots, x_N$  dont les variances sont maximales. La  $k^{\text{e}}$  composante principale, également centrée, s'écrit :

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{X}\mathbf{a}_k$$

ce qui donne, pour les  $N$  observations, le système suivant

$$\begin{pmatrix} g_{1,k} \\ \vdots \\ g_{i,k} \\ \vdots \\ g_{M,k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & x_{i,j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{M,1} & \cdots & x_{M,N} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{i,k} \\ \vdots \\ a_{M,k} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\forall k = 1, \dots, N, \quad \forall i = 1, \dots, M, \quad g_{ik} = \sum_{j=1}^M x_{ij}a_{jk} .$$

La variance de la composante  $\mathbf{g}_k$  est égale à  $\mathbf{g}_k^\top \mathbf{g}_k = \mathbf{a}_k^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k^\top \mathbf{V} \mathbf{a}_k$ .

Comme  $\mathbf{a}_k^\top \mathbf{a}_k = \|\mathbf{a}_k\|^2$ , cette variance peut également s'écrire :

$$J = \mathbf{a}_k^\top \mathbf{V} \mathbf{a}_k - \lambda_k (\mathbf{a}_k^\top \mathbf{a}_k - \|\mathbf{a}_k\|^2)$$

où  $\lambda_k$  est une constante réelle. Avec la condition de posséder une norme finie que l'on choisira généralement unitaire, le vecteur optimal  $\mathbf{a}_k$  doit maximiser la forme quadratique  $J$ . On cherche donc le vecteur  $\mathbf{a}_k$  qui annule la dérivée soit

$$2(\mathbf{V} - \lambda_k \mathbf{I}) \mathbf{a}_k = 0.$$

En conclusion, le vecteur  $\mathbf{a}_k$  recherché est le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_k$  de la matrice des covariances  $\mathbf{V}$ .

## 3.2 Fonctions de corrélation de signaux

L'analyse de variance classique examine la dépendance pouvant exister entre des variables sans tenir compte des éventuels retards pouvant exister entre elles. Les fonctions de corrélation comblent cette lacune en introduisant un paramètre retard.

### 3.2.1 Définitions

Les signaux sont considérés ici comme des fonctions :  $x(t), y(t)$  représentent des signaux analogiques et  $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  des signaux numériques.

Un signal  $x$  est dit **permanent** s'il est **borné** et de **puissance moyenne finie** mais d'énergie infinie. La puissance moyenne d'un signal est donnée par

$$E_m(x) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt.$$

Donc  $x$  est un signal permanent si

$$x \in L^\infty(\mathbb{R}), x \notin L^2(\mathbb{R}) \text{ et } E_m(x) < +\infty. \quad (3.2.1)$$

Dans ce qui tout ce suit nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.2.1** Soit  $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$  de puissance moyenne finie. Alors pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(s) ds = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2} + \tau}^{\frac{T}{2} + \tau} \varphi(s) ds.$$



*Démonstration* - Soit  $\tau \in \mathbb{R}$ . On a

$$\int_{-\frac{T}{2}+\tau}^{\frac{T}{2}+\tau} \varphi(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}+\tau}^{-\frac{T}{2}} \varphi(t) dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+\tau} \varphi(t) dt .$$

D'où

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}+\tau}^{\frac{T}{2}+\tau} \varphi(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(t) dt + I ,$$

où

$$I = \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}+\tau}^{-\frac{T}{2}} \varphi(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+\tau} \varphi(t) dt \right] .$$

Comme  $\varphi$  est bornée

$$|I| \leq \frac{2|\tau|}{T} \|\varphi\|_{\infty} ,$$

et

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} I = 0 ,$$

d'où le résultat. □

La fonction d'**autocorrélation** d'un signal (analogique ou numérique) de puissance moyenne finie (permanent) est définie, suivant le cas, par :

Signaux analogiques	Signaux numériques
$\varphi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \overline{x(t-\tau)} dt$	$\varphi_x(n) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} x_k \bar{x}_{k-n}$

TABLE 3.1 – Fonction d'auto-corrélation d'un signal permanent (analogique ou numérique)

Un signal  $x$  est dit **transitoire** s'il est d'énergie finie :  $x \in L^2(\mathbb{R})$ . La fonction d'**autocorrélation** d'un signal (analogique ou numérique) d'énergie finie est définie, suivant le cas, par :

Signaux analogiques	Signaux numériques
$\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{x(t-\tau)} dt$	$\varphi_x(n) = \sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} x_k \bar{x}_{k-n}$

TABLE 3.2 – Fonction d’auto-corrélation d’un signal transitoire (analogique ou numérique)

Les fonctions **d’intercorrélacion** de signaux analogiques et numériques sont définies, suivant les cas, par

Signaux permanents ( $\in L^\infty(\mathbb{R})$ )	Signaux transitoires ( $\in L^2(\mathbb{R})$ )
$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \overline{y(t-\tau)} dt$	$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{y(t-\tau)} dt$
$\varphi_{xy}(n) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} x_k \bar{y}_{k-n}$	$\varphi_{xy}(n) = \sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} x_k \bar{y}_{k-n}$

TABLE 3.3 – Fonction d’inter-corrélation de deux signaux

On notera de la même façon les fonctions d’auto et d’inter-corrélation quelque soit la nature du signal (analogique ou numérique, permanent ou transitoire).

**Exemple 3.2.1** 1. Une fonction périodique bornée est un signal permanent.  
2. Calculons la fonction d’autocorrélation du signal (permanent)  $t \mapsto \sin t$ .

$$\begin{aligned}
 \varphi_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(t) \sin(t-\tau) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\tau) - \cos 2(t-\tau) dt \\
 &= \frac{\cos(\tau)}{2}.
 \end{aligned}$$

### 3.2.2 Quelques propriétés des fonctions de corrélation dans le cas analogique

Commençons par établir une relation entre fonction d'autocorrélation et énergie (ou puissance moyenne)

**Proposition 3.2.1** Soit  $\varphi_x$  la fonction d'autocorrélation d'un signal  $x$ .

- Si  $x$  est **permanent** alors

$$\varphi_x(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt .$$

Il s'agit de la puissance moyenne du signal.

- Si  $x$  est un signal **transitoire**

$$\varphi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt .$$

C'est l'énergie (totale) du signal.

**Proposition 3.2.2** La fonction d'autocorrélation d'un signal réel  $\varphi_x$  est paire et vérifie

$$\forall \tau \in \mathbb{R} \quad |\varphi_x(\tau)| \leq \varphi_x(0) .$$

*Démonstration* - Supposons que  $x$  est un signal permanent. La parité se montre grâce au changement de variable  $t \mapsto s := t + \tau$  dans l'intégrale.

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x(t + \tau) dt = \int_{-\frac{T}{2} + \tau}^{\frac{T}{2} + \tau} x(s - \tau) x(s) ds .$$

En utilisant le lemme 3.2.1 et  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T - 2\tau}{T} = 1$  on obtient

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x(t + \tau) dt = \lim_{\tilde{T} \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tilde{T}} \int_{-\frac{\tilde{T}}{2}}^{\frac{\tilde{T}}{2}} x(t) x(t - \tau) dt ,$$

où on a posé  $\tilde{T} = T - 2\tau$  c'est-à-dire  $\varphi_x(\tau) = \varphi_x(-\tau)$ .

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x(t - \tau) dt \right|^2 &\leq \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t - \tau) dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \int_{-\frac{T}{2} + \tau}^{\frac{T}{2} + \tau} x^2(t) dt . \end{aligned}$$

Avec le lemme 3.2.1 il vient

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x(t - \tau) dt \right| \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt ,$$

ce qui donne le résultat.

La démonstration de cette propriété pour un signal transitoire est similaire à celle qui précède (et plus simple).  $\square$

Si on note  $\tilde{x}$  la fonction  $t \mapsto x(-t)$ , on remarque que lorsque  $x$  est un signal (transitoire) d'énergie finie, alors  $\varphi_x = x * \tilde{x}$  (où  $*$  désigne le produit de convolution)

### Autocorrélation de signaux périodiques

Par définition, un signal périodique de période  $T$  est classé dans les signaux permanents. La fonction d'autocorrélation déterminée sur un intervalle infini est identique à celle déterminée sur une période unique. Soit  $x(t)$  un signal périodique de période  $T$ . Celui-ci est décomposable en série de Fourier sous la forme :

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi k \lambda t} \text{ avec } c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-2i\pi k \lambda t} dt$$

et  $\lambda = \frac{1}{T}$  est la fréquence (fondamentale) de  $x$ .

Calculons  $\varphi_x$  avec

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x(t) \overline{x(t - \tau)} dt.$$

En particulier

$$\begin{aligned} \varphi_x(\tau) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2nT} \int_{-nT}^{nT} x(t) \overline{x(t - \tau)} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2nT} \sum_{k=-n}^{n-1} \int_{kT}^{kT+T} x(t) \overline{x(t - \tau)} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2nT} \sum_{k=-n}^{n-1} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \overline{x(t - \tau)} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2nT} 2n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \overline{x(t - \tau)} dt \end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \overline{x(t-\tau)} dt .$$

Pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \overline{x(t-\tau)} dt = (x, x(\cdot - \tau))_{L^2_p(0,T)} .$$

Par l'inégalité de Bessel on peut intervertir série et intégrale : on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \overline{x(t-\tau)} dt &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_k \bar{c}_p e^{2i\pi k \lambda \tau} \left( e^{-2i\pi k \lambda \cdot}, e^{-2i\pi p \lambda \cdot} \right)_{L^2_p(0,T)} \\ &= T \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 e^{2i\pi k \lambda \tau} . \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \overline{x(t-\tau)} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 e^{2i\pi k \lambda \tau} ,$$

est la puissance moyenne du signal : on obtient

$$\varphi_x(\tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 e^{2i\pi k \lambda \tau}$$

ce qui est équivalent à

$$\varphi_x(\tau) = |c_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \cos(2\pi k \lambda \tau) ,$$

puisque dans le cas d'un signal réel les coefficients de Fourier vérifient  $|c_{-k}| = |c_k|$ .

En conclusion, la fonction d'autocorrélation d'un signal périodique est également une fonction périodique de même période. A partir de  $\varphi_x$ , il est possible de retrouver l'amplitude de chaque harmonique de  $x$  mais toute information concernant leurs phases respectives est perdue.

### 3.2.3 Densité spectrale de puissance

Avant de parler du théorème de Wiener-Khinchine, donnons quelques définitions qui complètent la description d'un signal. Supposons que  $x \in L^2(\mathbb{R})$  (signal transitoire, d'énergie finie). D'après le théorème de Fourier-Plancherel, nous savons que  $\hat{x} \in L^2(\mathbb{R})$  et que

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{x}(\omega)|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = E ,$$

où  $E$  est l'énergie totale du signal. On voit donc qu'il y a conservation de l'énergie.

**Définition 3.2.1 (Densité spectrale de puissance)**

Soit  $x$  tel que  $\hat{x}$  existe. La quantité  $\Phi_x \mapsto |\hat{x}(\omega)|^2$  s'appelle la densité spectrale de puissance. Dans le cas d'un signal transitoire on parle aussi de densité spectrale d'énergie

On peut donner une caractérisation de la densité spectrale puissance avec la fonction d'autocorrélation :

**Théorème 3.2.1 (Wiener-Khinchine)** La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'un signal d'énergie finie est la densité spectrale d'énergie :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \widehat{\varphi}_x(\omega) = \Phi_x(\omega).$$

*Démonstration* - Grâce à la remarque précédente, nous savons que  $\varphi_x = x * \bar{x}$ . Donc

$$\widehat{\varphi}_x = \widehat{x * \bar{x}} = \widehat{x} \cdot \widehat{\bar{x}}.$$

Calculons

$$\begin{aligned} \widehat{\bar{x}}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \bar{x}(t) \exp(-2i\pi\omega t) dt = \int_{\mathbb{R}} \bar{x}(-t) \exp(-2i\pi\omega t) dt \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}} x(-t) \exp(2i\pi\omega t) dt} = \overline{\int_{\mathbb{R}} x(t) \exp(-2i\pi\omega t) dt} = \overline{\widehat{x}(\omega)}. \end{aligned}$$

Par conséquent  $\widehat{\varphi}_x(\omega) = \widehat{x}(\omega) \overline{\widehat{x}(\omega)} = |\widehat{x}(\omega)|^2$ . □

La fonction  $\hat{x}$  décrit la répartition de l'énergie de  $x$  suivant les fréquences, via la densité spectrale d'énergie. Pour cette raison, on l'appelle le **spectre d'énergie** de  $x$ . Comme  $\hat{x}$  est continue, on dit que  $x$  a un spectre continu d'énergie, alors qu'un signal périodique a un spectre de **raies** qui caractérise la répartition de la puissance.

La puissance moyenne est obtenue par l'intégration fréquentielle de  $\Phi_x$  qui s'avère bien être la distribution spectrale de la puissance du signal. Ce théorème est à la base des méthodes dites de corrélogramme pour estimer la densité spectrale d'un signal.

**3.2.4 Cas d'un signal numérique**

La proposition 3.2.2 se transpose immédiatement dans le cas discret. Nous avons également une version discrète du théorème de Wiener-Khinchine. Plus précisément, soit  $x$  un signal réel (discret) échantillonné et  $\varphi_x$  sa fonction d'autocorrélation (discrete également).

**Théorème 3.2.2** *La densité spectrale de puissance d'un signal (réel) discret est la transformée de Fourier (discrète) de sa fonction d'autocorrélation :*

$$\forall \omega \quad \Phi_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_x(k) e^{-2i\pi k\omega}.$$

*Elle est réelle car la fonction d'autocorrélation est paire.  
Elle est périodique (comme TFD d'un signal discret)*

### 3.2.5 Exemples

a) *Calcul de la fonction d'autocorrélation du signal sinusoïdal*

$$x(t) = \sin(2\pi\lambda t) \text{ et } \varphi_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(2\pi\lambda t) \sin(2\pi\lambda(t - \tau)) dt.$$

En vertu de l'égalité trigonométrique :  $\sin(a) \sin(b) = \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{2}$  nous avons :

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(2\pi\lambda\tau) dt - \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(2\pi\lambda(2t - \tau)) dt,$$

et finalement  $\varphi_x(\tau) = \frac{\cos(2\pi\lambda\tau)}{2}$ .

Pour la version échantillonnée à raison de  $N$  échantillons par période, nous avons

$$x(k) = \sin(k \frac{2\pi}{N}) \text{ et } \varphi_x(n) = \frac{1}{2} \cos(n \frac{2\pi}{N}).$$

b) *Densité spectrale de puissance d'un signal périodique continu*

Soit  $x$  un signal périodique de période  $T$  et  $\lambda = \frac{1}{T}$  sa fréquence fondamentale. En appliquant le théorème de Wiener Khinchine nous obtenons

$$\Phi_x = \widehat{\varphi_x}.$$

On a vu précédemment que

$$\varphi_x(\tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 e^{-2i\pi k\lambda\tau}.$$

En admettant que

$$\widehat{\exp(2i\pi a \cdot)} = \delta_a ,$$

on obtient

$$\Phi_x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta_{-k\lambda} .$$

*c) Autocorrélation du bruit blanc*

Par définition, le bruit blanc est un signal idéalisé caractérisé par une densité spectrale de puissance constante sur une étendue infinie. En exploitant le théorème de Wiener Khinchine nous avons

$$\Phi_{blanc}(\omega) \equiv 1 \longrightarrow \varphi_{blanc} = \delta .$$

Ce résultat montre que le bruit blanc est un signal aléatoire parfait c'est-à-dire totalement décorrélé

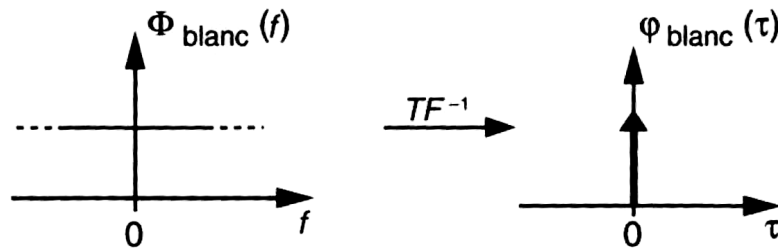


FIGURE 3.1 – Autocorrélation du bruit blanc

En pratique, en raison des erreurs de discrétisation, un signal sera un bruit blanc si sa fonction d'autocorrélation présente un « pic » en 0 et est quasiment nulle ailleurs.

*c) Autocorrélation d'un bruit rose*

Il s'agit d'une version plus réaliste du bruit (le souffle parasite émis par un amplificateur audio par exemple) pour laquelle on considère une densité spectrale de puissance constante sur une bande de fréquence limitée à l'intervalle  $[-B, B]$

$$\varphi_{rose}(\tau) = 2B \operatorname{sinc}(2B\tau) = 2B \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau} .$$



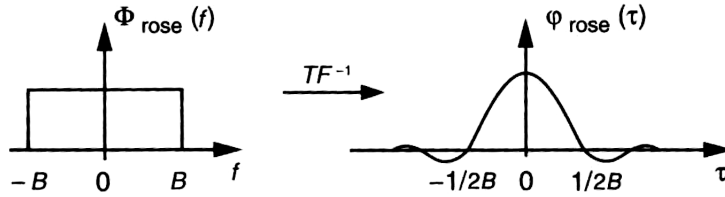


FIGURE 3.2 – Autocorrélation du bruit rose

Plus la nature d'un signal est aléatoire et plus sa fonction d'autocorrélation se rapproche d'une impulsion à l'origine.

### 3.3 Détection de signaux périodiques

L'extraction de signaux périodiques noyés dans du bruit ou la recherche de périodicité cachée concernent de nombreuses applications notamment en physique (détection de phénomènes induits, détection synchrone) ou en astronomie (mesure de la vitesse de rotation des pulsars).

**Définition 3.3.1 (Valeur efficace d'un signal)** On appelle valeur efficace, sur une durée  $T$  d'un signal analogique sa moyenne quadratique c'est-à-dire

$$x_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |x|^2(t) dt}.$$

On peut remarquer que la valeur efficace d'un signal sur une durée  $T$  est la racine carrée de son énergie moyenne sur  $[0, T]$

**Définition 3.3.2 (Rapport signal sur bruit)** On appelle « rapport signal sur bruit » (Signal to Noise Ratio : SNR), d'un signal donné  $x$  entaché d'un bruit  $b$  sur un intervalle de temps fini  $I$  la quantité :

$$SNR = \frac{x_{eff}}{b_{eff}} = \frac{\text{valeur efficace du signal } x}{\text{valeur efficace du bruit } b}.$$

En général le SNR est obtenu (expérimentalement) grâce à l'étalonnage des instruments de mesure. Il est infini à la source du signal original (dont le bruit est nul), et ne peut que décroître lors de la transmission. Un rapport signal sur bruit est exprimé en décibels (dB) qui est une échelle logarithmique avec la formule suivante :

$$[S/N(dB)] = 10 \cdot \log_{10} \left[ \left( \frac{x_{eff}}{b_{eff}} \right)^2 \right].$$

Un S/N nul traduit le fait que le signal reçu ne permet plus de discerner de façon fiable le signal original du bruit, leur puissances respectives étant égales. Si le rapport S/N est négatif, on ne percevra que le bruit. La qualité d'un système de transmission ou de stockage d'information s'apprécie donc avec un S/N positif (ne serait-ce que faiblement) et le plus grand possible.

### 3.3.1 Détection par autocorrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit

Soit un signal composite :  $x(t) = p(t) + b(t)$  où  $p(t)$  est un signal périodique de période inconnue et  $b(t)$  du bruit superposé. On supposera ces deux composantes à moyenne nulle. Déterminons la fonction d'autocorrélation de  $x(t)$

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [p(t) + b(t)][p(t - \tau) + b(t - \tau)] dt ;$$

en développant, nous obtenons

$$\varphi_x(\tau) = \varphi_p(\tau) + \varphi_{bp}(\tau) + \varphi_{pb}(\tau) + \varphi_b(\tau) .$$

- $b(t)$  est indépendant de  $p(t)$  ce qui entraîne  $\varphi_{bp}(\tau) \approx \varphi_{pb}(\tau) \approx 0$ .
- $b(t)$  étant de nature aléatoire nous avons  $\varphi_b(\tau) \approx 0$  pour  $\tau$  suffisamment élevé.

En conclusion pour  $\tau > \tau_x$ , nous avons  $\varphi_x(\tau) \approx \varphi_p(\tau)$ .

La fonction d'autocorrélation  $\varphi_x$  prend rapidement l'allure d'une fonction périodique traduisant la présence de  $p$  dont il est possible de déterminer la période et la composition harmonique.

En pratique la détermination de  $\varphi_x$  est réalisée sur une durée  $T$  bornée ou, pour la version numérique, sur un nombre  $M$  limité d'échantillons. L'estimation de  $\varphi_x$  est entachée d'un bruit résiduel dont le taux dépend de  $T$  ou de  $M$ . Pour la version numérique, le rapport signal sur bruit après corrélation est donné par la relation suivante

$$SNR_\varphi = \frac{M}{\frac{4}{SNR_x} + \frac{2}{(SNR_x)^2}},$$

où  $SNR_\varphi$  et  $SNR_x$  sont les rapports SNR respectivement de  $\varphi_x(\tau)$  et  $x(t)$ . Pour illustrer cet exemple, considérons le signal suivant

$$x_k = \sin \left( 2\pi \frac{k}{64} \right) + A b_k ,$$

où  $A$  est un terme d'amplitude et  $b_k$  est un bruit uniforme compris entre  $-1$  et  $1$ . Le rapport signal sur bruit dépend bien sûr de l'amplitude  $A$  du bruit. La figure suivante (en haut) montre la fonction d'autocorrélation d'un signal  $x$  présentant un rapport signal sur bruit d'environ 8.5 dB ( $A = 0.5$ ).

La figure du bas montre la fonction d'autocorrélation estimée sur environ 1 000 points d'un signal  $x_k$  présentant un rapport signal sur bruit d'environ 0.5 dB ( $A = 4$ ).

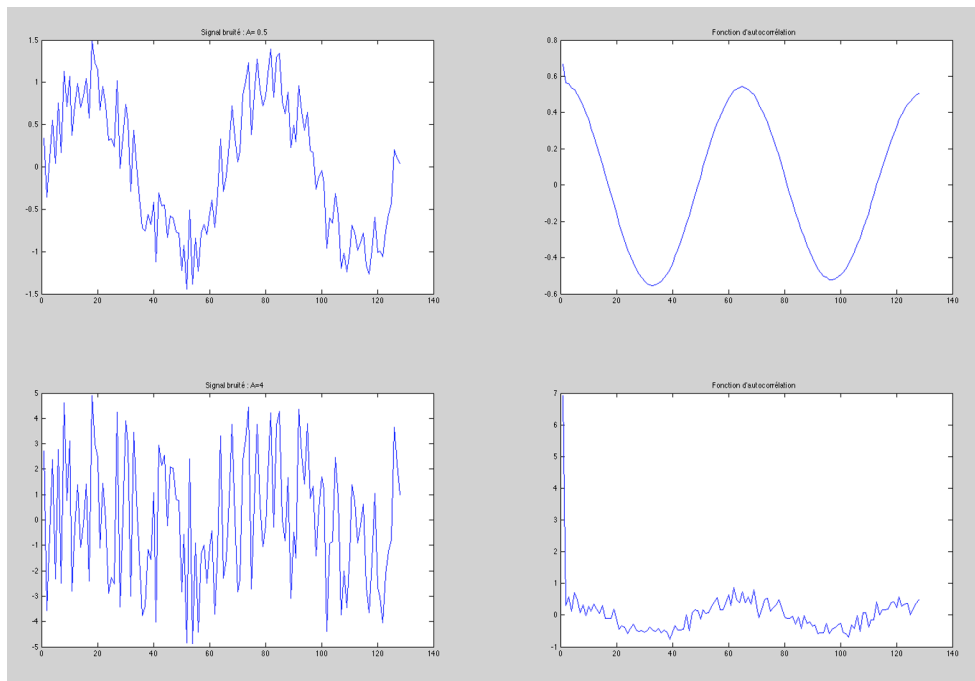


FIGURE 3.3 – Détection de signaux périodiques

La valeur de la puissance du signal  $x_k$  se retrouve en 0 sur la figure représentant la fonction d'autocorrélation. La période du signal devient aisément mesurable.

### 3.3.2 Détection par intercorrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit

Soit  $x(t) = p(t) + b(t)$  où  $p(t)$  est un signal périodique de période connue  $T_0$ .

Effectuons l'**intercorrélation** de  $x(t)$  avec un signal de référence  $r(t)$  présentant

la même période.

$$\varphi_{xr}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T [p(t) + b(t)] r(t - \tau) dt ,$$

et

$$\varphi_{xr}(\tau) = \varphi_{pr}(\tau) + \varphi_{br}(\tau)$$

$b(t)$  et  $r(t)$  étant indépendants, nous avons :  $\varphi_{br}(\tau) \approx 0$  pour tout  $\tau$ , d'où  $\varphi_{xr}(\tau) \approx \varphi_{pr}(\tau)$  qui est une fonction périodique.

Avec cette méthode, il ne subsiste qu'un terme d'erreur  $\varphi_{br}(\tau)$ . Il est possible d'atteindre  $\varphi_{pr}(\tau)$  pour des faibles valeurs de  $\tau$ , ce qui réduit la charge de calcul.

On montre que pour une estimation de  $\varphi_{xr}(\tau)$  réalisée sur  $M$  échantillons de  $x(t)$ , le rapport signal sur bruit de la fonction d'intercorrélacion est donné par la relation suivante :

$$SNR_{\varphi} = \frac{M}{2} SNR_x .$$

## 3.4 Autres exemples d'applications

### 3.4.1 Mesure de retard entre signaux aléatoires par corrélation

Les signaux de nature aléatoire (bruit, vibrations ...) présentent des fonctions d'autocorrélacion dont l'allure est très étroite. Cette propriété est mise à profit pour déterminer le retard entre un bruit et une version retardée de celui-ci. La position du maximum de leur fonction d'intercorrélacion est une très bonne estimation du retard entre les deux signaux :

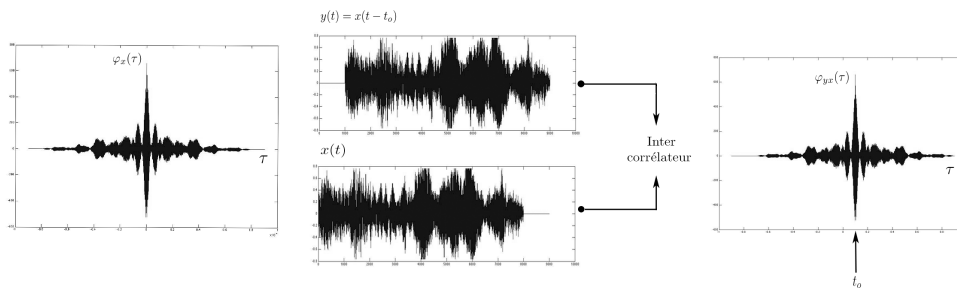


FIGURE 3.4 – Mesure du retard par intercorrélacion

### Application à la localisation d'une source de vibrations

En milieu industriel, les vibrations peuvent générer des problèmes gênants (des-serrage d'écrous, usure prématurée, ambiance bruyante). L'épicentre d'un séisme peut-être localisé (en première approximation) de façon analogue. Le schéma ci-dessous permet de localiser dans un plan, une source de vibrations (épicentre) par inter-corrélation des signaux délivrés par trois capteurs (sismographes) judicieusement positionnés.

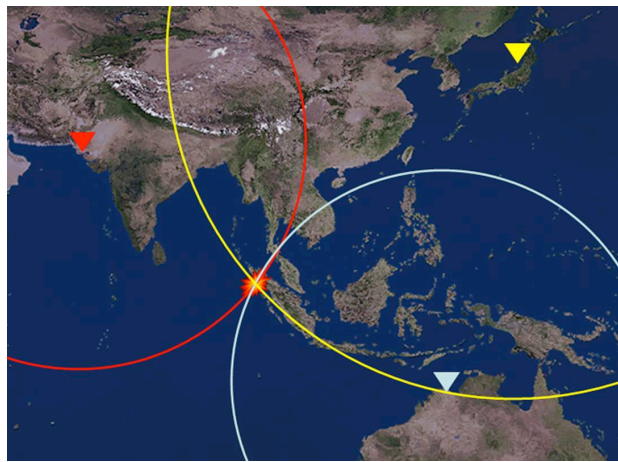


FIGURE 3.5 – Détection d'épicentre - localisation des capteurs

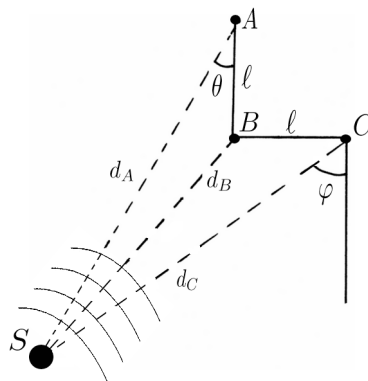


FIGURE 3.6 – Localisation d'une source de vibration

Les trois capteurs (sismographes)  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont placés sur les sommets d'un carré d'arête  $\ell$ . Deux mesures successives suffisent alors pour déterminer les angles  $\theta$  et  $\varphi$  définissant la position de la source  $S$  par rapport aux trois détecteurs. En supposant que  $d_A, d_B$  et  $d_C$  sont très supérieurs à  $\ell$ , on montre que :

$$\sin(\varphi) \approx \frac{d_C - d_B}{\ell} = v \frac{\Delta t_{BC}}{\ell} \text{ et } \cos(\theta) \approx \frac{d_A - d_B}{\ell} = v \frac{\Delta t_{AB}}{\ell}$$

où  $v$  représente la vitesse (supposée connue) de propagation des vibrations dans le milieu. L'intercorrrelation permet d'estimer la différence  $\Delta t = |t_{AB} - t_{BC}|$  des temps de propagation entre la source et les capteurs  $A$  et  $B$  d'une part, et  $B$  et  $C$  d'autre part.

### Localisation de fuites sur une canalisation d'eau souterraine par intercorrrelation

Nous considérons une fuite sur une canalisation d'un fluide (eau, gaz ... )

En (1) et (2) sont placés 2 capteurs acoustiques qui délivrent respectivement les signaux  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$ . On note :

- $b(t)$  : le bruit acoustique généré par la fuite au point 0 ;
- $v$  : la vitesse du son dans la conduite (propagation couplée fluide-conduite).

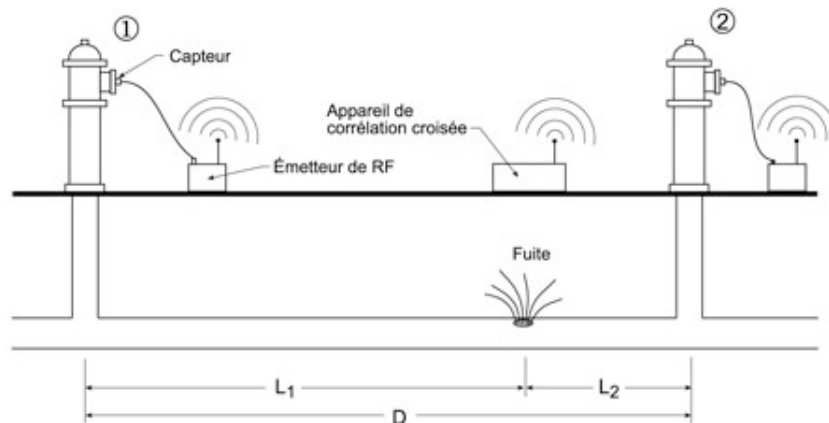


FIGURE 3.7 – Localisation d'une fuite

On néglige les bruits autres que celui engendré par la fuite et l'on suppose que la fuite est située quelque part entre les points (1) et (2).

Avec ces hypothèses, les signaux  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$  sont des répliques retardées et atténuées du signal  $b(t)$ . Nous pouvons donc écrire :

$$S_1(t) = K_1 b(t - t_1) , S_2(t) = K_2 b(t - t_2) \text{ avec } t_1 = \frac{L_1}{v} \text{ et } t_2 = \frac{L_2}{v}$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont les facteurs d'affaiblissement des signaux. Par définition nous avons

$$\varphi_b(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} b(t) b(t - \tau) dt \text{ et } \varphi_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} S_1(t) S_2(t - \tau) dt .$$

En remplaçant  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$  par leurs expressions en fonction de  $b(t)$ , la fonction d'intercorrélacion prend la forme suivante :

$$\varphi_{12}(\tau) = K_1 K_2 \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} b(t - t_1) b(t - t_2 - \tau) dt = K_1 K_2 \varphi_b(\tau - \tau_o)$$

où

$$\tau_o = t_1 - t_2 = \frac{L_1 - L_2}{v} .$$

La fonction  $\varphi_{12}$  d'intercorrélacion est représentée ci-dessous : la position de son maximum permet d'estimer le retard relatif entre les signaux  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$ .

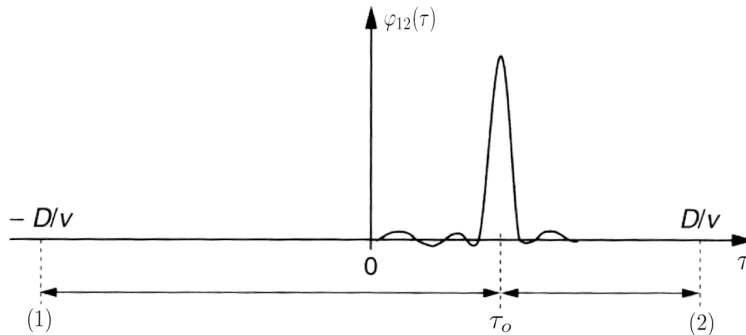


FIGURE 3.8 – Fonction d'intercorrélacion  $\varphi_{12}$

Si la vitesse  $v$  est connue, la localisation de la fuite est possible car  $L_1$  et  $L_2$  peuvent être déterminés. Nous avons en effet :

$$L_1 + L_2 = D \text{ et } L_1 - L_2 = v\tau_o ,$$

ce qui permet la localisation de la fuite :

$$L_1 = \frac{D + v\tau_o}{2} \text{ et } L_2 = \frac{D - v\tau_o}{2} .$$

Si  $v$  n'est pas connue au départ, il faut étalonner l'axe des abscisses de la fonction. La procédure consiste à provoquer volontairement un bruit de niveau élevé au point (2) (percussion sur la conduite par exemple). Dans ce cas, le corrélateur permet de déterminer la durée  $\frac{D}{v}$ .

Cette technique est aussi employée en sismique. Le principe est simple : on provoque de légers éboulements (chute d'un poids, petite explosion...) et on suit les signaux ainsi émis, qui se réfléchissent sur certaines discontinuités géologiques.

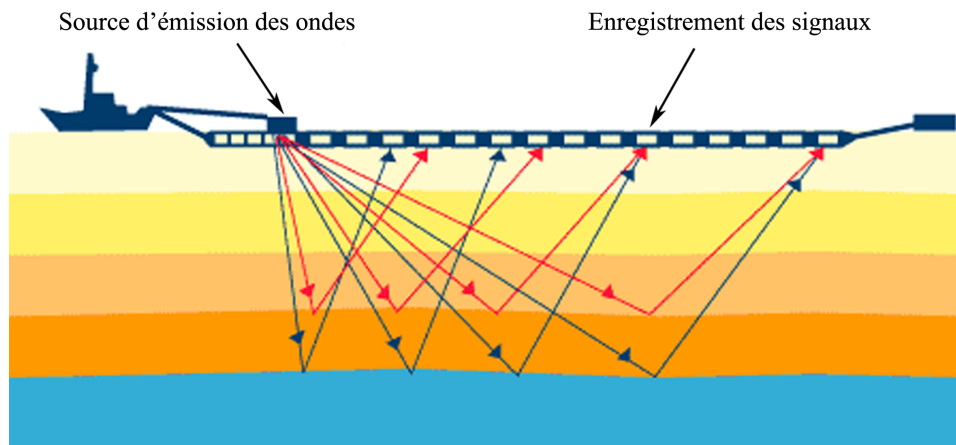


FIGURE 3.9 – Principe de la sismique



## Chapitre 4

# Filtrage

L'étude d'un signal nécessite de supprimer au maximum le bruit parasite dû aux conditions d'acquisition. L'un des buts du filtrage est de « nettoyer » le signal en éliminant le plus de bruit tout en préservant le plus d'information possible. En outre, toute l'information contenue dans un signal n'est pas forcément pertinente : il faut « sélectionner » l'information utile suivant l'usage que l'on veut en faire. Par exemple, à l'écoute d'un morceau de musique, on peut vouloir un renforcement des sons graves. Une autre finalité du filtrage est donc de sélectionner et renforcer certaines bandes de fréquences porteuses de l'information intéressante. Nous allons d'abord replacer les filtres dans un cadre (abstrait) plus général : celui des systèmes.

### 4.1 Systèmes

On appelle **système** tout appareil où on peut distinguer des signaux d'entrée et des signaux de sortie. Schématiquement, un système est représenté par

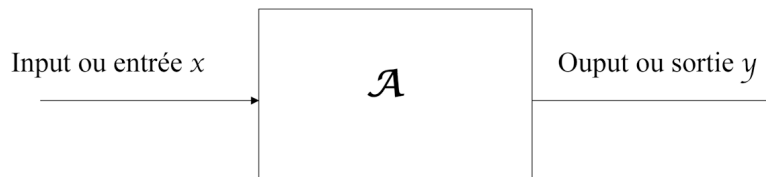


FIGURE 4.1 – Schéma d'un système

On modélise un système de la façon suivante :

1.  $\mathcal{X}$  un espace d'entrée (ou **input**),  $\mathcal{Y}$  un espace de sortie (ou **output**), qui peuvent être des espaces de fonctions (cas « continu ») ou de suites (cas discret).
2.  $\mathcal{A}$  une application :  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  qui à  $x$  associe  $y = \mathcal{A}(x)$ .

### 4.1.1 Quelques définitions

- Un système **continu** est un système dont les signaux d'entrée et de sortie sont continus. On les appelle aussi systèmes **analogiques**.
- Un système **à temps discret** est un système dont les signaux d'entrée et de sortie sont discrets.
- Système **passif et actif** : un élément est **actif** s'il est capable de délivrer une énergie supérieure à celle qu'il reçoit, par exemple un moteur, un transistor. Dans le cas contraire l'élément est **passif** : c'est le cas d'une résistance, d'un amortisseur. Un système est **actif** s'il comporte au moins un élément actif et **passif** si tous ses éléments sont passifs.
- Un système est **instantané** (ou sans mémoire) si sa réponse à un instant donné ne dépend que de la valeur du signal d'entrée au même instant. Un circuit électrique ne comportant que des résistances est un système instantané. Un système non instantané est appelé système **à mémoire** ou à temps différé. La plupart des systèmes réels sont des systèmes à mémoire.

Nous allons définir plus particulièrement dans la section suivante les notions d'invariance et de causalité qui nous permettront d'introduire ensuite la notion de **filtre**.

#### Exemples de systèmes

- *Amplificateur idéal*

Un tel système est donné par :  $y(t) = kx(t)$ .

- *Ligne à retard*

On a la fonction :  $y(t) = x(t - a)$   $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ .

- *Dérivateur*

Il est donné par la fonction :  $y(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ .

- *Un système discret*

On capte la sortie  $Y_k$  pour lui faire subir un retard d'une unité de temps. On l'amplifie et on l'ajoute à l'entrée. Un tel système est donné par

$$Y_k = x_k + aY_{k-1}.$$

Schématiquement, on le représente comme sur la figure 4.2.

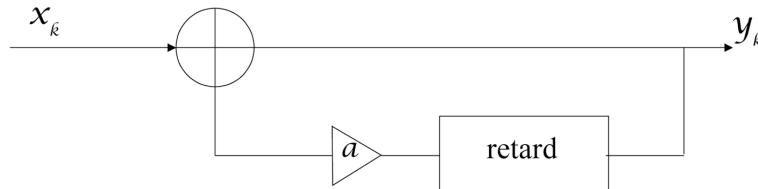


FIGURE 4.2 – Un système discret

– *Circuit RC* : On considère le circuit de la figure 4.3.

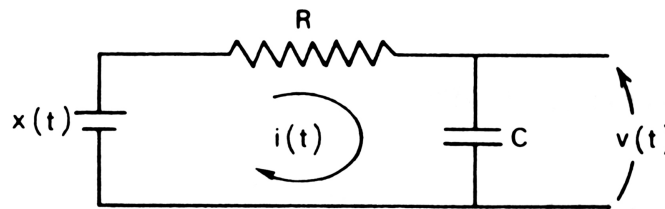


FIGURE 4.3 – Circuit RC

L'entrée est  $x(t)$  et la sortie est  $v(t)$ . La loi d'Ohm donne  $Ri(t) + v(t) = x(t)$ .

Or  $i(t) = Q'(t)$  et  $v(t) = \frac{Q(t)}{c}$ .

On obtient donc  $i(t) = v'(t) \cdot c$ , ce qui entraîne  $RCv'(t) + v(t) = x(t)$ . Le signal de sortie s'obtient donc comme solution d'une équation différentielle ordinaire.

#### 4.1.2 Propriétés algébriques des systèmes

**Définition 4.1.1 (Linéarité)** On se donne un système sous la forme  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  et  $\mathcal{A} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ . Si  $\mathcal{A}$  est linéaire, le système est **linéaire**. C'est le principe de superposition.

**Définition 4.1.2 (Causalité)**  $\mathcal{A}$  est dit **réalisable** (ou **causal**) si pour tout  $t_o$  donné, on a la propriété suivante :

$$\forall t < t_o \quad x_1(t) = x_2(t) \implies \forall t < t_o \quad \mathcal{A}x_1(t) = \mathcal{A}x_2(t). \quad (4.1.1)$$

En d'autres termes la réponse ne peut prendre naissance avant que n'ait été appliquée l'excitation (entrée ou input).

Les systèmes réels sont causaux : on montrera qu'un système théorique n'est synthétisable (ou réalisable) que s'il est causal.

**Définition 4.1.3 (Invariance)**  $\mathcal{A}$  est dit *invariant* ou *stationnaire* si pour tout  $a > 0$

$$y(t) = \mathcal{A}x(t) \text{ à l'instant } t \implies y(t-a) = \mathcal{A}[x(t-a)]. \quad (4.1.2)$$

En d'autres termes, un système est invariant si la réponse à une excitation donnée est indépendante de la date à laquelle s'effectue l'expérience

Dans ce qui suit on notera  $\mathcal{T}_a : x \mapsto x(\cdot - a)$  l'opérateur de translation. L'invariance se traduit par  $\mathcal{T}_a \mathcal{A} = \mathcal{A} \mathcal{T}_a$ .

### Exemples

Étudions la linéarité, la causalité et l'invariance sur les systèmes précédents.

– *Amplificateur idéal*

On pose  $\mathcal{X} = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A} : x \mapsto kx$ .  $\mathcal{A}$  est *linéaire*.

On se donne  $t_o$  et  $y(t) = \mathcal{A}x(t) = kx(t)$ . Comme

$$\forall t < t_o \quad x_1(t) = x_2(t) \implies kx_1(t) = kx_2(t),$$

l'amplificateur est *causal*.

De plus  $\forall t, \forall a \quad y(t-a) = kx(t-a)$ . Donc,  $y(\cdot - a) = \mathcal{T}_a y$  est la sortie associée à  $x(\cdot - a)$  c'est-à-dire  $\mathcal{T}_a x$ . L'amplificateur est donc *invariant*.

– *Dérivateur*

On pose  $\mathcal{X} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{Y} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A} : x \mapsto x'$ .  $\mathcal{A}$  est *linéaire*.

– *Ligne à retard*

On se donne  $t_o$  et on fixe  $a > 0$ . Comme  $y(t) = x(t-a)$  on a

$$\forall t < t_o \quad x_1(t) = x_2(t) \implies t-a < t_o \quad x_1(t-a) = x_2(t-a);$$

par conséquent  $y_1(t) = y_2(t)$ . Le retard est causal et invariant.

– *Circuit RC*

On pose  $\mathcal{X} = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{Y} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A} : x \mapsto RCx' + x$ .

Soit alors  $x_1, x_2$  deux entrées et  $y_1, y_2$  deux sorties. On a donc :

$$RCy_1' + y_1 = x_1 \text{ et } RCy_2' + y_2 = x_2.$$

Par conséquent  $RC(\lambda y_1' + \mu y_2') + \lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda x_1 + \mu x_2$ . Or  $\lambda y_1 + \mu y_2$  est la sortie associée à  $\lambda x_1 + \mu x_2$ ; donc le système est *linéaire*.

Soit  $x$  une entrée et  $y$  une sortie solution de  $RCy' + y = x$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $y(t_o) = y_o$ . Pour tout  $t \in ]-\infty, t_o[$  supposons que  $x_1(t) - x_2(t) = 0$ . La sortie associée à  $x_1 - x_2$  est  $y_1 - y_2$  solution de l'équation différentielle :

$$RC(y_1 - y_2)' + (y_1 - y_2) = x_1 - x_2 = 0 \text{ avec } y_1(t_o) - y_2(t_o) = 0.$$

En effet  $RCy'_1 + y_1 = x_1$  sur  $] - \infty, t_0[$  et  $RCy'_2 + y_2 = x_2$  sur  $] - \infty, t_0[$ .  
Finalement, on a  $y_1 = y_2$  sur  $] - \infty, t_0[$ .  
Le système est donc causal et invariant.

**Définition 4.1.4 (Continuité d'un système)** *Le système donné par  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  et  $A$  de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{Y}$  est continu si  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont munis d'une topologie séquentielle (limites de suites) et si*

$$x_n \rightarrow x \text{ dans } \mathcal{X} \implies Ax_n \rightarrow Ax \text{ dans } \mathcal{Y}.$$

**Cas d'un système analogique :**  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont des espaces de fonctions à valeurs réelles ou complexes, normés par  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ ,  $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ .

**Exemple 4.1.1 (Exemples de normes)** *Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .*

1. Si  $\mathcal{X} = L^\infty(I)$  alors  $\|x\|_\infty = \sup_{t \in I} |x(t)|$
2. Si  $\mathcal{X} = L^2(I)$  alors  $\|x\|_2 = \left( \int_I |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ .
3. Si  $\mathcal{X} = L^1(I)$  alors  $\|x\|_1 = \int_I |x(t)| dt$ .

**Cas des signaux discrets :**  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont des espaces de suites.

**Exemple 4.1.2 (Exemples de normes)**

1. Si  $\mathcal{X} = l^\infty = \{(x_n) \text{ bornée}\}$  alors  $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|$ .
2. Si  $\mathcal{X} = l^1 = \{(x_n) \text{ telle que } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| < +\infty\}$  alors  $\|x\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|$ .
3. Si  $\mathcal{X} = l^2 = \{(x_n) \text{ telle que } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 < +\infty\}$  alors  $\|x\|_2 = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 \right)^{1/2}$ .

**Exemples**

– *Un dérivateur n'est pas un système continu pour la norme uniforme.*

Soit  $(x_n) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$  telle que  $x_n \rightarrow x$  dans  $L^\infty$ . On n'a en général pas  $x'_n \rightarrow x'$  dans  $L^\infty$ . En effet, si on prend (par exemple)  $x_n(t) = \frac{1}{n} \sin(nt)$  ( $\rightarrow 0$ ) on constate que  $y_n(t) = \cos(nt)$  : c'est bien une fonction de  $L^\infty(\mathbb{R})$  mais elle ne converge pas uniformément vers 0.

– *L'amplificateur est continu pour la norme uniforme.*

On a  $y(x) = kx$  et on suppose que  $x_n \rightarrow x$  c'est-à-dire  $\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0$ . Il est alors clair que  $\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0 \implies \|kx_n - kx\|_\infty \rightarrow 0$ .

– Un système à retard est continu pour la norme uniforme.

On a  $y(t) = x(t - a)$  et on suppose que  $x_n \rightarrow x$  dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ .

On pose  $y_n(t) = x_n(t - a)$ . On a alors  $(y_n - y)(t) = x_n(t - a) - x(t - a)$ , donc

$$\|y_n - y\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x_n(t - a) - x(t - a)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x_n(t) - x(t)| = \|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0.$$

Donc le système est continu pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Dans le cas de la norme  $\|\cdot\|_1$ , on a

$$\begin{aligned} \|y_n - y\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |y_n(t) - y(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_n(t - a) - x(t - a)| dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x_n(t) - x(t)| dt = \|x_n - x\|_1. \end{aligned}$$

Le système est également continu.

## 4.2 Filtres linéaires

Un système à temps continu comporte donc un opérateur  $\mathcal{A}$  qui associe à un signal (analogique)  $e$  dit signal d'entrée (*input*) un signal  $s$  appelé signal de sortie (*output*) :

$$\mathcal{A} : e \mapsto s := \mathcal{A}(e).$$

La valeur de la sortie à l'instant  $t$  fixé est égale à la valeur prise par la fonctionnelle

$$s(t) := \mathcal{A}_t[e(\theta)],$$

De manière générale, pour un système linéaire et continu, nous considérerons une relation d'entrée-sortie sous la forme

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \theta) e(\theta) d\theta,$$

où  $h(t, \theta)$  est un noyau appelé **réponse impulsionnelle (RI)** du système linéaire.

Dans le cas discret on a

$$s_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k,n} e_k.$$

La **causalité** d'un système se traduit donc par le fait que la valeur  $\mathcal{A}_t[e(\theta)]$  ne dépend des valeurs de  $e(\theta)$  pour  $\theta \leq t$ . Pour un système **instantané** la valeur  $\mathcal{A}_t[e(\theta)]$  ne dépend que de la valeur  $e(t)$ . L'**invariance** d'un système se traduit par

$$s(t - \tau) = \mathcal{A}_t[e(\theta - \tau)], \forall \tau, \forall t.$$

**Définition 4.2.1 (Filtre)** Un *filtre linéaire* est un système linéaire continu qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. Il est invariant dans le temps
2. Si  $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_k(t) = e(t)$  alors on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k(t) = s(t)$ . Cette propriété est équivalente à la causalité.

Examinons l'effet d'un filtre linéaire  $\mathcal{A}$  sur un signal périodique de  $\mathcal{X} = L_p^2(0, T)$  de fréquence  $\lambda = 1/T$ . Ce signal peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp(2i\pi n \lambda t). \quad (4.2.1)$$

On pose

$$e_\lambda : t \mapsto \exp(2i\pi \lambda t). \quad (4.2.2)$$

Le signal  $e_\lambda$  est un signal **monochromatique** (une seule fréquence).

La famille  $(e_{n\lambda})_{n \in \mathbb{Z}}$  forme une base de  $\mathcal{X}$ .

Formellement<sup>1</sup>

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_{n\lambda} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (\mathcal{A}e_{n\lambda}).$$

On est donc ramené à examiner l'effet de  $\mathcal{A}$  sur  $e_{n\lambda}$ .

**Proposition 4.2.1** Un *filtre linéaire* associe à tout signal exponentiel d'entrée le même signal multiplié par un facteur indépendant du temps, généralement complexe, appelé **fonction de transfert** ou **gain complexe** du filtre.

*Démonstration* - Cherchons l'image  $f_\lambda$  de  $e_\lambda$  par le filtre :  $f_\lambda = \mathcal{A}e_\lambda$ . On remarque que  $e_\lambda(t+u) = e_\lambda(t)e_\lambda(u)$  donc

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad f_\lambda(t+u) = \mathcal{A}(e_\lambda(t)e_\lambda(u)),$$

et comme  $t$  est fixé

$$f_\lambda(t+u) = e_\lambda(t)\mathcal{A}(e_\lambda(u)).$$

Pour  $u = 0$ , on obtient

$$f_\lambda(t) = e_\lambda(t)\mathcal{A}(e_\lambda(0)) = e_\lambda(t)f_\lambda(0);$$

donc  $\mathcal{A}e_\lambda = f_\lambda(0)e_\lambda$ . Par conséquent,  $e_\lambda$  est une fonction propre de  $\mathcal{A}$  associée à la valeur propre  $f_\lambda(0)$  qui ne dépend que de  $\lambda$ .

1. On peut complètement justifier le calcul grâce à la continuité de l'opérateur  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{X}$

La fonction  $\lambda \mapsto H(\lambda) := f_\lambda(0)$  est appelée **fonction de transfert** du filtre.  $\square$   
 Reprenons le signal périodique  $x$  défini par (4.2.1); la sortie filtrée par  $\mathcal{A}$  est donc

$$y := \mathcal{A}x = \mathcal{A} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n H(n\lambda) e_{n\lambda} \right).$$

En résumé, chaque coefficient de Fourier  $c_n$  de  $x$  est transformé en  $\gamma_n := H(n\lambda)c_n$ . Compte tenu des propriétés de la TFD  $\mathcal{F}$ , si  $x$  est un signal numérique échantillonné avec  $2N$  échantillons, on peut traduire la relation précédente par

$$\forall n \in \{1, \dots, N\} \quad Y_n = H(n\lambda) X_n,$$

où  $Y = \mathcal{F}(y)$  et  $X = \mathcal{F}(x)$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{F}(y) = H. \times \mathcal{F}(x),$$

où  $\times$  désigne le produit composante par composante. Si on pose  $h = \frac{1}{2N} \mathcal{F}^{-1}(H)$ , cela donne :  $y = h * x$  (\* désigne ici la convolution discrète.) Nous obtenons donc le résultat suivant (que nous admettrons pour les signaux analogiques) :

**Théorème 4.2.1** *Un système linéaire continu est un filtre linéaire si et seulement si la relation entre l'entrée  $e(t)$  et la sortie  $s(t)$  est une **convolution** :*

$$s(t) = [h * e](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) e(t - \theta) d\theta,$$

où  $h(t)$  est la **réponse impulsionnelle** du filtre. Pour les filtres à temps discrets on a

$$s_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e_{n-k}.$$

**Remarque 4.2.1** *On peut vérifier qu'un filtre de convolution est bien invariant. En effet, soit  $x$  un signal d'entrée et  $y = \mathcal{A}x = h * x$  la sortie correspondante. Soit  $a > 0$ .*

$$\mathcal{T}_a \mathcal{A}x(t) = y(t - a) = \int_{\mathbb{R}} h(s) x(t - a - s) ds.$$

Soit  $z = \mathcal{T}_a x : z(t) = x(t - a)$ .

$$\mathcal{A} \mathcal{T}_a x(t) = \mathcal{A}z(t) = \int_{\mathbb{R}} h(s) z(t - s) ds = \int_{\mathbb{R}} h(s) x(t - a - s) ds.$$

On a donc bien  $\mathcal{T}_a \mathcal{A} = \mathcal{A} \mathcal{T}_a$ .



### 4.2.1 Masse (impulsion) de Dirac

Nous allons maintenant préciser la notion de réponse impulsionnelle. Formellement, une masse (ou impulsion) de Dirac  $\delta_0$  « vaut »  $+\infty$  en 0 et 0 ailleurs et vérifie  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0 = 1$ . Cette définition n'a donc pas grand sens : en effet une fonction nulle presque partout et intégrable a une intégrale nulle. Nous avons donc une contradiction qui s'explique par le fait qu'une masse de Dirac **n'est pas une fonction**. C'est une **mesure** que nous allons définir rigoureusement.

Considérons (par exemple) la suite  $f_n$  de fonctions définie sur  $\mathbb{R}$  de la manière suivante (voir la figure 4.4). :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases} \quad (4.2.3)$$

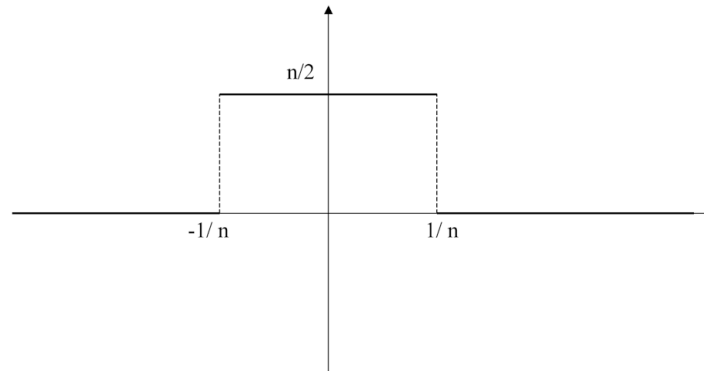


FIGURE 4.4 – Fonction  $f_n$

Chaque fonction  $f_n \in L^1(\mathbb{R})$  et on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{n}{2} dt = 1$ .

Soit alors  $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  :

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_n(t) dt = \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(t) dt ;$$

donc  $\langle f_n, \varphi \rangle = \varphi(c_n)$  où  $|c_n| \leq \frac{1}{n}$  d'après la formule de la moyenne. Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(c_n) = \varphi(0).$$

On définit ainsi un opérateur qui est la « limite » de la suite  $f_n$  (considérée comme une suite de mesures) qui est l'opérateur (ou mesure) de Dirac :

$$\langle \delta_o, \varphi \rangle = \delta_o(\varphi) = \varphi(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) d\mu_n,$$

où  $d\mu_n = f_n(t) dt$ . On vérifie que  $\delta_o$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$  : en effet

$$\delta_o(\varphi) = \varphi(0) \leq \|\varphi\|_\infty.$$

C'est donc bien une mesure (si on admet que le dual de  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$  est identifiable à l'ensemble des mesures de Radon sur  $\mathbb{R}$ .)

**Remarque 4.2.2** On peut « approcher » la mesure de Dirac par d'autres suites de fonctions  $f_n$  pourvu que  $\|f_n\|_1 = 1$  et  $f_n(x) \rightarrow 0$  si  $x \neq 0$ .

Cette approximation par une telle suite  $f_n$  justifie la « définition » donnée par la plupart des physiciens.

### Convolution entre une fonction et $\delta_a$

Nous avons déjà défini le produit de convolution entre deux fonctions  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  et  $g \in L^1(\mathbb{R})$  par  $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) g(t-s) ds$ . Comme la convolution est l'outil de base en filtrage, nous allons étendre la notion de produit de convolution au cas « fonction continue \* mesure » puisqu'il faudra travailler sur des signaux échantillonnés.

#### Définition 4.2.2 (Convolution avec $\delta_o$ )

La convolution d'une fonction  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  avec  $\delta_o$  est définie par

$$(f * \delta_o)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f * f_n)(x),$$

où  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite définie par (4.2.3).

**Remarque 4.2.3** Cette définition ne dépend pas de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  choisie pour « approcher » la mesure de Dirac.

Nous avons

$$f * f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) f(x-t) dt = \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x-t) dt = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(s) ds.$$

Comme  $f$  est continue, il vient par l'égalité de la moyenne

$$\frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(s) ds = f(x - c_n) \text{ où } |c_n| \leq \frac{1}{n}.$$

Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f * f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x - c_n) = f(x),$$

car  $f$  est continue. Nous obtenons  $(f * \delta_o)(x) = \delta_x(f) = f(x)$ .

Un corollaire immédiat est

**Corollaire 4.2.1** *Pour tout  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,*

$$f(ka) = \delta_{ka}(f) = (f * \delta_o)(ka).$$

De la même façon, on peut démontrer le corollaire suivant

**Corollaire 4.2.2** *Pour tout  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,*

$$(f * \delta_a)(x) = f(x - a).$$

La démonstration est laissée en exercice.

Nous pouvons maintenant donner la définition de la réponse impulsionnelle :

**Définition 4.2.3** *La réponse impulsionnelle  $h$  correspond au signal de sortie lorsque le signal d'entrée est une mesure de Dirac :  $h * \delta_o = h$ .*

En pratique, une impulsion correspond à un évènement bref et intense (choc, poussée violente etc...)

## 4.3 Filtrage numérique

Tout comme dans le cas analogique, on peut définir des filtres numériques qui agissent sur des signaux numériques. Les filtres numériques sont la version discrète des filtres analogiques et sont représentés par une « boîte noire » comme dans la figure

4.1

Nous ne considérons que des filtres linéaires. L'avantage (déjà évoqué) est que si le signal d'entrée peut se séparer en plusieurs composantes, on peut analyser l'action du filtre sur chaque composante séparément.

Un filtre discret est **stable** si, lorsqu'on lui présente une entrée finie, il produit une sortie finie.

### 4.3.1 Filtrage numérique linéaire

**Définition 4.3.1** On appelle *impulsion unité* la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$d(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0, \\ 0 & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

L'impulsion unité est une fonction qui va jouer le rôle de l'impulsion de Dirac dont elle est en quelque sorte une approximation « normalisée ». En effet, nous avons vu précédemment que pour tout signal analogique  $f$  on a  $(f * \delta_0)(x) = f(x)$  et on va voir qu'on a une propriété analogue en discret.

Considérons un signal échantillonné  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  (périodisé ou non). Quitte à normaliser l'intervalle de travail, on peut supposer que le pas d'échantillonnage est égal à 1 et ce signal peut s'écrire

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)d(n-k) = (x * d)(n).$$

On a donc, comme dans le cas analogique  $x = x * d$ .

**Définition 4.3.2** Soit  $S$  un filtre linéaire. On appelle *réponse impulsionnelle (RI)* du filtre la réponse  $h$  à l'impulsion unité  $d$  :  $h = S(d)$ .

**Remarque 4.3.1** Si  $h$  est la réponse impulsionnelle du filtre  $S$ , alors  $h_{-n} : k \mapsto h(k-n)$  est la réponse à l'impulsion  $d_{-n}$  puisqu'un filtre est invariant dans le temps.

Soit maintenant  $S$  un filtre linéaire de réponse impulsionnelle  $h$  et  $x$  un signal numérique. Alors

$$S(x)_n = S\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k d_{n-k}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k S(d_{n-k})$$

$$S(x)_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k h_{n-k}.$$

On en déduit donc que

**Proposition 4.3.1** Si  $S$  est un filtre de RI  $h$ , alors c'est un filtre de convolution et  $S(x) = x * h$ .

Nous terminons en donnant un critère de causalité simple pour un filtre linéaire :

**Proposition 4.3.2** *Un filtre de RI  $h$  est causal si et seulement si  $h_k = 0$  pour tout  $k < 0$ .*

*Démonstration* - Rappelons la définition de la causalité pour un filtre discret : le filtre qui à une entrée  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  associe une sortie  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est causal si pour tout  $n_o \in \mathbb{Z}$

$$\forall n \leq n_o \quad x_n = 0 \implies y_n = 0 .$$

Soit  $h$  la réponse impulsionnelle du filtre et supposons que  $h_k = 0$  pour tout  $k < 0$ . La sortie  $y$  est donnée par  $y = x * h$  et on a pour tout  $n$

$$y_n = \sum_{k=1}^{+\infty} h_k x_{n-k} .$$

Montrons que le filtre est causal. Soit  $n_o \in \mathbb{Z}$  et supposons que  $x_n = 0$  pour tout  $n \leq n_o$ . Alors Pour tout  $k \geq 1$ , alors  $n - k < n \leq n_o$  et donc  $x_{n-k} = 0$ . Finalement  $y_n = 0$  pour tout  $n \leq n_o$ .

Réciproquement : supposons que le filtre soit causal et qu'il existe  $n_o < 0$  tel que  $h_{n_o} > 0$ .

Considérons  $x = d$  l'impulsion unité en 0. La sortie correspondante est  $h$ . Or ,  $d_{n_o} = 0$  et  $h_{n_o} > 0$ . Le filtre ne peut donc pas être causal.  $\square$

### Fonction de transfert

On considère désormais un signal numérique périodique de période  $N$  et un filtre  $S$  de réponse impulsionnelle  $h$  périodique de même période.<sup>2</sup>

Le signal filtré obtenu en sortie est  $y = x * h$ . Appliquons la transformée de Fourier discrète  $\mathcal{F}$  au signal de sortie :

$$Y := \mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(x * h) = N\mathcal{F}(x) * \mathcal{F}(h) = X * H .$$

La fonction  $H$  où  $H := N\mathcal{F}(h)$  est appelée **fonction de transfert** du filtre .

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-2i\pi kn} .$$

On constate que c'est une approximation (par la formule des rectangles) de la transformée de Fourier  $\hat{h}$  de  $h$ . On verra un peu plus loin que cela correspond à une transformation qui généralise la TFD : la transformation en  $z$ .

Vérifions que cette définition coïncide avec celle qui a été donnée dans le cadre analogique, en considérant le signal sinusoidal monochromatique de fréquence  $\lambda$ ,  $e_\lambda$  échantillonné avec un pas de 1 :  $x_k = e^{2i\pi\lambda k}$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$ .

2. Le signal est échantillonné avec N points sur un intervalle fini puis périodisé.

La sortie correspondante est  $y$  avec, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\lambda k} h_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\lambda(n-k)} h_k.$$

$$y_n = e^{2i\pi\lambda n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda k} h_k = x_n G(\lambda),$$

où

$$G(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda k} h_k = \hat{h}(\lambda).$$

Le module  $|G(\lambda)|$  est la réponse en amplitude et l'argument de  $G(\lambda)$  est la réponse en phase.

### 4.3.2 Filtres linéaires discrets et équations aux différences

En pratique il faut qu'un filtre soit réalisable ( $h_k = 0$  si  $k < 0$ ) et il faut régler le problème de la somme infinie impossible à implémenter sur un ordinateur.

On peut soit

- utiliser un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)
- utiliser des équations aux différences (qui sont l'analogue discret des équations différentielles ordinaires) qui permettent d'utiliser des filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)

#### Filtre à réponse impulsionnelle finie

Comme son nom l'indique un filtre RIF correspond à un nombre fini de termes dans l'équation de convolution. Il est toujours stable mais peut nécessiter un grand nombre de termes pour obtenir l'effet de filtrage souhaité.

#### Equations aux différences

On va définir un filtre (linéaire) par une équation aux différences de la forme

$$y_k + \sum_{i=1}^N a_i y_{k-i} = \sum_{j=0}^M b_j x_{k-j}, \quad a_N, b_M \neq 0, \quad (4.3.1)$$

où  $x = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est l'entrée et  $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  la sortie.

On peut noter qu'une telle relation peut-être interprétée comme la discrétisation d'une équation différentielle ordinaire linéaire à coefficients constants (en utilisant le

schéma d'Euler par exemple). Ainsi, les filtres que nous allons étudier sont la forme « discrète » de filtres continus définis par une équation différentielle ordinaire (que nous étudierons ultérieurement dans la section 4.4).

Un tel filtre est dit récursif d'ordre  $N$ . L'équation de convolution d'un filtre RIF est un cas particulier de cette équation ( $a_i = 0$  pour tout  $i$ ) : dans ce cas le filtre n'est pas récursif et la sortie  $y$  ne dépend que de l'entrée et de son passé.

Un filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII) demande en général beaucoup moins de termes pour obtenir l'effet de filtrage souhaité.

Il est possible de visualiser l'équation de récurrence associée à un filtre numérique, sous la forme d'une structure (ou **graphe de fluence**) faisant apparaître les éléments de base suivants :

- L'additionneur, symbolisé par  $\Sigma$  qui additionne les signaux à ses entrées.
- Le multiplieur, symbolisé par  $\triangleright_a$ , qui multiplie un signal par un scalaire  $a$
- L'élément « délai », symbolisé par  $z^{-1}$  (nous verrons plus tard pourquoi) , qui produit une sortie retardée de une valeur par rapport à son entrée.

La structure associée à (4.3.1) est donnée par la figure 4.5

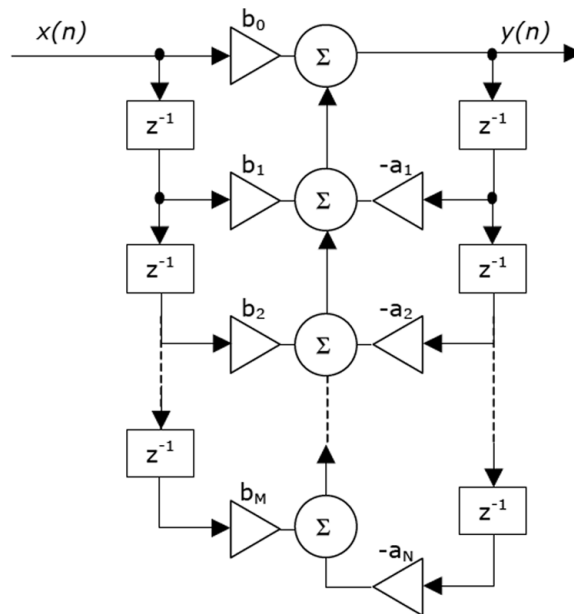


FIGURE 4.5 – Structure générique d'un filtre numérique

On constate que le caractère récursif ou non récursif d'un filtre numérique est lié à la présence ou à l'absence de boucles dans sa structure.

**Exemple 4.3.1** *Le principe des intérêts composés sur un compte bancaire peut être facilement défini par une équation aux différences finies :*

$$y_n = y_{n-1} + \frac{p}{100}y_{n-1} + x_n ,$$

où  $y_n$  est la somme disponible au temps  $t = nT$  sur le compte,  $x_n$  est le dépôt ou le retrait courant et  $p$  est le taux d'intérêt. La valeur de  $T$  dépend de la politique financière de l'établissement (actualisation par jour, semaine, mois, année...). Le système sous-jacent est récursif et d'ordre 1. Sa structure est donnée à la figure 4.6

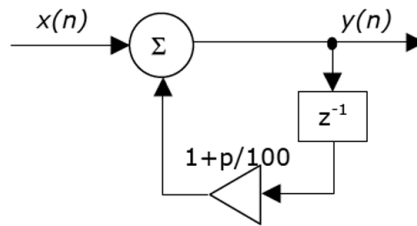


FIGURE 4.6 – Structure des intérêts composés

**Exemple 4.3.2** *Imaginons que l'on veuille créer un filtre numérique dont chaque valeur de sortie soit la moyenne locale du signal d'entrée, estimée sur  $2L + 1$  valeurs autour de l'échantillon courant :*

$$y_n = \frac{1}{2L + 1} \sum_{k=-L}^L x_{n-k} .$$

L'équation précédente définit bien un filtre numérique non récursif, appelé **filtre à moyenne mobile**. Notons que ce filtre, tel que défini, est **non causal** : le calcul de la valeur courante de sortie courante nécessite de connaître les  $L$  valeurs d'entrée suivantes. L'existence de systèmes non causaux n'est pas nécessairement un problème dans le domaine du numérique : ces systèmes seront en pratique implémentés comme des systèmes causaux à délai, le délai correspondant au nombre de valeurs futures nécessaires au calcul de la valeur de sortie courante.

### 4.3.3 Transformation en $z$

La transformation en  $z$  est une généralisation de la transformation de Fourier pour les signaux discrets : on remplace  $e^{2i\pi\lambda}$  par un nombre complexe  $z$  quelconque.



**Définition 4.3.3** Soit  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  un signal discret (échantillonné avec un pas de 1). La transformée en  $z$  de  $x$  est définie par

$$TZ(x) = X \text{ avec } X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k z^{-k},$$

où  $z$  est une variable complexe, lorsque la série converge.

La transformée en  $z$  ne converge pas nécessairement pour toutes les valeurs de  $z$  : il faut étudier les séries

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k z^{-k} \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} x_{-k} z^k.$$

Cela définit en général une couronne de convergence de rayon intérieur  $r_1$  et de rayon extérieur  $r_2$ .

La plupart du temps, les expressions des transformées en  $z$  utilisées en traitement du signal sont des fractions rationnelles de la variable  $z$ . Les *pôles* sont les racines du dénominateur et les *zéros* celles du numérateur. Dans de nombreux calculs les pôles sont simples ce qui permet de faire une décomposition en éléments simples et de se ramener à des transformées plus simples.

Donnons quelques propriétés de la transformation en  $z$ . Elle est clairement linéaire . De plus

**Proposition 4.3.3** Si  $x$  est causal (nul pour les temps négatifs), le rayon extérieur  $r_2$  est infini.

Si  $x$  est nul pour les temps positifs ou nul,  $r_1 = 0$ .

Si  $x$  est non nul pour un nombre fini d'échantillons,  $r_1 = 0$  et  $r_2 = +\infty$  :  $TZ(x)$  est définie dans tout le plan complexe.

La propriété essentielle est liée au retard .

**Proposition 4.3.4** Soit  $p \in \mathbb{Z}$ . Pour tout signal numérique  $x$  on a

$$TZ(x(\cdot - p)) = z^{-p} TZ(x).$$

*Démonstration* - Soit  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  un signal discret et  $X = TZ(x)$ . Soit  $p \in \mathbb{Z}$  fixé.

$$TZ(x(\cdot - p))(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{k-p} z^{-k} = z^{-p} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{k-p} z^{-(k-p)} = z^{-p} TZ(x)(z).$$

□

Enfin, donnons la transformée en  $z$  d'un produit de convolution :

**Proposition 4.3.5** Soient  $x$  et  $h$  deux signaux discrets. Alors

$$TZ(x * h) = TZ(x) \cdot TZ(h) ,$$

où  $*$  désigne le produit de convolution discret.

*Démonstration* - Soient  $X$ , et  $H$  les transformées en  $z$  de  $x$  et  $h$  respectivement et  $y$  la convolution discrète de  $x$  et  $h$  :

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n h_{k-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{k-n} h_n .$$

Nous raisonnons formellement en supposant qu'on se trouve dans la couronne de convergence de  $Y$  qui est l'intersection des couronnes de convergence de  $X$  et  $H$ . La transformée en  $z$  de  $y$  est

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n h_{k-n} \right) z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n h_{k-n} \right) z^{-(k-n)} z^{-n} . \end{aligned}$$

On peut intervertir les deux sommes (Théorème de Fubini discret) et

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{k-n} z^{-(k-n)} \right) x_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(z) x_n z^{-n} = H(z) X(z) .$$

□

#### 4.3.4 Fonction de transfert

Soit un filtre récursif donné par  $\mathcal{A} : x = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mapsto y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  avec

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad y_k = \sum_{i=1}^p a_i y_{k-i} + \sum_{j=0}^q b_j x_{k-j}, \quad a_p, b_q \neq 0 .$$

Appliquons la transformée en  $z$  à cette équation : on obtient

$$Y(z) = \sum_{i=1}^p a_i z^{-i} Y(z) + \sum_{j=0}^q b_j z^{-j} X(z) ,$$

où  $Y = TZ(y)$  et  $X = TZ(x)$ , c'est-à-dire

$$Y(z) \left( 1 - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i} \right) = \left( \sum_{j=0}^q b_j z^{-j} \right) X(z) ,$$

Finalement

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}, \quad (4.3.2)$$

où

$$P(z) = 1 - \sum_{i=1}^p a_i z^i \text{ et } Q(z) = \sum_{j=0}^q b_j z^j .$$

Pour avoir la réponse en fréquence du filtre on remplace  $z$  par  $2i\pi\lambda$  (ou en normalisant par  $i\lambda$ ) :

$$H_f(\lambda) = H(2i\pi\lambda) . \quad (4.3.3)$$

L'équation (4.3.2) définit la fonction de transfert en  $z$  du filtre.

### 4.3.5 Exemples de filtres du premier et du deuxième ordre

Le filtrage est un traitement qui consiste à extraire une information « utile » d'un signal composite. Par exemple, sur une chaîne stéréophonique, on trouve généralement un amplificateur-égaliseur comportant plusieurs filtres réglables par l'utilisateur. Ainsi, on peut actionner ces filtres pour supprimer les basses fréquences pour n'entendre que les violons. L'atmosphère joue le rôle d'un filtre pour les signaux Infra Rouge (IR). La fonction de transfert d'un tel filtre dépend des conditions climatiques et on a affaire à un système qui est un filtre sur des durées d'observation limitées. L'atténuation que ce système apporte dépend des longueurs d'onde des signaux qui traversent l'atmosphère. On peut citer un grand nombre d'autres exemples tels que les milieux marins, les câbles de transmission, etc.

Généralement, on distingue les filtres **passé-bas**, **passé-bande** et **passé-haut**, suivant l'action qu'ils ont sur le spectre. L'énergie du signal est exprimée en décibels. Sur la figure ci-dessous,  $A$  est l'atténuation apportée par le filtre sur une composante de fréquence  $f$  donnée. Le **gain** du filtre exprimé en décibels est défini par

$$G(\lambda) = 20 \log(|H(i\lambda)|), \quad (4.3.4)$$

où  $H$  est la fonction de transfert.

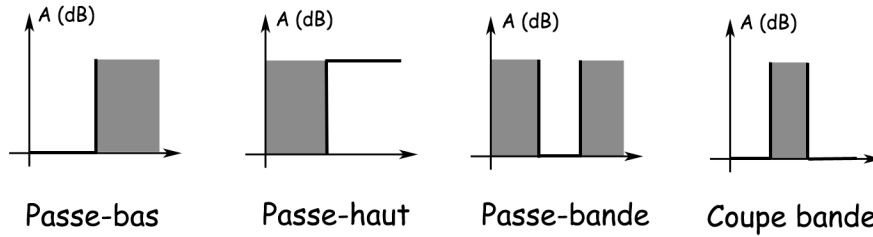


FIGURE 4.7 – Filtres passe-haut, passe-bas, passe-bande et coupe bande

On introduit alors la **largeur de bande** d'un filtre qui est la bande fréquentielle à -3dB, i.e. le support fréquentiel de la réponse défini par :

$$\{ \lambda \text{ t. q. } |H(i\lambda)|^2 \geq \frac{|H_{max}(i\lambda)|^2}{2} \}.$$

En effet

$$|H(i\lambda)|^2 \geq \frac{|H_{max}(i\lambda)|^2}{2} \iff 2G(\lambda) \geq 2G_{max}(\lambda) - 20 \log 2 \iff G(\lambda) \geq G_{max}(\lambda) - 10 \log 2,$$

avec  $10 \log 2 \simeq 3.46$  dB.

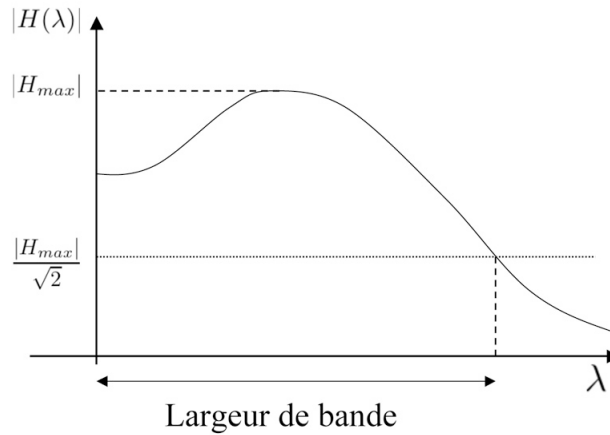


FIGURE 4.8 – Gain et largeur de bande

On introduit aussi le temps de montée d'un filtre. Ce nombre permet de caractériser l'inertie du filtre, il est relié directement à la réponse impulsionnelle et il est pratiquement inversement proportionnel à la bande fréquentielle. Dans ce qui suit on notera  $t$  la variable discrète (au lieu de  $k$ )

### Analyse en fréquence d'un filtre non récursif du premier ordre

C'est un filtre de la forme

$$y(t) = x(t) + bx(t-1),$$

où  $b$  est un réel. Sa réponse impulsionnelle  $h$  est nulle pour tous les échantillons sauf pour  $t = 0$  où elle vaut 1 et  $t = 1$  où elle vaut  $b$ . Sa transformée en  $z$  est le polynôme

$$H(z) = 1 + bz^{-1} = \frac{z+b}{z},$$

défini dans tout le plan complexe privé de 0. Sa réponse en fréquence est donnée par  $H(i\lambda) = 1 - i\frac{b}{\lambda}$ .

### Analyse en fréquence d'un filtre récursif du premier ordre

C'est un filtre de la forme

$$y(t) = x(t) - by(t-1),$$

où  $b$  est un réel non nul. Avec les notations précédentes :  $P(z) = 1 + bz$  et  $Q(z) = 1$ . Donc

$$H(z) = \frac{1}{1 + bz^{-1}} = \frac{z}{z+b}.$$

La réponse en fréquence est

$$H_f(\lambda) = \frac{i\lambda}{i\lambda + b}$$

$H_f$  n'a pas de pôle (réel) car  $b$  est réel. De plus

$$|H_f(\lambda)| = \frac{\lambda}{\sqrt{b^2 + \lambda^2}}.$$

C'est un filtre passe-haut car  $|H_f(\lambda)| \simeq \lambda$  lorsque  $\lambda$  est petit et  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} |H_f(\lambda)| = 1$ .

### Quelques filtres élémentaires du 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> ordre

Type	Fonction de transfert $H(z)$	Module et Phase $ H(i\omega) $ $\varphi(i\omega)$	Graphique du gain
Passe-bas 1 <sup>er</sup> ordre	$\frac{1}{z+1}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$ $-\arctg(i\omega)$	
Passe-haut 1 <sup>er</sup> ordre	$H(z) = \frac{z}{z+1}$	$\frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}$ $\frac{\pi}{2} - \arctg(\omega)$	
Passe-bas 2 <sup>e</sup> ordre	$\frac{1}{z^2 + 2\xi z + 1}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2}}$ $-\arctg\left(\frac{2\xi\omega}{1-\omega^2}\right)$	
Passe-haut 2 <sup>e</sup> ordre	$\frac{z^2}{z^2 + 2\xi z + 1}$	$\frac{\omega^2}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2}}$ $\pi - \arctg\left(\frac{2\xi\omega}{1-\omega^2}\right)$	
Passe-bande 2 <sup>e</sup> ordre	$\frac{2\xi z}{z^2 + 2\xi z + 1}$	$\omega = \frac{\lambda}{\lambda_o}$ $\lambda_o$ : fréquence centrale $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\xi^2}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)^2}}$ $\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{2\xi\omega}{1-\omega^2}\right)$	
Coupe-bande 2 <sup>e</sup> ordre	$\frac{1+z^2}{z^2 + 2\xi z + 1}$	$\omega = \frac{\lambda}{\lambda_o}$ $\lambda_o$ : fréquence centrale $\frac{1}{\sqrt{1 + 4\xi^2 \cdot \frac{\omega}{1-\omega^2}}}$ $-\arctg\left(\frac{2\xi\omega}{1-\omega^2}\right)$	

Nous donnons dans le tableau ci-dessus quelques exemples de filtres avec leurs fonctions de transfert. Dans ce qui suit  $H$  désigne la fonction de transfert qui est complexe,  $\varphi$  est la phase c'est-à-dire l'argument de  $H$ .

Le gain  $G$  a été défini précédemment :  $G(\lambda) = 20 \log |H(i\lambda)|$  et  $\lambda_c$  désigne la fréquence de coupure. On a normalisé la fréquence :  $\omega = \frac{\lambda}{\lambda_c} \geq 0$ .

Le paramètre  $\xi$  est le facteur d'amortissement : il doit être positif.

Pour les filtres passe-bande,  $2\xi$  représente la bande passante relative à -3 dB

Pour les filtres coupe-bande,  $2\xi$  représente la bande rejetée relative à -3 dB

Le paramètre  $Q := \frac{1}{2\xi}$  est appelé **facteur de qualité** pour les filtres passe-bande et coupe-bande.

### Le filtre propre : élimination d'un bruit blanc

Nous allons montrer comment les vecteurs propres de la matrice d'autocorrélation d'un signal permettent dans certains cas de filtrer celui-ci. C'est le filtre **propre** (« eigen filter »).

Supposons que le signal soit de la forme :  $x = s + b$  où  $s$  est le signal d'intérêt et  $b$  un bruit blanc (donc non corrélé avec  $x$ ) d'écart type  $\sigma$ . On suppose que ce signal est échantillonné avec  $N$  échantillons. Appliquons un filtre de réponse impulsionnelle finie de taille  $M$ ,  $h$  à ce signal. Le signal filtré devient

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad y(n) = \sum_{k=1}^M h(k)x(n-k).$$

On définit la matrice  $R_x$  de la manière suivante :

$$R_x = [r_{k,p}]_{1 \leq p,k \leq M} \text{ avec } r_{k,p} := \sum_{n=1}^N x(n-k)x(n-p).$$

$R_x$  est symétrique. Calculons le rapport signal sur bruit :  $\frac{E(s)}{E(b)}$ .

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \sum_{n=1}^N y_n^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{p=1}^M h(k)x(n-k)h(p)x(n-p) \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{p=1}^M h(k)h(p) \sum_{n=1}^N x(n-k)x(n-p) = \sum_{k=1}^M \sum_{p=1}^M h(k)h(p)r_{k,p} = h^t R_x h. \end{aligned}$$

Il est clair que  $R_x = R_s + R_b$  puisque  $s$  et  $b$  ne sont pas corrélés. De plus  $R_b = \sigma^2 I$ .  
Donc

$$\|y\|^2 = h^t R_s h + h^t R_b h = h^t R_s h + \sigma^2 h^t h.$$

Le rapport signal sur bruit est donc :  $\frac{h^t R_s h}{\sigma^2 h^t h}$ . C'est un quotient de Rayleigh et on sait qu'il est maximisé pour  $h = u_1$  où  $u_1$  est un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de  $R_s$ . Or  $R_s = R_x - \sigma^2 I$ .

On choisit donc un vecteur propre  $v$  associé à la plus grande valeur propre  $\alpha$  de  $R_x$ , car seul le signal  $x$  est accessible et on choisit  $h = v$ . Le SNR maximum est alors  $\frac{\alpha - \sigma^2}{\sigma^2}$ .

En pratique on estime  $h$  avec la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice

$$X = \begin{bmatrix} x(M) & \cdots & x(1) \\ \vdots & & \vdots \\ x(N) & \cdots & x(N - M + 1) \end{bmatrix}.$$

On prend comme estimée de  $h$  la première colonne  $v$  de la matrice de passage  $V$ .

## 4.4 Filtrage analogique

Dans cette section, on va plus particulièrement étudier les filtres **dynamiques**, c'est-à-dire gouvernés par une Equation Différentielle Ordinaire linéaire à coefficients constants qui sont l'analogue continu des filtres gouvernés par des équations aux différences.

$$\sum_{k=0}^q b_k s^{(k)} = \sum_{j=0}^p a_j e^{(j)}, \quad a_p \cdot b_q \neq 0, \quad (4.4.1)$$

où  $e$  est l'entrée et  $s = \mathcal{A}(e)$  la sortie,  $q \geq 0$ ,  $p \geq 0$ .

### Cas où l'entrée et la sortie sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

On rappelle que  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  qui vérifient les deux propriétés suivantes

- i.  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$
- ii.  $f$  et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide c'est-à-dire

$$\forall n, p \in \mathbb{N} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x^p f^{(n)}(x)| = 0.$$

L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est stable par multiplication par un polynôme, par dérivation ( $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ) et  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ .

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$  contient l'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact. Donc  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^1(\mathbb{R})$ . Enfin  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est stable par transformation de Fourier. Pour plus de détails on peut se référer au chapitre 2.



C'est un cas très particulier mais qui est utile pour expliquer ce qu'est un filtre. On peut ensuite généraliser si nécessaire grâce à la théorie des distributions [6].

On suppose donc que  $e \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et on cherche  $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Si une telle fonction existe on a par transformation de Fourier de (4.4.1)

$$\sum_{k=0}^q b_k (2i\pi\omega)^k \hat{s}(\omega) = \sum_{j=0}^p a_j (2i\pi\omega)^j \hat{e}(\omega). \quad (4.4.2)$$

On considère les deux polynômes

$$P(x) = \sum_{j=0}^p a_j x^j \text{ et } Q(x) = \sum_{k=0}^q b_k x^k,$$

et on suppose que la fraction rationnelle  $\frac{P}{Q}$  n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire. Par conséquent  $\frac{P(2i\pi\omega)}{Q(2i\pi\omega)}$  n'a pas de pôles puisque  $\omega$  est réel et (4.4.2) est équivalente à

$$\hat{g}(\omega) = \frac{P(2i\pi\omega)}{Q(2i\pi\omega)} \hat{f}(\omega).$$

Cette égalité détermine complètement  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  si elle existe, et donc démontre l'unicité d'une telle fonction. L'existence en découle également car la fraction

$$G(\omega) = \frac{P(2i\pi\omega)}{Q(2i\pi\omega)} \hat{f}(\omega)$$

est dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  comme  $\hat{f}$ . Il suffit alors de prendre la transformée de Fourier inverse (qui est encore dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ). On obtient :

**Proposition 4.4.1** *Si la fraction rationnelle  $\frac{P}{Q}$  n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire et si  $e \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , alors (4.4.1) admet une solution unique  $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Le système  $\mathcal{A} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  qui à  $e$  associe  $s$  est un filtre.*

Supposons que  $\frac{P}{Q}$  n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire et que  $d^\circ P < d^\circ Q$ .

Dans ce cas la fonction de transfert

$$H(\omega) = \frac{P(2i\pi\omega)}{Q(2i\pi\omega)}$$

est dans  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . Par décomposition en éléments simples, elle admet une transformée de Fourier inverse  $h = \mathcal{F}^{-1}H$ , bornée et à décroissance rapide, continue (sauf peut-être à l'origine) et la relation

$$\hat{s} = \hat{h}\hat{e}$$

entraîne

$$s = h * e .$$

La réponse à l'entrée  $f$  est donc bien un produit de convolution de l'entrée avec une fonction fixe  $h$  qui est la réponse impulsionnelle.

**La fonction de transfert  $H$  est donc la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle  $h$ .**

**Remarque 4.4.1** Cette définition est équivalente à celle que nous avons vue dans la proposition 4.2.1. En effet, avec les notations de cette proposition, nous avons

$$s_\lambda(t) = H(\lambda) e_\lambda(t) , \quad (4.4.3)$$

avec  $e_\lambda(t) = \exp(2i\pi\lambda t)$ . La nouvelle définition nous donne  $s_\lambda(t) = (h * e_\lambda)(t)$ . Nous allons vérifier que (4.4.3) est satisfaite. Posons  $\sigma(\lambda, t) = H(\lambda) e_\lambda(t)$  et montrons que  $\sigma(\lambda, \cdot) = s_\lambda$ . Fixons  $\lambda$  : en appliquant la transformation de Fourier par rapport à  $t$ , on obtient (en supposant que  $h$  a les bonnes propriétés de régularité) :

$$\hat{\sigma}(\lambda, \cdot) = H(\lambda) \hat{e}_\lambda .$$

Nous avons vu que la transformée de Fourier (généralisée) de  $e_t$  est  $\hat{e}_\lambda = \delta_\lambda$ . On a donc

$$\hat{\sigma}(\lambda, \cdot) = H(\lambda) \delta_\lambda .$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse par rapport à  $\lambda$  il vient  $\check{\sigma} = \check{h} * e_{-\lambda}$ , c'est-à-dire  $\sigma(-\lambda, t) = (e^{-2i\pi\lambda} * \check{h})(t) = s_{-\lambda}(t)$ . D'où le résultat.

Si  $d^\circ P \geq d^\circ Q$  les calculs précédents n'ont plus de sens.

**Définition 4.4.1** On appelle **réponse indicelle** d'un filtre sa réponse à l'échelon unité (fonction de Heaviside) :

$$h_1(t) = \int_{-\infty}^t h(s) ds .$$

**Remarque 4.4.2** La détermination de la fonction de transfert et de la réponse impulsionnelle d'un filtre analogique se fait donc via la la transformation de Fourier appliquée à l'équation différentielle. Après discrétisation, une EDO se transforme en une équation aux différences et la détermination de la fonction de transfert du filtre numérique se fait alors grâce à la tranformation en  $z$  qui est exactement l'analogie numérique, dans ce cas, de la transformation de Fourier.

### 4.4.1 Exemples

#### Le filtre passe-bas idéal

Nous avons vu qu'il est courant de définir un filtre par la façon dont il modifie les fréquences du signal d'entrée, c'est-à-dire par sa fonction de transfert  $H(\lambda)$  puisque les fréquences de l'entrée  $f$  et de la sortie  $g$  sont liées par

$$\hat{g}(\lambda) = H(\lambda)\hat{f}(\lambda).$$

Le passe-bas idéal est le filtre qui ne modifie pas les fréquences  $\lambda$  telles que  $\lambda \leq \lambda_c$  (fréquence de coupure) et supprime les autres. D'où

$$H(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\lambda| \leq \lambda_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît  $h \in L^2(\mathbb{R})$  telle que  $\hat{h} = H$ . C'est

$$h(t) = \frac{\sin 2\pi\lambda_c t}{\pi t}.$$

Si on se limite à des signaux d'entrée d'énergie finie,  $f$ ,  $h$  et  $H$  sont dans  $L^2(\mathbb{R})$  et  $g = h * f$ . On sait que  $g$  est continue, bornée et nulle à l'infini.  $h * f$  est dans  $L^2(\mathbb{R})$  comme  $\hat{f}$ .

Toutefois un tel filtre n'est pas causal (ou réalisable). En effet, nous avons le résultat suivant :

**Proposition 4.4.2** *Un filtre de convolution à réponse impulsionnelle  $h$  continue est réalisable si et seulement si le support de  $h$  est inclus dans  $[0, +\infty[$ .*

*Démonstration* - Supposons que  $\text{supp}(h) \subset [0, +\infty[$ . La sortie

$$g(t) = \int_0^{+\infty} h(s)f(t-s) ds$$

est nulle pour  $t < t_0$  lorsque  $f$  l'est.

Inversement supposons qu'il existe  $t_1 < 0$  tel que  $h(t_1) > 0$ . Comme  $h$  est continue en  $t_1$ , il existe un intervalle  $[a, b]$  tel que

$$a < b < 0 \text{ et } \forall t \in [a, b] \quad h(t) > 0.$$

Soit le signal d'entrée  $f = \chi_{[0, b-a]}(t)$ . On a une sortie  $g(t) = \int_{t-b+a}^t h(s) ds$  qui vérifie  $g(b) > 0$ . Le système n'est donc pas réalisable. □

Il est clair que le support de  $h$  dans le cas du filtre passe-bas idéal n'est pas dans  $[0, +\infty[$ . C'est pour cela qu'il est « idéal ». On se contente de filtres passe-bas approchés qui atténuent les hautes fréquences (comme le filtre RC) au lieu de les supprimer...

### Un filtre réel : le filtre LRC

Donnons maintenant un exemple de filtre réel dynamique gouverné par une équation différentielle. On considère le schéma physique ci-dessous

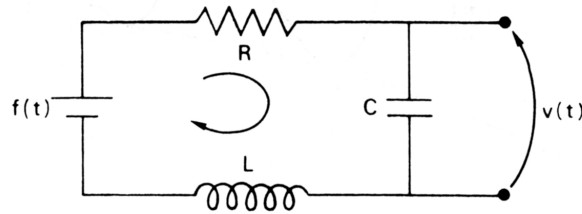


FIGURE 4.9 – le filtre LRC

Si  $v$  est la tension aux bornes de la capacité  $C$  et  $f$  la tension appliquée, la loi d'Ohm donne

$$LCv'' + RCv' + v = f$$

ce qui définit un filtre du **second ordre**.

On obtient

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{LCx^2 + RCx + 1}.$$

Posons

$$\Delta = C^2(R^2 - 4\frac{L}{C}).$$

1. On suppose que  $\Delta < 0$ . On pose

$$\omega = \sqrt{4\frac{L}{C} - R^2}, \alpha = \frac{R}{2L}, \beta = \frac{\omega}{2L}.$$

La fonction de transfert  $H$  a deux pôles complexes conjugués à partie réelle négative :

$$z = -\alpha + i\beta \text{ et } \bar{z} = -\alpha - i\beta,$$

et on a la décomposition

$$H(\lambda) = \frac{1}{i\omega C} \left[ \frac{1}{2i\pi\lambda - z} - \frac{1}{2i\pi\lambda - \bar{z}} \right].$$

On obtient par transformée de Fourier inverse

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H) = \frac{2}{\omega C} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\left(\frac{\omega}{2L}t\right) \cdot u(t),$$

où  $u$  désigne l'échelon unité de Heaviside. La réponse à l'entrée  $f$  est

$$v(t) = \frac{2}{\omega C} \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-x)} \sin \beta(t-x) f(x) dx$$

la réponse indicielle est

$$h_1(t) = \frac{2}{\omega C} \left( \int_0^t e^{-\alpha x} \sin \beta x dx \right) u(t) = \left[ 1 - e^{-\alpha t} \left( \cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right] u(t).$$

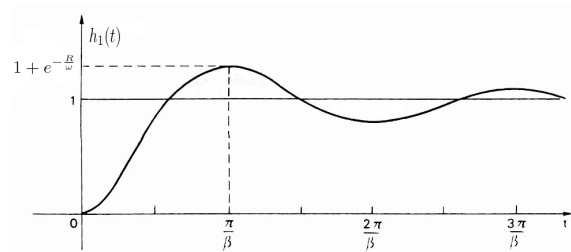


FIGURE 4.10 – Réponse indicielle dans le cas  $\Delta < 0$

Calculons enfin le module

$$\begin{aligned} |H(\lambda)| &= \frac{2\beta}{\omega C} \left| \frac{1}{(2i\pi\lambda - z)(2i\pi\lambda - \bar{z})} \right| \\ &= \frac{1}{CL} \frac{1}{\sqrt{((2\pi\lambda - \beta)^2 + \alpha^2)((2\pi\lambda + \beta)^2 + \alpha^2)}}. \end{aligned}$$

On constate que  $H(0) = 1$  et  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} |H(\lambda)| = 0$ . Ce filtre est un filtre passe-bas :

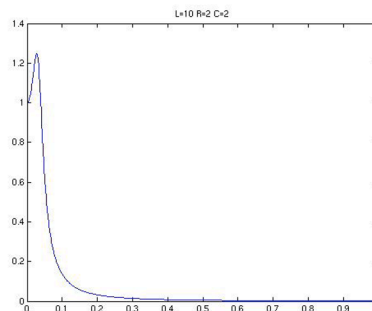


FIGURE 4.11 – fonction de transfert dans le cas  $\Delta < 0$

2. On suppose que  $\Delta = 0$ . Il y a un pôle double réel négatif :  $z = -\frac{R}{2L}$ . Dans ce cas

$$h(t) = \frac{1}{LC} t e^{-\frac{R}{2L} t} u(t).$$

La réponse à l'entrée  $f$  est

$$v(t) = \frac{1}{LC} \int_{-\infty}^t (t-s) e^{-\frac{R}{2L}(t-s)} f(s) ds$$

la réponse indicielle est

$$h_1(t) = \left[ 1 - \left( 1 + \frac{R}{2L} t \right) e^{-\frac{R}{2L} t} \right] u(t).$$

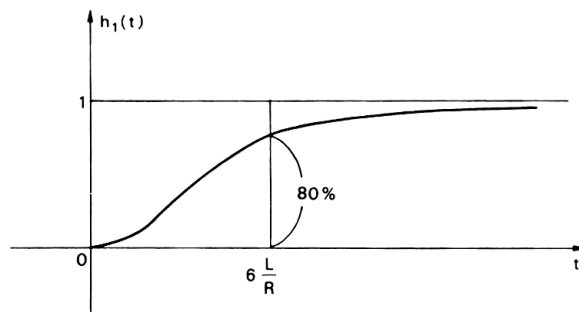


FIGURE 4.12 – Réponse indicielle dans le cas  $\Delta = 0$

Nous traçons ci-dessous le module de  $H$

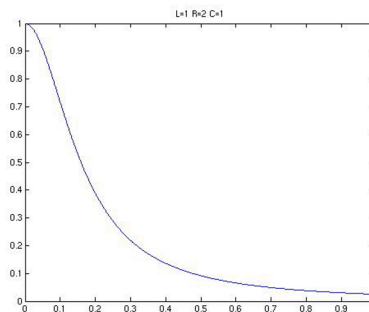


FIGURE 4.13 – Fonction de transfert dans le cas  $\Delta = 0$

3. On suppose que  $\Delta > 0$ . La fonction de transfert est de la forme

$$H(\lambda) = -\frac{1}{\omega C} \left[ \frac{1}{2i\pi\lambda - z_1} - \frac{1}{2i\pi\lambda - z_2} \right],$$

où

$$\omega = \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}, z_1 = -\frac{R + \omega}{2L} \text{ et } z_2 = -\frac{R - \omega}{2L}$$

et

$$h(t) = -\frac{1}{\omega C} [e^{z_1 t} - e^{z_2 t}] u(t).$$

La réponse indicielle est

$$h_1(t) = \left[ 1 + \frac{2L}{C\omega(R + \omega)} e^{z_1 t} - \frac{2L}{C\omega(R - \omega)} e^{z_2 t} \right] u(t).$$

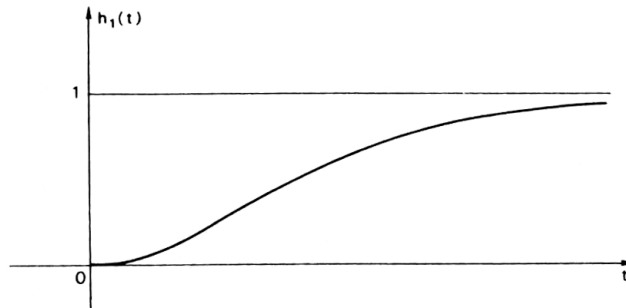


FIGURE 4.14 – Réponse indicielle dans le cas  $\Delta > 0$

Nous traçons ci-dessous le module de  $H$

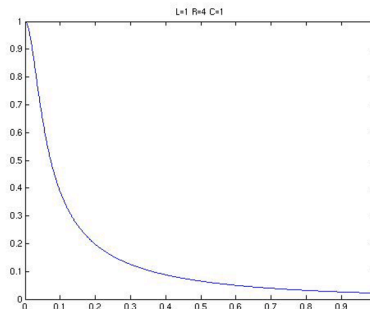


FIGURE 4.15 – Fonction de transfert dans le cas  $\Delta > 0$

### Un filtre « adapté »

Considérons un filtre dont la fonction de transfert est  $H(\omega)$ . Les sorties  $y_s(t)$  et  $y_n(t)$  associées respectivement aux entrées  $s(t)$  et  $n(t)$  sont données par transformation de Fourier inverse :

$$y_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)S(\omega)e^{2i\pi\omega t} d\omega \quad \text{et} \quad y_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)N(\omega)e^{2i\pi\omega t} d\omega;$$

où  $S(\omega) := \hat{s}(\omega)$  et  $N(\omega) := \hat{n}(\omega)$ .

Supposons que  $s(t)$  et  $n(t)$  désignent respectivement un signal utile et un bruit nuisible. Un filtre adapté au couple  $[s(t), n(t)]$  est un filtre qui maximise le rapport appelé **rapport signal sur bruit** (SNR) défini dans ce cas par :

$$\alpha(t) = \frac{|y_s(t)|^2}{\|y_n\|_{L^2}^2}.$$

On obtient en utilisant les expressions dans le domaine fréquentiel

$$|y_s(t)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)S(\omega)e^{2i\pi\omega t} d\omega \right|^2,$$

et grâce à l'égalité de Parseval

$$\|y_n\|_{L^2}^2 = \|\hat{y}_n\|_{L^2}^2 = \|HN\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 |N(\omega)|^2 d\omega.$$

Finalement, l'expression de peut se mettre sous la forme d'un rapport de deux produits scalaires :

$$\alpha(t) = \frac{|(A, B_t)_{L^2}|^2}{\|A\|_{L^2}^2},$$

où l'on a posé :

$$A(\omega) := H(\omega)N(\omega) = \hat{y}_n(\omega), \quad B(\omega) := \frac{\bar{S}(\omega)}{\bar{N}(\omega)} e^{-2i\pi\omega t}.$$

On a donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\alpha(t) \leq \frac{\|A\|_{L^2}^2 \|B_t\|_{L^2}^2}{\|A\|_{L^2}^2} \leq \|B_t\|_{L^2}^2,$$



Comme  $\|B_t\|_{L_2}^2$  est indépendant du filtre cherché, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que, pour  $t$  fixé, le maximum du rapport  $\alpha(t)$  est atteint pour le filtre  $H$  tel que  $A$  et  $B_t$  soient proportionnels. D'où :

$$H(\omega) = \kappa \frac{\bar{S}(\omega)}{|N(\omega)|^2} e^{-2i\pi\omega t}.$$

Dans le cas particulier important où  $N(\omega) = e^{i\phi(\omega)}$ , on obtient

$$H(\omega) = \kappa \bar{S}(\omega) e^{-2i\pi\omega t}, \quad h(\theta) = \kappa s(t - \theta), \quad y(\theta) = \kappa \varphi_{n,s}(t - \theta).$$

Dans ce cas particulier, le filtre adapté au signal  $s(t)$  a donc pour réponse impulsionnelle le signal  $s(t)$  retourné et décalé de  $t$ . Ce décalage signifie qu'il faut attendre pendant une durée  $t$  après l'apparition du signal pour le détecter.

#### 4.4.2 Filtrage et corrélation

**Théorème 4.4.1** Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux signaux à temps continu et  $y_1, y_2$  les sorties associées des filtres de réponse impulsionnelle  $h_1$  et  $h_2$ . Alors les fonctions d'inter-corrélation  $\varphi_{x_1, x_2}$  et  $\varphi_{y_1, y_2}$  sont reliées par la formule suivante dite **formule des interférences** :

$$\varphi_{y_1, y_2} = h_1 * \bar{h}_2 * \varphi_{x_1, x_2},$$

où  $\bar{h}_2(x) = h_2(-x)$ .

*Démonstration* - Nous faisons un calcul formel dans le cas où les deux signaux sont permanents. Le cas de signaux transitoires se montre de la même façon. On suppose que les fonctions ont les bonnes propriétés (d'intégrabilité) qui permettent d'utiliser la convolution et le théorème de Fubini.

$$\begin{aligned} \varphi_{y_1, y_2}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_1(t) \bar{y}_2(t - \tau) dt, \\ y_1(t) &= (h_1 * x_1)(t) = \int_{\mathbb{R}} h_1(s) x_1(t - s) ds, \\ y_2(t - \tau) &= \int_{\mathbb{R}} h_2(u) x_2(t - \tau - u) du. \end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_{y_1, y_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \iint_{\mathbb{R}} h_1(s) \bar{h}_2(u) x_1(t - s) \bar{x}_2(t - \tau - u) du ds dt.$$

En intervertissant la limite et les intégrales on obtient

$$\varphi_{y_1, y_2}(\tau) = \iint_{\mathbb{R}} h_1(s) \overline{h_2}(u) \left( \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_1(t-s) \overline{x_2}(t-\tau-u) dt \right) du ds dt.$$

Le changement de variables  $\sigma = t - s$  et le lemme 3.2.1 donnent

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_1(t-s) \overline{x_2}(t-\tau-u) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-s}^{\frac{T}{2}-s} x_1(\sigma) \overline{x_2}(\sigma+s-\tau-u) dt \\ &= \varphi_{x_1, x_2}(s-u-\tau). \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \varphi_{y_1, y_2}(\tau) &= \iint_{\mathbb{R}} h_1(s) \overline{h_2}(u) \varphi_{x_1, x_2}(s-u-\tau) ds du \\ &= \int_{\mathbb{R}} h_1(s) \left( \int_{\mathbb{R}} \overline{h_2}(u) \varphi_{x_1, x_2}(s-u-\tau) du \right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} h_1(s) \left( \int_{\mathbb{R}} \overline{h_2}(-u) \varphi_{x_1, x_2}(u+s-\tau) du \right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} h_1(s) (\overline{\check{h}_2} * \varphi_{x_1, x_2})(\tau-s) ds \\ &= h_1 * (\overline{\check{h}_2} * \varphi_{x_1, x_2})(\tau). \end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.4.1** *La densité interspectrale de de puissance des signaux  $y_1, y_2$  vérifie*

$$\Gamma_{y_1, y_2}(\omega) := \widehat{\varphi_{y_1, y_2}}(\omega) = H_1(\omega) \overline{H_2(\omega)} \Gamma_{x_1, x_2}(\omega),$$

où  $H_1$  et  $H_2$  sont les fonctions de transfert des filtres.

*Démonstration* - Il suffit d'appliquer la transformée de Fourier à ce qui précède. □

## Chapitre 5

# Échantillonnage

Dans ce chapitre nous allons faire le lien entre l'échantillonnage d'un signal (en particulier la fréquence d'échantillonnage) et la reconstruction du signal par la FFT (par exemple). Nous verrons que les deux fréquences (échantillonnage et FFT) ne sont pas indépendantes l'une de l'autre si on veut un résultat optimal.

Le problème pratique est de transformer un signal analogique continu en un signal discret échantillonné pour un traitement numérique. Pour ce faire, un échantillonneur enregistre le signal toutes les  $a$  secondes et il le transforme en impulsions. Un convertisseur analogique/numérique (C.A.N) code les impulsions en données numériques pour le traitement en machine.

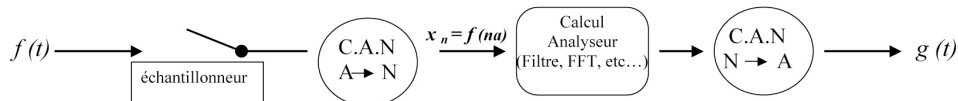


FIGURE 5.1 – Schéma du traitement d'un signal analogique

### 5.1 Peigne et mesure de Dirac

Remarquons tout d'abord que toute fonction  $f$  de  $L^1(\mathbb{R})$  peut s'identifier à une forme linéaire continue sur l'espace  $L^\infty(\mathbb{R})$  des fonctions bornées sur  $\mathbb{R}$  de la façon

suivante :

$$f \simeq T_f \text{ avec } T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt \text{ pour tout } \varphi \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

Il est facile de voir que l'opérateur  $T_f$  est linéaire continu car

$$|T_f(\varphi)|_{\mathbb{C}} \leq \|f\|_{L^1} \|\varphi\|_{\infty},$$

et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On peut donc « plonger »  $L^1(\mathbb{R})$  dans le dual de  $L^\infty(\mathbb{R})$  lui même inclus dans l'espace  $\mathcal{M}$  des mesures. On notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le crochet de dualité entre  $L^1(\mathbb{R})$  et  $L^\infty(\mathbb{R})$  défini par

$$\forall \varphi \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad \langle f, \varphi \rangle = T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt.$$

### 5.1.1 Peigne de Dirac

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$  on note  $\delta_a$  la mesure de Dirac en  $a$  c'est-à-dire l'application de  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  :  $\varphi \mapsto \varphi(a)$ .

#### Définition 5.1.1 (Peigne de Dirac)

Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  de support inclus dans  $[-N, N]$  où  $N \in \mathbb{N}$ .

On note

$$\Delta_a(f) = \sum_{-N}^N \delta_{ka}(f) = \sum_{k=-N}^N f(ka).$$

$\Delta_a = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{ka}$  est une mesure définie sur les fonctions continues à support compact, c'est-à-dire une application linéaire, continue de  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ . On l'appelle le **Peigne de Dirac**.

#### Définition 5.1.2 (Mesure produit)

Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ . On définit la **mesure produit**  $f \Delta_a$  sur  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$  par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \quad (f \Delta_a)(\varphi) = \Delta_a(f \varphi).$$

En d'autres termes, pour toute fonction  $\varphi$  continue à support compact dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$(f \Delta_a)(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(ka) \varphi(ka) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(ka) \delta_{ka}(\varphi).$$

On peut donc définir la mesure produit  $f\Delta_a$  par  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(ka)\delta_{ka}$ .

Dans le chapitre 2 (Transformation de Fourier discrète), le signal considéré était périodique de période  $T$  et nous avons défini l'échantillonnage de  $f$  comme étant la discrétisation  $y = (f(t_k))_{0 \leq k \leq N-1}$  de  $f$  aux points  $t_k = \frac{kT}{N} = ka$  en posant  $a = \frac{T}{N}$ . Nous pouvons étendre la notion d'échantillonnage à un signal non périodique (sur  $\mathbb{R}$ ) de manière analogue en posant  $t_k = ka$  (on peut justifier cela en disant que  $T$  et  $N$  sont infinis). Nous obtenons ainsi une suite (non périodique)  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  définie par :

$$y_n = f(na), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

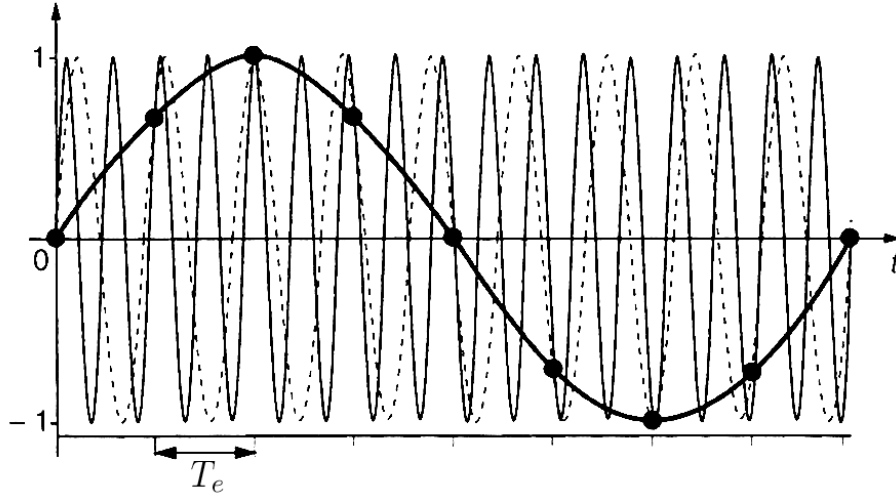


FIGURE 5.2 – Une infinité de signaux analogiques peuvent coïncider sur les mêmes échantillons

Comme nous avons plongé  $L^1(\mathbb{R})$  dans l'espace des mesures grâce à l'opérateur  $T$  (début de la section 5.1) nous pouvons, de la même façon, identifier la suite  $y$  à une mesure discrète grâce à l'opérateur :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_d : \quad \ell_1(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{M} \\ y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\mapsto \mu_y \end{aligned}$$

où  $\mu_y$  est une mesure discrète définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \quad \langle \mu_y, \varphi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k \varphi(ka).$$

L'opérateur  $\mathcal{T}_d$  est une injection linéaire et continue de  $\ell_1(\mathbb{C})$  dans  $\mathcal{M}$ . On peut donc plonger  $\ell_1(\mathbb{C})$  dans  $\mathcal{M}$  et considérer la suite discrète comme une mesure :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \quad \langle y, \varphi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k \varphi(ka) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k \delta_{ka}(\varphi).$$

Mathématiquement, l'**échantillonnage** d'un signal  $f$ , défini a priori par la donnée d'une suite  $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  avec  $y_k = f(ka)$ , est donc la mesure

$$a f \Delta_a = a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(ka) \delta_{ka},$$

où  $a$  est la **période d'échantillonnage** (et  $\frac{1}{a} := F_e$  est donc la **fréquence** d'échantillonnage) de sorte que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \quad (a f \Delta_a)(\varphi) = a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(ka) \varphi(ka).$$

La multiplication par  $a$  correspond à une sorte de « normalisation » (on approche la fonction  $f$  en norme  $L^1$  donc par une somme de rectangles de largeur  $a$  et de longueur  $f(ka)$ ).

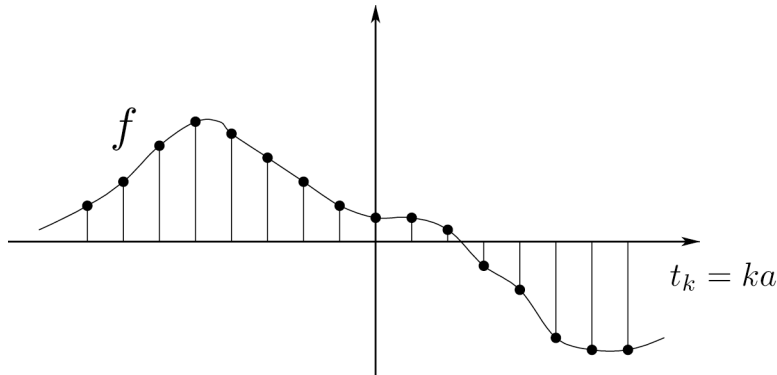


FIGURE 5.3 – Peigne de Dirac

### 5.1.2 Convolution entre une fonction et $\Delta_a$

Nous avons déjà défini le produit de convolution entre deux fonctions  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  et  $g \in L^1(\mathbb{R})$  par  $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds$ . Comme la convolution est l'outil de base en filtrage, nous allons étendre la notion de produit de convolution au cas « fonction continue \* mesure » puisqu'il faudra travailler sur des signaux échantillonnés.

#### Définition 5.1.3 (Convolution avec $\delta_o$ )

La **convolution** d'une fonction  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  avec  $\delta_o$  est définie par

$$(f * \delta_o)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f * f_n)(x),$$

où  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite définie (par exemple) par (4.2.3).

Nous avons

$$f * f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)f(x-t)dt = \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x-t)dt = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(s)ds.$$

Comme  $f$  est continue, il vient par l'égalité de la moyenne

$$\frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(s)ds = f(x - c_n) \text{ où } |c_n| \leq \frac{1}{n}.$$

Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f * f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x - c_n) = f(x),$$

car  $f$  est continue. Nous obtenons

**Théorème 5.1.1** Pour tout  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

$$(f * \delta_o)(x) = \delta_x(f) = f(x).$$

Ce résultat est indépendant de la suite obtenue pour « approcher »  $\delta_o$ . Un corollaire immédiat est

**Corollaire 5.1.1** Pour tous  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

- $f(ka) = \delta_{ka}(f) = (f * \delta_o)(ka)$ .
- $(f * \delta_a)(x) = f(x - a)$ .

La démonstration est laissée en exercice.

### 5.1.3 Transformée de Fourier de $\delta_a$

On sait définir la transformée de Fourier d'une fonction  $f$  de  $L^1(\mathbb{R})$  par

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-2i\pi\omega t) dt.$$

D'autre part on a montré (proposition 2.3.5 p. 45) que si  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{g}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)g(t) dt.$$

En particulier comme  $\hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R})$ , ceci est équivalent à

$$\langle \hat{f}, g \rangle = \langle f, \hat{g} \rangle$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le crochet de dualité  $L^1 - L^\infty$ .

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on peut étendre la transformation de Fourier à la mesure  $\delta_a$  de la façon suivante :

$$\forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \quad \widehat{\delta}_a(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_a(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(a);$$

nous avons remarqué que si  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$  alors  $\hat{\varphi}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\widehat{\delta}_a$  est bien définie. D'autre part

$$\forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \quad |\widehat{\delta}_a(\varphi)| = |\hat{\varphi}(a)| \leq \|\hat{\varphi}\|_\infty \leq \|\varphi\|_{L^1};$$

$\widehat{\delta}_a$  est donc une forme linéaire continue sur  $L^1(\mathbb{R})$ . Le dual de  $L^1(\mathbb{R})$  étant  $L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\widehat{\delta}_a$  est donc identifiable à une fonction de  $L^\infty(\mathbb{R})$ . De plus

$$\widehat{\delta}_0(\varphi) = \delta_0(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi \cdot 0)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \langle 1, \varphi \rangle.$$

On peut donc identifier  $\widehat{\delta}_0$  à la fonction 1. De même,  $\widehat{\exp(2i\pi a \cdot)} = \delta_a$  et  $\widehat{\delta}_a = \exp(-2i\pi a \cdot)$ . En effet, pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

$$\langle \widehat{\delta}_a, \varphi \rangle = \widehat{\delta}_a(\varphi) = \hat{\varphi}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \exp(-2i\pi a t) dt = \langle \exp(-2i\pi a \cdot), \varphi \rangle.$$

De plus, grâce au théorème d'inversion de Fourier et à la continuité de  $\varphi$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\omega) \exp(2i\pi\omega t) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(-\omega) \exp(-2i\pi\omega t) d\omega$$



$$\begin{aligned}
\langle \delta_a, \varphi \rangle &= \left\langle \delta_a, \widehat{\varphi(-\cdot)} \right\rangle = \left\langle \widehat{\delta}_a, \widehat{\varphi(-\cdot)} \right\rangle = \left\langle \exp(-2i\pi a t), \widehat{\varphi(-\cdot)} \right\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(-t) \exp(-2i\pi a t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(t) \exp(2i\pi a t) dt \\
&= \left\langle \exp(2i\pi a \cdot), \widehat{\varphi} \right\rangle = \left\langle \widehat{\exp(2i\pi a \cdot)}, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Nous pouvons résumer cela dans le théorème suivant :

**Théorème 5.1.2 (Transformée de Fourier de la mesure de Dirac)** *La transformée de Fourier  $\widehat{\delta}_a$  de la mesure de Dirac  $\delta_a$  définie par :*

$$\forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \quad \widehat{\delta}_a(\varphi) = \delta_a(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(a)$$

*est une fonction de  $L^\infty(\mathbb{R})$ . Plus précisément,*

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \widehat{\delta}_a(\omega) = \exp(-2i\pi a \omega).$$

**Corollaire 5.1.2** *On peut définir par extension la transformée de Fourier de la fonction  $t \mapsto \exp(2i\pi a t)$  ( $\in L^\infty$ ). C'est une mesure :  $\widehat{\exp(2i\pi a \cdot)} = \delta_a$  c'est-à-dire*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\exp(2i\pi a \omega)} \varphi(\omega) d\omega = \varphi(a).$$

### 5.1.4 Développement en série de Fourier du peigne de Dirac

Considérons la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{x}{a} \text{ sur } [0, a],$$

et périodique de période  $a$ .

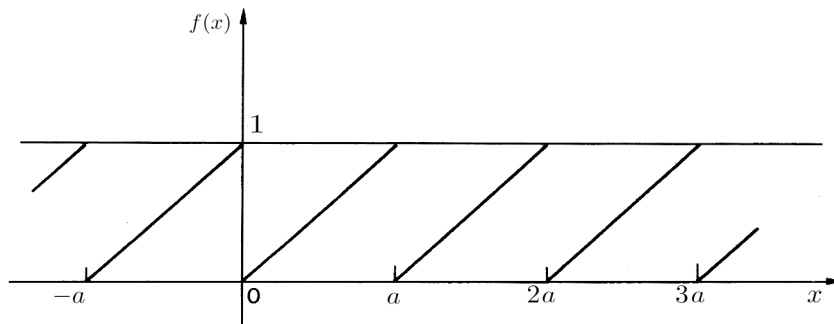


FIGURE 5.4 – Fonction  $f$

On rappelle que  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  est l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  à support compact dans  $\mathbb{R}$ .

**Lemme 5.1.1** Pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(na) - \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{na} - \frac{1}{a}, \varphi \right\rangle .$$

*Démonstration* - Soit une fonction  $\varphi$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Supposons que le support de  $\varphi$  soit inclus dans un intervalle  $[-Na, +Na]$  où  $N \in \mathbb{N}$ . Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \sum_{n=-N}^{N-1} \int_{na}^{(n+1)a} f'(x)\varphi(x)dx .$$

La fonction  $f'$  est constante égale à  $\frac{1}{a}$  (donc continue) sur  $]na, (n+1)a[$  et

$$f(na)^+ = \lim_{\substack{x \rightarrow na \\ x \geq na}} f(x) = 0, \quad f((n+1)a)^- = \lim_{\substack{x \rightarrow (n+1)a \\ x \leq (n+1)a}} f(x) = 1 .$$

On peut donc faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{na}^{(n+1)a} f'(x)\varphi(x)dx &= - \int_{na}^{(n+1)a} f(x)\varphi'(x)dx \\ &\quad + f((n+1)a)^- \varphi((n+1)a) - f(na)^+ \varphi(na) \\ &= - \int_{na}^{(n+1)a} f(x)\varphi'(x)dx + \varphi((n+1)a) . \end{aligned}$$

Comme

$$\int_{na}^{(n+1)a} f'(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{a} \int_{na}^{(n+1)a} \varphi(x)dx ,$$

on obtient par sommation

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \sum_{n=-N}^{N-1} \int_{na}^{(n+1)a} \varphi(x)dx &= \sum_{n=-N}^{N-1} \int_{na}^{(n+1)a} f'(x)\varphi(x)dx \\ &= \sum_{n=-N}^{N-1} \varphi((n+1)a) - \sum_{n=-N}^{N-1} \int_{na}^{(n+1)a} f(x)\varphi'(x) dx , \end{aligned}$$

c'est-à-dire par passage à la limite sur  $N$

$$\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(na) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(na) - \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx .$$

□

Considérons maintenant  $f$  comme une fonction de  $L_p^2(0, a)$  : elle peut donc s'écrire comme la somme de sa série de Fourier et un calcul facile donne

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \exp(2i\pi n \frac{x}{a}) ,$$

la convergence de la série étant assurée dans  $L_p^2(0, a)$  et donc presque partout. Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) dx + \frac{i}{2\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi n \frac{x}{a}) \varphi'(x) dx \\ &= \frac{i}{2\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi n \frac{x}{a}) \varphi'(x) dx \end{aligned}$$

puisque  $\varphi$  est à support compact. De même, une intégration par parties (et  $\varphi$  à support compact) donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi n \frac{x}{a}) \varphi'(x) dx = -(2i\pi \frac{n}{a}) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi n \frac{x}{a}) \varphi(x) dx .$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x) dx = \frac{1}{a} \sum_{n \neq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi n \frac{x}{a}) \varphi(x) dx .$$

Cette relation couplée avec le lemme 5.1.1 donne finalement

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(na) - \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{a} \sum_{n \neq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi n \frac{x}{a}) \varphi(x) dx . \quad (5.1.1)$$

On peut donc énoncer le résultat suivant :

**Théorème 5.1.3** *Le peigne de Dirac admet un « développement » en série de Fourier :*

$$\Delta_a = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi n \frac{x}{a}) .$$

*Démonstration* - Pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  la relation (5.1.1) donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(na) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi n \frac{x}{a}) \right] \varphi(x) dx.$$

On reconnaît le peigne de Dirac dans l'expression de gauche :

$$\langle \Delta_a, \varphi \rangle = \frac{1}{a} \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi n \frac{x}{a}), \varphi \right\rangle,$$

ce qui s'écrit en résumé :

$$\Delta_a = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi n \frac{x}{a}).$$

□

### 5.1.5 Transformée de Fourier du peigne de Dirac

Grâce à ce qui précède on peut alors calculer la transformée de Fourier du peigne de Dirac :

#### **Théorème 5.1.4 (Transformée de Fourier du peigne de Dirac)**

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On peut calculer la transformée de Fourier du peigne de Dirac par

$$\widehat{\Delta}_a = \frac{1}{a} \Delta_{\frac{1}{a}}.$$

*Démonstration* - On a vu que la transformée de Fourier de  $\delta_a$  est

$$\widehat{\delta}_a(\omega) = \exp(-2i\pi a \omega).$$

Donc

$$\widehat{\Delta}_a(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi n a \omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi n a \omega).$$

Le théorème (5.1.3) indique (avec  $\frac{1}{a}$  au lieu de  $a$ ) que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi a n x) = \frac{1}{a} \Delta_{\frac{1}{a}}.$$

Donc

$$\widehat{\Delta}_a = \frac{1}{a} \Delta_{\frac{1}{a}}.$$

□

Ce résultat montre que (sauf si  $a = 1$ ) **le spectre du signal échantillonné n'est pas l'échantillonnage du spectre de départ.**

### 5.1.6 Transformée de Fourier d'un signal périodique

Un signal périodique non nul n'est ni dans  $L^1(\mathbb{R})$  ni dans  $L^2(\mathbb{R})$  et on ne peut donc pas calculer sa transformée de Fourier-Plancherel. Toutefois grâce au Peigne de Dirac on peut généraliser la transformée de Fourier à de tels signaux.

Plus précisément soit  $x \in L^2_p(0, T)$  un signal de période  $T$ . On peut donc écrire son développement en série de Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(2i\pi n \frac{t}{T}) \quad p.p. .$$

Appliquons (au moins formellement) la transformation de Fourier : on obtient

$$\hat{x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \widehat{\exp(2i\pi n \frac{\cdot}{T})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta_{\frac{k}{T}} .$$

Par conséquent

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \hat{x}(\frac{k}{T}) = c_k .$$

## 5.2 Formule de Poisson dans $L^1(\mathbb{R})$

Le lemme suivant montre comment construire un signal périodique à partir d'un échantillonnage de  $f$ .

**Lemme 5.2.1** Soit  $a > 0$  et  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . On pose  $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - na)$ . Alors

1. la série converge dans  $L^1(0, a)$  et  $F \in L^1_p(0, a)$
2. les coefficients de Fourier de  $F$  sont  $c_k(F) = \frac{1}{a} \hat{f}(\frac{k}{a})$ .

*Démonstration* - Soit  $F_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} f(t - na)$ . C'est une fonction de  $L^1(0, a)$ . Il vient

$$\begin{aligned}
\|F_{N+p} - F_N\|_{L^1(0,a)} &= \int_0^a \left| \left( \sum_{n=-(N+p)}^{-(N+1)} f(t-na) + \sum_{n=N+1}^{N+p} f(t-na) \right) \right| dt \\
&\leq \sum_{n=-(N+p)}^{-(N+1)} \left( \int_0^a |f(t-na)| dt \right) + \sum_{n=N+1}^{N+p} \left( \int_0^a |f(t-na)| dt \right) \\
&= \sum_{n=-(N+p)}^{-(N+1)} \left( \int_{-na}^{-(n-1)a} |f(t)| dt \right) + \sum_{n=N+1}^{N+p} \left( \int_{-na}^{-(n-1)a} |f(t)| dt \right) \\
&= \left( \int_{-(N+p)a}^{-Na} |f(t)| dt \right) + \left( \int_{Na}^{(N+p)a} |f(t)| dt \right) \\
&\leq \int_{|x| \geq Na} |f(t)| dt
\end{aligned}$$

Comme  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|x| \geq Na} |f(t)| dt = 0$ . La suite  $F_N$  est de Cauchy dans l'espace de Banach  $L^1(0, a)$  : elle converge donc vers une fonction  $F \in L^1(0, a)$  dans  $L^1(0, a)$ . On peut montrer de la même façon que la suite converge vers  $F$  dans  $L^1(k a, (k+1)a)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Donc  $F$  est définie presque partout sur  $\mathbb{R}$ . Elle est clairement périodique de période  $a$ . C'est donc un élément de  $L^1_p(0, a)$ . De plus  $c_k(F) = \lim_{N \rightarrow +\infty} c_k(F_N)$ . On obtient donc

$$\begin{aligned}
c_k(F_N) &= \frac{1}{a} \int_0^a F_N(t) \exp(-2i\pi t \frac{k}{a}) dt \\
&= \frac{1}{a} \sum_{n=-N}^N \int_0^a f(t-na) \exp(-2i\pi t \frac{k}{a}) ds \\
&= \frac{1}{a} \int_{-Na}^{(N+1)a} f(s) \exp(-2i\pi \frac{k}{a} s) ds \\
&\longrightarrow \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \exp(-2i\pi \frac{k}{a} s) ds = \frac{1}{a} \hat{f}(\frac{k}{a}).
\end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant établir la formule de Poisson qui traduit simplement le fait que  $F$  est égale à sa série de Fourier.

**Théorème 5.2.1 (Formule de Poisson)**

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  dérivable par morceaux telle que  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - na) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{a}\right) \exp(2i\pi n \frac{t}{a}).$$

*Démonstration* - Le premier membre de l'égalité converge normalement dans  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $F$  périodique et continue sur  $\mathbb{R}$ . Le second membre est une série de Fourier qui converge uniformément.

La fonction  $F$  définie par le lemme 5.2.1 vérifie les conditions d'application du théorème de Dirichlet 2.1.7 pour les fonction  $L^1$  périodiques ( chapitre 2, p. 16). En effet  $F$  appartient à  $L^1_p(0, a)$  et est continue.  $F$  est dérivable par morceaux car  $f$

l'est. Soit  $t$  un point où  $f$  est dérivable : on a  $F'_N(t) = \sum_{n=-N}^N f'(t - na)$ . Comme  $f' \in L^1(\mathbb{R})$  le lemme 5.2.1 indique que la série  $F'_N$  converge dans  $L^1_p(0, a)$  vers une fonction  $G$  de  $L^1_p(0, a)$  dont les coefficients de Fourier sont :

$$c_k(G) = \frac{1}{a} \hat{f}'\left(\frac{k}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot 2i\pi \frac{k}{a} \hat{f}\left(\frac{k}{a}\right) = 2i\pi \frac{k}{a} c_k(F) = c_k(F').$$

L'unicité des coefficients de Fourier permet de conclure que  $G = F'$ . On obtient donc

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_k(F) \exp(2i\pi k \frac{t}{a}) = \frac{1}{2} (F(t^+) + F(t^-)) = F(t).$$

Toujours en utilisant le lemme 5.2.1 il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - na) = \frac{1}{a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{k}{a}\right) \exp(2i\pi k \frac{t}{a}).$$

□

**5.2.1 Application à l'étude d'un signal échantillonné**

Soit  $f$  un signal de  $L^1(\mathbb{R})$ . On échantillonne ce signal toutes les  $a$  secondes et on rappelle que

$$af\Delta_a = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na)\delta_{na}.$$

En utilisant la convolution on observe que

$$f \cdot \Delta_a = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f} * \hat{\Delta}_a) = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f} * \frac{1}{a} \Delta_{\frac{1}{a}}\right).$$

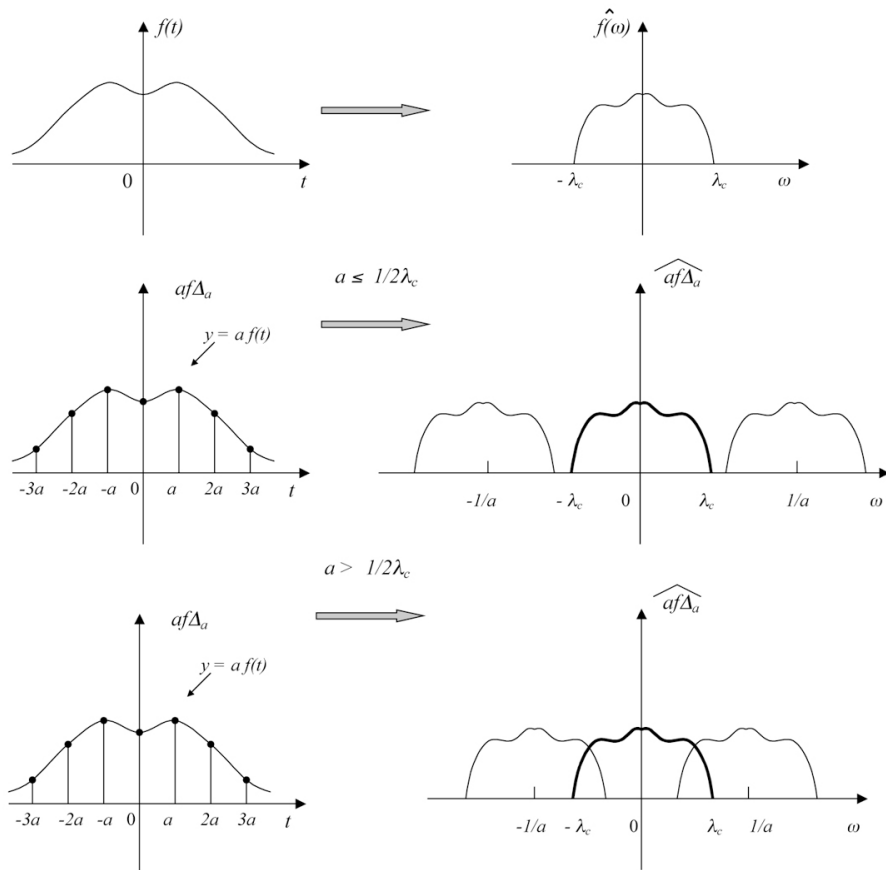


FIGURE 5.5 – L'échantillonnage périodise le spectre



Donc  $\widehat{f \cdot \Delta_a} = \frac{1}{a} \hat{f} * \Delta_{\frac{1}{a}}$ , c'est-à-dire pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$

$$\widehat{af \cdot \Delta_a}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{n}{a}\right).$$

La formule de Poisson appliquée avec  $\hat{f}$  et  $\frac{1}{a}$  au lieu de  $f$  et  $a$  donne

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{n}{a}\right) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(na) e^{2i\pi na\omega} = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) e^{-2i\pi na\omega}. \quad (5.2.2)$$

Finalement, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$

$$\widehat{af \cdot \Delta_a}(\omega) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) \exp(-2i\pi na\omega). \quad (5.2.3)$$

Comme  $af \cdot \Delta_a$  est le signal échantillonné, on vient de montrer que le spectre du signal échantillonné (avec une période de  $a$  secondes) est **périodique de période la fréquence d'échantillonnage**  $F_e = \frac{1}{a}$ .

En conclusion, **si on échantillonne un signal on périodise son spectre.**

### 5.3 Théorème d'échantillonnage de Shannon

#### Définition 5.3.1 (Signal à bande limitée)

Un signal  $f$  de  $L^1(\mathbb{R})$  continu par morceaux dont le spectre ne comporte pas de fréquences supérieures à  $\lambda_c$  (c'est-à-dire tel que le support de  $\hat{f}$  est borné inclus dans  $[-\lambda_c, \lambda_c]$ ) est dit à **bande limitée**.

**Remarque 5.3.1** Le *principe d'incertitude* que nous verrons plus tard indique qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent pas être toutes les deux à support compact. Donc si un signal est à bande limitée, il est nécessairement à support non borné et  $C^\infty$

#### Définition 5.3.2 (Fréquence de Nyquist)

La fréquence de bande limitée  $\lambda_c$  est appelée **fréquence de Nyquist**.

On note  $s_a$  la fonction sinc  $\left(\frac{\pi}{a}t\right)$  (où sinc est la fonction sinus cardinal)

$$s_a(t) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right)}{\frac{\pi}{a}t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

$$\text{On note } s_{an}(t) = s_a(t - na) = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{\pi}{a}(t - na))}{\frac{\pi}{a}(t - na)} & \text{si } t \neq na \\ 1 & \text{si } t = na \end{cases}$$

On définit la fonction « créneau »  $\kappa_a$  par

$$\kappa_a(x) = \begin{cases} a & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2a} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.3.4)$$

**Remarque 5.3.2** 1.  $s_{an}(ka) = 0$  pour tout  $k \neq n$

2.  $s_{an} = \mathcal{F}^{-1}(\kappa_a \exp(-2i\pi na \cdot))$  donc  $\widehat{s_{an}}(\omega) = \kappa_a(\omega) \exp(-2i\pi na\omega)$  ;

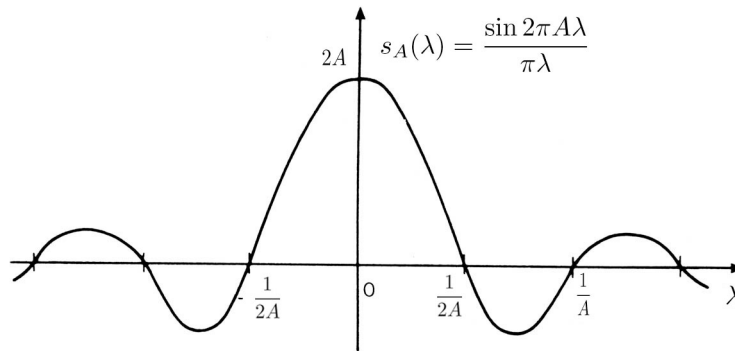


FIGURE 5.6 – La fonction Sinus cardinal

On se donne un signal à **bande limitée** de fréquence de Nyquist  $\lambda_c$  et on suppose de plus que  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  et que la cadence d'échantillonnage est assez rapide. Autrement dit, la période d'échantillonnage est assez petite, très précisément :  $a \leq \frac{1}{2\lambda_c}$ . La valeur  $\frac{1}{2\lambda_c}$  est la **cadence de Nyquist**.

**Théorème 5.3.1 (Théorème de Shannon)**

Soit  $f$  un signal à bande limitée et d'énergie finie :

$$\text{support}(\hat{f}) \subset [-\lambda_c, \lambda_c] \text{ et } \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Alors

$$\forall a \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(na)|^2 < +\infty,$$

et

$$\forall a \leq \frac{1}{2\lambda_c} \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t-na)}{\frac{\pi}{a}(t-na)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) s_{na}(t).$$

L'égalité ci-dessus a lieu au sens de la norme  $L^2(\mathbb{R})$ . Si de plus

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(na)| < +\infty,$$

la série converge uniformément vers  $f$ .

*Démonstration* - La démonstration de ce théorème est difficile dans le cas général : elle fait l'objet de la section suivante. Nous allons le démontrer dans le cas où  $f$  est une fonction continue, intégrable sur  $\mathbb{R}$  telle que sa transformée de Fourier est nulle en dehors de l'intervalle  $[-\lambda_c, \lambda_c]$ .

Soit  $a$  un réel vérifiant  $0 < a \leq \frac{1}{2\lambda_c}$ . On appelle  $g$  la fonction de période  $\frac{1}{a}$  qui coïncide avec  $\hat{f}$  sur  $]-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}[$ . Les coefficients de Fourier de  $g$  vérifient

$$c_n(g) = af(-na).$$

En effet

$$c_n(g) = a \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} g(t) e^{-2i\pi nat} dt = a \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} \hat{f}(t) e^{-2i\pi nat} dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{-2i\pi nat} dt$$

car  $\hat{f}$  est nulle en dehors de  $]-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}[$  (puisque  $0 < a \leq \frac{1}{2\lambda_c}$ ). D'autre part, comme  $f$  est continue, la transformée de Fourier inverse donne

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{2i\pi tx} dt,$$

et donc

$$c_n(g) = a \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{-2i\pi nat} dt = af(-na).$$

Soit  $t$  un réel fixé et  $h_t$  une fonction de période  $\frac{1}{a}$  telle que

$$\forall x \in ]-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}[, \quad h(x) = e^{2i\pi tx}.$$

Un calcul classique donne :

$$c_n(h_t) = s_a(t - na)$$

Nous aurons ensuite besoin du lemme suivant :

**Lemme 5.3.1** *Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions périodiques de carré intégrable sur une période, alors, le produit  $fg$  est périodique, intégrable sur une période, et ses coefficients de Fourier sont donnés par*

$$c_n(fg) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{n-k}(f)c_k(g) .$$

On peut alors en déduire la formule de Shannon :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(ka) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(t - ka)\right)}{\frac{\pi}{a}(t - ka)} .$$

En effet, appliquons le lemme aux fonctions  $g$  et  $h_t$  avec  $n = 0$  :

$$c_o(gh_t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{-k}(g)c_k(h_t) .$$

Nous avons vu que

$$c_{-k}(g) = af(ka) \text{ et } c_k(h_t) = s_a(t - ka) .$$

D'autre part

$$\begin{aligned} c_n(gh_t) &= a \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} g(x) e^{2i\pi tx} e^{-2i\pi nax} dt \\ &= a \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} \hat{f}(x) e^{2i\pi(t-na)x} dt \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{2i\pi(t-na)x} dx . \end{aligned}$$

Grâce à la transformation de Fourier inverse on obtient

$$c_n(gh_t) = af(t - na) .$$

En particulier pour  $n = 0$

$$c_0(gh_t) = af(t) .$$

Finalement

$$af(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} af(ka)s_a(t - ka) ,$$

c'est-à-dire

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(ka)s_a(t - ka) .$$

□

*Démonstration du Lemme 5.3.1.* Soit  $f \in L_p^2(0, a)$  une fonction de période  $a$ . On peut donc l'écrire comme sa série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{2i\pi\frac{k}{a}x} .$$

Soit  $g \in L_p^2(0, a)$ . La fonction  $fg$  est donc intégrable et

$$c_n(fg) = \frac{1}{a} \int_0^a f(t)g(t) e^{-2i\pi\frac{n}{a}t} dt .$$

Remplaçons  $f$  par sa série de Fourier. On peut intervertir l'intégrale et la série (la série est normalement convergente), ce qui donne

$$\begin{aligned} c_n(fg) &= \frac{1}{a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) \int_0^a e^{2i\pi\frac{k}{a}t} g(t) e^{-2i\pi\frac{n}{a}t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) \underbrace{\left[ \frac{1}{a} \int_0^a g(t) e^{-2i\pi\frac{n-k}{a}t} dt \right]}_{c_{n-k}(g)} . \end{aligned}$$

On obtient

$$c_n(fg) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)c_{n-k}(g) .$$

On reconnaît là un résultat classique pour la transformée de Fourier : le coefficient de Fourier du produit de deux fonctions est le produit de convolution (discret) des coefficients de chaque fonction. □

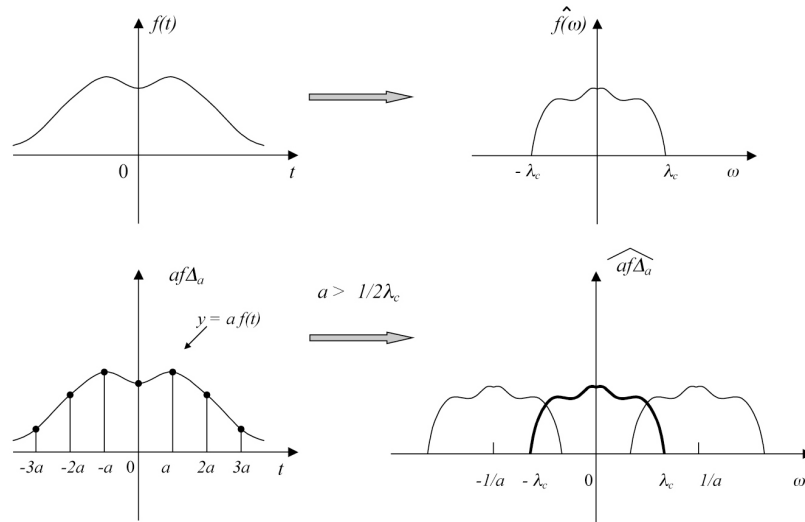


FIGURE 5.7 – Échantillonnage à une fréquence inférieure à la fréquence de Nyquist :  $F_e < 2\lambda_c$

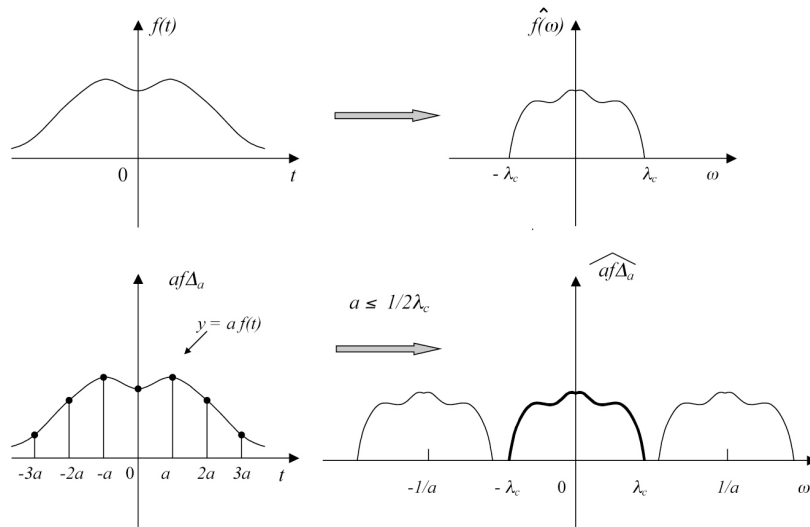


FIGURE 5.8 – Échantillonnage à une fréquence supérieure à la fréquence de Nyquist :  $F_e \geq 2\lambda_c$

**Théorème 5.3.2** *La famille  $(s_{an})_{n \in \mathbb{Z}}$  forme une base hilbertienne de l'espace*

$$\mathcal{V}_a = \{v \in L^2(\mathbb{R}) \mid \text{supp}(\hat{v}) \subset [-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]\}.$$

*Démonstration* - On rappelle (voir chapitre 2, Transformation de Fourier-Plancherel) que si  $f$  et  $g$  sont dans  $L^2(\mathbb{R})$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)\overline{\hat{g}(\lambda)} d\lambda.$$

Il est clair que  $\mathcal{V}_a$  est un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{R})$ .

• Montrons que la famille  $(s_{an})_{n \in \mathbb{Z}}$  est orthogonale : on a vu que

$$\widehat{s_{an}}(\omega) = \kappa_a(\omega) \exp(-2i\pi n a \omega),$$

où  $\kappa$  est la fonction créneau définie par (5.3.4). Par conséquent  $s_{an} \in \mathcal{V}_a$  et grâce à la transformation de Fourier-Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}} s_{an}\overline{s_{ap}} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{s_{an}}\overline{\widehat{s_{ap}}}.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} s_{an}\overline{s_{ap}} = a^2 \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} e^{-2i\pi\lambda(n-p)a} d\lambda.$$

La famille  $(s_{an})$  est donc orthogonale et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\|s_{an}\|_{L^2} = \sqrt{a}$ .

• Montrons que la famille  $(s_{an})_{n \in \mathbb{Z}}$  engendre un sous-espace dense de  $\mathcal{V}_a$  : soit  $g \in \mathcal{V}_a$  et  $\varepsilon > 0$ . Grâce à la formule de Shannon nous savons que

$$\|g - \sum_{n=-N}^N g(na)s_{an}\|_2^2 = \left\| \sum_{|n|>N} g(na)s_{an} \right\|_2^2 = a \sum_{|n|>N} |g(na)|^2.$$

On peut donc trouver  $N_o \in \mathbb{N}$  tel que

$$\|g - \sum_{n=-N_o}^{N_o} g(na)s_{an}\|_2 \leq \varepsilon.$$

Ceci termine la preuve. □

**Corollaire 5.3.1** *Sous les hypothèses du théorème de Shannon, avec  $a \leq \frac{1}{2\lambda_c}$ , on a*

$$\|f\|_2^2 = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(na)|^2.$$

### 5.3.1 Démonstration dans le cas général

Le terme de gauche de la formule de Poisson ( 5.2.2) (dans l'espace des fréquences) est  $F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega - \frac{n}{a})$ . C'est la reproduction **périodique** du spectre de  $f$  en lobes séparés de  $\frac{1}{a}$ . De plus  $F$  (périodique de période  $\frac{1}{a}$ ) appartient à  $L_p^2(0, \frac{1}{a})$ . Par conséquent  $F$  a un développement en série de Fourier :

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(2i\pi\omega na).$$

La suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est dans  $\ell^2$ . Par la formule de Poisson et grâce à l'unicité de la série de Fourier, on a  $c_{-n} = af(na)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Par conséquent  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(na)|^2 < \infty$ .

Considérons à présent,  $\kappa_a$  le créneau centré de longueur  $\frac{1}{a}$  :

$$\kappa_a(\omega) = 1 \text{ si } |\omega| \leq \frac{1}{2a}, \text{ 0 sinon.}$$

On obtient avec ( 5.2.2)

$$F(\omega)\kappa_a(\omega) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na)\kappa_a(\omega) \exp(-2i\pi na\omega).$$

Soit  $\omega \in \mathbb{R}$  : si  $|\omega| \geq \frac{1}{2a}$  alors  $F(\omega)\kappa_a(\omega) = 0$ . De plus comme  $\frac{1}{2a} \geq \lambda_c$ , nous avons  $|\omega| \geq \lambda_c$  et  $\hat{f}(\omega) = 0$ .

Supposons maintenant que  $|\omega| \leq \frac{1}{2a}$ . Pour tout  $n$  non nul,  $|\omega - \frac{n}{a}|$  est toujours en dehors de  $]-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}[$  et donc a fortiori de  $[-\lambda_c, \lambda_c]$ . Comme  $\hat{f}$  est à support dans  $[-\lambda_c, \lambda_c]$ , cela implique :

$$\forall n \neq 0 \quad \hat{f}(\omega - \frac{n}{a}) = 0.$$

Comme de plus  $\kappa_a(\omega) = 1$ , nous obtenons donc

$$F(\omega)\kappa_a(\omega) = F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega - \frac{n}{a}) = \hat{f}(\omega - \frac{0}{a}) = \hat{f}(\omega).$$



Finalement  $F \cdot \kappa_a = \hat{f}$ , c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(\omega) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) \kappa_a(\omega) \exp(-2i\pi n a \omega).$$

Comme  $\mathcal{F}$  et sa réciproque sont continues sur  $L^2(\mathbb{R})$  nous avons

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) \mathcal{F}^{-1}(\kappa_a \cdot \exp(-2i\pi n a \cdot)).$$

Comme

$$\mathcal{F}^{-1}(\kappa_a \cdot \exp(-2i\pi n a \cdot))(t) = \mathcal{F}^{-1}(\kappa_a)(t - na) = \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t - na)}{\pi(t - na)},$$

on obtient finalement :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t - na)}{\frac{\pi}{a}(t - na)}.$$

La convergence de la série a lieu dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Si de plus  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(na)| < +\infty$  la série converge uniformément vers une fonction  $g$  continue sur  $\mathbb{R}$ . Comme la série converge aussi dans  $L^2(I)$  où  $I$  est un intervalle quelconque borné de  $\mathbb{R}$ , on en déduit que  $g = f$  presque partout. Comme  $f$  est continue cela entraîne  $f = g$ .

### 5.3.2 Echantillonnage et calcul numérique du spectre - Aliasing

#### Lien coefficient de fourier et transformée de Fourier

Le théorème d'échantillonnage de Shannon permet de faire (une fois de plus) le lien entre série de Fourier (et coefficients de Fourier) et transformation de Fourier.

On considère un signal  $f$  dont la transformée de Fourier  $\hat{f}$  est suffisamment régulière et à support compact inclus dans  $[-\lambda_c, \lambda_c]$ . On choisit  $T \geq 2\lambda_c$ , on pose  $a = \frac{1}{T}$  et on périodise  $\hat{f}$ . On peut donc écrire qu  $\hat{f}$  est égale à sa série de Fourier :

$$\forall \omega \in [-\lambda_c, \lambda_c] \quad \hat{f}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\hat{f}) \exp 2i\pi n a \omega \, d\omega,$$

où

$$\begin{aligned} c_n(\hat{f}) &= a \int_{-\lambda_c}^{\lambda_c} \hat{f}(\omega) \exp(-2i\pi n a \omega) \, d\omega \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \exp(-2i\pi n a \omega) \, d\omega \\ &= a f(-na). \end{aligned}$$

### Recouvrement du spectre - aliasing

On considère un signal  $f$  dont on veut trouver son spectre. On possède un échantillonnage de  $f$ . Pour appliquer le théorème de Shannon on doit trouver  $\lambda_c$  à partir de laquelle toutes les fréquences supérieures sont du bruit. Il y a donc une nécessaire étape de **filtrage**.

Par exemple, pour un signal sonore : la fréquence maximum « perceptible » par l'oreille humaine est de 16000 Hz. On va donc supposer que tous les sons de fréquence supérieure à 20000 Hz (pour avoir de la marge) sont inaudibles : on pose donc  $\lambda_c = 20000 \text{ Hz} = 40000$  impulsions par seconde qui est utilisé approximativement, pour les enregistrements numériques sur disques compacts.

Il faut toutefois garder à l'esprit qu' on ne peut sans contradiction supposer que le signal et son spectre sont tous deux à support borné, étant donné qu'une fonction analytique nulle sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  est partout nulle. Supposer que le signal  $f$  est à bande limitée entraîne que  $f$  est une fonction de support  $\mathbb{R}$ . (En particulier,  $f$  ne peut pas être causal). Inversement, supposer que  $f$  est à support borné entraîne que son spectre ne peut être à support borné.

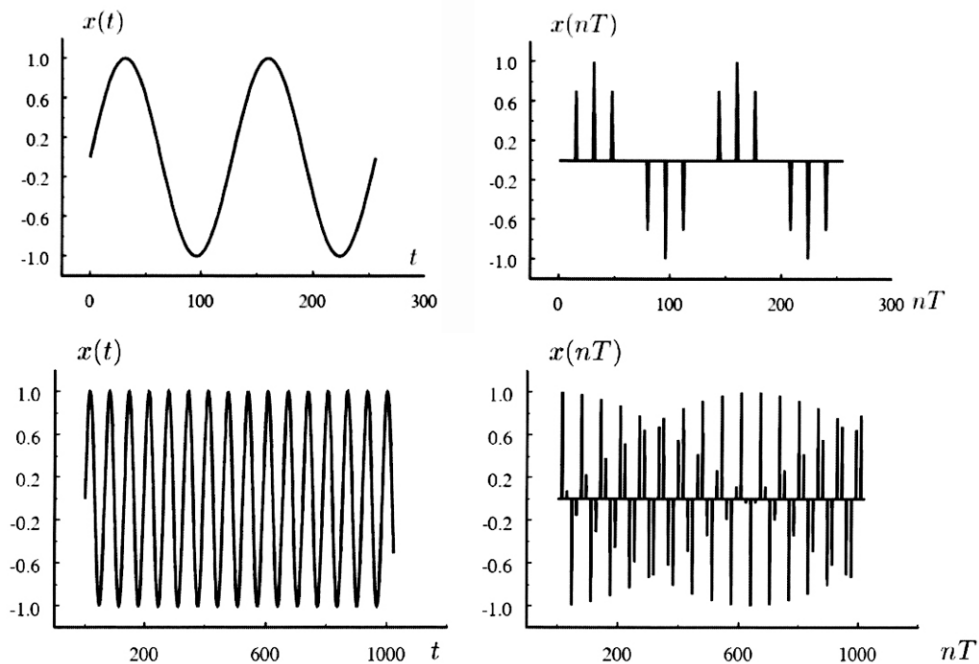


FIGURE 5.9 – Recouvrement du spectre

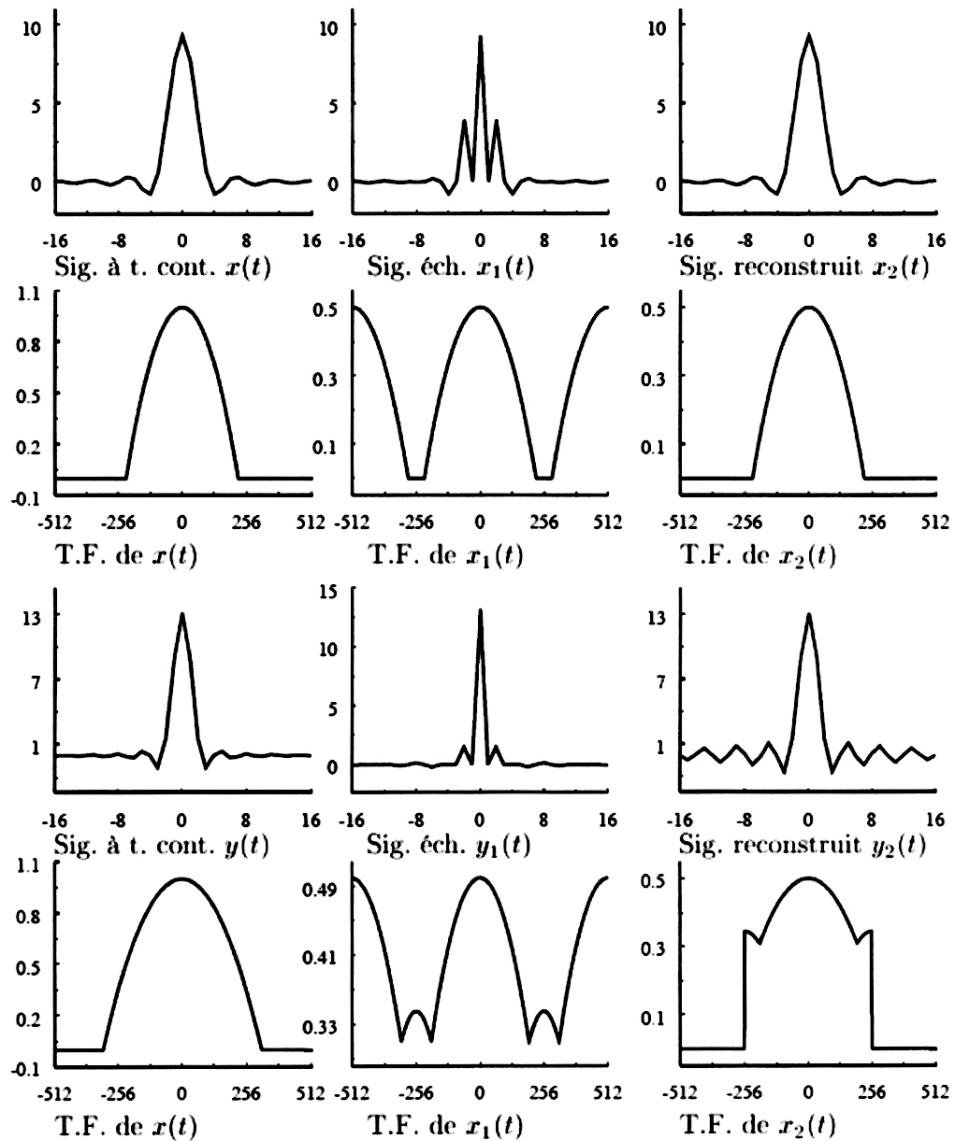


FIGURE 5.10 – Reconstruction d'un signal  $x$  échantillonné correctement et  $y$  sous-échantillonné

Si on ne prend pas de précautions, le calcul analytique sur les échantillons directement prélevés du signal peut réserver des surprises. Le signal physique enregistré sera toujours entaché d'un bruit, c'est-à-dire de petites fluctuations correspondant à des **hautes fréquences**. Ceci fait que la fréquence d'échantillonnage choisie a toutes les chances d'être **trop petite**. On se trouvera alors dans la situation de la figure 5.7 et le spectre calculé n'aura aucun rapport avec le spectre cherché : c'est le phénomène de recouvrement du spectre. Pour éviter ce phénomène il est indispensable de filtrer préalablement le signal analogique, c'est-à-dire de le faire passer dans un filtre passe-bas, de façon à éliminer réellement, avant échantillonnage, les hautes fréquences porteuses de bruit.

Dans un calcul de spectre il est indispensable de filtrer le signal avant échantillonnage. Ceci afin d'éviter le phénomène de recouvrement du spectre.

#### Remplissage par des zéros (« Zero-padding »)

La technique de « Zero-padding » consiste à ajouter aux  $N$  points du signal une suite de  $M$  valeurs nulles de façon à augmenter artificiellement le pas d'échantillonnage fréquentiel (qui passe de  $f_e/N$  à  $f_e/(N + M)$ ) et donc l'information fréquentielle.

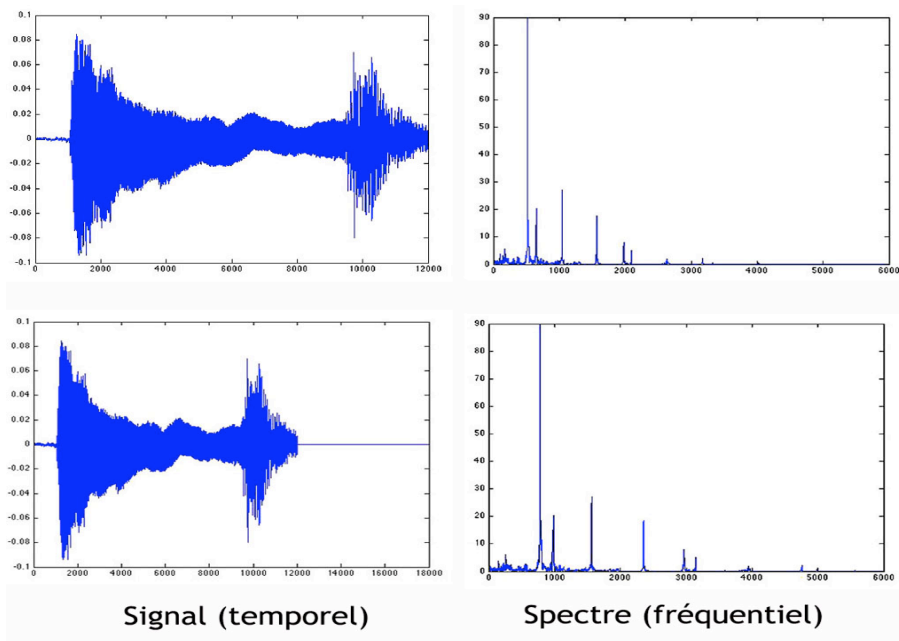


FIGURE 5.11 – Effet du « Zero-padding » : à gauche, analyse spectrale sur  $N = 12000$  points, à droite sur  $N + M = 18000$  points

### Calcul à l'aide de la TFD

Supposons que  $f$  est le signal (filtré) et que le support de  $\hat{f}$  est inclus dans  $[-\lambda_c, \lambda_c]$ . Donc

$$\forall \omega \in [-\lambda_c, \lambda_c] \quad \hat{f}(\omega) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) \exp(-2i\pi na\omega). \quad (5.3.5)$$

Supposons que le signal est observé sur un intervalle de temps  $[-Na, Na]$ . Le signal échantillonné est donné par  $x_n = f(na)$  et le spectre (approché) est donc

$$\sigma_N(\omega) = a \sum_{k=-N}^N f(ka) \exp(-2i\pi\omega ka).$$

On obtient

$$\forall p \in \{-N, \dots, N\} \quad \sigma_N\left(\frac{p}{2Na}\right) = a \sum_{k=-N}^N f(ka) \omega_{2N}^{-pk}. \quad (5.3.6)$$

On retrouve l'expression de la Transformée de Fourier Discrète. On calcule le spectre approché à l'aide de la FFT.

### Utilisation de la FFT sous SCILAB

On ne peut calculer la FFT que pour une fonction périodique. Si la fonction considérée ne l'est pas, on la restreint à un intervalle de longueur  $T$  (fenêtrage) et on la périodise. La « période » de la fonction est alors  $T$  et sa **fréquence fondamentale** est  $\lambda = 1/T$ . En réalité cette fréquence « fondamentale » est théorique puisqu'elle dépend de la longueur de l'intervalle d'étude choisi. **Elle n'est donc pas intrinsèque au signal.** Si par exemple on étudie un signal monochromatique de fréquence  $\lambda_o$ , sur un intervalle de longueur  $T = 2/\lambda_o$ , la fréquence « fondamentale » sera  $\lambda = 1/T = 2\lambda_o$ .

En pratique, si on connaît la période du signal on choisit  $T$  égal à cette période. La plupart du temps, on ne connaît pas la période (si le signal est périodique). La fréquence fondamentale d'un tel signal (qui est donc indépendante de l'intervalle de temps choisi) est déterminée soit par différence entre deux raies consécutives du spectre énergie-fréquence, soit par analyse corrélative (voir le chapitre 3).

On échantillonne la fonction sur l'intervalle  $[0, T]$  (ou  $[t_o, t_o + T]$ ) en discrétisant avec  $N$  échantillons.

$$t_k = \frac{kT}{N}, \quad k = 0, \dots, N - 1.$$

$T_e = \frac{T}{N}$  est le pas de la discrétisation : c'est aussi la **période d'échantillonnage**.  
 $F_e = \frac{1}{T_e} = \frac{N}{T}$  est la **fréquence d'échantillonnage**. On calcule

$$Y(p) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_e) e^{-\frac{2i\pi kp}{N}}, \quad p = 0, \dots, N-1,$$

la TFD de  $f$ . On sait alors que les coefficients de Fourier approchés sont

$$c_n = \begin{cases} Y_n & \text{si } 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1, \\ Y_{n+N} & \text{si } -\frac{N}{2} \leq n \leq 0 \end{cases}$$

En particulier si la fonction  $f$  est réelle, ses coefficients de Fourier sont « pairs » au sens suivant :  $c_{-n} = c_n$ . Pour construire le spectre fréquence- énergie des couples  $(\frac{n}{a}, |c_n|)$  il suffit de considérer des indices  $n \geq 0$ .

Pour des **fonctions réelles** on ne gardera donc que la partie  $Y(n)$ ,  $0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$  qui fournira les fréquences entre 0 et  $(\frac{N}{2} - 1)\lambda$ . La fonction `fft` de SCILAB calcule

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-\frac{2i\pi kp}{N}}, \quad p = 1, \dots, N-1.$$

Il faut donc

1. Remplacer  $x(k)$  par  $f(kT_e)$
2. Normaliser en divisant par  $N$
3. Ne garder que les  $Y(n)$ ,  $0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$  qui représenteront les coefficients de Fourier (approchés) correspondants aux fréquences  $n\lambda$ .
4. Dessiner le spectre énergie-fréquence , pour des fréquences variant de 0 à  $(\frac{N}{2} - 1)\lambda$  ( $\lambda = 1/a$ ) :  
 $x = [ 0 : \frac{N}{2} - 1 ] / a ;$   
 $y = Y(1 : \frac{N}{2}) ;$   
`plot(x, y)`

### Comment concilier l'échantillonnage avec la FFT ?

Soit  $y$  un signal échantillonné à la fréquence  $Fe$  et comportant  $N$  échantillons ( $N$  est la taille de  $y$ ).

La durée totale du signal est  $T = \frac{N}{Fe}$  puisque  $Fe$  est le nombre d'échantillons par seconde.

Prenons maintenant  $2^p$  valeurs (échantillons) de  $y$  pour faire une FFT :

$$Y = \text{fft}(y(1 : 2^p), -1)/(2^p) .$$

La durée du signal correspondant à  $2^p$  échantillons est

$$a = \frac{T}{N} * 2^p = \frac{2^p}{Fe} (\text{secondes}) .$$

Par conséquent  $a$  est la valeur de la « période » (quand on prend un signal sur un intervalle de longueur  $a$  finie on le périodise) de sorte que la fréquence « fondamentale » du signal est

$$\lambda = \frac{Fe}{2^p} .$$

En résumé, on trace un spectre énergie-fréquence pour des fréquences variant de 0 à

$$\left(\frac{2^p}{2} - 1\right)\lambda = \frac{Fe}{2^p} * (2^{p-1} - 1) \text{ avec}$$

```
x = Fe / 2^p * [0 : 2^{p-1} - 1] ;
z = Y(1 : 2^{p-1}) ;
plot(x, z)
```





## Chapitre 6

# Analyse temps-fréquence

### 6.1 Introduction

On a fait précédemment la distinction entre signal transitoire et signal stationnaire. Un signal stationnaire est un signal qui s'établit au bout d'un certain temps (équilibre) et qui donc ne dépend pas du temps. L'analyse spectrale peut donc se faire sur n'importe quel intervalle de temps. Un signal non stationnaire (transitoire, dynamique) est au contraire un signal dont les fréquences varient (rapidement) au cours du temps.

Nous avons vu que l'analyse d'un signal peut se faire par des méthodes fondées soit sur la représentation temporelle,  $f$ , soit sur la représentation spectrale  $\hat{f}$ , qui est la transformée de Fourier (T.F) de  $f$ . Le signal temporel donne une information sur la présence d'un signal, son énergie et son évolution temporelle. La T.F nous renseigne sur les fréquences présentes dans le signal et sur la répartition de l'énergie selon les fréquences. Pour les signaux déterministes, les représentations couramment utilisées pour l'analyse des signaux sont l'énergie instantanée  $|f(t)|^2$  et l'énergie spectrale  $|\hat{f}(\omega)|^2$ . Pour les signaux aléatoires, nous avons vu que les outils d'analyse sont fondés sur l'autocorrélation dans le domaine temporel et sur la densité spectrale (T.F de l'autocorrélation) dans le domaine fréquentiel. Ces outils d'analyse sont valables dans le cas **des signaux stationnaires**, aussi bien déterministes qu'aléatoires. Cependant, leurs limitations sont immédiates quand on les applique aux signaux non stationnaires. En particulier, ils ne donnent pas d'information sur la manière dont la fréquence varie avec le temps. L'analyse spectrale classique, fondée sur la T.F, implique implicitement que les propriétés spectrales du signal sont stationnaires. En effet, le module de la T.F d'un signal fournit seulement **une moyenne temporelle** du contenu spectral du signal sans donner de précision sur d'éventuelles changements

Dans les applications, il s'agit d'extraire d'un signal toutes les informations pertinentes, sous forme de valeurs numériques caractéristiques et pas trop nombreuses.

L'analyse de Fourier présente des inconvénients majeurs qui ne permettent pas une analyse satisfaisante de toutes les sortes de signaux. Ainsi, dans le spectre  $\lambda \mapsto \hat{f}(\lambda)$  tous les aspects temporels du signal disparaissent, par exemple le début ou la fin du signal, ou l'instant d'apparition d'une singularité.

Prenons par exemple l'air de « Au clair de la lune » :



FIGURE 6.1 – « Au clair de la lune »

Faisons une transformée de Fourier de ce signal musical : on voit apparaître les trois fréquences correspondant aux notes do, ré, mi. Jouons maintenant



FIGURE 6.2 – Mêmes notes dans un autre ordre

Si on fait une transformée de Fourier, on obtient la même chose que pour « Au clair de la lune ». La transformée de Fourier est capable de donner les fréquences présentes dans un signal mais pas leur instant d'apparition.

On souhaiterait donc faire une analyse à la fois en **temps** et en **fréquence**. C'est l'analyse **temps-fréquence** qui permet d'obtenir cette information.

De la même façon, pour calculer le spectre d'un signal  $\hat{f}(\lambda)$  il faut connaître  $f(t)$  pour **toutes** les valeurs réelles de  $t$ . C'est impossible en temps réel car le signal est traité au fur et à mesure de l'arrivée des données numériques. On ne peut donc pas connaître le spectre (même approché) d'un signal dont on ne sait rien sur le futur puisque des fréquences de toutes valeurs peuvent apparaître.

Basiquement, l'idée est de multiplier le signal par une fenêtre « glissante » et de faire la transformée de Fourier du signal tronqué. On obtient une fonction du temps et de la fréquence. Plus la taille de la fenêtre temporelle est petite, meilleure est la précision sur les instants. Mais si la taille de la fenêtre devient trop petit, il n'y a plus de résolution en fréquences à cause du principe d'incertitude : on peut plus par exemple séparer les fréquences des différentes notes (voir section suivante).

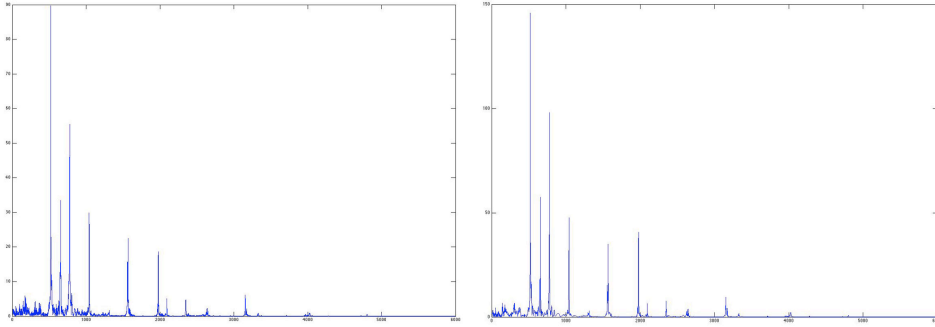


FIGURE 6.3 – Spectres de « Do-Mi-Sol » (à gauche) et de l'accord « Do-Mi-Sol » (à droite) sur un piano

## 6.2 Principe d'incertitude

On rappelle que  $\omega \mapsto |\hat{f}(\omega)|^2$  est la densité spectrale d'énergie et que d'après le théorème 3.2.1,  $\hat{\varphi}(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$ , où  $\varphi$  est la fonction d'autocorrélation de  $f$ .

### 6.2.1 Comportements temporel et spectral d'un signal

Nous allons examiner la relation entre la localisation d'une fonction (signal) et celle de son spectre (transformée de Fourier). Commençons par un exemple : soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que  $f, x \mapsto xf(x)$  et  $\omega \mapsto \omega f(\omega)$  soient dans  $L^2(\mathbb{R})$  et  $f_k$  la fonction définie par  $f_k(x) = f(kx)$ . Un calcul simple (avec changement de variables) montre que

$$\hat{f}_k(\omega) = \frac{1}{|k|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{k}\right).$$

Donc si on étale les valeurs de  $f$  (en multipliant par  $k$ ), le spectre de  $f$  se concentre (on divise par  $k$ ) et réciproquement, si on concentre les valeurs de  $f$ , on étale le spectre.

Si on reproduit un message à une vitesse inférieure à celle de son enregistrement, on étale le temps ; alors le spectre se concentre et les hautes fréquences sont affaiblies : le signal paraît plus grave. Si au contraire, on reproduit le signal plus vite qu'on ne l'a enregistré, les hautes fréquences sont renforcées et le signal paraît plus aigu.

On notera que dans ce type de changement les rapports entre les harmoniques sont conservés, ce qui explique que le message reste compréhensible alors que dans une

translation de spectre ces rapports sont modifiés et le message devient incompréhensible. On peut définir l'**étalement** de  $f$  ou dispersion de l'énergie de  $f$  en temps :

**Définition 6.2.1 (Étalement temporel)**

Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  telle que  $t^2 f \in L^2(\mathbb{R})$ . On appelle étalement temporel de  $f$  et on note  $\langle T_f \rangle$  la quantité définie par

$$\langle T_f \rangle^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt}.$$

La norme  $L^2$  de  $f$  est aussi son énergie.

**Théorème 6.2.1**

1. Soit  $\tilde{f}$  définie par  $\tilde{f}(t) = \lambda f(t)$  avec  $\lambda \neq 0$ . Alors  $\langle T_{\tilde{f}} \rangle = \langle T_f \rangle$ .
2. Soit  $f_k$  définie par  $f_k(t) = f(kt)$ , avec  $k \neq 0$ , alors  $\langle T_{f_k} \rangle = k \langle T_f \rangle$ .

*Démonstration* - La démonstration est immédiate par changement de variable dans les intégrales.  $\square$

On peut de la même façon définir l'**étalement spectral** de  $f$  :

**Définition 6.2.2** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  telle que  $t \mapsto t^2 f(t)$  et  $\omega \mapsto \hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ . La quantité  $\langle F_f \rangle = \langle T_{\hat{f}} \rangle$  est l'**étalement spectral** de  $f$ .

Le **principe d'incertitude** est une relation entre  $\langle T \rangle$  et  $\langle F \rangle$  qui indique que l'on ne peut pas localiser finement et le signal et sa fréquence. Cette relation est

$$\langle T_f \rangle \cdot \langle F_f \rangle \geq \frac{1}{4\pi}.$$

C'est une conséquence du résultat suivant :

**Proposition 6.2.1** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de  $C^1(\mathbb{R})$  telle que  $f, f'$  et  $x \mapsto xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$ . Alors

$$\sigma_T \cdot \sigma_F \geq \frac{E}{4\pi}$$

où on a posé

$$\sigma_T = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt, \quad \sigma_F = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \quad E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt.$$

Nous admettrons ce résultat qui nécessite des outils plus fins que ceux utilisés jusqu'à présent (distributions).

**Exemple 6.2.1** Soit  $f(t) = k \exp(-at^2)$  un signal gaussien. On vérifie que

$$\langle T_f \rangle \cdot \langle F_f \rangle = \frac{1}{4\pi}.$$

### 6.2.2 Signaux à durée finie ou à spectre borné

Supposons que le signal  $f$  soit très régulier (par exemple  $\mathcal{C}^p$  tel que toutes les dérivées  $f^{(k)}$  ( $1 \leq k \leq p$ ) soient dans  $L^1(\mathbb{R})$ ). Grâce à la formule de dérivation de la transformée de Fourier on a :

$$\widehat{f^{(p)}}(\omega) = (2i\pi\omega)^p \hat{f}(\omega).$$

Or  $|\widehat{f^{(p)}}(\omega)| \leq \|f^{(p)}\|_{L^1} = A_p < +\infty$ . Par conséquent

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{A_p}{(2\pi\omega)^p}.$$

La transformée de Fourier de  $f$  décroît vers 0 au moins aussi vite que  $\omega^{-p}$  lorsque  $\omega$  tend vers  $\pm\infty$ . En d'autres termes, si un signal est **très régulier**, son spectre est très **petit dans les fréquences élevées**. En remplaçant  $\mathcal{F}$  par son inverse, on voit de même que si le spectre est très régulier alors  $f(t)$  est très petit pour  $|t|$  grand.

Nous allons préciser ce qui se passe dans la situation extrême où, soit  $f$ , soit  $\hat{f}$  sont nulles en dehors d'un segment (support compact). Rappelons tout d'abord que :

**Définition 6.2.3** *Un signal est de durée finie s'il est à support compact (c'est-à-dire s'il existe  $T > 0$  tel que  $\forall t$  tel que  $|t| \geq T$  on a  $f(t) = 0$ ).*

*Un signal  $f$  est à spectre borné (ou à bande limitée) si  $\hat{f}$  est à support compact.*

Le théorème suivant montre que mis à part le signal indubitablement nul **il n'existe pas de signal de durée finie et de spectre borné**.

**Théorème 6.2.2** *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  à support compact inclus dans  $[-T, T]$ . Alors*

1.  $\hat{f}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et vérifie

$$|\hat{f}^{(m)}(\omega)| \leq (2\pi T)^m \|f\|_{L^1}, \text{ pour tout } m \geq 0.$$

2. Si  $\hat{f}$  est nulle sur un intervalle non réduit à un point, alors  $\hat{f}$  est identiquement nulle et  $f$  l'est aussi.

*Démonstration* - Comme  $f$  est à support compact, nous avons  $|t^k f(t)| \leq T^k |f(t)|$  pour tout  $t$  et donc les fonctions  $t \mapsto t^k f(t)$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  pour tout  $k$ . On sait que cela entraîne que la transformée de Fourier de  $f$  est  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k$ , donc  $\mathcal{C}^\infty$ . De plus

$$|\hat{f}^{(k)}(\omega)| = |(-2i\pi)^k \widehat{t^k f}(\omega)| \leq (2\pi)^k \|\widehat{t^k f}\|_\infty \leq (2\pi)^k \|t^k f\|_{L^1} \leq (2\pi T)^k \|f\|_{L^1}.$$

2. Soit  $I$  un intervalle ouvert sur lequel  $\hat{f}$  est nulle. Soit  $\omega_o \in I$  : on applique la formule de Taylor à l'ordre  $n$  entre  $\omega$  (quelconque) et  $\omega_o$  : Comme toutes les dérivées de  $\hat{f}$  en  $\omega_o$  on obtient donc

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\hat{f}^{(n)}(\omega_o)}{n!} (\omega - \omega_o)^n \text{ où } \omega_o \text{ est entre } \omega \text{ et } \omega_o.$$

D'après ce qui précède, on obtient

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{(2\pi T)^n \|f\|_{L^1}}{n!} (\omega - \omega_0)^n ;$$

on fait tendre ensuite  $n$  vers  $+\infty$  ce qui prouve le résultat.  $\square$

On a un théorème analogue en échangeant les rôles de  $t$  et  $\omega$ .

### 6.2.3 Troncature du signal en temps ou en fréquence

En pratique, on ne peut pas considérer des signaux de durée infinie ou de spectre non borné. On est donc conduit à tronquer certains signaux et tous les appareils ont une bande passante limitée : ils ne gardent qu'un intervalle borné de fréquences.

Notons  $\kappa_T$  la fonction « créneau » égale à 1 si  $|t| \leq T$  et 0 ailleurs. Le signal tronqué à l'intervalle  $[-T, T]$  est  $g = \kappa_T \cdot f$ . Calculons le spectre du signal tronqué (c'est-à-dire la transformée de Fourier de  $g$ ) :  $\hat{g} = \hat{f} * \hat{\kappa}_T$ . Nous obtenons classiquement

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) * \frac{\sin(2\pi T\omega)}{\pi\omega}.$$

On vérifie que cela a pour effet d'élargir le spectre et ceci d'autant plus que  $T$  est petit.

De façon analogue, considérons  $f_n(t) = f(t) * \frac{\sin(\pi n t)}{\pi t}$ . Alors  $\hat{f}_n = \hat{f} \cdot \kappa_{\frac{n}{2}}$ .

Le signal  $f_n$  est le signal dont le spectre est celui de  $f$  tronqué à  $|\omega| \leq \frac{n}{2}$ . Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  le spectre de  $f_n$  a pour limite celui de  $f$  et on peut démontrer que  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment où  $f$  est continue. En revanche, au voisinage des discontinuités de  $f$  on observe des oscillations de  $f_n$  qui ne s'amortissent pas lorsque  $n \rightarrow +\infty$  : c'est le **phénomène de Gibbs**.

## 6.3 Transformée de Fourier à fenêtre glissante (STFT)

### 6.3.1 Fenêtrage

L'idée la plus naturelle consiste à tronquer le signal  $f$  en le restreignant à un intervalle de temps  $[-A, A]$ . Cela revient à multiplier le signal par le créneau  $r_A = \chi_{[-A, A]}$ . On transforme donc le spectre en

$$\widehat{r_A f}(\lambda) = \left( \frac{\sin(2\pi A\lambda)}{\pi\lambda} \right) * \hat{f}(\lambda) = (s_A * \hat{f})(\lambda).$$

La troncature du signal se traduit donc sur le spectre par une convolution avec la fonction sinus cardinal.

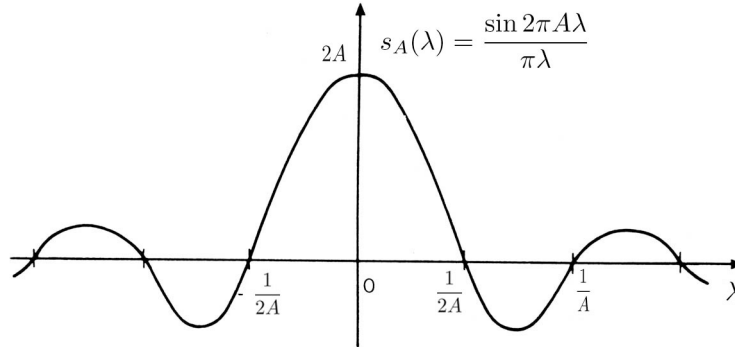


FIGURE 6.4 – Fonction sinus cardinal

L'approximation de  $\hat{f}$  par  $\hat{g}$  est d'autant meilleure que  $A$  est grand, c'est-à-dire que  $s_A$  s'approche de la masse de Dirac. Mais les calculs deviennent vite ingérables et le sinus cardinal s'amortit très lentement présentant des lobes importants au voisinage de l'origine. Pour améliorer cette situation on utilise des fonctions plus « régulières », appelées **fenêtres**, concentrées autour de l'origine. Nous présentons ci dessous quelques exemples :

1. Fenêtre triangulaire

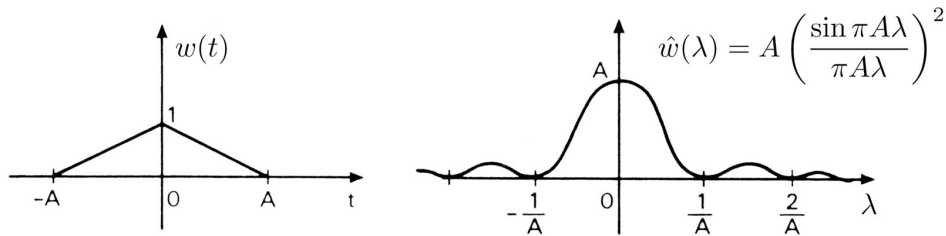


FIGURE 6.5 – Fenêtre triangulaire en temps et en fréquence

2. Fenêtres de **Hamming** et de **Hanning**. Elles sont de la forme

$$w(t) = [\alpha + (1 - \alpha) \cos(2\pi \frac{t}{A})] r_A(t).$$

Pour  $\alpha = 0.54$  on obtient la fenêtre de *Hamming* et pour  $\alpha = 0.5$  celle de *Hanning*. Ces coefficients ont été calculés pour minimiser certains critères.

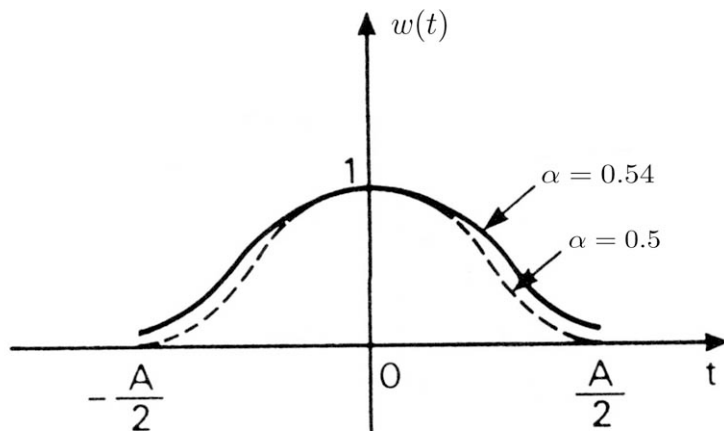


FIGURE 6.6 – Fenêtres de Hamming et de Hanning

## 3. Fenêtres de Gauss

$$w(t) = A \exp(-\alpha t^2), (\alpha, A > 0).$$

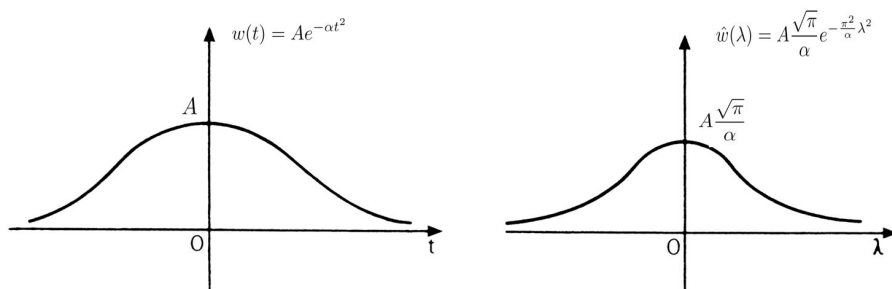


FIGURE 6.7 – Fenêtre de Gauss en temps et en fréquence

On est amené à faire « glisser » cette fenêtre devant le graphe du signal de façon à prendre en compte toutes ses valeurs. On obtient alors une famille de coefficients à deux paramètres réels  $\lambda$  et  $b$  :

$$G_f(\lambda, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{w}(t-b) \exp(-2i\pi\lambda t) dt \quad (6.3.1)$$



qui remplace les valeurs  $\hat{f}(\lambda)$ . L'application

$$f \mapsto G_f(\lambda, b)$$

s'appelle la **transformée de Fourier à fenêtre glissante** ou STFT<sup>1</sup>.

Le paramètre  $\lambda$  joue le rôle d'une fréquence, localisée autour de l'abscisse  $n$  du signal temporel.  $G_f(\lambda, b)$  donne ainsi une indication sur ce qui se passe autour de l'abscisse  $t = b$  pour la fréquence  $\lambda$ . Enfin, on reconnaît dans la formule (6.3.1) un produit scalaire dans  $L^2$  :

$$G_f(\lambda, b) = (f, w_{\lambda, b})_{L^2}, \text{ avec } w_{\lambda, b} = w(t - b) \exp(2i\pi\lambda t).$$

### 6.3.2 Les formules de Gabor

Il est intuitif de prévoir que, réciproquement, la connaissance des  $G_f(\lambda, b)$  pour toutes les valeurs réelles de  $\lambda$  et  $b$  détermine complètement le signal. On a le résultat suivant dû à **Gabor** :

**Théorème 6.3.1** *Soit  $w \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  une fenêtre telle que  $|w|$  soit une fonction paire et  $\|w\|_2 = 1$ . On pose*

$$w_{\lambda, b} = w(t - b) \exp(2i\pi\lambda t), \quad (\lambda, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Pour tout signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  on considère les coefficients

$$G_f(\lambda, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{w}_{\lambda, b}(t) dt.$$

Alors on a :

1. Conservation de l'énergie :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |G_f(\lambda, b)|^2 d\lambda db = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt.$$

2. La formule de reconstruction

$$f(t) = \iint_{\mathbb{R}^2} G_f(\lambda, b) w_{\lambda, b}(t) d\lambda db.$$

au sens suivant : si

$$g_A(t) = \int_{b \in \mathbb{R}} \int_{|\lambda| \leq A} G_f(\lambda, b) w_{\lambda, b}(t) d\lambda db,$$

alors  $g_A \rightarrow f$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  quand  $A \rightarrow +\infty$ .

---

1. Short-Time Fourier Transform

*Démonstration* - On va d'abord donner une autre expression de  $G_f(\lambda, b)$ . Comme la transformation de Fourier (Plancherel) préserve le produit scalaire de  $L^2(\mathbb{R})$  nous avons

$$G_f(\lambda, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{w}_{\lambda, b}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \bar{\hat{w}}_{\lambda, b}(\xi) d\xi ;$$

comme

$$\hat{w}_{\lambda, b}(\xi) = \exp(-2i\pi(\xi - \lambda)b) \hat{w}(\xi - \lambda) ,$$

il vient

$$G_f(\lambda, b) = \exp(-2i\pi\lambda b) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \bar{\hat{w}}(\xi - \lambda) \exp(2i\pi\xi b) d\xi ;$$

d'où

$$G_f(\lambda, b) = \exp(-2i\pi\lambda b) \overline{\mathcal{F}_\xi[\hat{f}(\xi) \bar{\hat{w}}(\xi - \lambda)]}(b) .$$

La fonction de  $\xi$  entre crochets est dans  $L^1(\mathbb{R})$  comme produit de fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$ . Elle est aussi dans  $L^2(\mathbb{R})$  puisque  $\hat{w}$  est bornée ( $w \in L^1(\mathbb{R})$ ). On a donc

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} |G_f(\lambda, b)|^2 d\lambda db &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\overline{\mathcal{F}_\xi[\hat{f}(\xi) \bar{\hat{w}}(\xi - \lambda)]}(b)|^2 db \right) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi) \bar{\hat{w}}(\xi - \lambda)|^2 d\xi \right) d\lambda \quad (\text{d'après la relation de Parseval}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{\hat{w}}(\xi - \lambda)|^2 d\lambda \right) d\xi = \|f\|_2^2 \|w\|_2^2 = \|f\|_2^2 . \end{aligned}$$

On a donc prouvé le premier point du théorème.

Montrons maintenant le deuxième point : vérifions d'abord que  $g_A$  est bien définie pour tout  $A > 0$ , en montrant que la fonction

$$(\lambda, b) \mapsto G_f(\lambda, b) w_{\lambda, b}(t)$$

est intégrable sur la bande  $[-A, A] \times \mathbb{R}$ . Soit donc

$$J_A(t) = \int_{-A}^A \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\overline{\mathcal{F}_\xi[\hat{f}(\xi) \bar{\hat{w}}(\xi - \lambda)]}(b)| |w(t - b)| db \right) d\lambda .$$

Par l'inégalité de Schwarz et la relation de Parseval on a

$$J_A(t) \leq \int_{-A}^A \|\overline{\mathcal{F}_\xi[\hat{f}(\xi) \bar{\hat{w}}(\xi - \lambda)]}(b)\|_2 \|w\|_2 d\lambda = \int_{-A}^A \|\hat{f}(\xi) \bar{\hat{w}}(\xi - \lambda)\|_2 d\lambda .$$

La fonction

$$h(\lambda) \stackrel{def}{=} \|\hat{f}(\xi)\bar{\hat{w}}(\xi - \lambda)\|_2$$

vérifie

$$h^2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 |\bar{\hat{w}}(\xi - \lambda)|^2 d\xi = (|\hat{f}|^2 * |\hat{w}|^2)(\lambda).$$

Par convolution dans  $L^1$  on en déduit que  $h^2 \in L^1(\mathbb{R})$  et donc  $h \in L^2(\mathbb{R})$ . Finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall A > 0, J_A(t) \leq \int_{-A}^A h(\lambda) d\lambda \leq \sqrt{2A} \|h\|_2 < +\infty.$$

L'intégrabilité permet donc d'utiliser le théorème de Fubini et de choisir l'ordre d'intégration dans la définition de  $g_A$ . On obtient

$$g_A(t) = \int_{-A}^A g(\lambda) d\lambda,$$

avec

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{F}_\xi[\hat{f}(\xi)\bar{\hat{w}}(\xi - \lambda)]}(b) w(t - b) \exp(2i\pi\lambda(t - b)) db$$

c'est-à-dire

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\bar{\hat{w}}(\xi - \lambda)\overline{\mathcal{F}_b[w(t - b) \exp(2i\pi\lambda(t - b))]}(\xi) d\xi.$$

On peut calculer facilement  $\overline{\mathcal{F}_b[w(t - b) \exp(2i\pi\lambda(t - b))]}(\xi)$  et on obtient

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\bar{\hat{w}}(\xi - \lambda)\hat{w}(\xi - \lambda) \exp(2i\pi t\xi) d\xi.$$

Finalement

$$g_A(t) = \int_{-A}^A \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)|\hat{w}(\xi - \lambda)|^2 \exp(2i\pi t\xi) d\xi \right) d\lambda.$$

Vérifions que la fonction sous le signe somme est intégrable (pour appliquer le théorème de Fubini). Comme  $|\hat{w}|^2$  est paire on a :

$$\int_{-A}^A \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)| |\hat{w}(\xi - \lambda)|^2 d\xi \right) d\lambda = \int_{-A}^A (|\hat{f}| * |\hat{w}|^2)(\lambda) d\lambda.$$

On a  $|\hat{f}| \in L^2(\mathbb{R})$  et  $|\hat{w}|^2 \in L^1(\mathbb{R})$ , d'où par convolution  $|\hat{f}| * |\hat{w}|^2 \in L^2(\mathbb{R})$  et l'intégrale est finie. En appliquant le théorème de Fubini on obtient

$$g_A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \exp(2i\pi\xi t) \left( \int_{-A}^A |\hat{w}(\xi - \lambda)|^2 d\lambda \right) d\xi.$$

Soit  $\varphi_A(\xi) = \int_{-A}^A |\hat{w}(\xi - \lambda)|^2 d\lambda$ . On a  $0 \leq \varphi_A(\xi) \leq 1$  car  $\|\hat{w}\|_2 = 1$ . Comme  $\varphi_A$  est bornée,  $\hat{f}\varphi_A \in L^2(\mathbb{R})$ , de même que  $g_A = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f}\varphi_A)$ . Il reste à montrer que  $g_A$  tend vers  $f$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  quand  $A \rightarrow +\infty$ .

$$\|f - \overline{\mathcal{F}}(\hat{f}\varphi_A)\|_2^2 = \|\overline{\mathcal{F}}[(1 - \varphi_A)\hat{f}]\|_2^2 = \|(1 - \varphi_A)\hat{f}\|_2^2 \stackrel{def}{=} \varepsilon(A).$$

Donc

$$\begin{aligned} \varepsilon(A) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |(1 - \varphi_A)\hat{f}|^2(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |1 - \varphi_A|^2(\xi) |\hat{f}|^2(\xi) d\xi \\ &= \int_{|\xi| > \frac{A}{2}} |1 - \varphi_A|^2(\xi) |\hat{f}|^2(\xi) d\xi + \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} |1 - \varphi_A|^2(\xi) |\hat{f}|^2(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

• Si  $|\xi| \leq \frac{A}{2}$  on a

$$1 - \varphi_A(\xi) = \int_{|\lambda| > A} |\hat{w}(\xi - \lambda)|^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{\xi-A} |\hat{w}(y)|^2 dy + \int_{\xi+A}^{+\infty} |\hat{w}(y)|^2 dy; \text{ d'où}$$

$$0 \leq 1 - \varphi_A(\xi) \leq \int_{-\infty}^{-\frac{A}{2}} |\hat{w}(y)|^2 dy + \int_{\frac{A}{2}}^{+\infty} |\hat{w}(y)|^2 dy = \varepsilon_1(A)$$

qui tend vers 0 quand  $A \rightarrow +\infty$ . On obtient donc

$$\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} |1 - \varphi_A|^2(\xi) |\hat{f}|^2(\xi) d\xi \leq \varepsilon_1(A) \|f\|_2^2.$$

• D'autre part

$$\int_{|\xi| > \frac{A}{2}} |1 - \varphi_A|^2(\xi) |\hat{f}|^2(\xi) d\xi \leq \int_{|\xi| > \frac{A}{2}} |\hat{f}|^2(\xi) d\xi$$

tend aussi vers 0 quand  $A \rightarrow +\infty$ . □

**Définition 6.3.1 (Atome temps-fréquence)** *Etant donnée une fenêtre  $w$ , on appelle atome temps-fréquence, la fonction  $w_{\lambda,b}$  c'est-à-dire plus généralement*

$$\varphi_{\tau,\omega} : t \mapsto w(t - \tau) \exp(i\omega t).$$

Dans les cas pratiques on prendra une fonction  $w$  localisée autour de  $t = 0$ , par exemple une gaussienne. La fonction  $w_{\lambda,\tau}$  est alors localisée autour de  $t = \tau$ , tandis que  $\hat{w}_{\lambda,\tau}$  est localisée autour du point  $\xi = \lambda$ . Ceci fait que

$$G_f(\lambda, \tau) = (f, w_{\lambda,\tau}) = \left( \hat{f}, \hat{w}_{\lambda,\tau} \right)$$

contient une information à la fois en temps et en fréquence autour du point  $(\tau, \lambda)$ .

Dans la mise en œuvre numérique on calculera les coefficients  $G_f(\lambda, b)$  sur une grille  $(m\lambda_o, n\tau_o)_{(m,n \in \mathbb{Z})}$  et  $\lambda_o, \tau_o$  réels positifs. On obtient ainsi une suite double  $G_{m,n}(f) = G_f(m\lambda_o, n\tau_o)$  discrétisée de la fonction des deux variables réelles.

### 6.3.3 Comparaison des méthodes de Fourier et Gabor

Ces deux transformées, qu'on peut écrire formellement

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \exp(2i\pi t\xi) d\xi,$$

$$f(t) = \iint_{\mathbb{R}^2} G_f(\lambda, b) \cdot w_{\lambda,b}(t) d\lambda db$$

peuvent s'interpréter comme la décomposition du signal  $f$  sur une famille de fonctions jouant un rôle analogue à celui d'une base (les sommes étant remplacées par des intégrales).

Pour Fourier ce sont les fonctions sinusoïdales, et pour Gabor ce sont des fonctions sinusoïdales fortement amorties, autrement dit des gaussiennes modulées en temps :

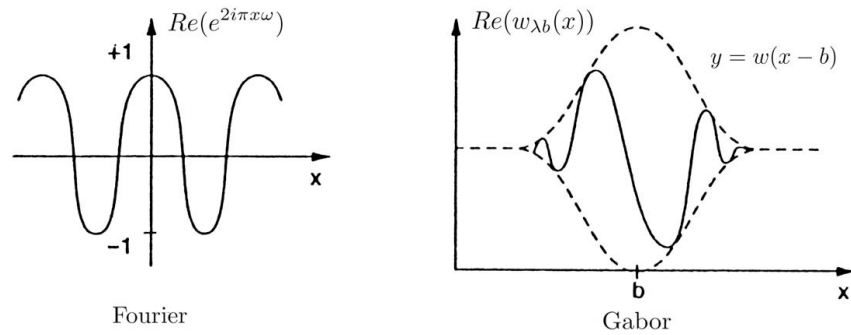


FIGURE 6.8 – Fonctions de base dans les décompositions de Fourier et de Gabor dans l'espace temporel

Dans l'espace des fréquences on obtient :

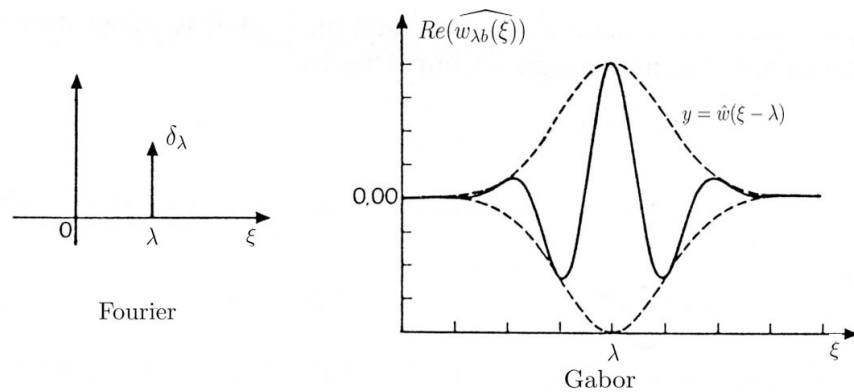


FIGURE 6.9 – Fonctions de base dans les décompositions de Fourier et de Gabor dans l'espace des fréquences

Dans la méthode de Fourier, les « fonctions de base » sont totalement concentrées en fréquence (masse de Dirac) et totalement réparties dans le temps (sinusoïdes non amorties de  $-\infty$  à  $+\infty$ ). C'est une autre façon d'expliquer que le passage dans l'espace de Fourier donne le maximum d'informations sur la répartition des fréquences mais perd totalement celles relatives au temps.

Dans la méthode de Gabor, on voit sur les figures que les informations temps-fréquence restent couplées par un compromis (limitées toutefois par le principe d'incertitude) sur la localisation à la fois en temps et en fréquence.

Si  $f$  est nulle sur une plage  $[\tau_o - \alpha, \tau_o + \alpha]$  assez longue et que l'on suppose  $w$  négligeable pour  $|t| \geq 1$ , les coefficients  $G_f(\lambda, \tau)$  seront négligeables pour  $\tau$  voisin de  $\tau_o$  car

$$G_f(\lambda, \tau) \simeq \int_{\tau-1}^{\tau+1} f(t) \bar{w}_{\lambda, \tau}(t) dt = 0.$$

Par contre, si  $f$  présente de fortes perturbations en  $t = \tau_o$ , les  $G_f(\lambda, \tau)$  seront grands pour  $\tau$  voisin de  $\tau_o$  et pour des valeurs de  $\lambda$  donnant une idée de la « fréquence locale » de  $f$ .

**Définition 6.3.2** L'application  $(\lambda, \tau) \mapsto |G_f(\lambda, \tau)|$  définit le **spectrogramme** ou **sonagramme** de  $f$ . Elle fournit une information sur la quantité d'énergie présente dans le signal au voisinage de la fréquence  $\lambda$  et à l'instant  $\tau$ .

### 6.3.4 Méthodes d'analyse

La qualité d'une analyse spectrale réalisée numériquement est principalement liée à

- la fréquence d'échantillonnage choisie
- au nombre de points temporels fixés par la troncture du signal
- à la forme de la fenêtre temporelle

#### Choix de la fenêtre

Nous avons vu précédemment que le signal est multiplié par une fenêtre temporelle (ce qui correspond à une convolution en fréquence). Nous avons vu que plusieurs fenêtres sont utilisées. La plus employée est la fenêtre de Gauss mais ce choix n'est pas systématique et dépend des caractéristiques principales de la fenêtre par rapport à ce qu'on veut étudier, à savoir

- la résolution fréquentielle. Elle est définie comme la possibilité de séparer deux fréquences proches l'une de l'autre.
- la dynamique imposée par l'amplitude des lobes secondaires définit la dynamique de la fenêtre

### 6.3.5 Estimation de la densité spectrale de puissance d'un signal numérique

Deux méthodes sont couramment utilisées pour estimer cette densité.

#### Périodogramme moyenné

On se donne un signal numérique  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ .

- Le signal est découpé en segments de  $N$  échantillons. Cela revient à appliquer une fenêtre temporelle de taille  $N$  échantillons. Ces fenêtres peuvent se chevaucher.
- Les valeurs de chaque segment sont pondérées par la fenêtre choisie.
- On calcule le module au carré de la transformée de Fourier (donnée par FFT) de chaque segment (énergie spectrale)
- La densité spectrale de puissance est alors donnée par la moyenne de l'énergie spectrale sur  $L$  segments consécutifs.

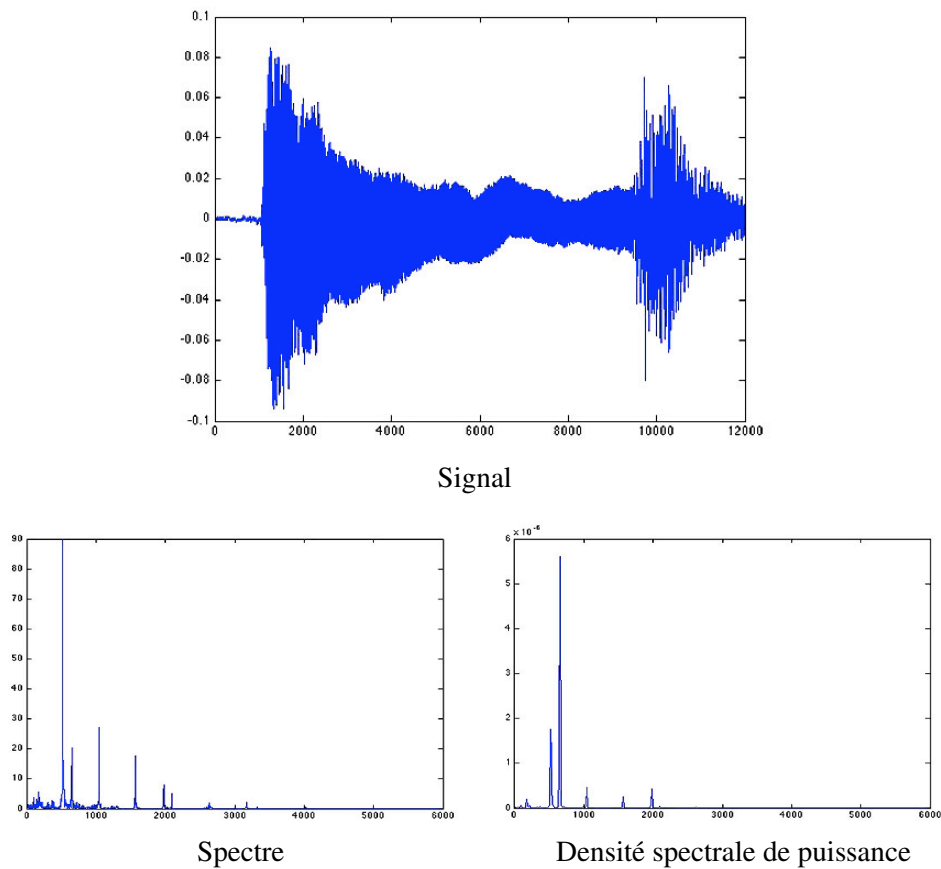


FIGURE 6.10 – Densité spectrale de puissance par périodogramme



### Corrélogramme

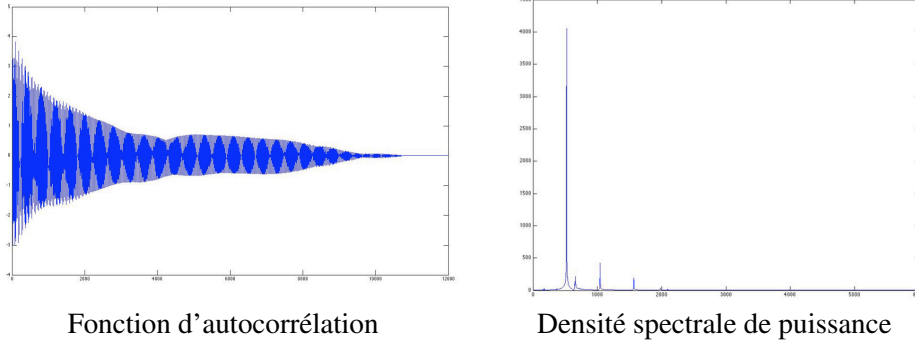


FIGURE 6.11 – Densité spectrale de puissance par corrélogramme

C'est une application directe du théorème de Wiener-Khinchine (théorème 3.2.1).

## 6.4 Distribution de Wigner-Ville

Une autre méthode d'analyse temps-fréquence d'un signal a été proposée par Ville et Wigner. La distribution de Wigner-Ville est définie pour un signal  $x \in L^2(\mathbb{R})$  par :

$$\mathcal{W}_x(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \bar{x}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-2i\pi\tau\omega} d\tau. \quad (6.4.2)$$

On remarque que  $\mathcal{W}_x$  est la transformée de Fourier de la fonction

$$\psi_t : \tau \mapsto x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \bar{x}\left(t - \frac{\tau}{2}\right),$$

qui vérifie en particulier  $\psi_t(-\tau) = \bar{\psi}_t(\tau)$ . Sa transformée de Fourier est donc toujours **réelle**.

Le temps et la fréquence jouent des rôles symétriques car le fait que la transformée de Fourier soit une isométrie permet d'écrire de manière équivalente

$$\mathcal{W}_x(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}\left(\omega + \frac{\xi}{2}\right) \bar{\hat{x}}\left(\omega - \frac{\xi}{2}\right) e^{2i\pi t\xi} d\xi. \quad (6.4.3)$$

La transformation de Wigner-Ville permet de localiser les structures temps-fréquence de  $x$ . Si l'énergie de  $x$  est bien concentrée dans le temps au voisinage de  $t_o$  et en fréquence autour de  $\omega_o$ , alors  $\mathcal{W}_x$  a une énergie concentrée autour de  $(t_o, \omega_o)$  avec un étalement en temps et en fréquence égal à celui de  $x$ . Cette propriété s'exprime en termes de supports :

**Théorème 6.4.1** *Si le support de  $x$  est inclus dans un intervalle  $[t_o - \frac{T}{2}, t_o + \frac{T}{2}]$  alors pour tout  $\omega$  le support en  $t$  de  $\mathcal{W}_x$  est inclus dans cet intervalle. De même si le support de  $\hat{x}$  est inclus dans un intervalle  $[\omega_o - \frac{L}{2}, \omega_o + \frac{L}{2}]$  alors pour tout  $t$  le support en  $\omega$  de  $\mathcal{W}_x$  est inclus dans cet intervalle.*

*Démonstration* - Voir [12] p 106. □

### Exemples

#### 1. Cas d'un signal impulsionnel ou sinusoïdal

Si  $x = \delta_{t_o}$  alors  $\mathcal{W}_x = \delta_{t_o}$ .

Si  $x(t) = e^{2i\omega_o t}$  alors  $\mathcal{W}_x = \delta_{\omega_o}$ .

La distribution de Wigner-Ville n'étaie aucun des supports de ces signaux.

#### 2. La transformée de Wigner-Ville d'une gaussienne est une gaussienne bidimensionnelle

Donnons quelques propriétés élémentaires :

**Proposition 6.4.1** *Soit  $g \in L^2(\mathbb{R})$  et  $f$  définie par*

1.  $f(t) = e^{2i\pi\theta t} g(t)$ . Alors  $\mathcal{W}_f(t, \omega) = \mathcal{W}_g(t, \omega)$

2.  $f(t) = g(t - t_o)$ . Alors,  $\mathcal{W}_f(t, \omega) = \mathcal{W}_g(t - t_o, \omega)$

3.  $f(t) = e^{2i\pi\omega_o t} g(t)$ . Alors,  $\mathcal{W}_f(t, \omega) = \mathcal{W}_g(t, \omega - \omega_o)$

Enfin si  $g \in L^2(\mathbb{R})$  et  $s > 0$  alors

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} g\left(\frac{t}{s}\right) \implies \mathcal{W}_f(t, \omega) = \mathcal{W}_g\left(\frac{t}{s}, s\omega\right).$$

La distribution de Wigner-Ville d'un signal est quadratique et on peut l'associer à un noyau sesquilinéaire. Plus précisément soit

$$\mathcal{K}_{xy} : (t, \tau) \mapsto x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \bar{y}\left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

On peut alors généraliser la distribution de Wigner-Ville aux cas de deux signaux  $x$  et  $y$  en posant

$$\mathcal{W}_{xy} : (t, \omega) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{xy}(t, \tau) e^{-2i\pi\omega\tau} d\tau.$$

Cette distribution a aussi une expression en fréquence :

$$\mathcal{W}_{xy} : (t, \omega) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{\hat{x}\hat{y}}(\omega, \xi) e^{2i\pi t\xi} d\xi.$$

**Définition 6.4.1 (Fonction d'ambiguïté)** On appelle fonction d'ambiguïté la fonction définie par

$$A_{xy} : (\omega, \tau) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{xy}(t, \tau) e^{2i\pi t\omega} dt .$$

On vérifie alors que  $\mathcal{W}_{xy}$  est la transformée de Fourier bidimensionnelle de  $A_{xy}$ . Notons  $\mathcal{F}_i$  la transformation de Fourier par rapport à la  $i$ ème variable : on obtient

$$\hat{A}_{xy}(t, \omega) = \iint A_{xy}(s, \xi) e^{-2i\pi(st+\xi\omega)} ds d\xi = \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_2 A)(t, \omega) .$$

Comme  $A_{xy}(\omega, \tau) = \mathcal{F}_1^{-1}(\mathcal{K}_{xy})(\omega, \tau)$  il vient

$$\mathcal{K}_{xy} = \mathcal{F}_1 A_{xy} .$$

De plus  $\mathcal{W}_{xy} = \mathcal{F}_2 \mathcal{K}_{xy}$ , d'où le résultat.

La représentation de  $|\mathcal{W}_x(t, \omega)|$  est une surface qui donne des informations sur la répartition de l'énergie du signal dans le plan temps -fréquence. En général les coupes de cette surface par des plans  $t = t_o$  ou  $\omega = \omega_o$  donnent une bonne approximation de cette répartition d'énergie.

## 6.5 La classe de Cohen

Malgré ses bonnes propriétés, la transformation de Wigner-Ville n'est pas adaptée à l'analyse de la structure de signaux complexes. En effet cette transformée est quadratique et les termes « croisés » induisent des interférences. Soit  $x = x_1 + x_2$  un signal. Calculons sa transformée de Wigner-Ville :

$$W_x = W_{x_1} + W_{x_2} + W_{[x_1, x_2]} + W_{[x_2, x_1]}$$

où

$$W_{[f, g]}(t, \omega) := \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \bar{g}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\tau\omega} d\tau .$$

Le terme d'**interférence**

$$I_{[x_1, x_2]} = W_{[x_1, x_2]} + W_{[x_2, x_1]}$$

est une fonction réelle qui prend des valeurs non nulles dans des régions inattendues du plan temps-fréquence (voir exercice 5 page 244).

### 6.5.1 Positivité

Une première façon de supprimer les interférences est de lisser  $W_f$  avec un noyau qui sera choisi de telle sorte que le résultat soit positif : en effet les interférences oscillent du positif au négatif. Soit donc  $\theta$  un noyau et

$$P_\theta f(t, \omega) = \iint_{\mathbb{R}^2} W_f(\tau, \xi) \theta(t, \tau, \omega, \xi) d\tau d\xi .$$

On impose alors  $P_\theta f(t, \omega) \geq 0$  (et donc  $\theta$  doit vérifier certaines hypothèses). Toutefois un théorème dû à Wigner prouve que si les distributions temps-fréquence suppriment complètement les interférences, elles provoquent une perte de résolution (voir [12] pp. 113). Il faut donc envisager d'autres stratégies.

### 6.5.2 La classe de Cohen

On souhaite atténuer les interférences tout en préservant certaines propriétés de la transformée de Wigner-Ville. Pour avoir une invariance par translation on va imposer que le lissage soit une convolution. Le noyau  $\theta$  est donc de la forme :

$$\theta(t, \tau, \omega, \xi) = \theta(t - \tau, \omega - \xi) .$$

On obtient

$$P_\theta f(t, \omega) = W_f * \theta(t, \omega) = \iint_{\mathbb{R}^2} W_f(\tau, \xi) \theta(t - \tau, \omega - \xi) d\tau d\xi .$$

Le spectrogramme est un exemple de distribution de la classe de Cohen avec

$$\theta(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} W_g(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(t + \frac{\tau}{2}) g(t - \frac{\tau}{2}) e^{-i\tau\omega} d\xi .$$

Le résultat suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes de conservation de l'énergie :

**Théorème 6.5.1** Pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} P_\theta f(t, \omega) d\omega = 2\pi |f(t)|^2, \quad \int_{\mathbb{R}} P_\theta f(t, \omega) dt = 2\pi |\hat{f}(\omega)|^2 ,$$

si et seulement si

$$\forall(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2, \quad \hat{\theta}(\tau, 0) = \hat{\theta}(0, \xi) = 1 .$$

*Démonstration* - Voir [12] p 115. □

La distribution de **Choi-Williams** de noyau  $\hat{\theta}(\tau, \xi) = e^{-\sigma^2 \tau^2 \xi^2}$  est très souvent utilisée. (Voir exercice 6 page 245).

Pour plus de détails sur l'analyse temps-fréquence on peut se référer à [12] chapitre 4..

## 6.6 Exemples : chirps

**Définition 6.6.1** Un *chirp* est un signal défini par  $x(t) = \kappa\left(\frac{t}{T}\right) \cos\left(\lambda_0 t + \alpha \frac{t^2}{2}\right)$ , où  $\kappa$  la fonction créneau de support  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ,  $\lambda_0$  est une fréquence centrale et  $\alpha$  une constante réelle.

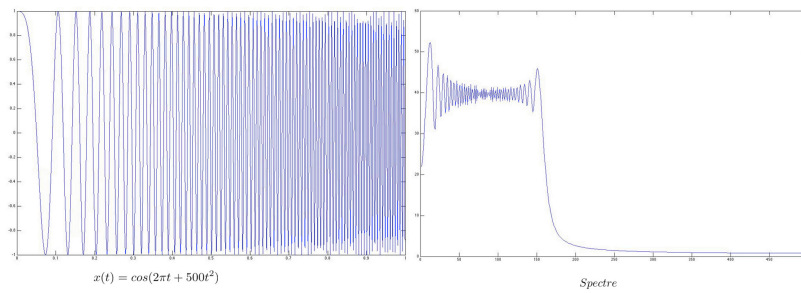


FIGURE 6.12 – Signal et spectre

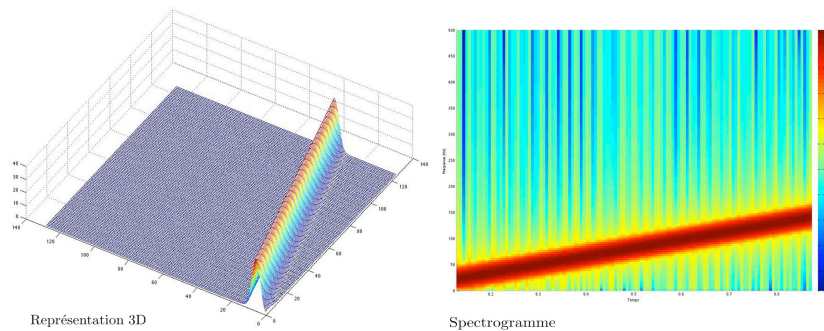


FIGURE 6.13 – Spectre temps-fréquence

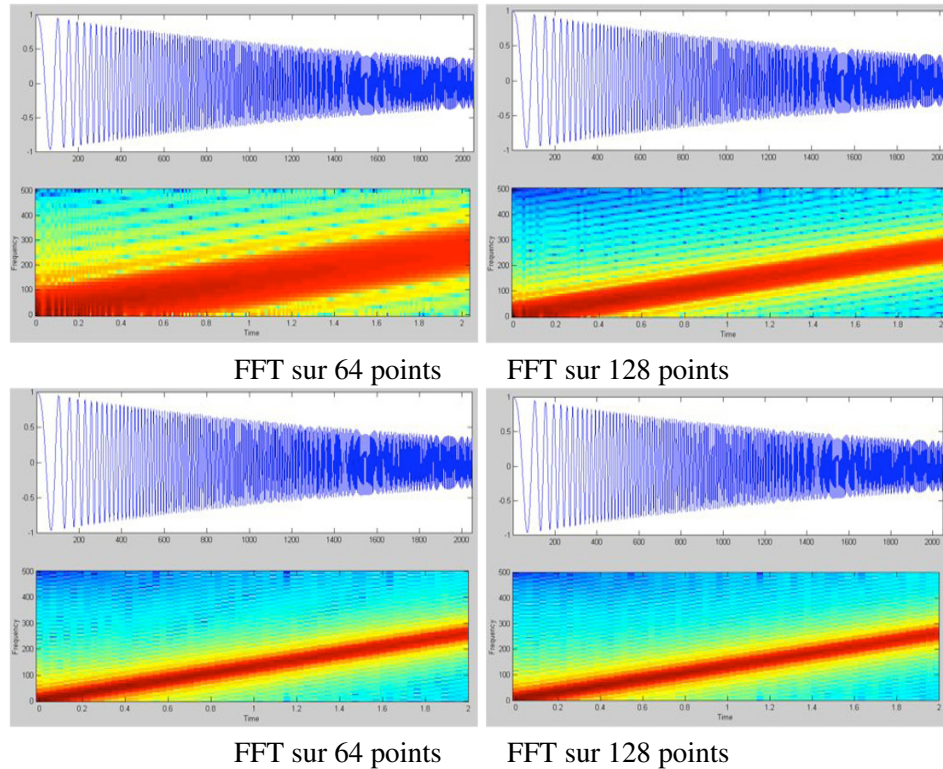


FIGURE 6.14 – Influence du nombre de points de la FFT

Toutefois la méthode de Gabor présente l'inconvénient majeur d'avoir une fenêtre de longueur fixe, handicap lorsqu'on veut traiter des signaux dont les variations peuvent avoir des ordre de grandeur très variables.

Une méthode nouvelle a été proposée en 1983 basée sur des fenêtres variant par translation et par dilatation-contraction : c'est la méthode des ondelettes.

## 6.7 Code SCILAB « sommaire » pour le spectrogramme

```

function [t,F,S]= spectrolite(x,fe,p,n)
// Entrées
// x est le signal à analyser
// fe est la fréquence d'échantillonnage
// p : demie-largeur (en échantillons) de la fenêtre :
// p est une puissance de 2
// n : largeur de la bande de recouvrement

```

```
// de deux fenêtres consécutives : n = p/2^(s)
// Sorties
// t =(ti) : vecteur de temps (centres des fenêtres)
// F =(Fk) : vecteur de fréquence
// S : matrice des |c(ti,Fk)| du spectrogramme

N = length(x);
// Ttotal = N/fe ;// durée totale du signal
//T : largeur en secondes de la fenêtre temporelle
T= 2*p/fe;
F=[1:p]/T;
  t=[]; S= [] ;
// Choix de la fenêtre
w= window('hn', 2*p);
//
for k=p+1:p+n:N-p-1
t= [t k/fe];
xw=x(k-p:k+p-1);
xw=w.*xw; // signal multiplié par la fenêtre
yw= fft(xw);
S=[S; abs(yw(1:p))];
end
//Affichage du spectrogramme
//
grayplot(t,F,S)
endfunction
```





## Chapitre 7

# Analyse temps-échelle - Ondelettes

Toutes les figures de ce chapitre ont été effectuées avec le logiciel MATLAB<sup>©</sup> et sa boîte à outils signal, ainsi qu'avec la boîte à outils gratuite WAVELAB : <http://www-stat.stanford.edu/~wavelab/>.

### 7.1 Transformée en ondelettes

En dessous d'une échelle d'étude  $\ell$ , correspondant à la taille de la fenêtre  $w$ , la transformée de Fourier à fenêtre glissante présente les mêmes limitations que la transformée de Fourier.

Considérons par exemple le signal  $f_2 = f_1 + \delta_1 + \delta_2$  (où  $f_1$  est la succession de deux notes par exemple) : il est impossible de trouver en pratique une valeur de  $\ell$  qui permette une visualisation simultanée des deux phénomènes : cela impliquerait que la fenêtre  $w$  soit bien localisée à la fois en temps et en fréquence, ce qui est impossible d'après le principe d'incertitude de Heisenberg (le meilleur compromis restant la gaussienne).

Dans l'exemple ci-dessous, la transformation de Gabor<sup>1</sup> est effectuée avec une fenêtre gaussienne de taille  $\ell$  que nous faisons varier. Le signal à analyser est  $f_2 = f_1 + \delta_1 + \delta_2$  où

$$f_1(x) = \sin(40\pi x) * 1_{[0,0.5]} + \sin(200\pi x) * 1_{[0.5,1]}, \delta_1 = \delta_{0.2}, \delta_2 = \delta_{0.3}.$$

et  $1_{[a,b]}$  désigne la fonction indicatrice de  $[a, b]$ , discrétisé sur  $2^{11} = 2048$  points.

---

1. Fonction WindowFT de WAVELAB

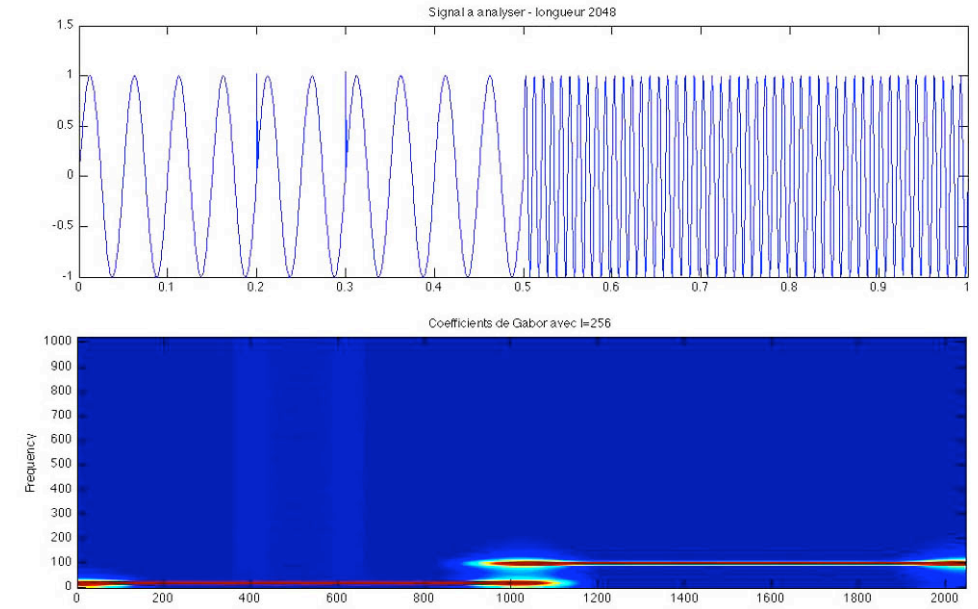


FIGURE 7.1 – Signal  $f_2$  et sa transformée de Gabor avec une fenêtre de taille  $\ell = 2^8 = 256$

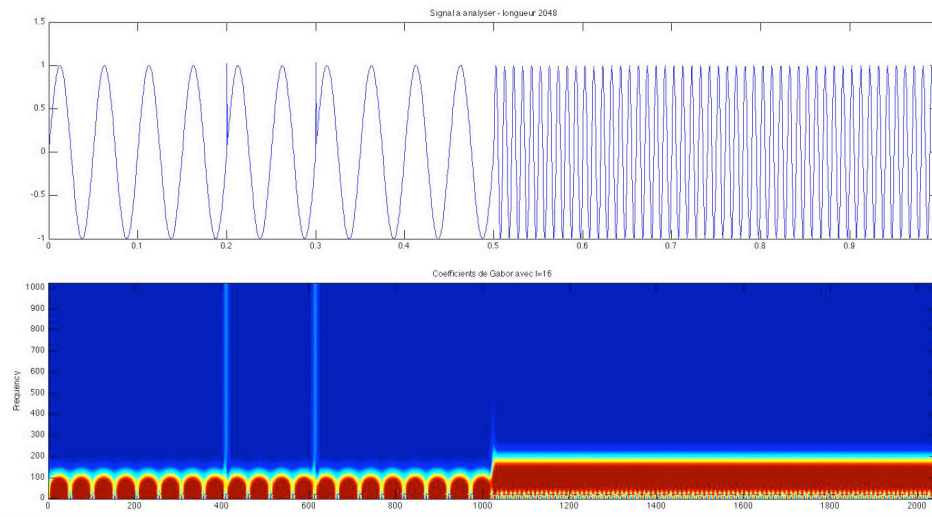


FIGURE 7.2 – Signal  $f_2$  et sa transformée de Gabor avec une fenêtre de taille  $\ell = 2^4 = 16$

L'analyse en ondelettes a pour objectif de rendre compte de ces deux phénomènes simultanément, en introduisant une fenêtre dont la taille varie avec la fréquence. Dans la transformée de Fourier à fenêtre glissante :

$$G_f(\lambda, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{w}(t-b) \exp(-2i\pi\lambda t) dt = (f, \psi_{b,\lambda})_{L^2(\mathbb{R})}$$

les fonctions analysantes sont :

$$\psi_{b,\lambda}(x) = w(x-b) \exp(2i\pi\lambda x) .$$

Dans la transformée de Gabor, la fenêtre  $w$  est une gaussienne d'échelle  $\sigma$  :

$$w(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\pi(\frac{x}{\sigma})^2} .$$

Les fonctions de Gabor sont alors (avec  $\sigma = 1$ ) :

$$\psi_{b,\lambda}(x) = e^{-\pi(x-b)^2} e^{2i\pi\lambda x} .$$

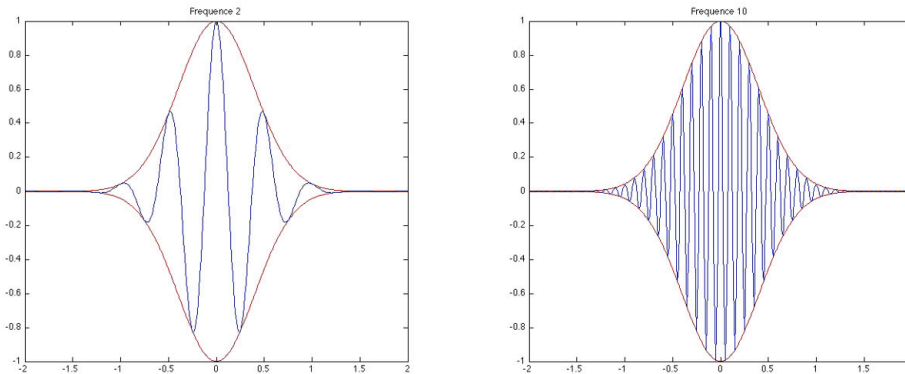


FIGURE 7.3 – Fonctions de Gabor pour  $b = 0$  et  $\lambda = 2, 10$  (partie réelle)

Dans la transformée en ondelettes les fonctions analysantes sont de la forme

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), a > 0, b \in \mathbb{R}$$

ce qui donne

$$Wf(a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx .$$

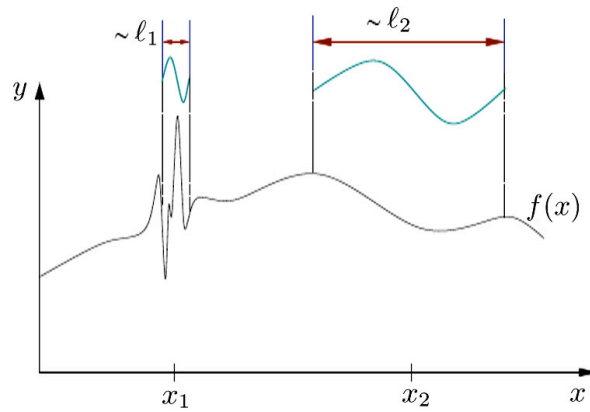


FIGURE 7.4 – Détection de singularités : la taille  $\ell_i$  de la fenêtre dépend de la fréquence

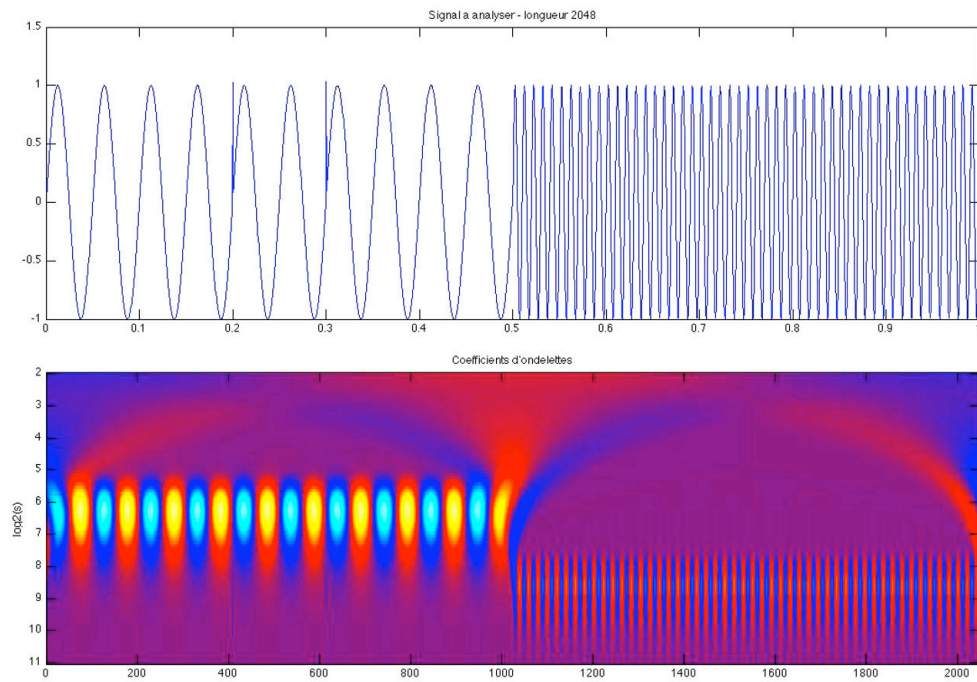


FIGURE 7.5 – Signal  $f_2$  et sa transformée en ondelettes avec une ondelette “chapeau mexicain” (voir plus loin)

La figure ci-dessus est obtenue avec les fonctions `CWT_Wavelab` et `ImageCWT` de `WAVELAB` pour un signal de longueur une puissance de 2 (ici  $2^{11}$ ). L'échelle  $a$  est une puissance de 2 :  $a = 2^n$ . En ordonnée se trouve l'exposant  $n$  (décroissant).

### 7.1.1 Définition des ondelettes

**Définition 7.1.1** Une fonction  $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  est une ondelette si elle vérifie la condition d'admissibilité :

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty.$$

Ceci implique que  $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$  (c'est équivalent si  $x\psi$  est intégrable).

En effet  $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = \hat{\psi}(0)$  ne peut pas être non nul sinon  $\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}$  ne serait pas intégrable.

Les caractéristiques de  $\psi$  sont nettement différentes de celle d'une fenêtre. Celle-ci avait plus ou moins l'allure d'un créneau,  $\psi$  au contraire sera d'intégrale nulle et oscillante. On s'efforce d'imposer à  $\psi$  et à  $\hat{\psi}$  une bonne localisation, donc à l'infini une convergence assez rapide vers 0. La fonction obtenue oscille et s'amortit rapidement : elle ressemble à une vague d'où son nom.

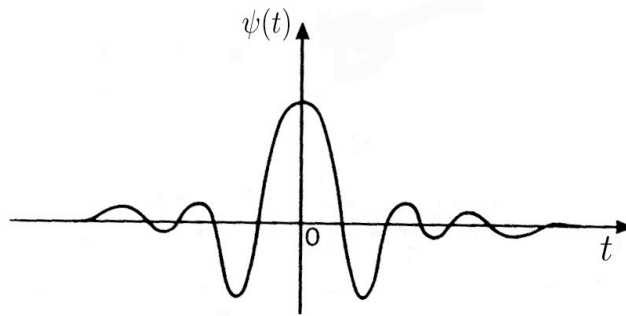


FIGURE 7.6 – Exemple d'ondelette

#### Exemples :

- L'ondelette de Haar :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce cas  $\hat{\psi}(\omega) = ie^{-\pi\omega} \frac{1 - \cos \pi\omega}{\pi\omega}$ .

- L'ondelette de Morlet (complexe) :

$$\psi(x) = e^{-\pi x^2} e^{10i\pi x}.$$

On a  $\hat{\psi}(\omega) = e^{-\pi(\omega-5)^2}$ . En effet on rappelle que la transformée de Fourier de la Gaussienne  $G : x \mapsto e^{-ax^2}$  est

$$\hat{G}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\omega^2}.$$

Il est alors facile de voir que  $\hat{\psi}(\omega) = \hat{G}(\omega - 5)$ .

- Les dérivées de la Gaussienne :

$$\psi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} e^{-\pi x^2}, \quad n \geq 2.$$

Pour  $n = 2$ , l'ondelette est appelée « chapeau mexicain ». On a  $\hat{\psi}_n(\omega) = (2i\pi\omega)^n e^{-\pi\omega^2}$ .

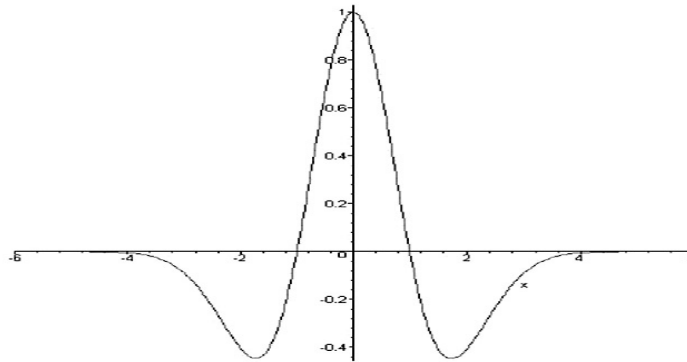


FIGURE 7.7 – Chapeau mexicain

Nous pouvons donc résumer la différence essentielle entre les fonctions de base de la transformation de Gabor et les ondelettes dans les deux figures suivantes :  
 Dans les fonctions de base de Gabor : l'enveloppe est rigide et le nombre des oscillations augmente avec les hautes fréquences

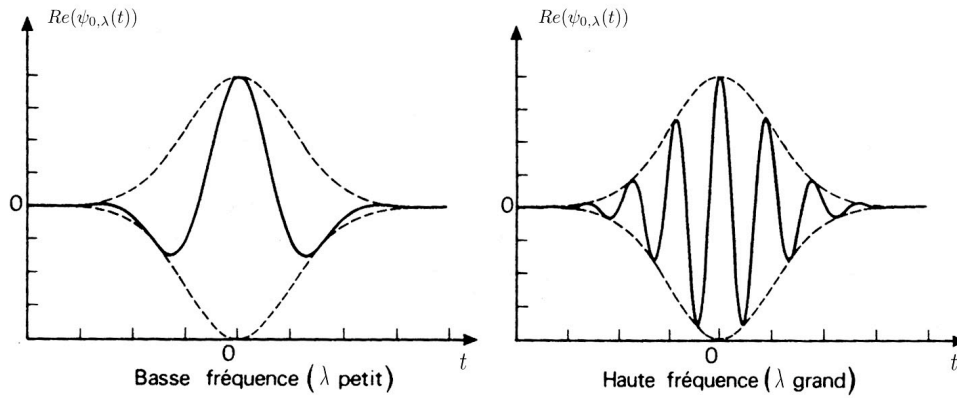


FIGURE 7.8 – Fonctions de base de Gabor

Les ondelettes gardent la même forme et le même nombre d'oscillations ; elles s'étirent ( $a$  grand) ou se contractent ( $a$  petit)

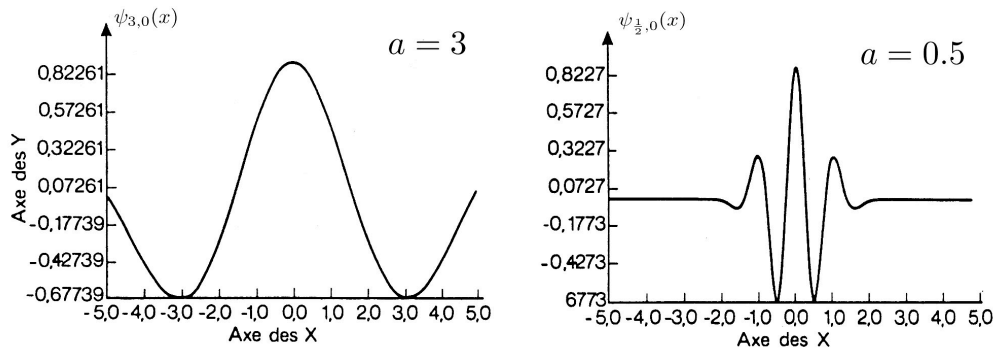


FIGURE 7.9 – Ondelettes basse et haute fréquence

### 7.1.2 Ondelettes dans l'espace physique

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

L'échelle  $a$  donne la taille du support (inverse d'une fréquence),  $b$  donne la position .

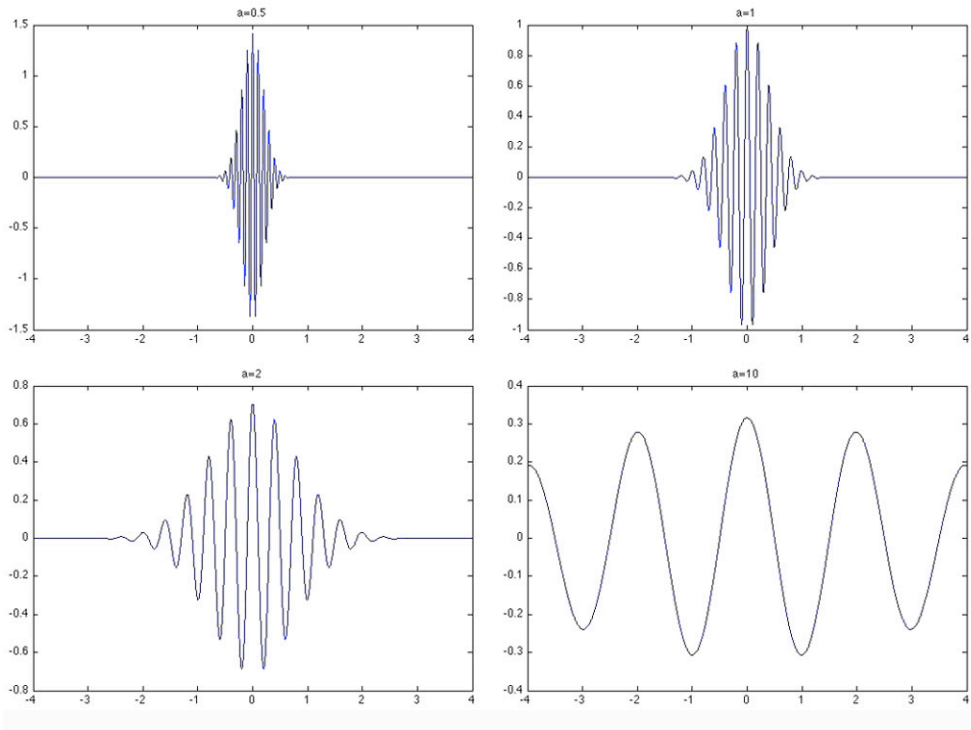


FIGURE 7.10 – Partie réelle de l'ondelette de Morlet,  $b = 0$ ,  $a = 0.5, 1, 2, 10$

### 7.1.3 Transformée de Fourier des ondelettes

Un calcul simple montre que

$$\hat{\psi}_{a,b}(\omega) = \sqrt{a}\hat{\psi}(a\omega)e^{-2i\pi b\omega}$$

Les ondelettes sont des filtres passe-bande autour de la fréquence  $\frac{\omega_o}{a}$ . Pour l'ondelette de Morlet  $\omega_o = 5$  (maximum de  $\hat{\psi}$ )

**Proposition 7.1.1** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . On a de façon équivalente, pour tous  $a > 0$ , et  $b \in \mathbb{R}$ ,

$$Wf(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx ,$$



$$Wf(a, b) = \sqrt{a} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)} e^{2i\pi b\omega} d\omega ,$$

Il suffit pour voir cela d'appliquer la formule de Parseval. Vu du côté temporel (ou spatial)  $x$ ,  $Wf(a, b)$  renseigne sur le signal  $f$  autour du point  $b$  dans un voisinage de taille  $\simeq a$ . Vu du côté fréquentiel  $\omega$ ,  $Wf(a, b)$  renseigne sur le signal  $\hat{f}$  autour de la fréquence  $\simeq \frac{1}{a}$ . L'analyse en ondelettes est une analyse **temps-échelle** :  $b$  est le temps,  $a$  est l'échelle, qui joue le rôle de l'inverse d'une fréquence.

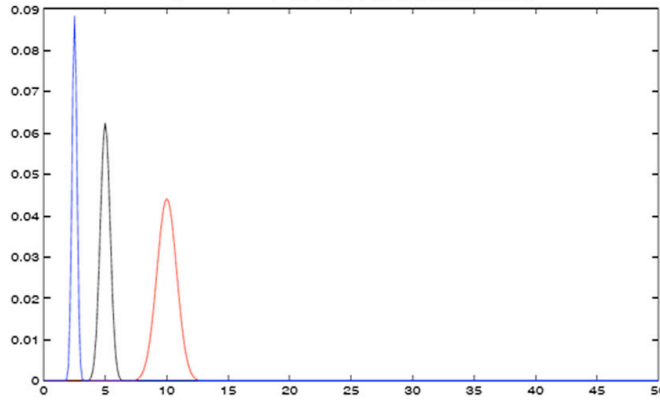


FIGURE 7.11 – Module de la Transformée de Fourier des ondelettes de Morlet d'échelle  $a = 0.5, 1, 2, 10, b = 0$ ,

## 7.2 Transformée en ondelettes continue : Inversion

Soit  $f$  une fonction réelle. La transformée en ondelettes continue (TOC) :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{C_\psi}} W : L^2(\mathbb{R}, dx) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \frac{da db}{a^2}) \\ f(x) &\mapsto \sqrt{\frac{2}{C_\psi}} W(a, b) \end{aligned}$$

est une isométrie. On a donc **conservation de l'énergie** :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{2}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Wf(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2} ,$$

et une formule **d'inversion** (ou synthèse)

$$f(x) = \Re \left[ \frac{2}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(a, b) \psi_{a,b}(x) \frac{da db}{a^2} \right].$$

On peut aussi reconstruire un signal (en faire la synthèse) avec une ondelette différente de celle qui a permis de faire l'analyse : soient  $g$  et  $h$  deux fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  vérifiant la condition d'admissibilité :

$$c_{gh} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\bar{\hat{g}}(s) \hat{h}(s)}{|s|} ds < +\infty.$$

C'est le cas si l'une ou l'autre des fonctions  $g$  ou  $h$  est une ondelette (i.e. de moyenne nulle). Alors pour tout  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$  si

$$W_g f(a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{g\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx,$$

on peut reconstruire

$$f(x) = \frac{2}{c_{gh}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_g f(a, b) \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{da db}{a^2}.$$

Pour implémenter la Transformée en Ondelettes Continue on peut la voir comme un produit de convolution pour  $a$  fixé :

$$Wf(a, b) = (f * \tilde{\psi}_a)(b)$$

où on a noté

$$\tilde{\psi}_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(-\frac{x}{a}\right).$$

### 7.2.1 Exemples

Pour la mise en œuvre numérique, on restreint les paramètres  $a$  et  $b$  à un sous-ensemble discret (et même fini) de  $\mathbb{R}$ . Par exemple

$$a_m = 2^{-m} \text{ et } b_n = n2^{-m} \quad (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

d'où

$$\psi_{a_m, b_n}(x) = 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m - n),$$

ou, plus généralement, avec  $\alpha > 1$  et  $\beta > 0$  :

$$\psi_{a_m, b_n}(x) = \alpha^{\frac{m}{2}} \psi(2^m - n\beta).$$

Plus  $\alpha$  est proche de 1 et  $\beta$  proche de 0, plus l'information est redondante, nécessitant d'ailleurs de gros calculs. Le choix de  $\alpha = 2$  correspond aux différents octaves en musique.

- Cas où  $f$  est monochromatique :  $f(x) = \cos(2\pi kx)$ .

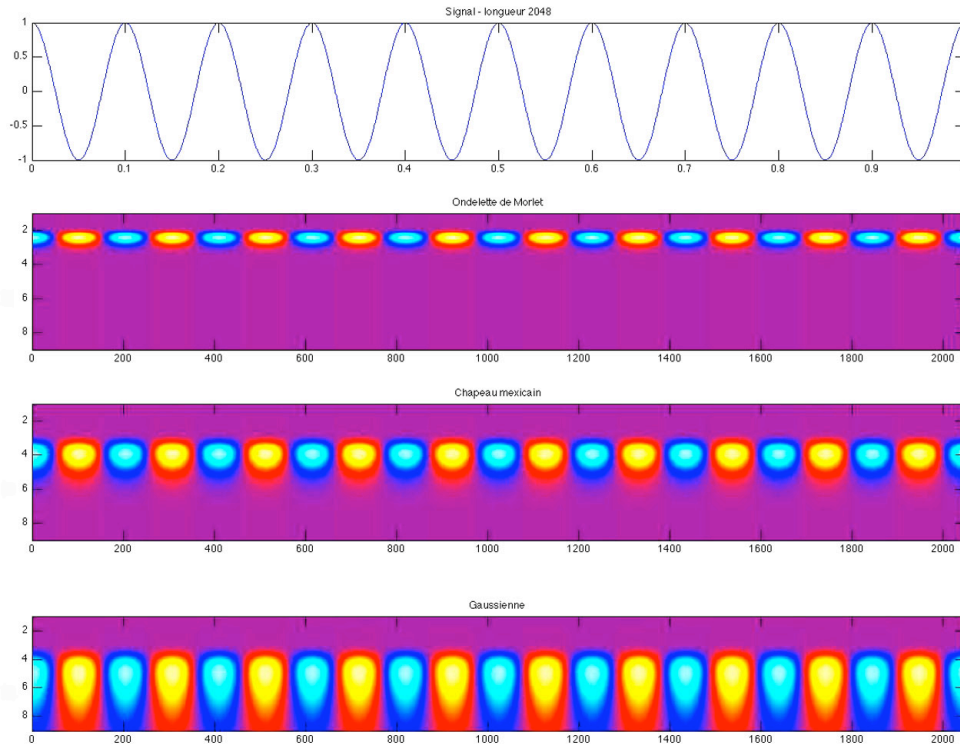


FIGURE 7.12 – Transformée en ondelettes continue de  $f$  de fréquence  $k = 10$ , avec l'ondelette de Morlet (2ème ligne), le chapeau mexicain (3ème ligne) et la gaussienne en bas

Un calcul simple montre que

$$Wf(a, b) = \frac{\sqrt{a}}{2} \left[ \overline{\hat{\psi}(ak)} e^{2i\pi kb} + \overline{\hat{\psi}(-ak)} e^{-2i\pi kb} \right].$$

Si l'ondelette est complexe analytique (par exemple l'ondelette de Morlet)

$$Wf(a, b) = \frac{\sqrt{a}}{2} \overline{\hat{\psi}(ak)} e^{2i\pi kb}.$$

Si l'ondelette est réelle

$$Wf(a, b) = \sqrt{a} \Re \left( \hat{\psi}(ak) e^{-2i\pi kb} \right).$$

- Cas où  $f$  est une impulsion de Dirac :  $f = \delta_{x_o}$  (mesure ponctuelle en  $x_o$ ).

$$Wf(a, b) = \overline{\psi_{a,b}(x_o)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{x_o - b}{a}\right)}.$$

A chaque échelle  $a$  :  $b \mapsto WF(a, b)$  est l'ondelette d'échelle  $a$  centrée en  $x_o$  (à une symétrie plus conjugaison près)

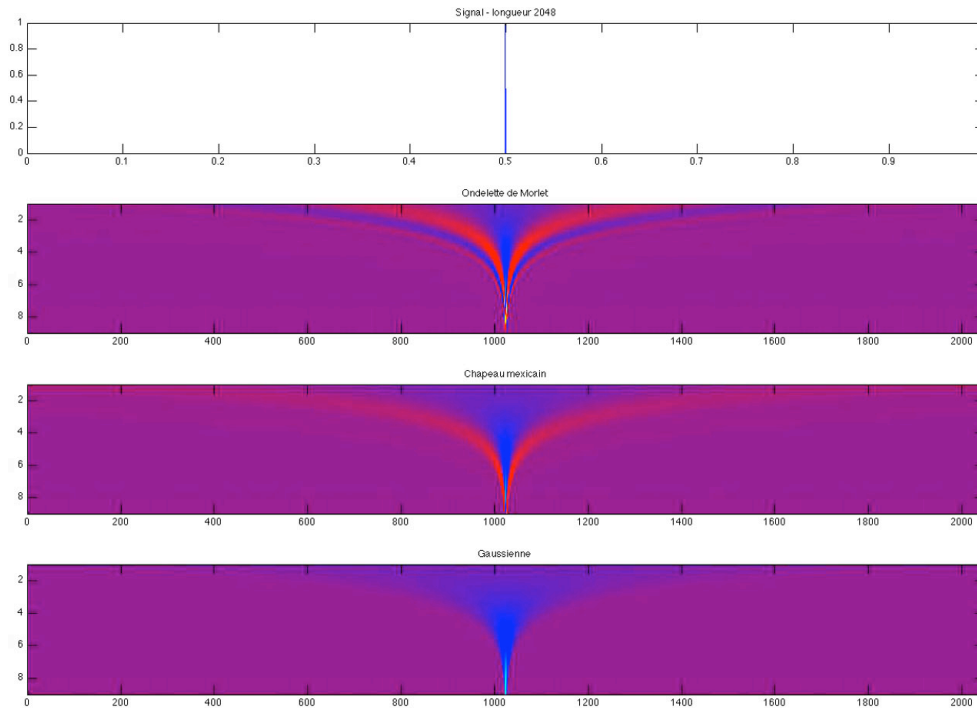


FIGURE 7.13 – Transformée en ondelettes continue de  $\delta_{x_o}$  pour  $x_o = 0.5$ , avec l'ondelette de Morlet (2ème ligne), le chapeau mexicain (3ème ligne) et la gaussienne en bas

## • Créneau périodique

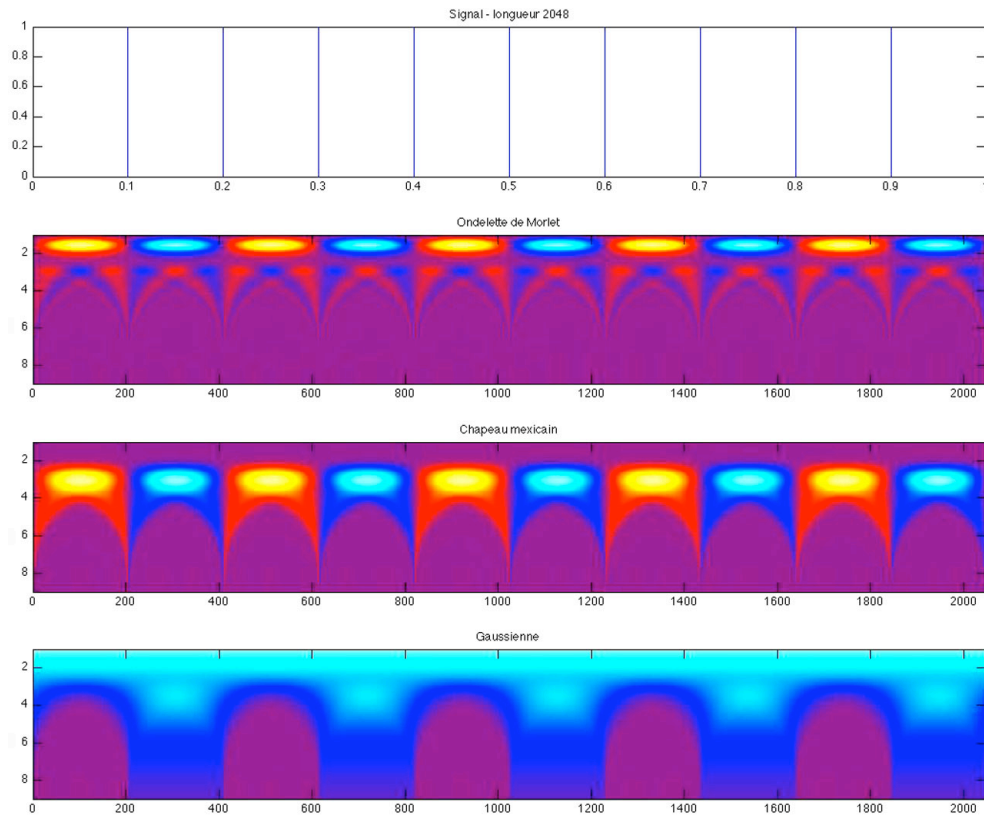


FIGURE 7.14 – Transformée en ondelettes continue de  $\delta_{x_o}$  pour  $x_o = 0.5$ , avec l'ondelette de Morlet (2ème ligne), le chapeau mexicain (3ème ligne) et la gaussienne en bas

- Chirp :  $f(t) = \cos(\lambda t + \alpha \frac{t^2}{2})$ . Exemple avec  $\lambda = \pi$  et  $\alpha = 500$ .

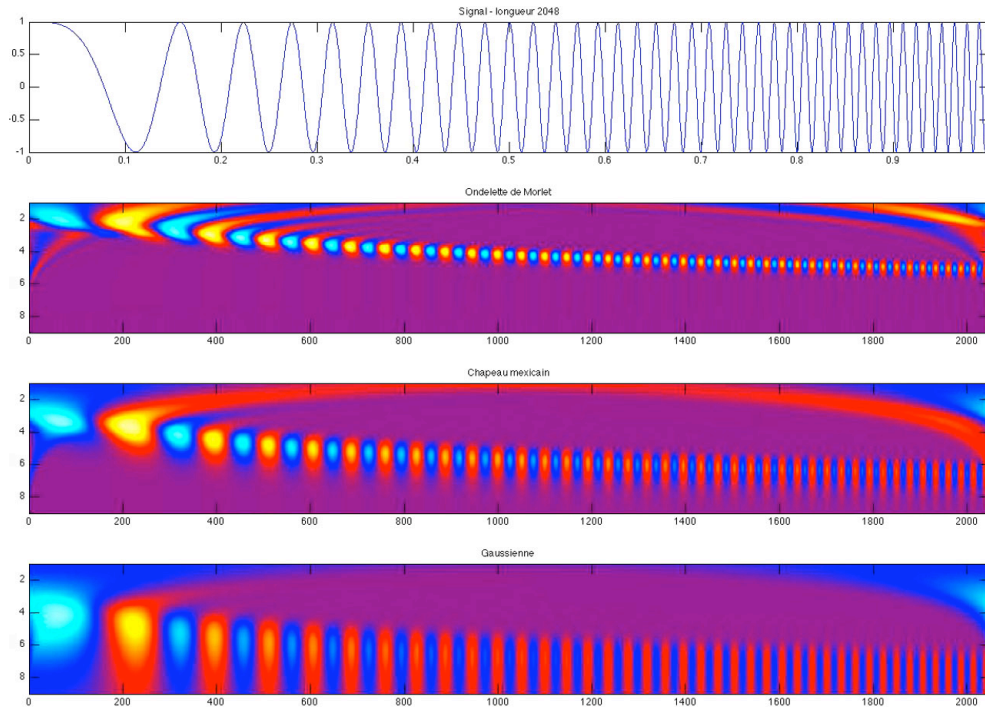


FIGURE 7.15 – Transformée en ondelettes continue de  $\delta_{x_o}$  pour  $x_o = 0.5$ , avec l'ondelette de Morlet (2ème ligne), le chapeau mexicain (3ème ligne) et la gaussienne en bas

- Sinusoïdes bruitées :  $f(t) = \cos(10\pi t) + 3 \cos(20\pi t) + b(t)$ .

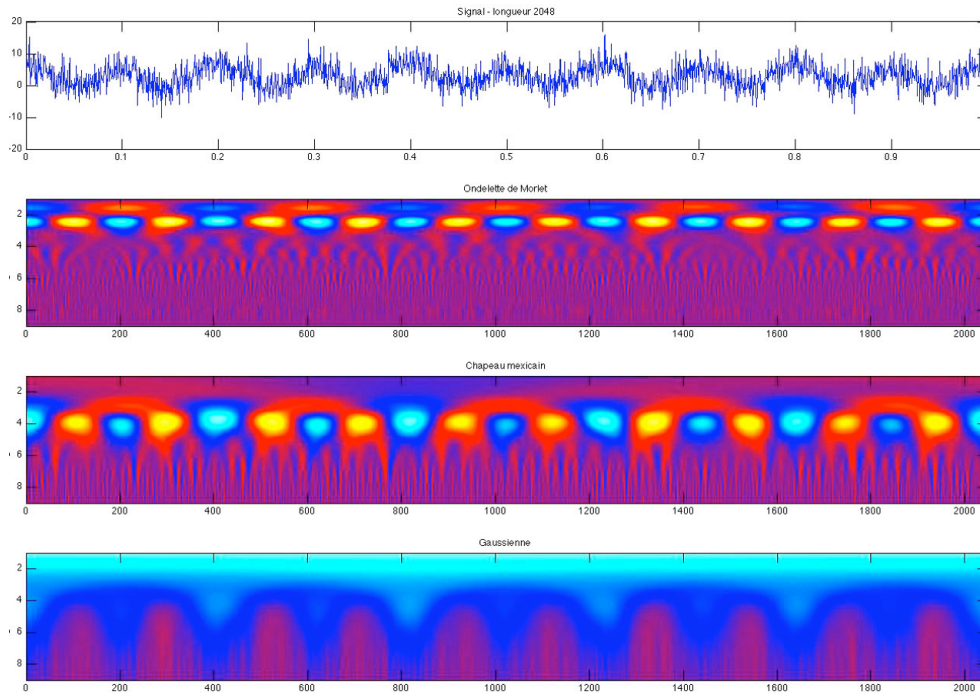


FIGURE 7.16 – Transformée en ondelettes continue de  $\delta_{x_o}$  pour  $x_o = 0.5$ , avec l'ondelette de Morlet (2ème ligne), le chapeau mexicain (3ème ligne) et la gaussienne en bas

### 7.3 Les ondelettes orthogonales

Soit  $\psi$  une ondelette. Les coefficients d'ondelettes  $W_f(a, b)$  sont très nombreux (indexés par  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) et on sent qu'il y a redondance de l'information. On va donc essayer de trouver une famille notée  $\psi_{j,k}$  où  $j, k \in \mathbb{Z}$  d'ondelettes (orthogonales) sur lesquelles on pourrait décomposer tout signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  en série (double)

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} (f, \psi_{j,k})_{L^2} \psi_{j,k}.$$

En d'autres termes, on cherche une base hilbertienne, orthogonale de  $L^2(\mathbb{R})$  : les coefficients  $w_{j,k} := W_f(j, k)$  sont alors indépendants les uns des autres. Commençons

par donner une exemple simple d'une telle famille.

### Les fonctions de Haar

Soit  $\varphi = 1$  sur  $[0, 1]$  et

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[ \\ -1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Pour  $j \geq 0$  et  $0 \leq k \leq 2^j - 1$  on pose  $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$  c'est-à-dire

$$\psi_{j,k}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & \text{si } x \in [k2^{-j}, (k + \frac{1}{2})2^{-j}[ \\ -2^{\frac{j}{2}} & \text{si } x \in [(k + \frac{1}{2})2^{-j}, (k + 1)2^{-j}] \end{cases}$$

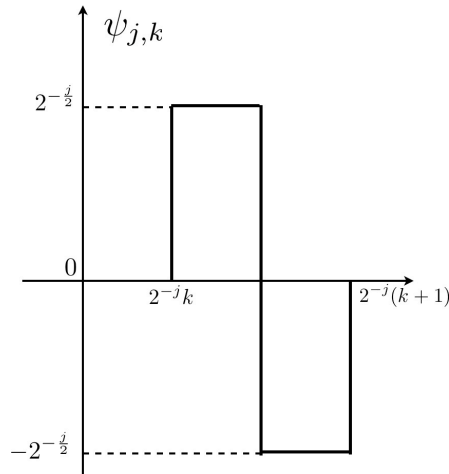


FIGURE 7.17 – Une fonction de Haar

**Théorème 7.3.1** *La famille  $(\phi, \psi_{j,k})$  est une base hilbertienne de  $L^2(0, 1)$  appelée base de Haar.*

*Démonstration* - On vérifie facilement que

$$\int_0^1 \psi_{j,k}(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 |\psi_{j,k}(t)|^2 dt = 1 .$$



Notons que le support de  $\psi_{j,k}$  est  $I_{j,k} := [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$  et qu'elle est constante sur chaque moitié du support. Si les supports de  $\psi_{j,k}$  et  $\psi_{j',k'}$  sont disjoints l'orthogonalité est évidente. Sinon, les supports n'étant pas disjoints, soit ils sont égaux (cas  $j = j'$ ) soit (par exemple pour  $j > j'$ ) le support de  $\psi_{j,k}$  est inclus dans une des 2 moitiés du supports de  $\psi_{j',k'}$  car

$$[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}] \subset \begin{cases} [2k'2^{-j'-1}, (2k'+1)2^{-j'-1}] & \text{si } k \leq 2^{j-j'}(2k'+1) \\ [(2k'+1)2^{-j'-1}, (2k'+2)2^{-j'-1}] & \text{sinon} \end{cases} .$$

Donc

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \int_0^1 \psi_{j,k}(t)\psi_{j',k'}(t) dt = 2^{j'/2} \int_0^1 \psi_{j,k}(t) dt = 0 .$$

La famille est donc orthonormée. Montrons maintenant qu'elle est totale. Soit donc  $f \in L^2(0, 1)$  telle que

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}, \quad \int_0^1 f(x) \psi_{j,k}(x) dx = 0 . \quad (7.3.1)$$

Comme  $\int_0^1 f(x) \psi_{j,0}(x) dx = 0$  pour tout  $j$  on voit que

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| = 2^{-j} \left| \int_0^{2^j} f(x) dx \right| \leq 2^{-j} \|f\|_{L^2} .$$

En faisant tendre  $j$  vers  $+\infty$  on obtient

$$\int_0^1 f(x) dx = 0 .$$

On pose  $F(y) = \int_0^y f(x) dx$ . Cette fonction est continue et  $F(0) = F(1) = 0$ . La relation (7.3.1) devient

$$-F\left(\frac{2k}{2^{j+1}}\right) + 2F\left(\frac{2k+1}{2^{j+1}}\right) - F\left(\frac{2k+2}{2^{j+1}}\right) = 0 .$$

qui, avec  $F(0) = F(1) = 0$  implique (par récurrence) que

$$F\left(\frac{2k}{2^{j+1}}\right) = F\left(\frac{2k+1}{2^{j+1}}\right) = F\left(\frac{2k+2}{2^{j+1}}\right) = 0 .$$

Par densité des points  $\frac{2k}{2^{j+1}}$  dans  $[0, 1]$  et continuité de  $F$ , on déduit que  $F \equiv 0$  et par dérivation  $f \equiv 0$  sur  $[0, 1]$ .  $\square$

**Remarque 7.3.1** On peut définir de la même façon la base de Haar dans  $L^2(\mathbb{R})$  avec  $(j, k) \in \mathbb{Z}$ . La démonstration précédente s'applique. Une fois qu'on a montré que  $f \equiv 0$  sur  $[0, 1]$  on conclut par translation que  $f \equiv 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

On peut remarquer que la base de Haar a des meilleures propriétés que celles des séries de Fourier. On a par exemple :

**Théorème 7.3.2** Si  $f$  est une fonction continue à support compact, alors

$$\sum_{|j|, |k| \leq N} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

converge uniformément vers  $f$  quand  $N \rightarrow +\infty$ .

La décomposition d'une fonction  $f \in L^2(0, 1)$  s'écrit

$$f = c_o + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k} ,$$

avec

$$c_o = \langle f, \phi \rangle = \int_0^1 f(t) dt \quad \text{et} \quad d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_0^1 f(t) \psi_{j,k}(t) dt .$$

On peut alors caractériser la régularité locale de  $f$  :

**Proposition 7.3.1** (i) Si  $f \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{I}_{j,k})$  alors  $|d_{j,k}| \leq C 2^{-3j/2}$ .

(ii) Si  $f \in \mathcal{C}^\alpha(x_o)$ , i.e.  $|f(x) - f(x_o)| \leq \beta |x - x_o|^\alpha$  avec  $0 < \alpha < 1$  alors  $|d_{j,k}| \leq C 2^{-j(\alpha+1)/2}$ .

*Démonstration* - On démontre le point (i). Soient  $j \geq 0$  et  $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$  fixés.  $I_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$  est le support de  $\psi_{j,k}$ . Le coefficient d'ondelette sur  $\psi_{j,k}$  d'une fonction  $f$  est donné par

$$d_{j,k} = \int_{I_{j,k}} f(x) \psi_{j,k}(x) dx .$$

Si  $f \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{I}_{j,k})$  alors pour tout  $x \in \overset{\circ}{I}_{j,k}$  on a

$$f(x) = f\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) + \left(x - \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) f'(\theta_x) ,$$

avec  $\theta_x \in \overset{\circ}{I}_{j,k}$ . Donc

$$d_{j,k} = \int_{I_{j,k}} \left(x - \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) f'(\theta_x) \psi_{j,k}(x) dx ,$$

car  $\int \psi_{j,k} = 0$ , et

$$|d_{j,k}| \leq \sup_{I_{j,k}} |f'| \int_{I_{j,k}} |2^{-j-1}| 2^{j/2} dx \leq \frac{1}{2} \sup_{I_{j,k}} |f'| 2^{-3j/2}.$$

□

C'est une propriété utile pour la compression comme nous le verrons dans la section suivante.

### 7.3.1 Problème des moments de l'ondelette

Posons pour simplifier  $n = 2^j$  et étudions la convergence vers 0 de

$$u_n = \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{\psi}(nx) dx = \frac{1}{\sqrt{n}} w_{j,0}.$$

La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à  $f$  en  $x = 0$  donne à l'ordre  $q$  :

$$u_n = \sum_{\ell=0}^q f^{(\ell)}(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{x^\ell}{\ell!} \bar{\psi}(nx) dx + \int_{\mathbb{R}} R(x) \bar{\psi}(nx) dx,$$

avec

$$R(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^q}{q!} f^{(q+1)}(t) dt.$$

En notant  $M_\ell$  les moments de la fonction  $\bar{\psi}$ , c'est-à-dire :

$$M_\ell = \int_{\mathbb{R}} x^\ell \bar{\psi}(x) dx, \ell \in \mathbb{N},$$

et  $r_n$  le reste on obtient

$$u_n = \sum_{\ell=0}^q \frac{f^{(\ell)}(0) \cdot M_\ell}{\ell! n^{\ell+1}} + r_n.$$

Un calcul simple montre que  $|r_n| \leq \frac{C}{n^{q+2}}$  où  $C$  est une constante. On obtient donc le développement limité de  $u_n$  :

$$u_n = \sum_{\ell=0}^q \frac{f^{(\ell)}(0) \cdot M_\ell}{\ell! n^{\ell+1}} + O\left(\frac{1}{n^{q+2}}\right).$$

La vitesse de convergence de  $u_n$  vers 0 est donc réglée par le premier moment non nul de  $\bar{\psi}$ .

Pour l'ondelette de Haar, on a tout de suite  $M_1 \neq 0$ , d'où des difficultés numériques liées au manque de concentration des coefficients. On est ainsi amené à la définition d'ondelettes ayant un certain ordre de régularité.

**Définition 7.3.1** Soit  $r \in \mathbb{N}$ . On appelle ondelette d'ordre  $r$  toute fonction  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\psi^{(r)}$  soit continue par morceaux,  $x \mapsto x^q \psi(x)$  soit dans  $L^1(\mathbb{R})$  pour  $q = 0, 1, \dots, r$  et vérifiant :

$$(a) \forall m = 0, 1, 2, \dots, r \quad |\psi^{(m)}(x)| \leq \frac{Cste}{1 + |x|^{r+m+1}}$$

$$(b) \forall q = 0, 1, 2, \dots, r \quad \int_{\mathbb{R}} x^q \psi(x) dx = 0.$$

**Définition 7.3.2** On appelle base orthonormée d'ondelettes de  $L^2(\mathbb{R})$  toute base orthonormée  $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  avec

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k),$$

où  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  est telle que  $\|\psi\|_2 = 1$  et vérifie la définition 7.3.1.

## 7.4 Analyse multi-résolution dans $L^2(\mathbb{R})$

La question qui se pose à présent naturellement est celle de la construction d'une base orthonormée d'ondelettes. La réponse est donnée par **l'analyse multi-résolution (AMR)**.

L'analyse multi-résolution de  $L^2(\mathbb{R})$  est la donnée d'une suite de sous-espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R})$   $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  vérifiant :

1.  $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$ .
2.  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$  et  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ .
3.  $x \mapsto f(x) \in V_j \iff x \mapsto f(2x) \in V_{j+1}$
4.  $x \mapsto f(x) \in V_0 \iff \forall n \in \mathbb{Z} \quad x \mapsto f(x - n) \in V_0$
5. Il existe une fonction  $\varphi \in V_0$  telle que la famille dénombrable  $(\varphi_n : x \mapsto \varphi(x - n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_0$ .

La fonction  $\varphi$  est appelée **fonction d'échelle** de l'AMR.

**Interprétation**  $V_j$  est une « grille de lecture » du signal de taille  $2^j$ . Cela revient à dire que la projection  $P_{V_j} f$  d'un signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  est une approximation du signal à la **résolution**  $2^j$ .

- La propriété (1) signifie qu'une approximation à la taille à la résolution  $2^{j+1}$  contient toute l'information nécessaire pour calculer l'approximation plus grossière à la résolution  $2^j$ .

- Si on dilate une fonction par 2, les détails sont deux fois plus gros. La condition (3) indique que la même chose est vraie pour les approximations.
- La propriété (2) signifie que si on fait tendre la résolution vers  $+\infty$  on retrouve tous les détails de  $f$ .
- La propriété (4) impose que  $V_o$  (et donc tous les  $V_j$ ) est stable par composition avec l'opérateur de translation.

**Exemples.** Les espaces  $V_j$  se déduisent par dilatation de l'espace  $V_o$  :

$$V_j = \text{Vec}\{\varphi_{j,k} : x \mapsto 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k) \mid k \in \mathbb{Z}, \} . \quad (7.4.2)$$

*Haar :*

$$V_o = \{ \text{Fonctions constantes sur } [k, k + 1[, \forall k \in \mathbb{Z}, \} .$$

*Splines de degré 1 :*

$$V_o = \{ \text{Fonctions continues sur } \mathbb{R}, \text{ affines sur } [k, k + 1[, \forall k \in \mathbb{Z}, \} .$$

*Splines de degré  $n$  :*

$$V_o = \{ \text{Fonctions } \mathcal{C}^{n-1} \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ polynômiales de degré } n \text{ sur } [k, k + 1[, \forall k \in \mathbb{Z}, \} .$$

*Shannon*

$$V_o = \{ f \in L^2(\mathbb{R}), \hat{f} \text{ est à support dans } [1, 2] \} .$$

**Construction du filtre miroir.** On a  $V_j \subset V_{j+1}$ . On introduit alors  $W_j$  le complémentaire orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$  :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j .$$

On pourra donc écrire que

$$P_{V_{j+1}} f = P_{V_j} f + P_{W_j} f ,$$

où  $P_{V_j} f$ ,  $P_{V_{j+1}} f$  sont respectivement les **approximations** (projections sur  $V_k$ ) à l'ordre  $j$  et  $j + 1$  et  $P_{W_{j+1}} f$  sont les **détails** qui apparaissent à l'ordre  $j$ .

Le but est maintenant de construire une base orthonormée de chaque  $W_j$ , où les  $W_j$  sont deux à deux orthogonaux. Ainsi la réunion des bases de  $W_j$  sera une famille orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . C'est même une base car

$$L^2(\mathbb{R}) = V_o \bigoplus_{j=0}^{+\infty} W_j = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j ,$$

La construction commence par la constatation que la fonction d'échelle  $\varphi \in V_0 \subset V_1$  vérifie

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(2x - n). \quad (7.4.3)$$

où les coefficients  $h_n$  sont donnés par

$$h_n = (\varphi, \varphi_{1,n})_{L^2} = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \varphi(2x - n) dx. \quad (7.4.4)$$

On reconnaît une convolution discrète correspondant à

$$\varphi(x) = \sqrt{2}(h * \varphi)(2x),$$

c'est-à-dire aussi

$$(h * \varphi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{x}{2}\right).$$

La suite  $h = (h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  se comporte donc comme un **filtre** : on l'appelle **filtre miroir**. En appliquant la transformation de Fourier on a

$$\hat{\varphi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega) \hat{\varphi}(\omega), \quad (7.4.5)$$

avec

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega}.$$

En particulier  $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$ .

### Exemples

- Pour l'AMR de Shannon,  $\hat{\varphi} = 1_{[-\pi, \pi]}$ . Donc, avec (7.4.5), pour tout  $\omega \in [-\pi, \pi]$ ,  $\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} 1_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ .
- Pour l'AMR de Haar,  $\varphi = 1_{[0,1]}$  et on a

$$h_n = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \varphi(2x - n) dx = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } n = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\text{donc } \hat{h}(\omega) = \sqrt{2}(1 + e^{-i\omega}).$$

**Construction des ondelettes** On cherche une fonction  $\psi$  telle que  $(\psi_n : x \mapsto \psi(x - n))_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une base de  $W_0$ . Sous les hypothèses de l'AMR, une solution possible est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 7.4.1** Soit  $\varphi$  une fonction d'échelle et  $h$  le filtre miroir correspondant. Soit  $g$  le filtre conjugué défini par  $g_n = (-1)^{1-n} \overline{h_{1-n}}$ . Soit  $\psi$  donnée par

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi(2x - n).$$

Soit  $\psi_{j,k} : x \mapsto 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$ , alors

1. pour  $j$  fixé,  $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_j$ .
2.  $(\psi_{j,k})_{k,j \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Une telle fonction  $\psi$  est appelée **ondelette** de l'AMR.

**Proposition 7.4.1** Soient  $j, k, n \in \mathbb{Z}$  et  $(\varphi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  la famille définie par (7.4.2). Alors

$$(\varphi_{j,n}, \varphi_{j-1,k}) = h_{n-2k}.$$

*Démonstration* - On a  $(\varphi_{j,n}, \varphi_{j-1,k}) = 2^{\frac{j}{2}} 2^{\frac{j-1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^j x - n) \varphi(2^{j-1} x - k) dx$ .

Le changement de variables  $y = 2^{j-1} x - k$  donne  $x = 2^{1-j}(y + k)$  et

$$\begin{aligned} (\varphi_{j,n}, \varphi_{j-1,k}) &= 2^{j-\frac{1}{2}} 2^{1-j} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2y - n + 2k) \varphi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \sqrt{2} \varphi(2y - (n - 2k)) dy = (\varphi, \varphi_{1,n-2k}) = h_{n-2k}. \end{aligned}$$

□

Nous obtenons donc

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \bigoplus_{j=0}^{+\infty} W_j = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j ,$$

avec

$$W_j = \text{Vec}\{\psi_{j,k} : x \mapsto 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) \mid k \in \mathbb{Z}, \} .$$

Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Sa décomposition en ondelettes s'écrit :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(x - k)}_{V_0} + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) ,$$

avec

$$c_k = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x - k) dx \text{ et } d_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_{j,k}(x) dx .$$

En pratique on cherche à avoir  $N$  moments nuls.

#### 7.4.1 Exemples de fonctions d'échelle et d'ondelettes

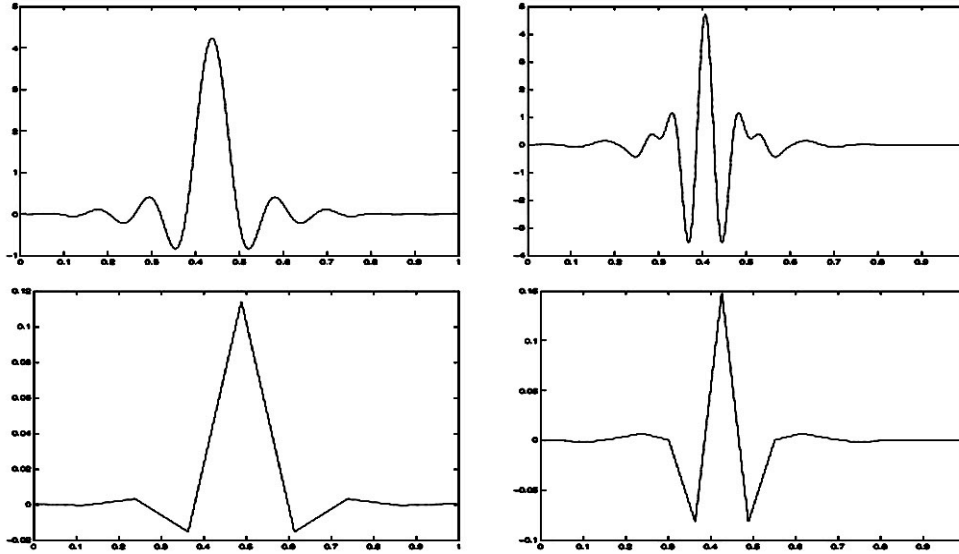


FIGURE 7.18 – Fonctions d'échelle (à gauche) et ondelettes (à droite) - Première ligne : Fonctions de Meyer (de classe  $C^\infty$  - nombre infini de moments nuls) - Deuxième ligne : Splines affines (2 moments nuls)



## 7.5 Algorithme rapide de décomposition en ondelettes

La transformée en ondelette rapide (ou FWT : Fast Wavelet Transform) décompose successivement  $P_{V_j}$  en une approximation plus grossière  $P_{V_{j-1}}$  et en coefficients d'ondelettes correspondant à  $P_{W_{j-1}}$ . Soit  $s$  un signal discret de longueur  $2^N$  points. Ce signal peut correspondre à l'échantillonnage d'un signal  $f$  défini sur un intervalle  $[a, b]$ . Si on pose

$$a_k = a + \frac{k}{2^N}(b - a), 0 \leq k \leq 2^N - 1,$$

on a  $s(k) = f(a_k)$  par exemple. Le prolongement le plus simple est le prolongement périodique.

**Étape 0** : on introduit les coefficients  $C_N = (c_{N,k})$

$$c_{N,k} \simeq 2^{-\frac{N}{2}} s(k) \quad k = 0, \dots, 2^N - 1,$$

correspondant au niveau maximal de détails (et donc à la plus grande échelle). On utilise donc toute l'information disponible.

On considère alors la fonction  $s_N \in V_N$  :

$$s_N = \sum_{k=0}^{2^N-1} c_{N,k} \varphi_{N,k}.$$

**Décomposition** :  $V_N = V_o \oplus W_o \oplus \dots \oplus W_{N-1}$ . On va décomposer le signal en partant de l'échelle  $N$  pour aller jusqu'à l'échelle 1.

Pour  $j = N, \dots, 1$  on utilise :  $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ .

La fonction

$$s_j = \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k} \varphi_{j,k}$$

de  $V_j$  s'écrit aussi par décomposition

$$s_j = \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} c_{j-1,k} \varphi_{j-1,k} + \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} d_{j-1,k} \psi_{j,k}.$$

Grâce à l'orthogonalité, on obtient

$$c_{j-1,k} = (f_j, \varphi_{j-1,k}) = \left( \sum_{n=0}^{2^j-1} c_{j,n} \varphi_{j,n}, \varphi_{j-1,k} \right) = \sum_{n=0}^{2^j-1} c_{j,n} (\varphi_{j,n}, \varphi_{j-1,k}).$$

Avec la proposition (7.4.1) on conclut que  $\forall k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1$  :

$$c_{j-1,k} = \sum_{n=0}^{2^{j-1}} c_{j,n} h_{n-2k} .$$

De même

$$d_{j-1,k} = \sum_{n=0}^{2^{j-1}} d_{j,n} g_{n-2k} ,$$

avec  $g_n = (-1)^{1-n} h_{1-n}$ .

En termes de convolution circulaire de période  $2^j$  ces égalités se réécrivent (avec  $C_{j-1} = (c_{j-1,k}, k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1, \dots)$ )

#### Convolution - décimation

$$c_{j-1}[k] = (C_j * \bar{h})[2k], \quad \forall k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1$$

$$d_{j-1}[k] = (D_j * \bar{g})[2k], \quad \forall k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1$$

avec  $\bar{h}[n] = h[-n]$  et  $\bar{g}[n] = g[-n]$ .

**Recomposition** : à partir des coefficients d'ondelettes et de la valeur moyenne de la fonction :  $[c_{0,0}, \{d_{j,k}\}, j = 0, \dots, N-1, k = 0, \dots, 2^{j-1}]$  on veut retrouver les coefficients  $C_N$ . On utilise dans ce sens  $V_{j-1} \oplus W_{j-1} = V_j$  pour  $j = 0, \dots, N-1$  :

$$c_{j,k} = \sum_{n=0}^{2^{j-1}-1} c_{j-1,n} h_{k-2n} + \sum_{n=0}^{2^{j-1}-1} d_{j-1,n} g_{k-2n}$$

c'est-à-dire en notant  $\tilde{x}_n = x_p$  si  $n = 2p$  et  $\tilde{x}_n = 0$  si  $n = 2p+1$  :

$$C_j[k] = (\widetilde{C_{j-1}} * h)[k] + (\widetilde{D_{j-1}} * g)[k] .$$

**Exemple** :  $f(x) = \sqrt{\text{abs}(\cos(2\pi x))}$

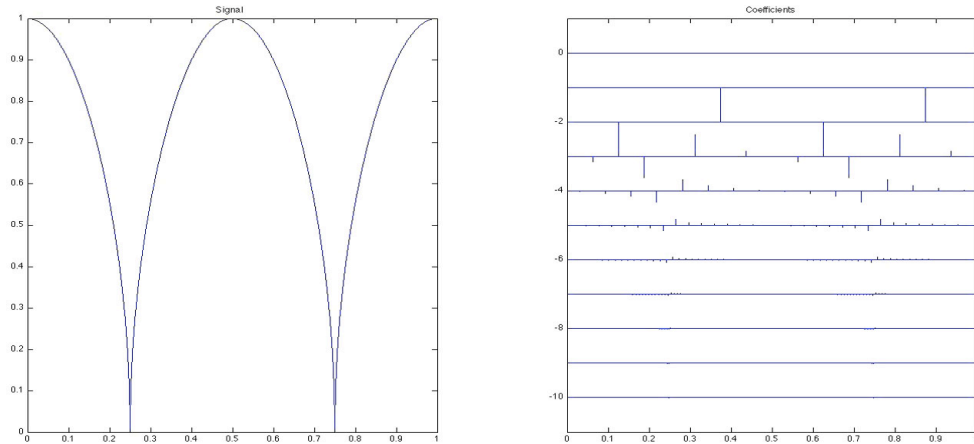


FIGURE 7.19 – Carte des coefficients sur la base de Haar : abscisse :  $k2^{-j} \in [0, 1]$ , ordonnée :  $-j, j = 1, \dots, 11$ ).

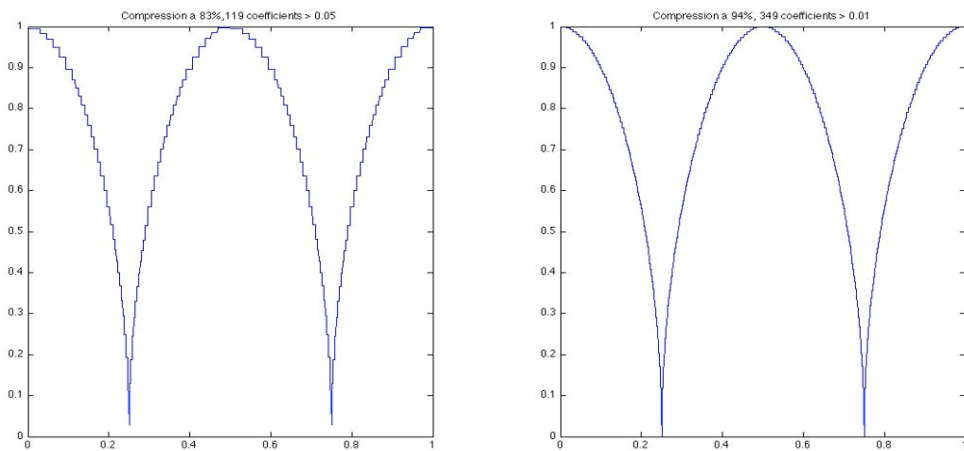


FIGURE 7.20 – Fonction recomposée à partir des 119 plus grands coefficients ( $> 0.05$ ) à gauche, taux de compression 83% et 349 plus grands coefficients ( $> 0.01$ ) à droite, taux de compression 94%

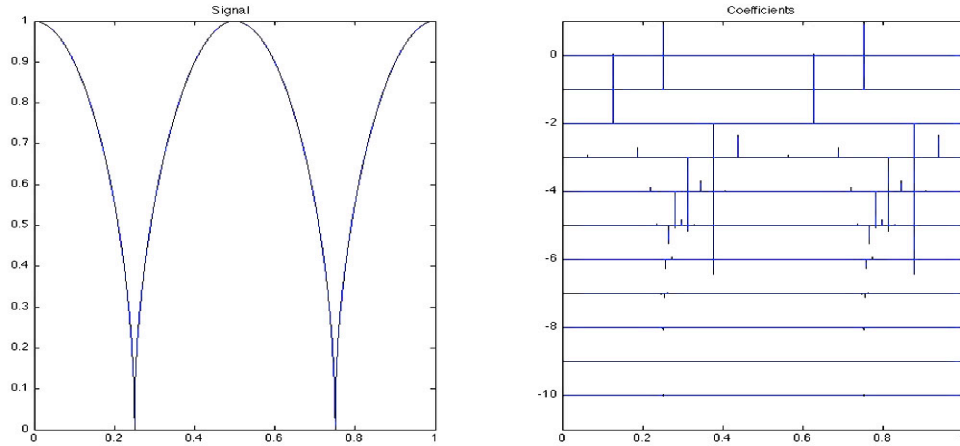


FIGURE 7.21 – Carte des coefficients sur la base de Daubechies 8 (annulation de 4 moments) : abscisse :  $k2^{-j} \in [0, 1]$ , ordonnée :  $-j, j = 1, \dots, 11$ ).

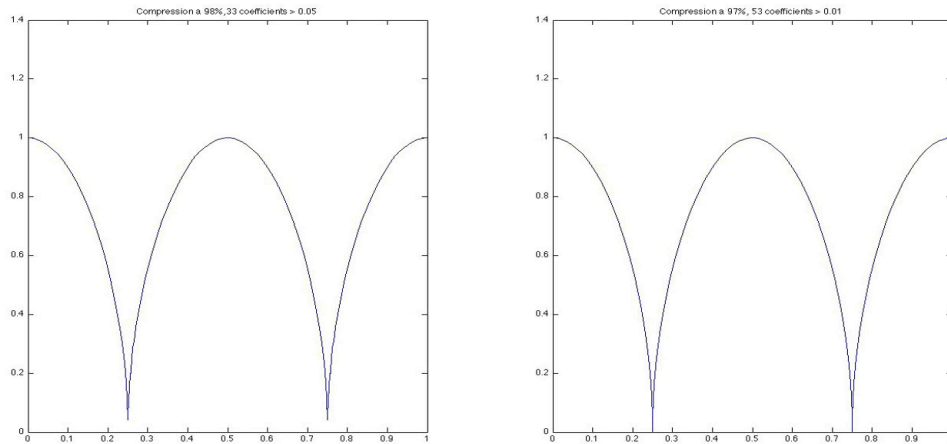


FIGURE 7.22 – Fonction recomposée à partir des 33 plus grands coefficients ( $> 0.05$ ) à gauche, taux de compression 98% et 53 plus grands coefficients ( $> 0.01$ ) à droite, taux de compression 97%

Les figures ci-dessus ont été obtenues en utilisant les fonctions `MakeONFilter`,

FWT\_PO et PlotWaveCoeff de WAVELAB. La reconstruction se fait avec la fonction IWT\_PO.

### Application à la base de Haar.

Nous explicitons l'algorithme précédent quand on prend une base de Haar comme base d'ondelettes. Dans ce cas  $\varphi$  est la fonction indicatrice de  $[0, 1[$  et

$$\varphi_{j,k}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & \text{sur } \left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right[ \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Un calcul direct de  $(\varphi_{j,n}, \varphi_{j-1,k})$  montre que

$$(\varphi_{j,n}, \varphi_{j-1,k}) = \begin{cases} 2^{-\frac{j}{2}} & \text{si } n = 2k \\ 2^{-\frac{j}{2}} & \text{si } n = 2k + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient donc (avec les notations précédentes)

$$c_{j-1,k} = \frac{c_{j,2k} + c_{j,2k+1}}{2^{\frac{j}{2}}}.$$

Un calcul analogue (avec l'expression analytique de la fonction de Haar  $\psi_{j,k}$  donne

$$d_{j-1,k} = \frac{c_{j,2k} - c_{j,2k+1}}{2^{\frac{j}{2}}}.$$

On passe donc d'un échantillon de taille  $2^j$  à un échantillon de taille  $2^{j-1}$ . La reconstruction se fait de manière évidente :

$$c_{j,2k} = (c_{j-1,k} + d_{j-1,k})2^{\frac{j}{2}-1} \quad \text{et} \quad c_{j,2k+1} = (c_{j-1,k} - d_{j-1,k})2^{\frac{j}{2}-1}.$$

Une stratégie de compression est par exemple la suivante : soit un signal de la forme

$$f_j = \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k} \varphi_{j,k} = f_{j-1} + d_{j-1}.$$

Soit alors

$$\bar{d}_{j-1} = \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} \bar{d}_{j-1,k} \psi_{j-1,k}$$

avec  $\bar{d}_{j-1,k} = d_{j-1,k}$  si  $|d_{j-1,k}| \geq \varepsilon$  (où  $\varepsilon > 0$  est donné) et 0 sinon. Puis on recommence jusqu'à  $j = 0$ .

## 7.6 Filtrage par ondelettes

Reprenons l'exemple de la somme de deux sinusôides bruitée de la page 183 :  $f(t) = \cos(10\pi t) + 3 \cos(20\pi t) + b(t)$ . Le bruit additif rajouté au signal de base de très nombreux détails qui vont se traduire dans l'analyse multirésolution par des coefficients d'ondelettes à de petites échelles. Pour débruiter, il suffit donc de seuiller mes coefficients d'ondelettes en ne gardant que ceux qui correspondent à des échelles importantes et de reconstruire le signal à partir des coefficients ainsi gardés. Les figures ci-dessous ont été obtenues avec la fonction `ThreshWave` de `WAVELAB`. .

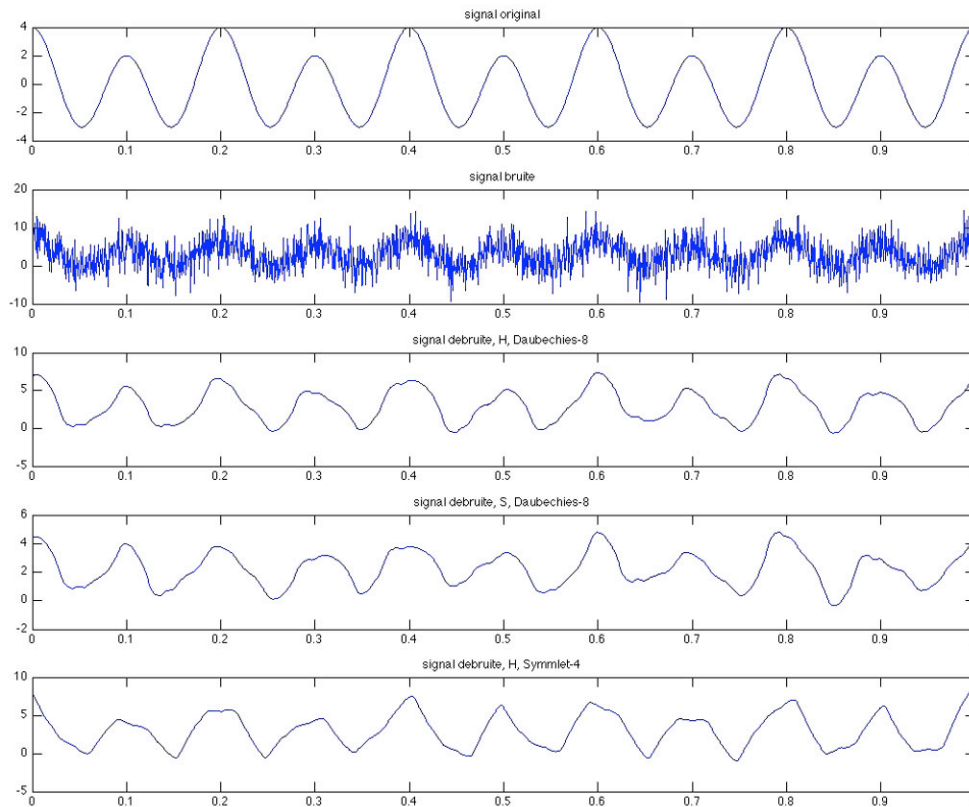


FIGURE 7.23 – Signal débruité avec seuillage « dur » et ondelettes de Daubechies -8 (troisième ligne), avec seuillage « dur » et ondelettes de Daubechies -8 (quatrième ligne), seuillage « fort » et Symlet -4 (cinquième ligne),

Pour plus de détails nous renvoyons à Mallat [12].

## Chapitre 8

# Introduction à l'analyse vocale

Pour ce chapitre nous renvoyons à [9] pour un approfondissement en phonétique et à [5] pour un aperçu plus global des questions de « parole ». Pour le traitement du son musical nous renvoyons à l'ouvrage de P. Guillaume [8] qui fourmille d'exemples en liaison directe avec la musique.

Les différentes analyses et spectrogrammes de ce chapitre ont été réalisés avec PRAAT : <http://www.fon.hum.uva.nl/praat/>.

### 8.1 Caractéristiques physiques et perceptives des sons

Une source sonore crée, dans l'espace, des zones de surpression et de dépression (pression sonore) qui varient dans le temps à la même fréquence et avec la même forme que cette source. Cette modification de pression se déplace à la vitesse de 340 m/s dans l'air.

L'oreille est sensible à la pression sonore, et les caractéristiques perceptives de **hauteur, intensité, timbre** et **durée** sont étroitement liées aux paramètres physiques qui définissent la source sonore, c'est-à-dire respectivement la **fréquence, l'amplitude, la forme** et **le temps** de la vibration.

#### 8.1.1 Sons périodiques simples : hauteur, intensité

##### Hauteur

La **hauteur** des sons dépend de leur **fréquence**. Plus la fréquence est élevée, plus le son paraît **aigu** ; plus elle est basse, plus le son paraît **grave**. La gamme des fréquences audibles se situe entre 16 et 16.000 Hz ; elle est divisée en 10 octaves.





### 8.1.2 Sons périodiques complexes : hauteur, intensité, timbre

Les sons complexes périodiques proviennent de mouvements vibratoires :

1. périodiques : c'est-à-dire possédant une période  $T$  et une fréquence  $f = \frac{1}{T}$  bien définies ;
2. complexes : c'est-à-dire présentant une composition spectrale plus ou moins riche.

#### Hauteur

La hauteur est déterminée par la **fréquence fondamentale** de vibration. La fréquence des **harmoniques** est un multiple entier de la fréquence fondamentale.

#### Intensité

L'intensité est déterminée en première approximation par l'intensité de l'**harmonique la plus intense**.

#### Timbre

Le **timbre** est déterminé par la **densité** relative des harmoniques. Il est qualifié de **clair** si cette répartition est essentiellement située dans les *hautes fréquences* et de **sombre** si elle l'est dans les *basses fréquences*.

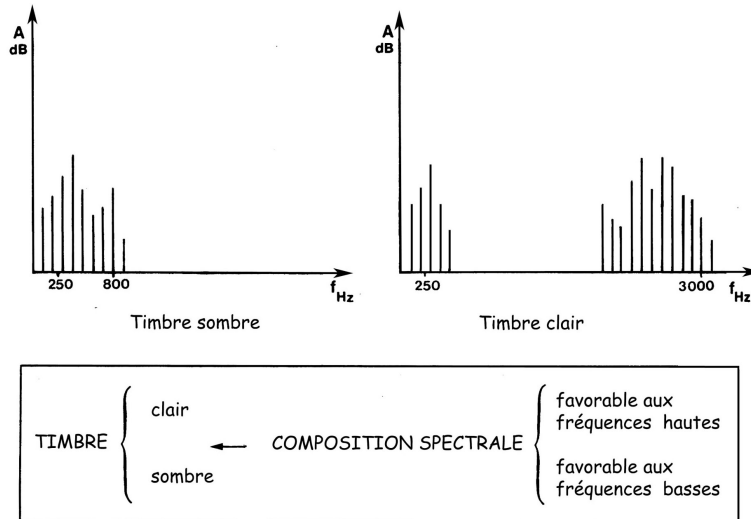


FIGURE 8.3 – Timbre

### 8.1.3 Sons apériodiques

On distingue deux types de sons apériodiques qui sont définis par leur timbre, leur intensité et leur durée :

1. les **bruits impulsionnels**, phénomènes vibratoires apériodiques très brefs : leur timbre dépend de la forme et de la durée de l'impulsion, tandis que leur intensité dépend de l'amplitude et de la durée ;
2. les **bruits continus**, phénomènes vibratoires apériodiques de longue durée ; ils sont définis par leur timbre (répartition spectrale) et leur intensité (amplitude des vibrations). Relativement, le timbre des bruits impulsionnels est plus sombre que celui des bruits continus.

### Résonance acoustique, résonateurs et filtres

Toute cavité est un **résonateur** dont la fréquence propre, naturelle dépend de sa forme et de son volume. Un résonateur est dit sélectif s'il entre en vibration avec une grande amplitude uniquement pour une bande étroite de fréquences autour de sa fréquence naturelle. Il est dit amorti s'il entre en résonance avec une faible amplitude pour une bande large de fréquences autour de sa fréquence naturelle ; sélectivité et amortissement sont donc contradictoires.

Les **filtres** sont des appareillages qui permettent d'isoler des bandes de fréquences. Ils sont principalement définis par :

1. leur **fréquence de coupure**  $f_c$ , c'est-à-dire la limite de fréquence à partir de laquelle ils agissent.
2. leur **pente**, c'est-à-dire la rapidité avec laquelle ils éliminent les fréquences à partir de  $f_c$ .

On rappelle qu'on distingue quatre types de filtres :

- **pas-bas**, qui laissent passer toutes les fréquences inférieures à  $f_{c2}$  ;
- **pas-haut**, qui laissent passer toutes les fréquences supérieures à  $f_{c1}$  ;
- **pas-bande**, qui laissent passer toutes les fréquences comprises entre  $f_{c2}$  et  $f_{c1}$  ;
- **de réjection**, qui laissent passer toutes les fréquences, sauf celles comprises entre  $f_{c2}$  et  $f_{c1}$ .

Tout son complexe traversant une cavité voit son spectre se modifier et mettre en évidence la ou les fréquences de résonance de cette cavité. Elles dépendent uniquement de la forme ou du volume de la cavité. Toute cavité agit donc en quelque sorte comme une combinaison de filtres qui favorisent certaines bandes fréquentielles au détriment d'autres.

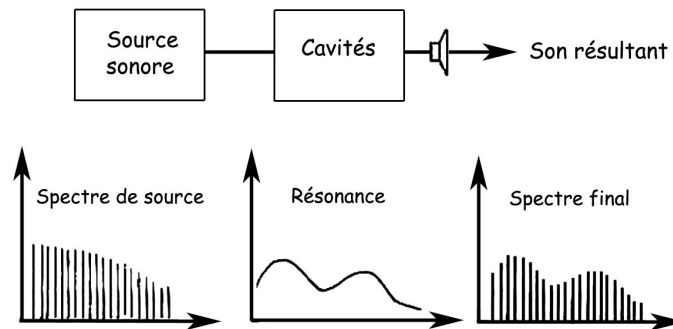


FIGURE 8.4 – Principe du résonateur

### 8.1.4 Résumé des qualités d'un son

#### Intensité (faible ou fort)

dB	
175	Fusée spatiale
140	Avion à réaction au décollage ; seuil de la douleur
130	Mitrailleuse
120	Marteau pneumatique ; avion à hélice au décollage ; tonnerre ; voix dite de grand opéra (à 1m)
110	Atelier de chaudronnerie ; scie mécanique
100	Camion ; train ; métro ; intérieur de voiture bruyante ; moto sans silencieux ; voix dite d'opéra comique
90	Intérieur de métro, d'autobus
80	Rugissement du lion à quelques mètres ; intérieur d'auto ; gare animée
70	Rue très animée ; circulation intense
60	Conversation normale ; magasin
50	Bureau tranquille ; aspirateur
40	Rue calme ; quartier résidentiel la nuit ; voix chuchotée
30	Habitation calme ; jardin ; salle vide de cinéma
20	Bruissement léger
10	Respiration normale ; silence total ; désert
0	Seuil d'audition

TABLE 8.1 – Echelle d'intensité (décibels)

Elle dépend de l'amplitude des vibrations (concerne donc des sons périodiques et apériodiques) .

- Son **faible** : petite amplitude
- Son **fort** : grande amplitude
- **Perception** : de 0 à 140 dB absolus (le dB étant une unite logarithmique de rapport)

### Hauteur (grave ou aigu)

Elle dépend de la fréquence fondamentale, c'est-à-dire du nombre de vibrations par seconde (ne concerne donc que des sons périodiques).

- Son **grave** : fréquence fondamentale basse
- Son **aigu** : fréquence fondamentale élevée
- **Perception** : de 16Hz à 16.000 Hz

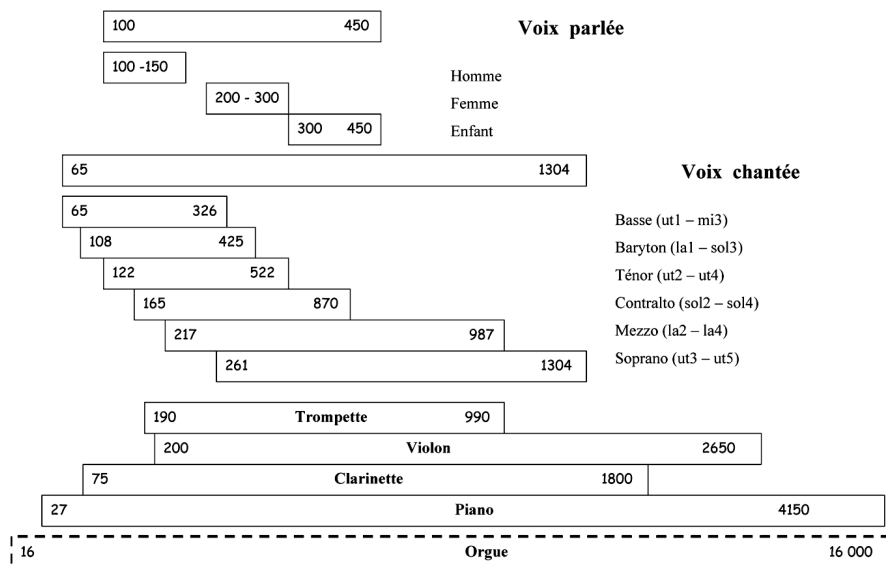


FIGURE 8.5 – Echelle de hauteur (Hertz)

### Timbre (sombre ou clair)

Il dépend du nombre et de l'intensité relative des composantes spectrales. Celles-ci sont discrètes (raies) pour des sons périodiques et continues (enveloppe) pour des sons apériodiques.

- Son **sombre** : répartition spectrale dans les graves
- Son **clair** : répartition spectrale dans les aigus
- **Perception** : globale

**Durée (bref ou long)**

Elle dépend du temps écoulé.

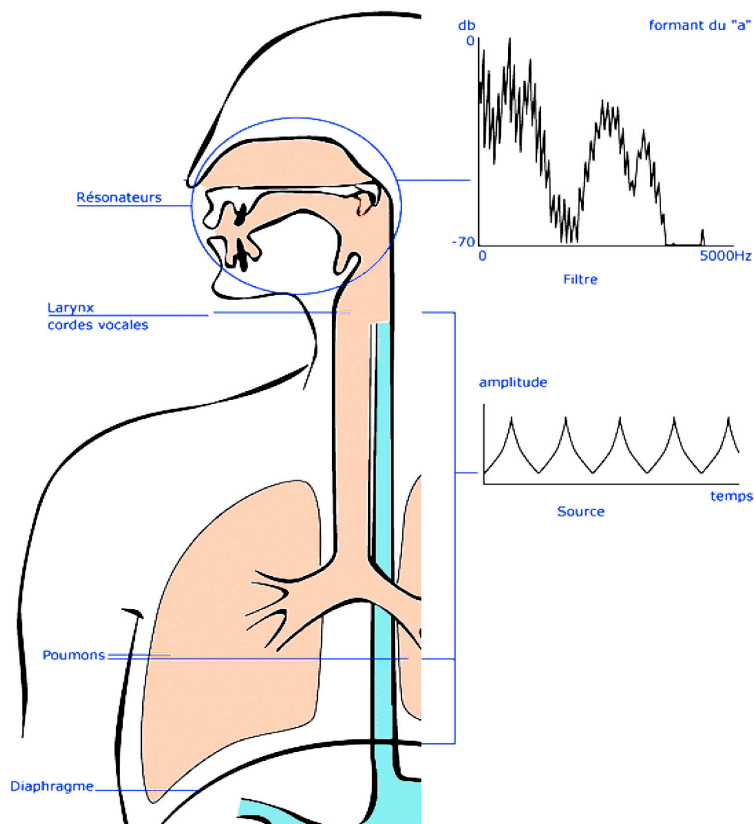
**8.2 Reconnaissance des sons voisés****8.2.1 Sons voisés, non voisés, pitch**

FIGURE 8.6 – Appareil phonatoire

Le mécanisme de la phonation des êtres humains fait intervenir trois types d'organes

- l'appareil respiratoire qui envoie plus ou moins d'air sous pression dans la trachée artère ;

- le larynx, composé notamment des cordes vocales qui modulent la pression et déterminent la hauteur (pitch) de la fréquence fondamentale des sons voisés émis. (De 80 à 200 Hz pour une voix masculine, de 150 à 500 Hz pour une voix féminine). Pendant la respiration, pour la production de voix chuchotée et pendant la phonation des sons non voisés, l'air passe librement par le larynx et les cordes vocales ne vibrent pas ;
- les différentes cavités acoustiques (pharyngienne, buccale et nasale) qui jouent le rôle de résonateurs.

### 8.2.2 Spectrogramme de parole

Nous avons déjà mentionné le rôle de filtre des résonateurs de l'appareil vocal. De ce fait, un modèle simple de la production de la parole en terme de signal est de la forme  $s = e * h$  où  $e$  est une source périodique ou bruitée et  $h$  le filtre de l'appareil vocal. Le spectre utile s'étend de 0 à 8kHz dans le cas de la parole (plus s'il s'agit de voix chantée). Les caractéristiques de la source sont :

- bruit pour les fricatives et les bruits d'explosion
- vibration des cordes vocales pour les sons vocaliques (voyelles en particulier).
- fréquence fondamentale d'environ 150Hz pour un locuteur, 200Hz pour une locutrice

Le calcul du spectrogramme (aussi appelé **sonagramme** dans ce contexte) se fait par Transformée de Fourier Discrète avec fenêtre glissante d'une taille de 4 à 32 ms qui se déplace de la moitié de sa durée. Avec une fréquence d'échantillonnage de 16kHz, cette fenêtre a donc entre 64 et 512 points. Pour lisser le spectre on utilise en fait une technique de « zero padding » (voir chapitre 5). Le signal de départ est complété par des zéros : si on utilise une TFD de 512 points et que la fenêtre a 64 points on complète par (512 - 64) zéros. Si on choisit une fenêtre

- plus courte que la période fondamentale (spectre à large bande) il y a un fort lissage fréquentiel et peu ou pas d'harmoniques
- plus longue (spectre à bande étroite) il y a un faible lissage fréquentiel et visualisation des harmoniques

Pour renforcer la contribution des hautes fréquences on préaccentue le signal avec un filtre simple :

$$u[n] = s[n] - s[n - 1].$$

En passant à la transformée en  $z$  on calcule la fonction de transfert qui est  $1 - z^{-1}$  : l'effet est donc un renforcement de la contribution des hautes fréquences.

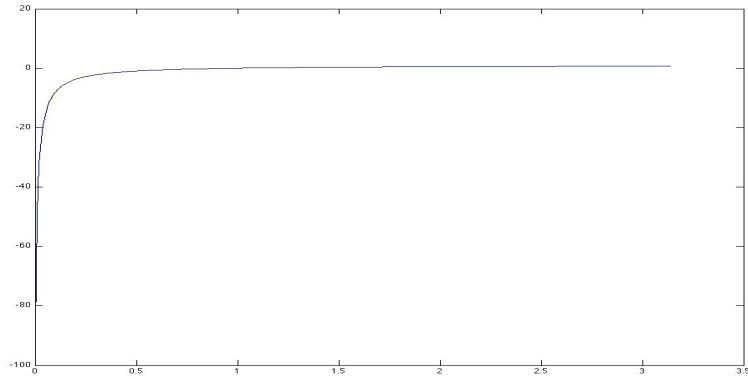
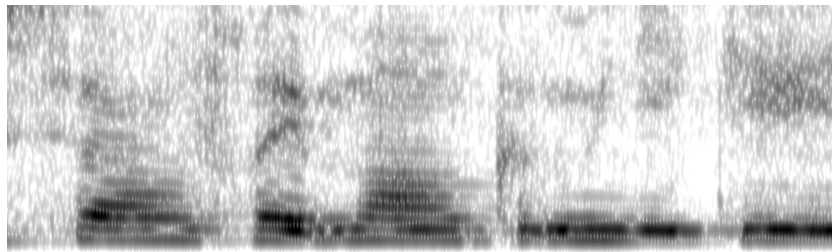
FIGURE 8.7 – Effet de la préaccentuation (dB entre 0 et  $\pi$ )

FIGURE 8.8 – Sonagramme à large bande - taille de la fenêtre : 0.01s



FIGURE 8.9 – Sonagramme à bande étroite - taille de la fenêtre : 0.5s

**Caractérisation spectrographique des sons de la parole** Le timbre des voyelles dépend du nombre, de la forme et du volume des résonateurs traversés par l'air expiré ;

1. Forme du résonateur

- lorsque une partie de l'air passe par les fosses nasales, les voyelles sont dites **nasales**  
français : an, un, hein, on  
portugais : graphèmes ã , õ
- lorsque les lèvres sont projetées vers l'avant, il se crée un espace entre celles-ci et les dents ; cette cavité labiale constitue un troisième résonateur qui modifie le son ; les voyelles produites ainsi sont dites **arrondies**  
français : ou, heu, oh, hue  
allemand : graphèmes ö, ü

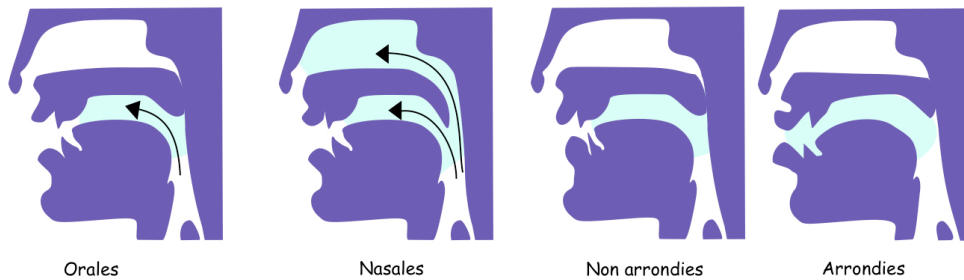


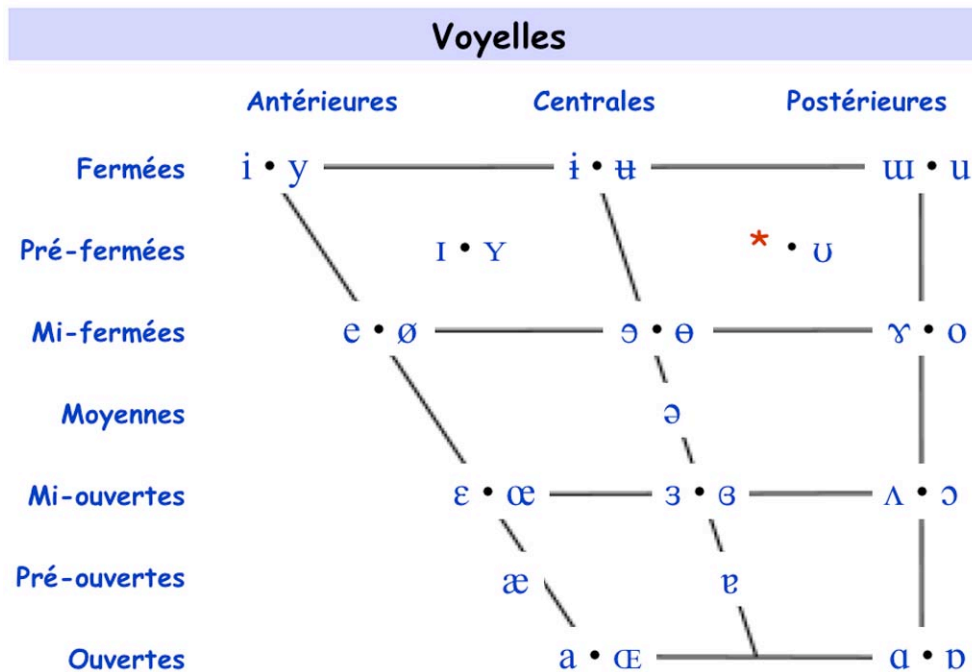
FIGURE 8.10 – Voyelles et résonateur

2. Profondeur du point d'articulation :

- lorsque la partie avant de la langue se rapproche de l'avant du palais, les voyelles sont dites **antérieures**  
français : hé , haie, hue !, ah
- lorsque l'arrière de la langue se rapproche de l'arrière du palais, les voyelles sont dites **postérieures**  
français : oh , hou
- lorsque la partie centrale de la langue se rapproche du palais, les voyelles sont dites **centrales**  
allemand : e atone, par exemple dans Dürre  
portugais : i atone, par exemple dans noite



3. volume du résonateur buccal qui dépend essentiellement du degré d'ouverture de la bouche ; on distingue généralement 4 degrés d'aperture, bien qu'un continu entre l'aperture maximale et l'aperture minimale soit attesté :
- degré 1 : voyelles d'aperture minimale ou fermées (exemple : i)
  - degré 2 : voyelles mi-fermées (exemple : é) ;
  - degré 3 : voyelles mi-ouvertes (exemple : è) ;
  - degré 4 : voyelles d'aperture maximale ou ouvertes (exemple : a).



*Lorsque deux symboles apparaissent par paire, celui de gauche représente une voyelle non arrondie, celui de droite une voyelle arrondie.  
Pour ceux situés au centre, la résonance labiale n'est pas spécifiée.*

FIGURE 8.11 – Système de transcription des voyelles

Les consonnes et les voyelles ont une signature qu'on retrouve sur les spectrogrammes. Les voyelles sont les plus visibles car possédant des **formants** c'est-à-dire des zones d'énergie localement maximale qui les ca-

ractérisent. Les consonnes apparaissent au début de chaque voyelle soit comme une explosion (énergie répartie uniformément sur toutes les fréquences en un temps très court) (/p/ ou /k/), soit un bruit chargeant une large plage de fréquences (/s/,/z/).

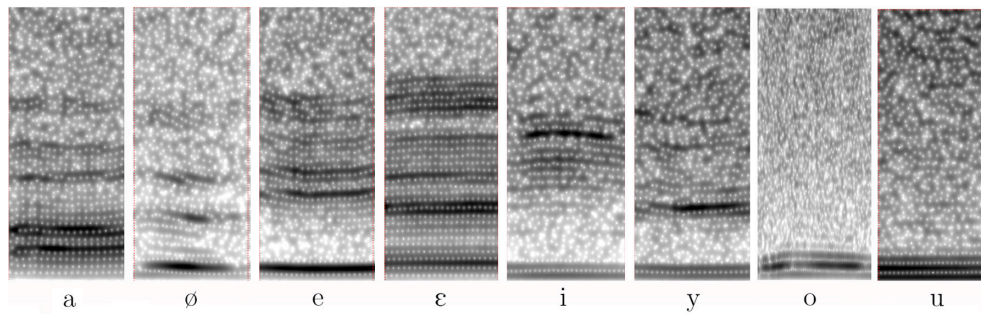


FIGURE 8.12 – Spectrogramme de quelques voyelles : « a e é è i u o ou », /aøɛɛiyou/

Les sons représentés dans la figure ci-dessus durent environ 0.1 s chacun.

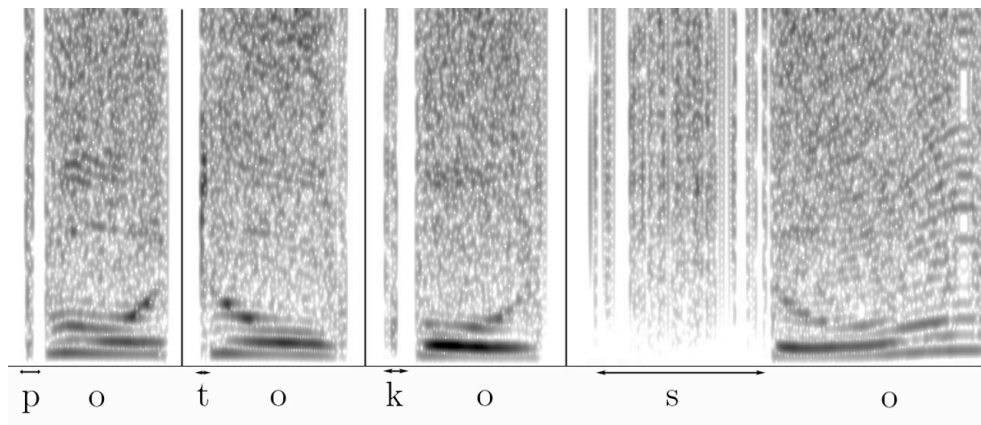


FIGURE 8.13 – Spectrogramme de consonnes : « potokosso », /potokoso/

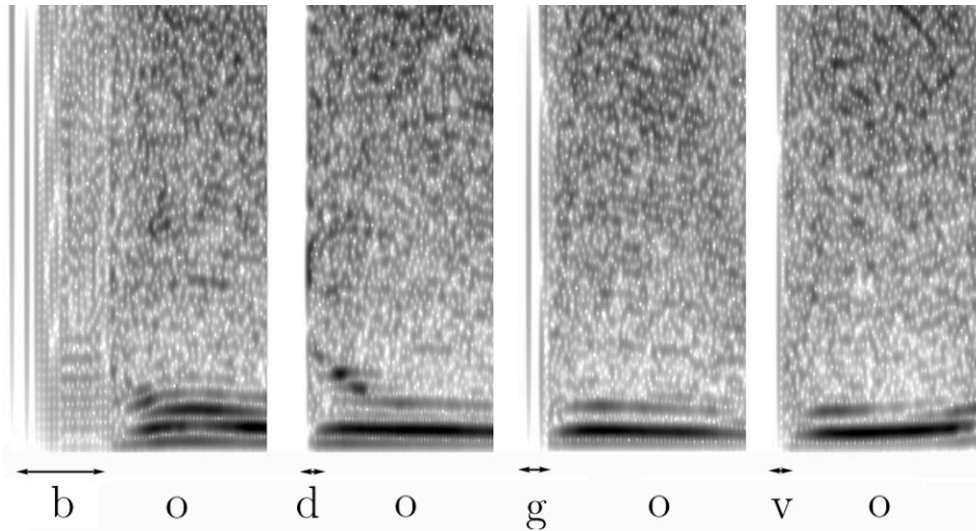


FIGURE 8.14 – Spectrogramme de consonnes : « bodogovo », /bodogovo/

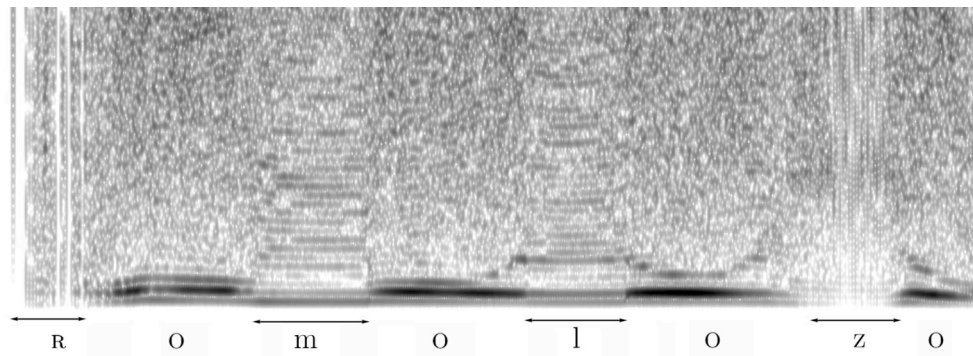


FIGURE 8.15 – Spectrogramme de consonnes : « romolozo », /romolozo/

Les spectrogrammes qui précèdent ont été obtenus avec le logiciel PRAAT, une transformée de Fourier à fenêtre glissante, avec une fenêtre gaussienne de taille 0.05 s.

1. VOYELLES			2. CONSONNES		
i	<i>pire</i>	[piʁ]	p	<i>peau</i>	[po]
y	<i>pur</i>	[pyʁ]	b	<i>beau</i>	[bo]
u	<i>pour</i>	[puʁ]	t	<i>tu</i>	[ty]
e	<i>pré</i>	[pʁe]	d	<i>du</i>	[dy]
ɛ	<i>père</i>	[pɛʁ]	k	<i>car</i>	[kaʁ]
ø	<i>peu</i>	[pø]	g	<i>gare</i>	[gaʁ]
œ	<i>peur</i>	[pœʁ]	f	<i>feu</i>	[fø]
o	<i>peau</i>	[po]	v	<i>veuf</i>	[vœf]
ɔ	<i>port</i>	[pɔʁ]	s	<i>su</i>	[sy]
a	<i>patte</i>	[pat]	z	<i>zut</i>	[zyt]
ɑ	<i>pâte</i>	[pat]	ʃ	<i>vache</i>	[vaʃ]
ə	<i>petite</i>	[pɛtit]	ʒ	<i>sage</i>	[saʒ]
			m	<i>mais</i>	[mɛ]
			n	<i>nu</i>	[ny]
			ɲ	<i>vigne</i>	[viɲ]
ɛ̃	<i>brin</i>	[bʁɛ̃]	l	<i>lu</i>	[ly]
œ̃	<i>brun</i>	[bʁœ̃]	ʁ	<i>rue</i>	[ʁy]
ɔ̃	<i>bon</i>	[bɔ̃]	j	<i>bien</i>	[bjɛ̃]
ɑ̃	<i>banc</i>	[bɑ̃]	ɥ	<i>lui</i>	[lɥi]
			w	<i>oui</i>	[wi]
			ŋ	<i>parking</i>	[paʁkiŋ]

TABLE 8.2 – Liste des symboles phonétiques du français

### 8.2.3 Analyse LPC - Prédiction linéaire

Les fonctions de corrélation sont beaucoup utilisées dans l'analyse du signal de parole et notamment dans certaines techniques de compression du son pour la téléphonie

- LPC (Linear predictive coding)
- MCELP (Modified Code Excited Linear Prédiction)
- GSM (Global System Mobile)

Nous présentons seulement l'analyse LPC (basée sur une régression linéaire).

Comme le signal de parole n'est pas complètement aléatoire, les échantillons successifs sont corrélés. On va utiliser cette corrélation pour réduire la quantité de données. L'échantillon  $s_n$  du signal  $s$  va être représenté par

la somme d'une combinaison linéaire des échantillons précédents et d'une erreur et les coefficients de la combinaison linéaire vont être calculés de façon à minimiser l'erreur. Soient  $S(z)$ ,  $H(z)$  et  $U(z)$  les transformées en  $z$  du signal, du filtre du conduit vocal et de l'excitation. Un modèle pour la fonction de transfert  $H$  est

$$H(z) = \frac{S(z)}{U(z)} = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} .$$

**Calculons les coefficients  $a_k$ .** La prédiction de  $s_n$  est

$$\tilde{s}_n : \sum_{k=1}^p a_k s_{n-k} ,$$

et l'erreur est donc

$$\varepsilon_n = s_n - \tilde{s}_n = s_n - \sum_{k=1}^p a_k s_{n-k} .$$

La fonctionnelle d'énergie associée (minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés) est

$$E = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n^2 = \sum_{n=1}^N (s_n - \tilde{s}_n)^2 ,$$

où  $N$  est le nombre total d'échantillons. En minimisant par rapport aux  $a_k$  on obtient

$$\forall i = 1, \dots, p \quad \frac{\partial E}{\partial a_i} = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\forall i = 1, \dots, p \quad \sum_{n=1}^N s_{n-i} s_n = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^p a_k s_{n-i} s_{n-k} ,$$

ou encore

$$\forall i = 1, \dots, p \quad \sum_{k=0}^p a_k \sum_{n=1}^N s_{n-i} s_{n-k} = 0 ,$$

en posant  $a_0 = -1$ . On rappelle que la fonction d'autocorrélation du signal  $s$  est

$$\varphi_s(i) = \sum_{n=1}^N s_{n-i}s_n, \quad i = 1, \dots, p.$$

On note

$$\Phi(i, k) = \sum_{n=1}^N s_{n-i}s_{n-k} = \varphi_s(i - k),$$

(par prolongement périodique du signal échantillonné) et on obtient

$$\forall i = 1, \dots, p \quad \sum_{k=1}^p a_k \varphi_s(i - k) = \varphi_s(i).$$

finalement

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_s(0) & \varphi_s(-1) & \cdots & \varphi_s(1-p) \\ \varphi_s(1) & \varphi_s(0) & \cdots & \varphi_s(2-p) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_s(p-1) & \varphi_s(p-2) & \cdots & \varphi_s(0) \end{pmatrix}}_{\Phi} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_s(1) \\ \varphi_s(2) \\ \vdots \\ \varphi_s(p) \end{pmatrix}.$$

On obtient donc les coefficients  $a_k$  par résolution du système linéaire ci-dessus. Dans le cas de la prédiction linéaire on utilise la structure Toeplitz de la matrice de covariance  $\Phi$  de façon à résoudre ce système en  $O(p^2)$  opérations.

## 8.3 Exemple

### 8.3.1 Reconnaissance automatique d'un son voisé par corrélation à court terme et calcul de la fréquence fondamentale

En général, un signal vocal présente des caractéristiques statistiques qui sont stationnaires uniquement sur de courtes durées (20 à 30 ms). Ceci explique que les corrélations établies sur ce type de signal sont réalisées à court terme (sur un morceau comportant de 160 à 240 échantillons pour un signal échantillonné à 8 kHz).

La fréquence fondamentale (ou **pitch**) est la fréquence de vibration des cordes vocales. Sa détermination est essentielle pour le codage, la synthèse acoustique de la parole et l'étude de la prosodie. On peut utiliser des méthodes

opérant dans le domaine temporel (autocorrélation, résidu LPC) ou spectral. Nous ne présentons que l'exemple de l'utilisation de la fonction d'autocorrélation.

Pour éviter les formants on filtre d'abord le signal par un passe-bas qui permet de ne conserver que les fréquences inférieures à 1000Hz (par exemple). On effectue le calcul de la fonction d'autocorrélation  $\varphi(n)$  sur un fragment d'une partie voisée et non voisée du message précédent. Les fonctions d'autocorrélation normalisées  $\frac{\varphi(n)}{\varphi(0)}$  des deux parties sont données ci-dessous

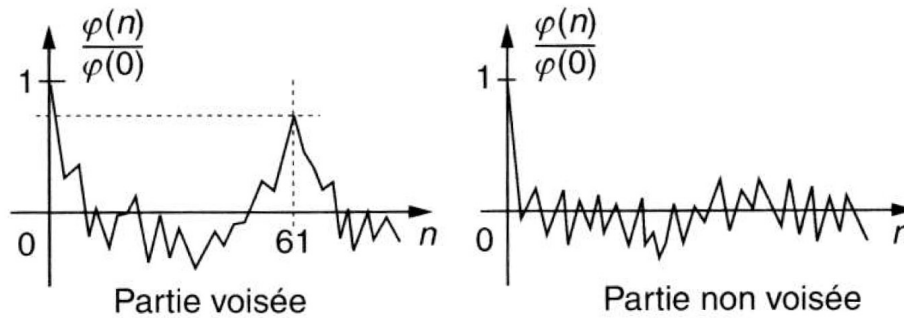


FIGURE 8.16 – Détection d'un son voisé

Le son est considéré comme voisé si le second pic de la fonction d'autocorrélation atteint au moins 40% de la valeur à l'origine. Pour la partie voisée de la figure ci-dessus on relève un second pic à la position  $n = 61$ . La fréquence fondamentale du morceau sonore analysé correspond ainsi à :

$$f_o = \frac{1}{61T_e} = \frac{8000}{61} \approx 131\text{Hz} .$$

Pour un son voisé, si on souhaite être plus précis on sait que le signal est localement périodique et donc sa fonction d'autocorrélation aussi. Il est en général plus facile de « lire » la période (ou la pseudo période) sur la fonction d'autocorrélation. (Voir l'exercice 1 page 251).

### 8.3.2 Les formants

Rappelons que les formants sont des zones d'énergie locale maximale. On les visualise très bien sur un spectrogramme : ils signent les différentes voyelles, mais aussi le timbre (en particulier dans la voix chantée).

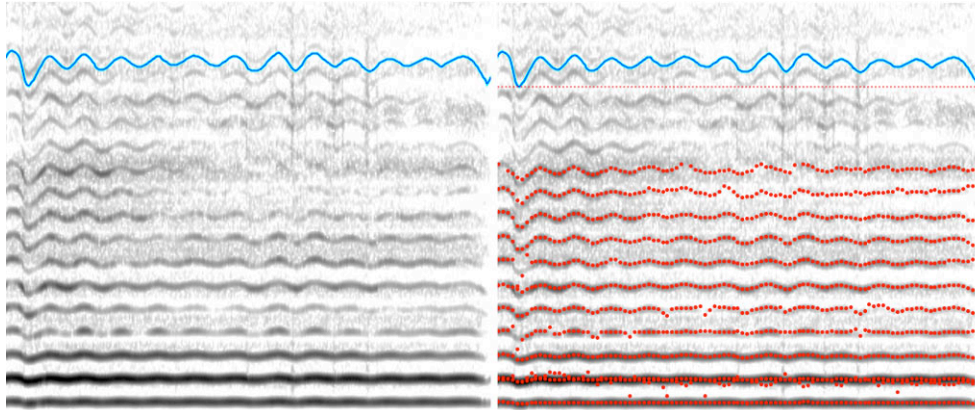
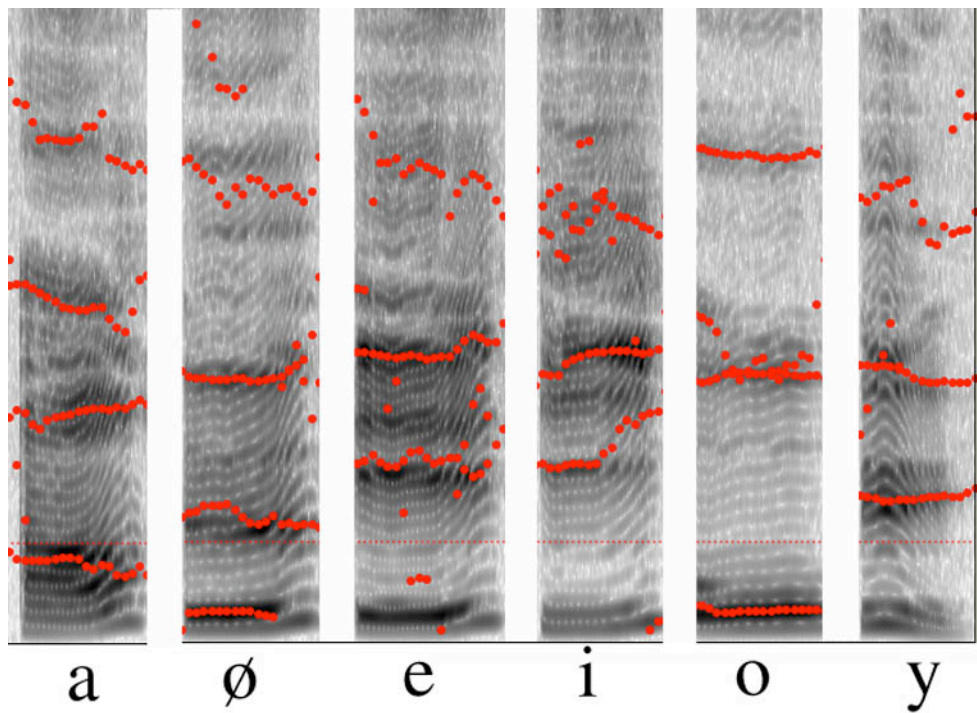
FIGURE 8.17 – Voyelle a chantée ( $f_o = 440$  Hz) - à droite les formants

FIGURE 8.18 – Voyelles « a e é i o u » et leurs formants- Echelle de 0 à 10 khz



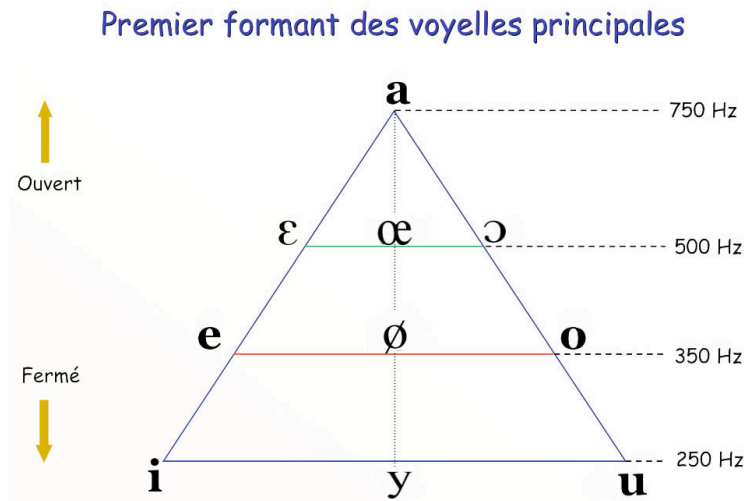


FIGURE 8.19 – Premier formant des voyelles principales du français

Leur détermination peut se faire par calcul des maxima locaux de l'énergie (temporelle ou fréquentielle) en utilisant par exemple l'analyse LPC.



## Chapitre 9

# Exercices et travaux pratiques

### 9.1 Chapitre 2 : analyse spectrale

#### 9.1.1 Exercices

1. Soit  $f$  une fonction périodique de période  $a$  échantillonnée sur  $[0, a]$  par  $N$  échantillons, de sorte que la période d'échantillonnage est  $T_e = \frac{a}{N}$ . On pose

$$y_k = f\left(\frac{ka}{N}\right) = f(kT_e), \quad 0 \leq k \leq N - 1.$$

On appelle  $(Y_k)_{0 \leq k \leq N-1}$  la TFD de la fonction  $f$  échantillonnée :

$$\begin{aligned} Y_p &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \exp(-2i\pi \frac{kp}{N}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_e) \exp(-2i\pi \frac{kp}{N}) \quad \text{pour } p = 0, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Les coefficients de Fourier approchés sont

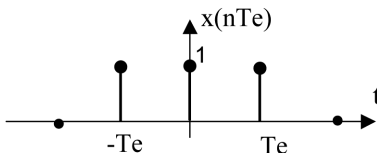
$$C_n = \begin{cases} Y_n & \text{si } 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1, \\ Y_{n+N} & \text{si } -\frac{N}{2} \leq n \leq 0 \end{cases}$$

Montrer que

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{ka}{N}\right) \exp(-2i\pi \frac{kn}{N}),$$

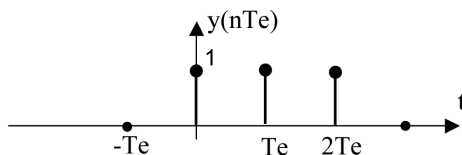
et que cela correspond à une intégration approchée du coefficient de Fourier exact  $c_n$  par une méthode des rectangles à gauche.

2. (a) Calculer la transformée de Fourier discrète de ce signal



Calculer et tracer le module et la phase du spectre de  $x(nT_e)$ .

- (b) Calculer la transformée de Fourier discrète du signal  $y(nT_e)$ .



- (c) Sachant qu'un signal retardé temporellement d'un temps  $t_o$  se traduit sur le spectre  $Y(f)$  par un ajout de phase  $\Phi_o = -2\pi \cdot f \cdot t_o$ , comparer alors  $Y(f)$  et  $X(f)$ .

3. Calculer les coefficients de la série de Fourier et ceux de la TFD pour de la fonctions

$$u(x) = 1 - |x| \text{ sur } [-1, 1], \text{ puis périodisée.}$$

Représenter sur un même graphique la somme partielle de Fourier et la TDF. Que remarquez- vous ?

4. Soit  $f$  un signal défini sur  $\mathbb{R}$  dont la transformée de Fourier est  $\hat{f}$  définie par

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |\omega| > 1 \end{cases}$$

Que peut-on dire de  $f$  ?

- (a) Calculer  $f$  et donner une allure de son graphe.  
 (b) Calculer l'énergie totale de  $f$ .

- (c) On suppose que  $f$  est échantillonnée aux instants  $na$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) et on appelle  $g$  le signal échantillonné. Donner la valeur de  $\hat{g}$  en fonction de  $\hat{f}$ . Donner une allure du graphe de  $\hat{g}$  quand  $a = 1$ .

5. **Transformation de Laplace** .- Dans tout ce qui suit la transformée de Fourier d'une fonction  $v$  est définie par

$$\mathcal{F}(v)(\omega) = \hat{v}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} v(s)e^{-2i\pi\omega s} ds$$

et on désigne par

$$\mathcal{E} = \{ f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}, \mathcal{C}^o \text{ par morceaux et : } \\ \exists K \in \mathbb{R}^+, \exists \alpha \in \mathbb{R} \ |f(t)| \leq K e^{\alpha t}, 0 \leq t < +\infty \} .$$

On convient de prolonger toutes les fonctions de  $\mathcal{E}$  par 0 sur  $] -\infty, 0[$ . On définit la *Transformée de Laplace* d'une fonction  $f$  de  $\mathcal{E}$  par :

$$\xi \mapsto \tilde{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\xi t} dt .$$

- (a) Sur quel sous-ensemble de  $\mathbb{C}$ , la transformée de Laplace de  $f$  est-elle définie ?
- (b) Pour chacune des fonctions suivantes  $f$ , calculer sa transformée de Laplace et son ensemble de définition :

i.  $f(t) = e^{\beta t}$ , avec  $\beta \in \mathbb{C}$

ii.  $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

- iii.  $f_n(t) = t^n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . On commencera par montrer que pour tout  $s$  tel que  $\text{Re}(s) > 0$ , on a

$$\tilde{f}_n(s) = \frac{n}{s} \tilde{f}_{n-1}(s) ,$$

et on conclura par récurrence.

iv.  $f(t) = \cos(\omega t)$  avec  $\omega \in \mathbb{R}$ .

(c) **Lien avec la transformée de Fourier** .- Montrer que si on pose

$$g_{s_o}(t) = f(t)e^{-s_o t} \text{ si } t \geq 0, \text{ et } 0 \text{ sinon,}$$

où  $s_o > 0$  est un paramètre réel on a

$$\tilde{f}(s_o + i\omega) = \mathcal{F}(g_{s_o})(\omega). \quad (9.1.1)$$

(d) Grâce (9.1.1), montrer que si  $f$  a un retard de  $\tau$  :  $g(t) = f(t - \tau)$ , alors

$$\tilde{g}(\xi) = e^{-\xi\tau} \tilde{f}(\xi).$$

### 9.1.2 Travaux pratiques

1. Pour chacun des signaux (périodiques) suivants, faire un programme qui calcule sa série de Fourier tronquée à l'ordre  $n$ . Dessiner sur une même figure le signal  $f$  et la série. On testera plusieurs valeurs de  $n$  :

$$(a) f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} \text{ sur } [-\pi, \pi].$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0, \pi[ \\ -1 & \text{sur } [-\pi, 0[ \end{cases}. \text{ La série est : } \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}.$$

2. Dessiner un signal triangulaire. Faire un programme calculant la série de Fourier.
3. Dessiner le signal de votre choix (comme somme de sinusoides par exemple) et le brouter avec la fonction `randn` de MATLAB<sup>®</sup> ou `rand` de SCILAB<sup>®</sup>.
4. Faire un programme `coeffcos` ( $F, a, T, n$ ) calculant le coefficient de fourier

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(2\pi n \frac{t}{T}) dt,$$

par une formule de quadrature composée de type trapèzes de la forme

$$\frac{1}{k} \left( f(a) \cos\left(2\pi n \frac{a}{T}\right) + f(a+T) \cos\left(2\pi n \frac{a+T}{T}\right) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} F_j \cos\left(2\pi n \frac{t_j}{T}\right) \right)$$

où  $F$  désigne le vecteur  $(f(t_j))_{j=1,k}$  et  $t_j = a + \frac{jT}{k}$  et  $k$  le nombre de sous-intervalles de  $[a, a + T]$ . Faire de même pour le coefficient

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(2\pi n \frac{t}{T}) dt .$$

5. Avec les programmes précédents écrire la série de Fourier à l'ordre  $n$  de la fonction périodique de votre choix sous forme réelle (avec  $a_n$  et  $b_n$ ) puis sous forme exponentielle avec  $c_n = a_n + i b_n$  et  $c_{-n} = a_n - i b_n$ . Dessiner le spectre d'amplitude et le spectre de phase.
6. Pour des signaux de votre choix (Somme de sinusoides, créneau, etc.) dessiner le spectre du signal (diagramme d'amplitude). Comparer le signal temporel (original) et le signal fréquentiel (TFD)
7. Construire le signal

$$f : x \mapsto f(x) = 30 \sin(2\pi \lambda t + 0.3\pi) ,$$

où  $\lambda$  est une fréquence choisie (par exemple 9 Hz), avec un nombre d'échantillons  $N = 200$  sur un intervalle de temps  $a = 2s$  ( la fréquence d'échantillonnage est donc  $F_e = (N/a) = 100 \text{ Hz}$ ).

Tracer  $f$  et calculer sa TFD avec la commande FFT de SCILAB<sup>©</sup>. (Ne pas oublier de normaliser la TFD en divisant par  $N$  pour corriger l'amplitude).

Tracer le module de la fonction obtenue ? Que remarque t'on ? Comment expliquer et corriger ce phénomène ?

8. **Efficacité de la FFT.**- On rappelle que la TFD d'un signal  $f$  échantillonné à une période  $T_e$  (pas de discrétisation) est

$$\forall k = 1, \dots, N \quad S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_e) \exp(-2\pi i n \frac{k}{N}) .$$

On note  $N$  le nombre d'échantillons,  $T_e$  la période d'échantillonnage et  $F_e$  la fréquence d'échantillonnage.

Faire un programme calculant directement  $(S(k))_{0 \leq k \leq N-1}$ .

Calculer ensuite la TFD par la commande FFT de SCILAB<sup>©</sup>.

Comparer les temps de calcul (fonction `timer()`).

Valider sur le signal suivant :  $f : t \mapsto f(t) = A \exp(-2\pi i \lambda t)$ . On peut

montrer que la TFD de  $f$  est de la forme

$$S(k) = A \frac{\sin\left(\pi N \left(\frac{k}{N} - \frac{\lambda}{F_e}\right)\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{k}{N} - \frac{\lambda}{F_e}\right)\right)} \exp\left(i\pi(N-1) \left(\frac{k}{N} - \frac{\lambda}{F_e}\right)\right).$$

Prendre ensuite les signaux de votre choix.

9. Pour des signaux de votre choix (somme de sinusoides, créneau, etc ...) dessiner le spectre du signal (diagramme d'amplitude). Comparer le signal temporel (original) et le signal fréquentiel (TFD)
10. **Phénomène de Gibbs.**- Construire un signal représentant la fonction de Heaviside échantillonnée à un pas  $T$  sur un intervalle  $[-a, a]$ . Prendre sa FFT et ne conserver que les coefficients de Fourier dont la fréquence est entre  $-\lambda_o$  et  $\lambda_o$  avec  $0 < \lambda_o < \pi/T$ . Par exemple on pourra choisir une fréquence d'échantillonnage ( $1/T$ ) autour de 14000 Hz et une fréquence de coupure  $\lambda_o$  autour de 650 Hz. Reconstruire la fonction de Heaviside en appliquant la FFT inverse au signal tronqué : on doit observer des oscillations de Gibbs. Faire varier la fréquence de coupure  $\lambda_o$  et commenter son influence sur l'amplitude et la fréquence des oscillations.
11. **Effet du fenêtrage.**- Le fait d'observer un signal pendant un temps fini et de n'acquérir qu'un nombre fini d'échantillons introduit une erreur. On considère le signal monochromatique :

$$f : t \mapsto f(t) = A \exp(-2\pi i \lambda t).$$

Calculer la TFD de  $f$  avec un échantillonnage :  $N = 2^p$ ,  $5 \leq p \leq 8$  et comparer les résultats obtenus avec la transformée de Fourier « exacte » (une seule fréquence :  $\lambda$ ).

12. On considère le signal

$$f : x \mapsto f(x) = e^{-|x|} \cos(\pi x),$$

dont la transformée de Fourier est

$$\hat{f} : s \mapsto \hat{f}(s) = \frac{1}{4\pi^2 (s^2 - s) + \pi^2 + 1} + \frac{1}{4\pi^2 (s^2 + s) + \pi^2 + 1}.$$

Tracer les fonctions  $f$  et  $\hat{f}$ . On considère le signal  $f$  sur l'intervalle  $[-6, +6]$ . Calculer sa FFT et comparer avec ce qui précède.



**13. Analyse d'un signal audio**

Charger le vecteur représentant le son d'un instrument échantillonné à 8000 Hz avec la commande SCILAB<sup>©</sup> : `loadwave`

- (a) Quelle est la durée de ce signal ? On la note  $T$
- (b) Représenter sur la même fenêtre graphique le signal sur 1 s, 0.5 s, 0.1 s et 0.05 s.  
Est-ce un signal périodique simple ? complexe ? Est-ce un signal apériodique.
- (c) Faire la FFT du signal sur 0.1 s sur 256, 512 et 1024 points successivement.
- (d) Quelle est la fréquence fondamentale du signal ? On pourra se contenter d'afficher la tranche de fréquences  $[50, 1000]$ .

14. Tester la commande `analpf` de SCILAB<sup>©</sup>

**9.2 Chapitre 3 : corrélation des signaux****9.2.1 Exercices**

1. Calculer la fonction d'intercorrélation  $\varphi_{f,g}$  des deux fonctions exponentielles  $f$  et  $g$  avec  $f(t) = Y(t)e^{-at}$  et  $g(t) = Y(t)e^{-bt}$ ,  $a$  et  $b$  réels positifs où  $Y$  est la fonction de Heaviside définie par  $Y(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ .
  - (a) Comparer  $\varphi_{f,g}$  et  $\varphi_{g,f}$
  - (b) En déduire la fonction d'autocorrélation de  $f$  et l'énergie de  $f$ .
2. Soit la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Tracer le graphe de  $g$  et exprimer  $g$  au moyen des fonctions  $g_1$  et  $g_2$  définies par

$$g_1(t) = P_1\left(t - \frac{1}{2}\right) \text{ et } g_2(t) = P_1\left(t - \frac{3}{2}\right),$$

$$\text{où } P_a(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]}(t).$$

- (b) Exprimer la fonction d'autocorrélation  $\varphi_{g_2-g_1}$  de  $g_2 - g_1$  au moyen des fonctions d'autocorrélation  $\varphi_{g_1}$  et  $\varphi_{g_2}$  de  $g_1$  et  $g_2$  et des fonctions d'intercorrélations  $\varphi_{g_1, g_2}$  et  $\varphi_{g_2, g_1}$ .
- (c) Comparer  $\varphi_{g_1, g_2}$  et  $\varphi_{g_2, g_1}$ .
- (d) Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles dans  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Comparer la fonction d'autocorrélation de la fonction  $t \mapsto f(t-a)$  ( $a \in \mathbb{R}$  donné) à celle de  $f$ .
- (e) En admettant que la fonction d'autocorrélation de la fonction  $P_1$  est la fonction  $\Delta_1$  définie par  $\Delta_1(t) = (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ , calculer la fonction d'autocorrélation  $\varphi_g$ .
- (f) En admettant que  $P_1 * P_1 = \Delta_1$  où  $\Delta_1$  est la fonction définie par :  $\Delta_1(t) = (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ , calculer la fonction d'autocorrélation  $\varphi_g$ .
3. Soit la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Tracer le graphe de  $g$ . Calculer la fonction d'autocorrélation  $\varphi_g$ . En déduire le produit de convolution  $g * g$ .
- (b) Calculer la transformée de Fourier de  $g$  après avoir écrit  $g$  à l'aide d'une fonction porte et d'une fonction triangle :

$$g(t) = \mathbf{1}_{[-1,+1]}(t) - (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,+1]}(t)$$

4. **Intercorrélation et énergie.** - On considère un signal  $x$  de transformée de Fourier  $X$  définie par

$$X(\omega) = A \mathbf{1}_{[-B,B]}(\omega)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes positives.

- (a) Déterminer le signal  $x$ .
- (b) Déterminer  $A$  pour que l'énergie du signal  $x$  soit égale à 1. On prendra cette valeur dans la suite.
- (c) On pose  $y = x'$ . Calculer la transformée de Fourier du signal  $y$ .
- (d) Calculer l'énergie de  $y$ .
- (e) Calculer la transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélations  $\varphi_{yx}(\tau)$  de  $x$  et  $y$ . En déduire  $\varphi_{yx}(0)$ .

5. **Mesure du retard par l'intercorrélation.**- On considère les signaux à temps continu définis par :

$$x : t \mapsto x(t) = A_1 \text{sinc}[B_1(t-t_1)], \quad y : t \mapsto y(t) = A_2 \text{sinc}[B_2(t-t_2)]$$

où sinc est la fonction sinus-cardinal.

- Calculer les transformées de Fourier  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  des signaux  $x$  et  $y$ .
  - Calculer les densités spectrales de puissance  $\hat{\varphi}_x$  et  $\hat{\varphi}_y$ .
  - Calculer la fonction d'intercorrélation  $\varphi_{xy}$ .
  - Déterminer l'abscisse du maximum de  $\varphi_{xy}$  et en déduire une méthode pour mesurer le retard  $t_1 - t_2$  entre les signaux  $x$  et  $y$ .
6. On considère le signal gaussien  $f : t \mapsto f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ .

- Sachant que  $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ , calculer l'énergie de ce signal.
- Calculer la transformée de Fourier de  $f$ . En déduire le spectre d'amplitude, le spectre de phase et la densité spectrale d'énergie du signal  $f$ .
- Montrer que, pour un signal  $g$  réel et pair, la fonction d'autocorrélation  $\varphi_g$  est le produit de convolution  $g * g$ .
- Déduire de ce qui précède la fonction d'autocorrélation  $\varphi_f$  du signal gaussien, puis retrouver le résultat de la question 1).

7. **Détection d'un numéro de téléphone.**

Chaque touche d'un téléphone A produit un signal échantillonné de forme carrée et de fréquence propre  $f_i$ , où  $i$  est le numéro de la touche pressée. La figure ci-dessous illustre un exemple de signal produit :

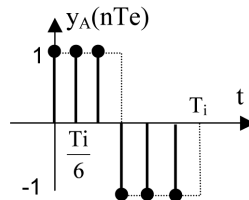


FIGURE 9.1 – Touche  $i$

A l'arrivée, un serveur récupère ce signal et doit l'aiguiller vers le poste de téléphone appelé. Pour cela, le serveur dispose des signaux correspondant à chaque type de touche ( $y_s(nT_e)$ ). L'objectif est de détecter le numéro composé par le téléphone A.

- Que vaut la période d'échantillonnage  $T_e$  ?
- Calculer la fonction d'intercorrrelation échantillonnée  $C_{xy}(p)$  entre les signaux  $y_A(nT_e)$  et  $y_s(nT_e)$ , donné ci-dessous. On prendra  $N=6$  et  $0 \leq p \leq 5$ .

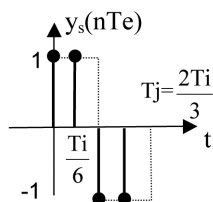


FIGURE 9.2 – Touche  $j$

On rappelle que la fonction d'inter-corrélation de signaux discrets est :

$$C_{xy}(p) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) \cdot y((k-p)T_e).$$

- Quelle est la valeur du maximum de  $C_{xy}(p)$  ?
- Calculer  $C_{xy}(p)$  dans le cas où le serveur compare les signaux d'une même touche.
- Concluez sur le rôle ici du calcul de l'intercorrrelation.

### 9.2.2 Travaux pratiques

- Tester le fonction `corr` de SCILAB<sup>©</sup> sur des signaux de votre choix.
- Programmer un bruit blanc et vérifier que le signal étant corrélé avec lui-même, il y a donc toujours une impulsion en 0 mais uniquement en 0.
- Bruiter un signal sinusoidal par un bruit blanc gaussien de plus en plus fort. Comparer les fonctions d'autocorrélation obtenues.
- Détection d'un signal périodique dans du bruit**

- générer numériquement le signal sinusoïdal et ajouter une composante aléatoire

$$x_k = \sin\left(2\pi \frac{k}{64}\right) + A \text{aléa}(k),$$

- $A$  est un terme d'amplitude
- le signal sinus comporte 64 points par période et sa valeur efficace vaut  $1/\sqrt{2}$
- la fonction  $\text{aléa}(k)$  génère pour chaque indice  $k$  et avec une probabilité équivalente une valeur aléatoire réelle comprise entre -1 et 1. La valeur efficace de cette fonction vaut  $1/\sqrt{3}$
- la puissance du signal  $x_k$  vaut  $(1/2) + (A^2/3)$
- calculer puis visualiser la fonction d'autocorrélation du signal composite.  
Tester avec des signaux présentant différents rapport signal sur bruit. Le rapport signal sur bruit est défini par  $(x_{eff}/b_{eff})$  où  $x_{eff}$  et  $b_{eff}$  sont les valeurs efficaces du signal  $x$  et du bruit  $b$  respectivement.

5. **Etude de deux signaux « réels ».** - Charger deux signaux réels correspondants à un enregistrement d'ECG (électrocardiogramme) et un enregistrement d'onde sismique.

#### **Autocorrélation**

- Quelle est la périodicité principale du signal « ecg » ?
- Même question pour le signal « sig2 ».
- Isoler les 1000 derniers points du signal sismique « sig2 ». Ils constituent le bruit de fond également appelé bruit blanc. Que donne la fonction d'autocorrélation sur cette partie du signal ?

#### **Spectre de puissance d'un signal**

- Construire un axe des temps pour le signal « ecg ». Tracer le graphique de « ecg » en fonction du temps.
- Calculer le spectre de puissance de « ecg ». Quelle(s) périodicité(s) détectez-vous ?
- Le résultat correspond-il à ce que vous a donné la fonction d'autocorrélation ?
- Calculer le spectre de puissance du signal sismique « sig2 ». Quelle périodicité principale détecte-t-on ?
- Comparer ce résultat avec celui obtenu par la fonction d'auto-corrélation.
- Que penser du spectre de puissance à partir de 50Hz et plus ?

## 9.3 Chapitre 4 : filtrage

### 9.3.1 Exercices

1. Pour les exemples de l'amplificateur, de la ligne à retard et du dérivateur p.84. Préciser à chaque fois la fonction de transfert du filtre.
2. **La cellule RC** - Réponse d'un système linéaire invariant à un signal périodique.  
Considérons le circuit RC (de la figure 4.3 p.83) suivant :  $s(t)$  et  $e(t)$  sont liés par l'équation différentielle

$$RC s'(t) + s(t) = e(t); \quad (9.3.2)$$

- (a) On effectue le changement de variable :  $s(t) = w(t)e^{-\frac{t}{RC}}$ .
  - i. Quelle est l'équation vérifiée par  $w$  ?
  - ii. On suppose que les signaux d'entrée  $e$  sont tels que le second membre est intégrable sur  $] -\infty, t]$ . Résoudre l'équation différentielle. On suppose que la réponse (sortie)  $s$  à une entrée nulle est nulle.
  - iii. Montrer que la réponse du système à l'entrée  $e$  est de la forme  $s(t) = \mathcal{A}e(t)$ . Déterminer  $\mathcal{A}$  et montrer qu'il est linéaire, causal et invariant.
  - iv. Montrer que  $\mathcal{A}$  est continu pour la norme de la convergence uniforme.
  - v. La cellule RC est-elle un filtre ?
  - vi. Soit

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t),$$

où  $u$  est la fonction de Heaviside. Montrer que  $\mathcal{A}e = h * e$ , où  $*$  désigne la convolution.

- (b) Après une période transitoire, d'un temps relativement court, la cellule RC entre en régime permanent et se comporte alors comme un système linéaire invariant. Soit  $e(t)$  un signal monochromatique et d'après l'exercice précédent, on sait que  $s(t) = H(\lambda) e(t)$ .
  - i. En reportant cette équation dans l'équation (9.3.2), déterminer la fonction de transfert  $H(\lambda)$ .

- ii. Calculer le module de  $H(\lambda)$  et la limite du module quand  $\lambda$  tend vers  $+\infty$

3. **Filtre discret du premier ordre.**- On considère le filtre donné par

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad y_k = ay_{k-1} + x_k \quad (a \neq 0). \quad (9.3.3)$$

- (a) En effectuant le changement de variable  $y_k = a^{-k}v_k$ , montrer que l'équation (9.3.3) se transforme en

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad v_k - v_{k-1} = a^{-k}x_k. \quad (9.3.4)$$

En déduire

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad v_k - v_{k-p} = \sum_{\ell=k-p+1}^k a^{-\ell}x_\ell. \quad (9.3.5)$$

- (b) On pose

$$X = \{(x_k)_k \in \mathbb{Z} \mid \text{la série } \sum_{n=-\infty}^0 a^{-n}x_n \text{ est absolument convergente}\}.$$

Montrer que la suite  $(v_k)_{k \leq 0}$  est de Cauchy.

On note  $b$  sa limite lorsque  $k \rightarrow -\infty$ . En déduire (avec (9.3.5)) que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad v_k = b + \sum_{\ell=-\infty}^k a^{-\ell}x_\ell, \text{ et}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad y_k = ba^k + \sum_{n=-\infty}^k a^{k-n}x_n. \quad (9.3.6)$$

- (c) Réciproquement : montrer que toute solution de la forme (9.3.6) est solution de (9.3.3);
- (d) On suppose que la réponse à l'entrée nulle est nulle. Combien vaut  $b$  ?

Montrer que si on pose  $h_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ a^n & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$ , la sortie  $(y_k)$  se met sous la forme

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{k-n}x_n,$$

ce qu'on donne  $y = h \star x$ , appelée *convolution discrète* des signaux.

Montrer que le système est linéaire, invariant et réalisable.

Montrer que si  $|a| < 1$ , le système est continu pour la norme uniforme et

$$\|y\|_{\infty} \leq \|h\|_1 \|x\|_{\infty}.$$

- (e) On choisit une entrée exponentielle :  $x = (z^k)$  où  $z$  est un nombre complexe fixé vérifiant  $|z| > |a|$ .

Montrer que

$$y_k = a^k \sum_{n=-\infty}^k \left(\frac{z}{a}\right)^n = \frac{z}{z-a} x_k.$$

Que vaut la fonction de transfert du filtre considéré ?

4. On considère le filtre du second ordre dont la fonction de transfert est donnée par :

$$H(\omega) = H_o(i\omega) \text{ et } H_o(z) = A \frac{\omega_o^2}{z^2 + z \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2},$$

où  $A$  est un réel positif,  $\omega_o > 0$  est la fréquence caractéristique et  $Q > 0$  est appelé le coefficient de surtension.

- (a) Calculer le module de  $H(\omega)$  ( $\omega \in \mathbb{R}$ ).

On pose dans la suite  $\lambda = \frac{\omega}{\omega_o}$ ,  $F_Q(\lambda) = |H(\omega)|$  et on se restreint à  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

Quel est l'effet de ce filtre ?

- (b) Donner l'expression de  $F_Q$  et faire l'étude de  $F_Q$  sur  $\mathbb{R}^+$  en discutant suivant les valeurs de  $Q$ . Montrer que cette fonction présente un maximum si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Calculer  $F_Q(1)$  (qui correspond à  $\omega = \omega_o$ ).

- (c) Calculer la valeur  $F_{Q,max} = F_Q(\lambda_{max})$  de la valeur maximale lorsque  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Montrer  $F_{Q,max} \simeq QA$ , lorsque  $Q$  est très grand. C'est la raison pour laquelle  $Q$  est appelé coefficient de surtension.

- (d) Donner l'allure de la courbe de  $F_Q$  sur  $\mathbb{R}^+$ , dans les cas

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad Q < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } Q = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



On tracera les trois courbes sur une même figure. On notera le gain

$$G(\lambda) = 20 \log(F_Q(\lambda)).$$

(e) Quand  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , le filtre est un filtre de **Butterworth**. Quelle est la diminution du gain correspondant à la fréquence caractéristique ? ( $\omega = \omega_o$ ).

(f) Lorsque  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , le filtre est un filtre de **Tchebychev**.

Pour quelle valeur de  $Q$  la différence entre la valeur maximale du gain  $G(\lambda_{max})$  et la valeur  $G(0)$  est-elle d'environ 0.5 dB ? Pour quelle valeur de  $\lambda_1$  a t'on de nouveau  $G(\lambda_1) = G(0)$ . Calculer la fréquence correspondante  $\omega_1$  en fonction de  $\omega_o$ .

5. Un système linéaire du premier ordre est caractérisé par une équation différentielle du premier ordre liant les signaux d'entrée  $e$  et de sortie  $s$  :

$$(E) \quad \forall t \in ]0, +\infty[, as'(t) + bs(t) = e(t), \text{ où } a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Expliciter le signal de sortie  $s$  correspondant à un état initial  $\alpha$ ,  $s(0^+) = \alpha$ . Montrer que, pour  $\alpha = 0$ , c'est le produit de convolution de l'entrée  $e$  par une fonction  $h$  à déterminer.

(b) On suppose maintenant que le signal d'entrée est la fonction échelon  $Y$ . Calculer la sortie correspondante  $s$  sachant que  $s(0^+) = 0$ . La fonction  $s$  est-elle dérivable sur  $\mathbb{R}$ , sur  $\mathbb{R}^*$  ?

6. On considère le filtre du second ordre défini par l'équation :

$$-\frac{1}{\omega^2}g'' + g = f$$

où  $f$  est l'entrée et  $g$  la sortie.

(a) Donner l'expression de la fonction de transfert  $H$ .

(b) Calculer la réponse impulsionnelle  $h$ .

(c) Donner les expressions de la sortie  $g$  associée à l'entrée  $f$  et de la réponse indicielle  $h_1$ .

7. **Filtrage d'un bruit blanc** .- Soit  $e_k$  un signal réel dont la fonction d'autocorrélation vérifie  $\varphi_e(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$  où  $\delta(\tau)$  désigne la distribution de Dirac. On considère le filtre à temps continu défini par :

$$s(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t - \theta) d\theta$$

- Ecrire  $s(t)$  sous forme d'une convolution en faisant intervenir une fonction porte et en déduire la réponse impulsionnelle  $h$  du filtre ainsi défini.
- On désigne par  $H$  la transformée de Fourier de  $h$ . Calculer la densité spectrale du signal  $s$ .
- Calculer l'énergie du signal  $s$ .
- On fait passer le signal  $s$  dans un filtre linéaire de réponse en fréquences  $\tilde{H}(\omega) = \frac{\omega}{2B}$  et on désigne par  $x$  la sortie de ce filtre. On échantillonne  $x$  à une fréquence  $f_e$ . Donner une borne inférieure de  $f_e$  qui permet la reconstruction de  $s$  sans erreur.

8. **Transmission d'une impulsion rectangulaire**

On considère un canal de transmission équivalent à un filtre passe bas idéal avec une fréquence de coupure  $B$ . On transmet une impulsion  $x = \mathbf{1}_{[-T/2, T/2]}$ .

- Calculer la densité spectrale d'énergie de  $x$ .
- Donner l'expression du signal de sortie  $s$  (sous forme d'intégrale).
- On veut transmettre 2 impulsions successives. Quelle condition doit - on vérifier pour éviter les recouvrements (importants) en sortie du canal ?

9. **Modulation d'un signal**

- On considère le signal à temps continu, périodique de période  $T_0$ , défini par  $p(t) = p(t + T_0)$  et  $p(t) = \mathbf{1}_{[-T/2, T/2]}$  avec  $T < T_0$ . Calculer la transformée de Fourier  $P$  de  $p(t)$  et déterminer le spectre de puissance de  $p$ . (*Attention, ce n'est pas une fonction !*)
- On considère un second signal  $m$  à temps continu, d'énergie finie, et à bande limitée  $[-B, B]$ . Calculer la transformée de Fourier  $X$  du signal modulé  $x = m p$ .

(c) Quelle condition doit vérifier  $B$  pour que le spectre de  $x$  soit constitué d'une succession de motifs élémentaires à supports fréquentiels limités et disjoints ? On supposera cette condition vérifiée dans la suite.

(d) Montrer que le passage de  $x$  dans un filtre passe-bas idéal permet de retrouver  $m$  en sortie (démodulation).

Ce même principe de démodulation peut-il être appliqué au signal modulé  $y = m \cos(2\pi t/T_0)$  ?

10. **Filtrage adapté.**- Soit un signal déterministe  $s$  de durée  $T$  mélangé à un bruit  $b$  aléatoire stationnaire au sens large dont la fonction d'auto-corrélation vérifie  $\varphi_b = \sigma^2 \delta_o$ . On rappelle (voir p. ??) qu'un filtre adapté au couple  $[s, b]$  est un filtre qui rend maximal à l'instant  $T$  le rapport signal sur bruit (SNR) défini par :

$$\rho(T) = \frac{|y_s(T)|^2}{E[|y_b(T)|^2]} = \frac{|y_s(T)|^2}{\varphi_{y_b}(0)},$$

où

$$y_s = h * s(t) \text{ et } y_b = h * b$$

sont les sorties associées à  $s$  et  $b$  respectivement.

On considère le signal :

$$\forall t \quad z(t) = u(t) + b(t), \quad u(t) = Ae^{2i\pi f_0 t}$$

où  $A$  est une variable aléatoire uniformément répartie sur  $[-1, 1[$  et  $b$  un bruit blanc réel, centré, indépendant de  $A$  et d'écart-type  $\sigma$ .

(a) Calculer la densité spectrale de puissance de  $z$ .

(b) On considère le filtre de réponse impulsionnelle

$$h(t) = e^{2i\pi\nu_0 t} \mathbf{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}$$

Calculer le module de la réponse en fréquence (fonction de transfert)  $H$  de ce filtre.

(c) Calculer la sortie  $y_u$  associée à  $u$ .

(d) Calculer la puissance,  $\varphi_{y_b}(0)$ , de la sortie  $y_b$  associée à  $b$ .

(e) Calculer le rapport :

$$\rho(t) = \frac{|y_u(t)|^2}{\varphi_{y_b}(0)}.$$

et déterminer la relation entre  $\nu_0$  et  $f_0$  lorsque ce rapport est maximum.

- (f) On sait que  $f_0 < f_{max}$ . Comment peut - on estimer  $f_0$  à partir de plusieurs filtres adaptés ?

### 9.3.2 Travaux pratiques

#### 1. Utilisation de la convolution

On prend l'exemple suivant :

$$f_1(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq a \\ 0 & \text{si } |t| > a \end{cases}, \quad a > 0.$$

- (a) Discrétiser les deux signaux sur un intervalle  $[-N, N]$  où  $N > a$  avec un pas de  $h = 2 * N/p$ .
- (b) La convolée des deux signaux est approchée par

$$z(t_k) = \int_{-N}^N f_1(t_k - s)f_2(s) ds \simeq h * \sum_{j=1}^p f_1(t_k - t_j)f_2(t_j)$$

où les  $(t_j)$  représentent les points de discrétisation. La fonction `convol` de SCILAB<sup>©</sup> donne la convolution discrète des deux signaux

$$\sum_{j=1}^p f_1(t_k - t_j)f_2(t_j).$$

Un examen attentif de cette somme montrer que le résultat est un vecteur de longueur  $2p$  calculé sur le même intervalle (avec un pas divisé par 2 donc). En d'autres termes le signal cherché se calcule par :

```
z=h*convol(f1,f2);
xx=[-N :h/2 :N];
plot(xx,z)
```

- (c) Tracer les trois signaux sur le même graphe.
2. Programme le filtre *LRC* - Dessiner la fonction de transfert et/ou le gain pour différentes valeurs de  $L$ ,  $R$  et  $C$ .

3. Programmer les filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe bande du deuxième ordre suivant de la page 102. Les paramètres seront  $\lambda_c$  fréquence de coupure ou fréquence centrale et  $\xi$  le facteur d'amortissement qui doit être positif. Le paramètre  $Q = \frac{1}{2\xi}$  est appelé **facteur de qualité** pour les filtres passe-bande et coupe-bande.
4. Charger un fichier son de votre choix (instruction `loadwave`). Filtrer avec les différents filtres précédents. Écouter !!! Comparer visuellement le signal original et le signal filtré.

## 9.4 Chapitre 5 : échantillonnage

### 9.4.1 Exercices

1. Montrer que l'opérateur  $\mathcal{T}_d$  défini p. 117 est une injection linéaire continue de  $\ell_1(\mathbb{C})$  dans  $\mathcal{M}$ .
2. Montrer que si  $f$  est continue à support compact alors  $\hat{f} = \check{f}$  où  $\check{f} : t \mapsto f(-t)$ .  
( On passera par la transformée de Fourier de la mesure de Dirac ).
3. On génère un son comportant deux composantes audibles : 2 fréquences pures à 1000 Hz et 3000 Hz, ainsi qu'une composante inaudible à 43500 Hz. (L'oreille humaine n'entend pas les sons au-delà d'une fréquence de 20000 Hz environ.) On échantillonne à 44100 Hz (soit à une qualité CD).
  - (a) Le théorème d'échantillonnage est-il respecté ?
  - (b) Représenter le spectre après échantillonnage du signal.
  - (c) Dans l'intervalle  $[0, f_e/2]$  conservé, quelles sont les fréquences audibles ?
  - (d) Vérifier les résultats avec SCILAB<sup>©</sup>.
4. Soit  $f$  le signal défini par  $f(t) = e^{-|t|}$  pour  $t \in \mathbb{R}$ . On suppose que le temps est mesuré en secondes.
  - (a) Calculer  $\hat{f}$ ; en déduire que  $f$  n'est pas à bande limitée.
  - (b) Montrer que l'énergie de ce signal (i.e.  $\|f\|_2^2$ ) est égale à 1.

- (c) On se propose de déterminer la bande de fréquence de fréquence maximale  $\lambda_c$  pour que l'énergie de la transformée de Fourier de  $f$  sur l'intervalle  $[-\lambda_c, \lambda_c]$  soit égale à 99% de l'énergie initiale :

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 0.99 .$$

Montrer que la valeur désirée est d'environ 0.53671 Hz.

Quel est la valeur de la fréquence de Nyquist ?

- (d) Soit  $E(a)$  « l'énergie d'échantillonnage » de  $f$  définie par

$$E(a) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(na)|^2 .$$

Montrer que

$$E\left(\frac{1}{2\lambda_c}\right) = 1.274 .$$

C'est l'énergie du signal reconstruit après la limitation du spectre .

- (e) Si on choisit 10 échantillons (c'est-à-dire  $\lambda_c = 5$  Hz), combien valent

$$\int_{-\lambda_c}^{\lambda_c} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad \text{et} \quad E\left(\frac{1}{2\lambda_c}\right) ?$$

- (f) On se place à nouveau dans le cas (c) : on tronque le signal en fréquence. On veut aussi le tronquer en temps. Quelle doit-être la durée du signal  $T_c$  dans le domaine temporel pour que l'énergie du signal « tronqué » soit égale à 99% de l'énergie du signal de départ ?

$$\int_{-T_c/2}^{T_c/2} (e^{-|t|})^2 dt = 0.99 .$$

Combien faut-il d'échantillons (sachant que  $\lambda_c$  a été calculée dans (c)) ?

### 5. Considérons le signal sinusoïdal

$$x : t \mapsto x(t) = \sin(2\lambda t)$$

de fréquence  $\lambda$  inconnue. Supposons que  $x$  est échantillonné une fois avec une fréquence d'échantillonnage  $f_1 = 10$  Hz et une fois avec  $f_2 = 12$  Hz et que dans les deux cas le même signal à temps discret

$$\bar{x}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$$

est obtenu.

- (a) Quelles sont les valeurs possibles de la fréquence  $\lambda$  ? Expliquez.
  - (b) Si  $x$  avait été échantillonné seulement une fois, quelle fréquence d'échantillonnage aurait donné la même ambiguïté sur la mesure de  $\lambda$  ?
6. Soit un signal  $x$  à temps continu donné par  $x(t) = \sin(120\pi t)$ .
- (a) Quelles sont les valeurs de la fréquence d'échantillonnage qui permettent la reconstruction du signal ?
  - (b) Peut-on utiliser une fréquence d'échantillonnage de 120 Hz ? Quel serait le signal à temps-discret  $\bar{x}$  dans ce cas ?
7. Le signal  $X : n \mapsto X(n) = \cos(\pi n/4)$  a été obtenu par échantillonnage du signal à temps continu  $x : t \mapsto x(t) = \cos(2\pi ft)$  avec une fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz.
- (a) Trouver deux valeurs  $f_P$  possibles de la fréquence  $f$  qui auraient pu donner le signal discret  $X$ .
  - (b) Quel est le signal  $y$  qu'on reconstruirait, si on utilisait un interpolateur idéal sur le signal discret  $X$  ? (Un interpolateur idéal est un système qui donne, parmi toutes les fréquences possibles  $f_P$ , celle qui en valeur absolue est inférieure à  $f_e/2$ .)
8. **Formule d'échantillonnage.**- Soit  $s$  un signal dont la transformée de Fourier est  $S$  définie par  $S : \omega \mapsto S(\omega) = \mathbf{1}_{[-B, +B]}(\omega)$  et

$$s_n(t) := s(t - t_n), n \in \mathbb{Z}, \quad s_0(t) := s(t), \quad \text{pour tout } t.$$

- (a) Déterminer le signal  $s$  et calculer l'énergie  $E$  de ce signal.
- (b) Déterminer toutes les valeurs  $t_n$  de  $t$  pour lesquelles les signaux  $s_n$  sont orthogonaux à  $s$ .
- (c) Montrer que les  $s_n$  sont alors orthogonaux deux à deux.
- (d) Déterminer la projection orthogonale  $x^*$  d'un signal  $x$  sur l'espace vectoriel  $\mathbb{E}_N$  engendré par  $(s_n)_{-N \leq n \leq +N}$ .
- (e) On suppose que  $x$  est à bande limitée  $[-B, B]$ . Expliciter  $x^*$  en fonction des valeurs échantillonnées de  $x$ .
- (f) On prend  $N = +\infty$ . Comparer les transformées de Fourier de  $x^*$  et  $x$  toujours dans le cas où  $x$  est à bande limitée  $[-B, +B]$ . Donner la formule qui permet d'exprimer un signal  $x$  à bande limitée  $[-B, B]$  en fonction des échantillons  $x(n/2B)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

- (g) On fait passer le signal  $x$  dans un filtre linéaire de réponse impulsionnelle  $h$ . Montrer que la sortie  $y$  de ce filtre est aussi à bande limitée  $[-B, B]$ .
- (h) Montrer que le signal échantillonné  $y_n := y(n/2B)$  se déduit du signal  $x_n := x(n/2B)$  par un filtrage linéaire à temps discret dont on calculera la réponse impulsionnelle  $g_k$  à l'aide de  $h$ . Donner la fonction  $g$  telle que  $g_k := g(k/2B)$ .
- (i) Que devient la fonction  $g$  dans le cas particulier où  $h$  est aussi à bande limitée  $[-B, B]$  ?
- (j) On suppose que le filtre  $h$  est un dérivateur, c'est-à-dire que sa sortie  $y$  est la dérivée par rapport au temps de  $x$ . Calculer dans ce cas la fonction  $g$ .
- (k) En déduire l'expression de la dérivée d'un signal  $x$  à bande limitée  $[-B, B]$  en fonction des échantillons  $x_n$ .

### 9.4.2 Travaux pratiques

1. On se donne un signal sur un intervalle de temps  $[-1, 1]$  échantillonné à  $F$  Hz (autrement dit, le pas de discrétisation est  $h = 1/F$ ). Choisir un signal de la forme

$$x : t \mapsto x(t) = \sin(240\pi t) - 2 \sin(400\pi t) + \sin(800\pi t).$$

Tracer le signal (échantillonné) et appliquer la FFT pour calculer la transformée de Fourier discrète de  $x$ .

Dessiner le spectre énergie - fréquence. Tester plusieurs fréquences d'échantillonnage ( $F = 1000, 800, 600$  Hz) et observer le comportement du spectre du signal. Comment expliquer vous ce qui se passe ?

2. Pour le signal précédent et différentes fréquences d'échantillonnage, calculer la FFT du signal, puis la FFT inverse. On doit en principe retrouver le signal de départ .... Que constatez-vous ?

3. *Théorème de Shannon*

On se donne un signal de départ (discrétisé sur 1024 points )

$$S(j) = a \sin\left(\frac{j\pi}{17}\right) + b \sin\left(\frac{j\pi}{29} + \beta\right) + c \sin\left(\frac{j\pi}{53} + \gamma\right), \quad 0 \leq j \leq T = 1024.$$

Choisir  $a, b, c$  de manière aléatoire dans  $[0, 1]$  et  $\beta, \gamma$  de manière aléatoire dans  $[0, 2\pi]$ .



On va tester plusieurs intervalles (et fréquences d'échantillonnage) par exemple

$$f = \frac{1}{256}, \frac{1}{128}, \dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4};$$

c'est-à-dire que la taille de l'intervalle d'échantillonnage est  $a = 1/2f$ .

En posant

$$N = T/a, \quad S(j) = 0 \text{ si } j < 0 \text{ et } j > T,$$

on obtient

$$S_{ech}(j) = \sum_{n=0}^N S(na) \frac{\sin(\frac{\pi}{a}(j - na))}{\frac{\pi}{a}(j - na)},$$

c'est-à-dire

$$S_{ech}(j) = \sum_{n=0}^N S(na) \frac{\sin(\pi(\frac{j}{a} - n))}{\pi(\frac{j}{a} - n)} \quad j = 1, \dots, T$$

où  $S_{ech}$  désigne le signal échantillonné. Soit  $e_{ech}$  l'erreur d'interpolation :

$$e_{ech}(j) = S(j) - S_{ech}(j), \quad j = 0, 1, \dots, T.$$

Pour mesurer la précision de l'interpolation on calcule la déviation :

$$\text{devn} := \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^T |e_{ech}(j)|^2}{\sum_{j=0}^T |S(j)|^2}}.$$

- Pour chaque jeu de paramètres  $a, b, c, \beta, \gamma$ , générer le signal correspondant pour  $0 \leq j \leq T$  et le dessiner.
- Pour chacune des 7 valeurs de  $f$  suggérées, échantillonner le signal aux points correspondants et le générer avec la formule de Shannon-Nyquist.
- Calculer à chaque fois la déviation **devn**. Tracer la courbe de la déviation en fonction de  $\log_2(256 * f)$ .
- Comment la déviation s'améliore-t-elle en fonction de  $f$ .

4. (a) Définir les signaux suivants
- i.  $d = [1 \text{ zeros}(1, N - 1)]$  : impulsion unité discrète (avec  $N = 50$  par exemple)
  - ii.  $dd$  l'impulsion unité centrée. ( $N = 50$ ).
  - iii. Sur l'intervalle  $[-500, 500]$  (avec un pas de 1) définir

$$x(n) = \frac{(n + 500)^2 (n - 500) (n - 480)^4 (n + 120)^5}{1000} .$$

Définir la partie paire de  $x$  :  $xp$  et sa partie impaire  $xi$ .

Les dessiner pour vérification. On suppose le signal  $x$  échantillonné à 100 hz.

- iv.  $x3$  : plusieurs périodes de sinus (4 périodes ) dans  $N$  échantillons.
  - v. Une sinusoïde avec un nombre non entier de périodes (4.2) :  $x4$
- (b) Pour chaque signal calculer sa FFT sur 512 points et afficher le module et la phase en fonction de la fréquence, la partie réelle et la partie imaginaire.
- (c) Commentez la différence entre  $d$  et  $dd$
- (d) Comparer  $xp$  et  $xi$  avec les résultats théoriques de la FFT des fonctions paires et impaires. Expliquez les différences s'il y en a .
- (e) Interpréter les résultats de  $x3$  et  $x4$ . Expliquez surtout le résultat  $x4$  de la FFT d'un nombre non entier de périodes de sinus (pensez au rapport entre la fréquence d'échantillonnage et la fréquence de la sinusoïde).
5. On considère le signal  $x : t \mapsto x(t) = \sin(10\pi t)$ .
- (a) Quelle est la fréquence maximale du signal analogique ?
  - (b) Quelle est ici la fréquence d'échantillonnage minimale ?
  - (c) Quelle est l'allure du spectre du signal échantillonné ? Calculer et afficher le spectre d'amplitude de ce signal avec SCILAB<sup>®</sup> .
  - (d) Le théorème d'échantillonnage est-il respecté ? Quelle conclusion en tirez-vous quant à l'échantillonnage du signal  $x(t)$  ?
  - (e) Augmenter la fréquence du signal analogique : 10 Hz, 15 Hz, 20 Hz, 30 Hz, ... et visualiser son spectre. Que constatez-vous ? Continuer à l'augmenter progressivement jusqu'à 70 Hz, 80 Hz et au delà. Que se passe-t-il ? Commenter et expliquer.

- (f) Générer et analyser d'autres signaux, comme la somme de deux sinus par exemple. Mettez en évidence les mêmes effets.
6. Le but de cet exercice est de comprendre, de manière chiffrée, comment se réalise le repliement d'un spectre lorsqu'on l'analyse avec une fréquence d'échantillonnage  $F_s$  trop faible.
- La fonction « alias » étudie une sinusoïde pure de fréquence 2000 Hz. Cette fréquence, pour être correctement détectée doit être échantillonnée avec une fréquence au moins double, c'est-à-dire au moins 4000 Hz. La fonction alias prend comme argument la fréquence  $F_s$  à laquelle vous souhaitez échantillonner la sinusoïde.
- (a) Le signal à 2000 Hz est-il détecté correctement si  $F_s$  vaut 4500, 8000, 10000 Hz ?
- (b) Échantillonnez à moins de 4000 Hz pour provoquer du repliement (aliasing), par exemple à 3800 Hz, 3500 Hz et 3000 Hz. Quelles fréquences détectez-vous à chaque fois ?
- (c) Trouver quelle relation lie, dans ce problème, la fréquence  $F_s$  et la fréquence détectée du signal ?

## 9.5 Chapitre 6 : analyse temps-fréquence

### 9.5.1 Exercices

1. **Signaux concentrés en temps et en fréquence.** Déterminer les signaux de 32 échantillons qui ont l'énergie maximale dans la bande de fréquence
- (a)  $|\lambda| < 0.05$
- (b)  $0.35 < |\lambda| < 0.5$
- Tracer les deux signaux sur la même figure, à la fois dans les domaines temporel et fréquentiel (on peut par exemple utiliser MATLAB<sup>®</sup>). Déterminer le pourcentage de l'énergie qui se retrouve dans la bande de fréquence spécifiée.
2. Déterminer la distribution de Wigner-Ville de la fonction

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} .$$

3. Soit  $f$  un signal régulier et symétrique. Montrer que sa distribution de Wigner-Ville est concentrée au voisinage de  $t = 0, \omega = 0$ .  
Montrer que la transformée de Wigner-Ville de la gaussienne

$$f(t) = (\sigma^2\pi)^{-1/4} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}},$$

est

$$W_f(t, \omega) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{t^2}{\sigma^2} - \sigma^2\omega^2},$$

et que

$$W_f(t, \omega) = |f(t)|^2 |\hat{f}(\omega)|^2.$$

4. Soit  $w$  une fenêtre temporelle et  $f$  l'atome temps-fréquence suivant :

$$f(t) = \frac{a}{\sqrt{\sigma}} e^{i\phi} w\left(\frac{t - \tau}{\sigma}\right) e^{i\lambda t}.$$

Montrer que sa transformée de Wigner-Ville est

$$W_f(t, \omega) = |a|^2 W_g\left(\frac{t - \tau}{\sigma}, \sigma(\omega - \lambda)\right).$$

En déduire que son énergie est concentrée au voisinage de  $(\tau, \lambda)$  dans une ellipse dont on calculera les axes.

5. **Interférences.** On se donne une fenêtre temporelle  $g$  centrée en  $t = 0$ . Soient  $f_1$  et  $f_2$  les atomes temps-fréquence correspondants :

$$f_1(t) = a_1 e^{i\phi_1} g(t - \tau_1) e^{i\lambda_1 t} \quad \text{et} \quad f_2(t) = a_2 e^{i\phi_2} g(t - \tau_2) e^{i\lambda_2 t}.$$

Calculer  $W_{f_1}$  et  $W_{f_2}$ . Montrer que le terme d'interférence vaut

$$I_{[f_1, f_2]}(t, \omega) = 2a_1 a_2 W_g(t - t_o, \omega - \omega_o) \cos((t - t_o)\Delta\omega - (\omega - \omega_o)\Delta t + \Delta\phi)$$

avec

$$t_o = \frac{t_1 + t_2}{2}, \quad \omega_o = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \Delta t = t_1 - t_2, \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2,$$

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 + t_o \Delta\omega.$$

Tracer la représentation temps-fréquence de  $f$ .

6. Pour réduire les termes croisés on peut définir un noyau  $\varphi(v, \tau)$  pour obtenir une distribution appartenant à la classe de Cohen. Un noyau habituel est le noyau de **Choi-Williams** :

$$\varphi(v, \tau) = e^{-\frac{\tau^2 v^2}{\sigma}}.$$

Déterminer analytiquement la distribution temps-fréquence de Choi-Williams time-frequency pour le signal

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}.$$

### 9.5.2 Travaux pratiques

1. On considère la fenêtre de Kaiser

$$w(t) = \begin{cases} I_0 \left( \alpha \sqrt{1 - \left( \frac{t}{T} \right)^2} \right) & \text{si } |t| < T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $I_0$  est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0 (les fonctions de Bessel sont implémentées dans MATLAB<sup>©</sup>.)

Déterminer numériquement la constante  $\alpha$  pour que la plus grande partie de l'énergie d'un signal soit concentrée dans une bande de fréquence  $|\lambda| < 0.05$ .

Tracer les signaux à la fois dans les domaines temporel et fréquentiel.

2. Utiliser MATLAB<sup>©</sup> pour générer et tracer les distributions de Wigner-Ville et de Choi-Williams des exercices ci-dessus en les échantillonnant en temps et en fréquence. Pour la distribution de Choi-Williams, on choisit  $\sigma$  de sorte que les termes croisés soient petits.
3. Construire un signal  $x(t)$  et déterminer le spectrogramme et ses distributions de Wigner-Ville et de Choi-Williams. Comme le noyau de Choi-Williams est à support non borné en temps et en fréquence il faut fenêtrer ce noyau.
4. Construire un signal somme de deux chirps linéaires de 512 échantillons. La première composante est un chirp glissant de 0 à 0.3 Hz et le deuxième de  $f_o$  à  $f_o + 0.3$  Hz :

$$x[k] = e^{2i\pi kt^2} + e^{2i\pi(kt+f_o)t}.$$

On peut utiliser la commande `chirp` pour générer ce signal.  
 Tester avec  $f_o = 0.1$  et  $f_o = 0.05$  et commenter le comportement des trois méthodes (Spectrogramme, Wigner-Ville et Choi-Williams).  
 Pour quelle valeur minimale de  $f_o$  peut-on encore distinguer les deux chirps dans la représentation temps-fréquence ?

## 9.6 Chapitre 7 : analyse temps-échelle

### 9.6.1 Exercices

#### 1. Base de Haar

On considère la famille de fonctions  $(\psi_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  définies sur  $[0, 1]$  par  $\psi_{0,0} = 1$  et, pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq k \leq 2^n$ ,

$$H_{2^n+k-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{si } x \in [(2k-2)2^{-n-1}, (2k-1)2^{-n-1}[ \\ -\sqrt{2^n} & \text{si } x \in [(2k-1)2^{-n-1}, 2k \cdot 2^{-n-1}[ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Dessiner  $H_0$ ,  $H_1$  et  $H_2$ . Montrer que

$$H_{2^n+k-1}(x) = H_1(2^n x - k + 1) \cdot 2^{n/2}.$$

(b) Démontrer que  $(H_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est un système orthonormé de  $L^2([0, 1])$ .  
 On montrera successivement que

i. Montrer que pour tout  $n$  les fonctions  $H_{2^n+k-1}$  sont orthogonales entre elles pour  $1 \leq k \leq 2^n$ .

ii. Soit  $m > n$ . Montrer qu'il n'existe pas d'entier  $\ell$  tel que

$$(2k-2)2^{-m-1} < \ell 2^{-n-1} < 2k 2^{-m-1};$$

en déduire que pour tout entier  $\ell$  tel que  $1 \leq \ell \leq 2^n$ , la fonction  $H_{2^n+\ell-1}$  est constante sur l'intervalle

$$[(2k-2)2^{-m-1}, 2^{-n-1} < 2k 2^{-m-1}[.$$

iii. Conclure.

(c) Soit  $f \in L^2([0, 1])$  telle que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^1 f(x) H_p(x) dx = 0$ .

On pose  $F(y) = \int_0^y f(x) dx$ .

- i. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq 2^n$ ,

$$-F\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}\right) + 2F\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) - F\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) = 0.$$

- ii. En déduire que  $F = 0$ . (Remarquer que  $F$  est continue). On pourra montrer par récurrence que  $F\left(\frac{k}{2^n}\right) = 0$  pour tout entier impair  $k$ .

- iii. En déduire que  $f = 0$  puis que  $(H_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est une base hilbertienne de  $L^2([0, 1])$ .

2. Soit  $\psi \in L^2$  et pour  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , soit  $\psi_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ .

- (a) Calculer  $\widehat{\psi_{a,b}}$  en fonction de  $\widehat{\psi}$ .

Rappelons que la transformée en ondelette de  $f$  avec fenêtre  $\psi$  est définie par

$$Wf(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

- (b) En utilisant Parseval, montrer que

$$Wf(a, b) = \sqrt{a} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(a\xi)} e^{2i\pi b\xi} d\xi$$

qui est donc la transformée de Fourier inverse de  $\sqrt{a}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(a\xi)}$ .

On en déduit donc une méthode de calcul rapide de la transformée en ondelette à l'aide de la FFT.

## 9.6.2 Travaux pratiques

1. Utiliser la procédure `MakeSignal` de `WAVELAB`. Celle-ci permet de créer un certain nombre de signaux tests. Elle s'utilise de la façon suivante : `sig=MakeSignal('nom',longueur)` ;

où *longueur* est la longueur du signal (prendre 1024)  
et *nom* est

'HeaviSine', 'Bumps', 'Blocks', 'Doppler', 'Ramp', 'Cusp', 'Sing',  
 'HiSine', 'LoSine', 'LinChirp', 'TwoChirp', 'QuadChirp',  
 'MishMash', 'WernerSorrows', 'Piece-Regular', 'Riemann',  
 'HypChirps', 'LinChirps', 'Chirps', 'sineoneoverx', 'Cusp2' ou  
 'Piece-Polynomial'

## 2. Décomposition dans la base de Haar

- Créer un vecteur  $e$  de longueur moitié contenant les moyennes de deux valeurs consécutives de  $sig$ , la première des deux valeurs utilisées ayant toujours un indice impair :

$$e[k] = (sig[2k - 1] + sig[2k])/2$$

et le tracer.

- Créer un vecteur  $w$  de longueur moitié contenant les demi variations de deux valeurs consécutives de  $sig$ , soit  $w[k] = (sig[2k] - sig[2k - 1])/2$  et le tracer.

Remarquer que  $e$  diffère peu du signal d'origine, surtout dans ses parties lisses. Par contre,  $w$  n'est important qu'au voisinage des sauts. C'est normal, puisqu'on le calcule par différences finies.

3. L'objectif de cet exercice est de mettre en évidence certains des inconvénients de la transformée de Fourier et de motiver l'utilisation des ondelettes

(a) Construire les signaux suivants :

- i. une masse de Dirac,
- ii. les créneaux  $\chi_{[-1,1]}$ ,  $\chi_{[-2,2]}$ ,  $\chi_{[-1,0]}$ ,  $\chi_{[0,1]}$ ,
- iii. une combinaison linéaire de créneaux  $\alpha\chi_{[-1,1]} + \beta\chi_{[-2,2]}$  avec par exemple  $\alpha = 0.9$  et  $\beta = 0.1$ .
- iv. les créneaux  $\chi_{[-1,1]}$  et  $\chi_{[-1/8,1/8]}$
- v. une différence de créneaux  $\chi_{[-1,0]} - \chi_{[0,1]}$ .
- vi. une somme de sinusoides, par exemple

$$y = \sin(2\pi 4t) + 0.2 \sin(2\pi 9t),$$

- vii. une succession (temporelle) des deux sinusoides suivantes :  $\sin(2\pi 8t)$  et  $\sin(2\pi 18t)$ ,
- viii. une succession des deux sinusoides additionnée d'un multiple de la masse de Dirac construite en a),



- ix. un bruit blanc.
- (b) Pour chacun de ces signaux, tracer la représentation temporelle, calculer la transformée de Fourier et tracer la représentation fréquentielle.
- (c) **Transformée en ondelette continue.**- Utiliser le programme CWT du package WAVELAB et calculer la transformée en ondelettes des différents signaux construits précédemment pour les diverses fenêtres :

i. *Gaussienne*

$$\psi(t) = \gamma(t) = e^{-t^2/2}, \quad \hat{\psi}(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

ii. *Dérivée de la gaussienne*

$$\psi(t) = -\frac{d}{dt}\gamma(t) = 2te^{-t^2/2}, \quad \hat{\psi}(\xi) = i\xi e^{-\xi^2/2}.$$

iii. *Chapeau mexicain*

$$\psi(t) = -\frac{d^2}{dt^2}\gamma(t) = 2te^{-t^2/2}, \quad \hat{\psi}(\xi) = \xi^2 e^{-\xi^2/2}.$$

iv. *Ondelette de Morlet*

$$\psi(t) = 2i\gamma(t) \sin \omega_0 t = e^{-t^2/2} e^{i\omega_0 t} - e^{-t^2/2} e^{-i\omega_0 t},$$

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-(\xi+\omega_0)^2/2} - e^{-(\xi-\omega_0)^2/2}.$$

## 9.7 Chapitre 8 : introduction à l'analyse vocale

### 9.7.1 Exercices

- Voici différentes représentations d'un signal vocal (sonagramme, spectre etc....) Répondre aux questions posées ci-dessous. On justifiera soigneusement les réponses.
  - Quelle est la durée du signal ?
  - Quelle est la fréquence fondamentale de la voix de la personne qui parle ? On précisera l'unité. Est-ce un enfant, un homme adulte, une femme adulte ?

- (c) La voix est-elle claire ou sombre ?
- (d) La personne parle t'elle ou chante t'elle ?
- (e) Noter sur le signal l'endroit où la personne parle (ou chante) le plus fort (++) , le moins fort (-). On précisera l'unité.

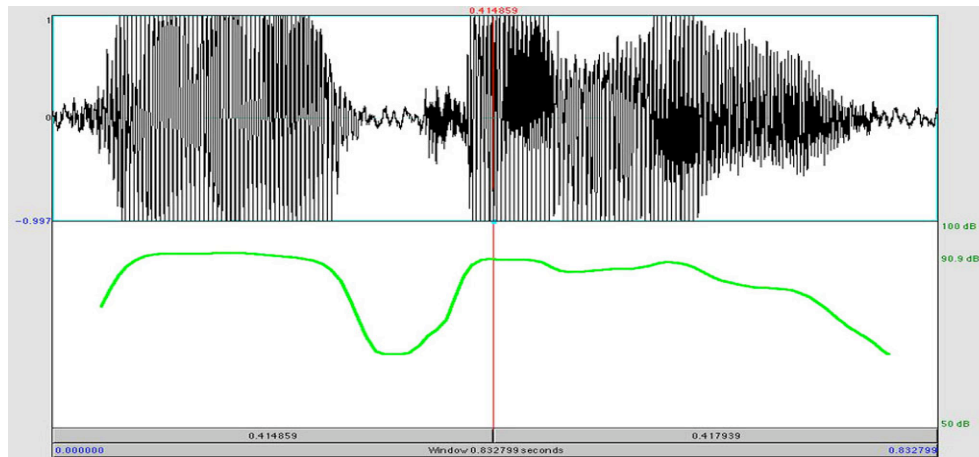


FIGURE 9.3 – Signal et intensité (Le trait plein représente l'intensité)

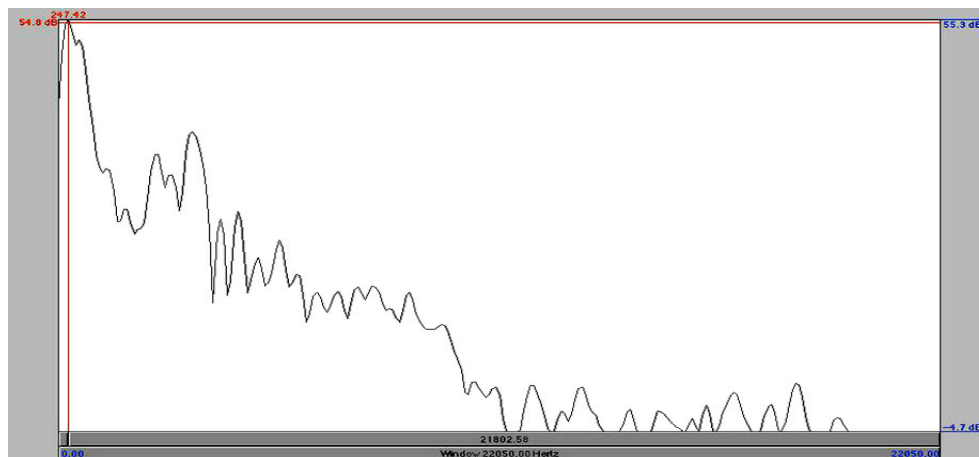


FIGURE 9.4 – Représentation spectrale

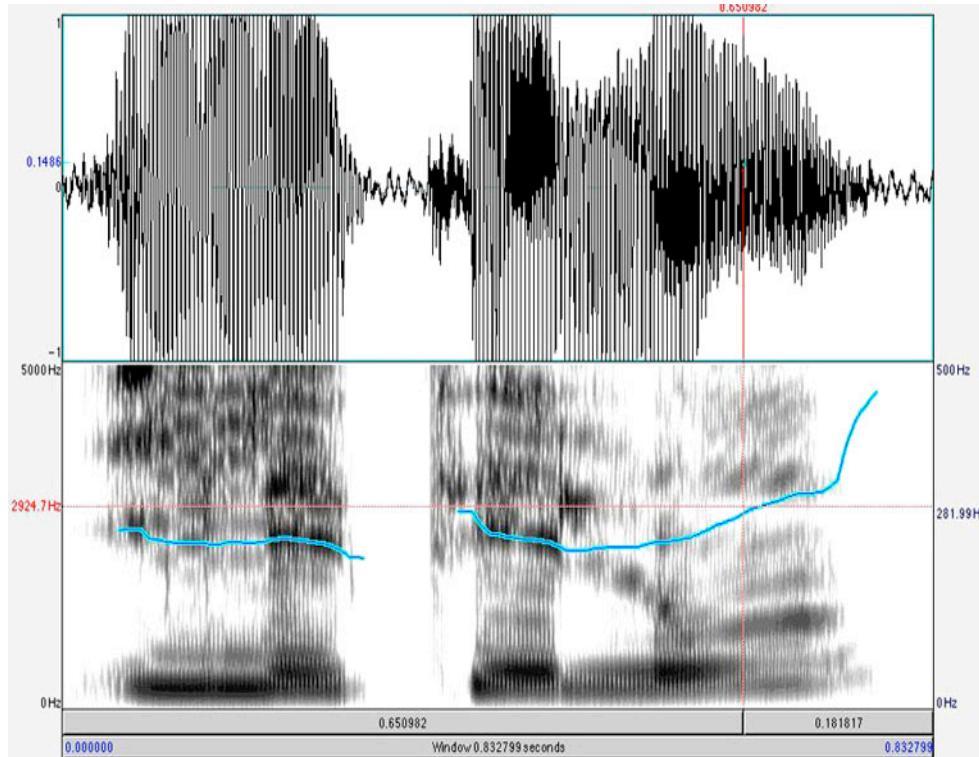


FIGURE 9.5 – Signal et sonagramme (le trait plein représente la fréquence fondamentale.)

## 9.7.2 Travaux pratiques

### 1. Détection de Pitch

En première approximation on peut considérer que les segments de paroles voisées (c'est-à-dire qui impliquent une vibration des cordes vocales), sont des signaux périodiques. La fréquence fondamentale ou pitch de ces signaux correspond à la fréquence de vibration des cordes vocales. Elle s'étend approximativement de 70 à 400 Hz.

La méthode de l'auto-corrélation peut être utilisée pour déterminer la fréquence fondamentale du signal. Pour cette manipulation, nous utiliserons l'auto-corrélation pour faire un suivi de pitch sur un signal chanté. Il est alors possible de déterminer la note chantée.

*Analyse d'un extrait audio*

```

[Y fs Nbits]=wavread('signal.wav');
Y=Y/max(abs(Y));
taille_fenetre=fs*20e-3;
temps_total=length(Y)/fs
Nbre_fenetre=floor(2*temps_total/20e-3)
Z(1)=0; pitch(1)=0;
for i=1:Nbre_fenetre-1
debut=(i-1)*taille_fenetre/2+1;
fin=debut+taille_fenetre;
fenetre=Y(debut:fin);
if(max(fenetre)>0.3)
Z=autocovar(fenetre, fs/100);
max_f=find(Z==max(Z(floor(fs/250):end)));
pitch(i)=fs/max_f;
else pitch(i)=0;
end
end
plot(pitch)

```

Pour connaître la fréquence fondamentale du signal de la fenêtre, il faut se rappeler que le maximum de la fonction d'autocorrélation est obtenu pour un décalage égal à la période du signal. On détermine la fréquence en divisant la fréquence d'échantillonnage par le décalage  $F = fs/k$ . En observant le pitch on observe très bien la suite de notes chantées dans l'extrait audio.

*Détection des différentes notes chantées*

```

note(1)=0; m=0;
z=abs(diff(pitch));
ind_trans=find(z>10);
ind_trans=[1 ind_trans length(z)];
for i=1:length(ind_trans)-1;
if((ind_trans(i+1)-ind_trans(i))>10)
m=m+1;
note(m)=mean(pitch(ind_trans(i)+1:
ind_trans(i+1)-1));
end
end
plot(note,'o')

```

La fonction `diff` permet de calculer une approximation de la dérivée en soustrayant chaque élément par son précédent.

On récupère ensuite les indices de  $z$  qui correspondent à une variation brusque du pitch c'est-à-dire les transitions brusques de fréquences dans l'extrait audio. On espère ainsi isoler chaque note. On calcule ensuite la moyenne de fréquence sur chaque intervalle. Le résultat nous donne précisément la partition chantée.

## 9.8 Travaux pratiques de synthèse

1. Charger un vecteur  $y$  représentant le son (mono) d'un instrument échantillonné à  $f_e$  Hz ( `y=wavread('son.wav')` ).
  - (a) Quelle est la durée de ce signal ? On la note  $T$
  - (b) Représenter (par plot ) sur la même fenêtre graphique (cf commande dans l'exercice 1) le signal sur 1 s , 0.5 s, 0.1 s et 0.05 s. Est-ce un signal périodique simple ? complexe ? Est-ce un signal aperiodique.
  - (c) Faire la FFT du signal sur 0.1 s sur 256, 512 et 1024 points successivement.
  - (d) Quelle est la fréquence fondamentale du signal ? On pourra se contenter d'afficher la tranche de fréquences [50, 1000]. De quel instrument pourrait-il s'agir ?

### 2. Niveau de bruit dans un signal

Le rapport signal à bruit (RSB) est une quantité mesurée en dB qui donne un indice de la puissance du signal par rapport à celle du bruit. Il est mesuré par la formule :

$$RSB = 10 * \log_{10} \left( \frac{\text{Energie}_{signal}}{\text{Energie}_{bruit}} \right)$$

Ici l'énergie est mesurée sous SCILAB<sup>©</sup> par le carré de la fonction `stdev`. L'énergie est aussi la variance pour les signaux aléatoires, tels que le bruit. Dans le cas du bruit blanc gaussien (centré) (fonction `randn`), son énergie est à peu près égale au carré de son amplitude  $A$ .

Un  $RSB$  positif signifie que le signal est plus énergétique que le bruit. Pour un  $RSB = 0$ , il y a autant de bruit que de signal et pour les valeurs négatives du  $RSB$ , on dit que le signal est dégradé.

- (a) Construire un sinus de fréquence 100Hz, d'amplitude 1, échantillonné à  $F_e = 5kHz$ , de longueur  $N = 512$  points.
- (b) Observez son allure temporelle. Quelle est la durée du signal ?
- (c) Quelle est l'énergie du sinus, quelle amplitude de bruit faut-il ajouter pour avoir un  $RSB = 0dB$  ? Dessiner le signal bruité dans ce cas là.
- (d) Augmentez l'amplitude du bruit jusqu'à ne plus distinguer le signal sinusoïdal et notez la valeur du  $RSB$  correspondant.

### 3. Visualisation de spectres

On prendra soin de tracer les spectres en dB et de graduer les abscisses en fonction de la fréquence d'échantillonnage. La conversion en dB d'un spectre se fait par

$$20 \cdot \log_{10}(|FFT(\text{signal})|)$$

Reprenez les exemples précédents et observez les spectres des différents signaux que vous avez générés :

Lorsque le  $RSB$  est suffisamment faible pour que l'on ne distingue plus l'allure temporelle du signal, observe-t-on toujours un pic correspondant à la fréquence du signal dans le domaine fréquentiel ?

### 4. Filtrage d'harmoniques

La distortion harmonique est une forme de distortion courante en musique. Elle consiste à ajouter des harmoniques - des fréquences multiples de la fréquence fondamentale - au signal de départ.

- (a) Ajoutez à un signal sinusoïdal pur ses 5 premières harmoniques impaires, de même amplitude.  $F_e$  étant fixé à  $8kHz$ , choisissez une valeur de  $f_o$  adéquate que l'on précisera. Visualiser la forme d'onde et le spectre du signal.
- (b) Réalisez les filtres adéquats pour extraire les composantes correspondant à :
  - La fréquence fondamentale (harmonique 1),
  - L'harmonique 5,
  - L'harmonique 11.
 Ces filtres seront réalisés à l'aide des filtres passe-bas, passe-bande et passe-haut déjà programmés.
- (c) Visualisez les signaux filtrés et leur spectre.

- (d) Notez les amplitudes des signaux filtrés, et interprétez leurs valeurs.

### 5. Analyse spectrale par TFD

On désire voir ici différents effets de la TFD en terme de précision d'analyse et de résolution fréquentielle. On prendra donc soin de travailler sur des signaux dont la longueur est une puissance de 2.

Il est possible d'appliquer la TFD sur la globalité ou sur une partie d'un signal de longueur  $N$ . La partie analysée est appelée **fenêtre d'observation**. Pour un même signal sinusoïdal échantillonné à 1kHz de fréquence 100 Hz et de longueur 512 points, on va observer le module de la FFT sur des fenêtres dont la longueur varie.

- (a) Pour des tailles de fenêtres de  $2^p$  avec  $p$  variant de 4 à 8, tracer le module des différentes TFD sur la même figure et donnez à chaque fois la largeur du lobe principal.
- (b) Vérifiez que le produit de la largeur du lobe principal par la durée d'observation est constant. Comment varie la précision fréquentielle en fonction de la taille la fenêtre.

### 6. Résolution Fréquentielle de la TFD

La résolution fréquentielle de la TFD d'un signal est définie par le nombre de points d'analyse  $N$  et la fréquence d'échantillonnage du signal  $F_e$  par la formule :

$$\text{Résolution Fréquentielle} = \frac{F_e}{N}$$

On veut voir ici les limites de l'analyse au niveau de la détection de sinusoïdes proches. Cette notion est importante lors de l'analyse de vibrations de systèmes mécaniques ayant des modes proches.

- (a) Générez un signal échantillonné à 1kHz de 1024 points, constitué de 2 sinusoïdes d'amplitudes égales et de fréquences respectives 100 Hz et 105 Hz.
- (b) Déterminez expérimentalement la durée d'observation en dessous de laquelle on ne peut plus séparer les lobes principaux des deux composantes.
- (c) Que vaut la longueur théorique  $N_{min}$  qui ne permet pas de séparer ces 2 raies ?
- (d) Obtient-on un meilleur résultat en doublant simultanément la fréquence d'échantillonnage et la taille de la TFD ?





# Bibliographie

- [1] M. Benidir *Théorie et traitement du signal*, Tomes 1 et 2, Dunod, 2002.
- [2] M. Bergounioux, *Quelques méthodes mathématiques pour le traitement des images*, Orléans, 2009
- [3] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1987.
- [4] A. Cohen , *Ondelettes et traitement numérique du signal*, Collection RMA, Masson, Paris, 1997.
- [5] P. Escudier et J.-L. Schwartz, *La parole, des modèles cognitifs aux machines communicantes*, Hermes Science, 2000.
- [6] C. Gasquet et P. Witomski, *Analyse de Fourier et applications*, Masson, 1995.
- [7] A. Guichardet, *Intégration - Analyse hilbertienne*, Ellipses, 1989.
- [8] P. Guillaume, *Musique et acoustique*, Hermes Science, Lavoisier, 2005.
- [9] A. Landercy et R. Renard *Eléments de phonétique*. Didier Erudition, 1977
- [10] J. Le Roux, *Techniques numériques pour le traitement du signal* . Polycopié de l'Université de Nice, <http://www.polytech.unice.fr/~leroux/>
- [11] S. Mallat, *Signaux et systèmes*. Polycopié de l'Ecole Polytechnique
- [12] S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes*. Editions de l'Ecole Polytechnique, Novembre 2000
- [13] V. Perrier, *Cours UNESCO « Applications des ondelettes », Tunis, mars 2005* <http://www-ljk.imag.fr/membres/Valerie.Perrier/>, Laboratoire de Modélisation et Calcul de l'IMAG, INPG, Grenoble
- [14] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1978.
- [15] E. Tisserand, J-F. Pautex et P. Schweitzer, *Analyse et traitement des signaux*, Dunod, 2004.

- [16] WAVELAB, <http://www-stat.stanford.edu/~wavelab/>

# Index

- Échantillonnage, 6, 23, 113, 115, 127
- Égalité de Parseval, 14
- Égalité de Plancherel-Parseval, 52
- Énergie, 67
- Étalement spectral, 146
- Étalement temporel, 146
- WindowFT, 167
- CWT\_Wavelab, 171
- FWT\_PO, 195
- IWT\_PO, 195, 257
- ImageCWT, 171
- MakeONFilter, 195
- PlotWaveCoeff, 195
  
- FWT, 191
  
- Aléatoire, 6
- Aliasing, 135
- Amplificateur idéal, 80
- Amplitude, 7
- AMR, 186
- Analogique, 6
- analyse multi-résolution, 186
- Atome temps-fréquence, 155, 242
- Autocorrélation, 63, 69, 74
  
- Bande limitée, 127
- Bande passante, 101
- Base de Haar, 182
- Bessel (inégalité), 11
- Bruit blanc, 70
- Bruit rose, 70
  
- Causal, 81
- Causalité, 81
- Changement d'échelle, 38
- Chapeau mexicain, 172
- Chirp, 163, 180
- Choi-Williams, 162, 243
- Circuit LRC, 106
- Circuit RC, 81
- Classe de Cohen, 161
- Coefficient de Fourier, 11
- Compression, 185
- Continuité, 83
- Convolution, 26, 38
- Convolution circulaire discrète, 26
- Corrélation, 62
- Corrélogramme, 68
  
- Décalage en temps, 37
- Décibel, 71, 198
- Décroissance rapide, 48
- Dérivateur, 80
- Déterministe, 6
- Densité spectrale de puissance, 68
- DFT, 25
- Dirac (masse), 88
- Dirac (mesure), 88
- Dirac (peigne), 114
- Dirichlet (théorème), 16
- Distribution de Wigner-Ville, 159
- Dynamique, 102
  
- Entrée, 80
- Espace de Schwarz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 49

- Fast Wavelet Transform, 191  
Fenêtre, 149  
Fenêtre de Hamming, 149  
Fenêtre de Hanning, 149  
Fenêtre de Gauss, 150  
Fenêtre glissante, 144  
FFT, 22, 28, 140  
Filtre, 85, 188, 200  
Filtre dynamique, 102  
Filtre miroir, 188  
Filtre passe-bande, 97  
Filtre passe-bas, 97  
Filtre passe-bas idéal, 105  
Filtre passe-haut, 97  
Filtre propre, 101  
Filtre RIF, 92  
Filtre RII, 93  
Fonction d'échelle, 186, 188  
Fonction d'ambiguïté, 161  
Fonction de corrélation, 62  
Fonction de transfert, 86  
Formant, 207  
Formule de Poisson, 123  
Fourier (transformation discrète), 25  
Fourier (coefficient), 11  
Fourier (série), 14  
Fourier (transformée), 35  
Fourier (transformation), 34  
Fourier-Plancherel (transformation), 51  
Fréquence, 7, 19  
Fréquence d'échantillonnage, 113  
Fréquence de coupure, 200  
Fréquence de Nyquist, 127  
Fréquence fondamentale, 19, 22  
Fréquentiel, 7  
  
Gain, 97  
Gain complexe, 85  
Gauss (fenêtre), 150  
Gibbs, 148  
  
Graphe de fluence, 93  
  
Haar, 182, 188  
Hamming (fenêtre), 149  
Hanning (fenêtre), 149  
Harmoniques, 19, 22  
Hauteur, 197  
Hermitien (produit), 9  
  
Impaire (suite), 25  
Impulsion de Dirac, 87  
Inégalité de Bessel, 11  
Input, 80  
Intercorrélation, 64  
Interférence, 161  
Invariance, 82  
Inversion de Fourier, 43  
  
Laplace (transformation), 57  
Largeur de bande, 98  
Ligne à retard, 80  
Linéarité, 81  
LRC, 106  
  
Masse de Dirac, 87  
Meilleure approximation, 10  
Mesure de Dirac, 88, 114  
Monochromatique, 7, 85  
Morlet, 172  
  
Numérique, 6  
Nyquist (cadence), 128  
Nyquist (fréquence), 127  
  
Ondelette, 171, 189  
Ondelette de Haar, 171, 182  
ondelette de Morlet, 172  
Ondelettes orthogonales, 181  
Ouput, 80  
  
Période, 7  
Périodogramme, 157

- Paire (suite), 25  
Parseval (égalité), 14  
Passe-bande, 97  
Passe-bas, 97  
Passe-haut, 97  
Peigne de Dirac, 114, 122  
Permanent, 62  
Phénomène de Gibbs, 148  
Pitch, 203, 212  
Plancherel-Parseval (égalité), 52  
Principe d'incertitude, 146  
Puissance moyenne, 62  
Pulsation, 7
- Quantification, 6
- Réalisable, 81  
Récursif, 93  
Réponse impulsionnelle, 89  
Réponse indicielle, 104  
Résonance acoustique, 200  
Résonateurs, 200  
Rapport signal sur bruit, 71  
RC (circuit), 81  
Recouvrement spectral, 136  
RI, 90  
Riemann - Lebesgue, 15, 43  
RIF, 92  
RII, 93
- Série de Fourier, 14  
Scalaire (produit), 9  
Shannon, 127, 188  
Signal to Noise Ratio, 71  
Signaux unidimensionnels, 3  
Sinus cardinal, 36, 128  
SNR, 71  
Son voisé, 203  
Sonagramme, 204  
Sortie, 80  
Sous-échantillonnage, 136
- Spectre, 19  
Spectre d'énergie, 68  
Spectre d'amplitude, 19  
Spectre de phase, 19  
Stable, 89  
Stationnaire (signal), 143  
STFT, 148  
Suite impaire, 25  
Suite paire, 25  
Superposition, 81  
Système, 79
- Temporel, 7  
Temps-échelle, 175  
Temps-fréquence, 144  
TFD, 25  
Théorème de Shannon, 127  
Théorème d'inversion de Fourier, 43  
Théorème de Dirichlet, 16  
Théorème de Riemann - Lebesgue, 15  
Théorème de Wiener-Khinchine, 67  
ThreshWave, 196  
Timbre, 197  
Time scaling, 38  
Time shifting, 37  
Transfert (fonction), 86  
Transformée de Fourier, 35  
Transformée en ondelette, 169  
Transformée en ondelettes continue,  
175  
Transformation de Fourier, 34  
Transformation de Fourier discrète, 25  
Transformation de Fourier-Plancherel,  
51  
Transformation de Laplace, 57  
Transformation en  $z$ , 91, 94  
Transitoire, 63  
Transitoire (signal), 143
- Valeur efficace, 71  
Voisé (son), 203

- Voyelle antérieure, 206
- Voyelle arrondie, 206
- Voyelle centrale, 206
- Voyelle nasale, 206
- Voyelle postérieure, 206
  
- Wavelab, 167, 171, 195, 196
- Wiener-Khinchine (théorème), 67
- Wigner-Ville, 159
- Wigner-Ville , 241
  
- Zero-padding, 139

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Analyse spectrale des signaux unidimensionnels</b>	<b>9</b>
2.1	Signaux analogiques périodiques . . . . .	9
2.1.1	Les séries de Fourier . . . . .	9
2.1.2	Exemples et terminologie . . . . .	19
2.2	La transformation de Fourier discrète (DFT) et la FFT . . . . .	22
2.2.1	Calcul des coefficients de Fourier . . . . .	22
2.2.2	Propriétés de la transformée de Fourier discrète . . . . .	25
2.2.3	L'algorithme de FFT . . . . .	28
2.2.4	Utilisation de la FFT sous SCILAB <sup>©</sup> ou MATLAB <sup>©</sup> . . . . .	33
2.3	La transformation de Fourier . . . . .	34
2.3.1	Propriétés de la transformation de Fourier . . . . .	37
2.3.2	Théorème d'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	44
2.4	La transformation de Fourier-Plancherel . . . . .	48
2.4.1	Les fonctions à décroissance rapide . . . . .	48
2.4.2	L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . . . . .	50
2.4.3	Transformation de Fourier inverse sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . . . . .	51
2.5	Transformation de Fourier-Plancherel . . . . .	52
2.5.1	Coefficient de Fourier versus transformation de Fourier . . . . .	55
2.5.2	Application : calcul de certaines transformées de Fourier . . . . .	56
2.6	La transformation de Laplace . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Analyse corrélative des signaux</b>	<b>61</b>
3.1	Relations statistiques entre plusieurs variables . . . . .	61
3.1.1	Notation -Abréviations . . . . .	61
3.1.2	Matrice des covariances . . . . .	62
3.2	Fonctions de corrélation de signaux . . . . .	64

3.2.1	Définitions . . . . .	64
3.2.2	Quelques propriétés des fonctions de corrélation dans le cas analogique . . . . .	67
3.2.3	Densité spectrale de puissance . . . . .	69
3.2.4	Cas d'un signal numérique . . . . .	70
3.2.5	Exemples . . . . .	71
3.3	Détection de signaux périodiques . . . . .	73
3.3.1	Détection par autocorrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit . . . . .	74
3.3.2	Détection par intercorrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit . . . . .	75
3.4	Autres exemples d'applications . . . . .	76
3.4.1	Mesure de retard entre signaux aléatoires par corrélation	76
<b>4</b>	<b>Filtrage</b>	<b>81</b>
4.1	Systèmes . . . . .	81
4.1.1	Quelques définitions . . . . .	82
4.1.2	Propriétés algébriques des systèmes . . . . .	83
4.2	Filtres linéaires . . . . .	86
4.2.1	Masse (impulsion) de Dirac . . . . .	89
4.3	Filtrage numérique . . . . .	91
4.3.1	Filtrage numérique linéaire . . . . .	92
4.3.2	Filtres linéaires discrets et équations aux différences . . . . .	94
4.3.3	Transformation en $z$ . . . . .	96
4.3.4	Fonction de transfert . . . . .	98
4.3.5	Exemples de filtres du premier et du deuxième ordre . . . . .	99
4.4	Filtrage analogique . . . . .	104
4.4.1	Exemples . . . . .	107
4.4.2	Filtrage et corrélation . . . . .	113
<b>5</b>	<b>Échantillonnage</b>	<b>115</b>
5.1	Peigne et mesure de Dirac . . . . .	115
5.1.1	Peigne de Dirac . . . . .	116
5.1.2	Convolution entre une fonction et $\Delta_a$ . . . . .	119
5.1.3	Transformée de Fourier de $\delta_a$ . . . . .	120
5.1.4	Développement en série de Fourier du peigne de Di- rac . . . . .	121
5.1.5	Transformée de Fourier du peigne de Dirac . . . . .	124
5.1.6	Transformée de Fourier d'un signal périodique . . . . .	125
5.2	Formule de Poisson dans $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	125



5.2.1	Application à l'étude d'un signal échantillonné . . . . .	127
5.3	Théorème d'échantillonnage de Shannon . . . . .	129
5.3.1	Démonstration dans le cas général . . . . .	136
5.3.2	Echantillonnage et calcul numérique du spectre - Aliasing . . . . .	137
<b>6</b>	<b>Analyse temps-fréquence</b>	<b>145</b>
6.1	Introduction . . . . .	145
6.2	Principe d'incertitude . . . . .	147
6.2.1	Comportements temporel et spectral d'un signal . . . . .	147
6.2.2	Signaux à durée finie ou à spectre borné . . . . .	149
6.2.3	Troncature du signal en temps ou en fréquence . . . . .	150
6.3	Transformée de Fourier à fenêtre glissante (STFT) . . . . .	150
6.3.1	Fenêtrage . . . . .	150
6.3.2	Les formules de Gabor . . . . .	153
6.3.3	Comparaison des méthodes de Fourier et Gabor . . . . .	157
6.3.4	Méthodes d'analyse . . . . .	159
6.3.5	Estimation de la densité spectrale de puissance d'un signal numérique . . . . .	159
6.4	Distribution de Wigner-Ville . . . . .	161
6.5	La classe de Cohen . . . . .	163
6.5.1	Positivité . . . . .	164
6.5.2	La classe de Cohen . . . . .	164
6.6	Exemples : chirps . . . . .	165
6.7	Code SCILAB « sommaire » pour le spectrogramme . . . . .	166
<b>7</b>	<b>Analyse temps-échelle - Ondelettes</b>	<b>169</b>
7.1	Transformée en ondelettes . . . . .	169
7.1.1	Définition des ondelettes . . . . .	173
7.1.2	Ondelettes dans l'espace physique . . . . .	175
7.1.3	Transformée de Fourier des ondelettes . . . . .	176
7.2	Transformée en ondelettes continue : Inversion . . . . .	177
7.2.1	Exemples . . . . .	178
7.3	Les ondelettes orthogonales . . . . .	183
7.3.1	Problème des moments de l'ondelette . . . . .	187
7.4	Analyse multi-résolution dans $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	188
7.4.1	Exemples de fonctions d'échelle et d'ondelettes . . . . .	192
7.5	Algorithme rapide de décomposition en ondelettes . . . . .	193
7.6	Filtrage par ondelettes . . . . .	198

<b>8</b>	<b>Introduction à l'analyse vocale</b>	<b>199</b>
8.1	Caractéristiques physiques et perceptives des sons . . . . .	199
8.1.1	Sons périodiques simples : hauteur, intensité . . . . .	199
8.1.2	Sons périodiques complexes : hauteur, intensité, timbre . . . . .	201
8.1.3	Sons aperiodiques . . . . .	202
8.1.4	Résumé des qualités d'un son . . . . .	203
8.2	Reconnaissance des sons voisés . . . . .	205
8.2.1	Sons voisés, non voisés, pitch . . . . .	205
8.2.2	Spectrogramme de parole . . . . .	206
8.2.3	Analyse LPC - Prédiction linéaire . . . . .	212
8.3	Exemple . . . . .	214
8.3.1	Reconnaissance automatique d'un son voisé par corrélation à court terme et calcul de la fréquence fondamentale . . . . .	214
8.3.2	Les formants . . . . .	215
<b>9</b>	<b>Exercices et travaux pratiques</b>	<b>219</b>
9.1	Chapitre 2 : analyse spectrale . . . . .	219
9.1.1	Exercices . . . . .	219
9.1.2	Travaux pratiques . . . . .	222
9.2	Chapitre 3 : corrélation des signaux . . . . .	225
9.2.1	Exercices . . . . .	225
9.2.2	Travaux pratiques . . . . .	228
9.3	Chapitre 4 : filtrage . . . . .	230
9.3.1	Exercices . . . . .	230
9.3.2	Travaux pratiques . . . . .	236
9.4	Chapitre 5 : échantillonnage . . . . .	237
9.4.1	Exercices . . . . .	237
9.4.2	Travaux pratiques . . . . .	240
9.5	Chapitre 6 : analyse temps-fréquence . . . . .	243
9.5.1	Exercices . . . . .	243
9.5.2	Travaux pratiques . . . . .	245
9.6	Chapitre 7 : analyse temps-échelle . . . . .	246
9.6.1	Exercices . . . . .	246
9.6.2	Travaux pratiques . . . . .	247
9.7	Chapitre 8 : introduction à l'analyse vocale . . . . .	249
9.7.1	Exercices . . . . .	249
9.7.2	Travaux pratiques . . . . .	251
9.8	Travaux pratiques de synthèse . . . . .	253