

Méthodes mathématiques pour la mécanique des fluides.
Notes de cours pour les étudiants de l'École Normale Supérieure.

Didier Smets

18 janvier 2010

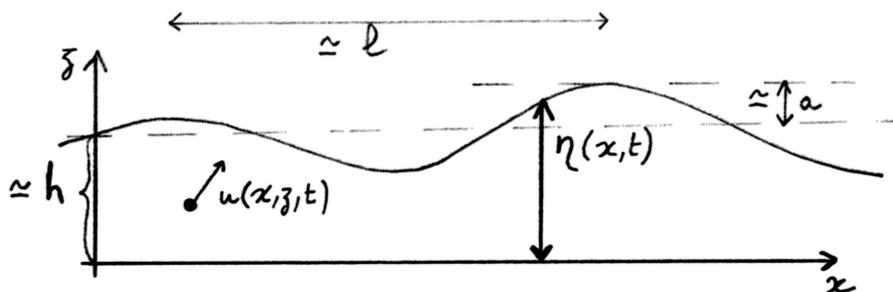
Chapitre 1

Equation de Korteweg - de Vries, un panorama.

1.1 Dérivation formelle

On considère un fluide en écoulement dans un canal rectiligne, et on s'intéresse à la propagation de petites perturbations de l'état de repos correspondant à une hauteur d'eau constante. On néglige les effets transverses, on suppose le fluide incompressible et l'écoulement irrotationnel.

D'un point de vue modélisation, on considère les variables réelles x, z, t qui représentent respectivement les coordonnées horizontale, verticale, et le temps. On note $\eta(x, t)$ la hauteur d'eau à la coordonnée x et à l'instant t , et $u(x, z, t)$ la vitesse du fluide (vecteur à deux composantes) au point (x, z) et à l'instant t .



Les conditions d'incompressibilité et d'irrotationnalité se traduisent par les équations :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{(x,z)} u(\cdot, \cdot, t) = 0, \\ \operatorname{rot}_{(x,z)} u(\cdot, \cdot, t) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

qui ont lieu quel que soit t , à l'intérieur du domaine

$$\mathcal{C}_t = \{(x, z) \text{ t.q. } x \in \mathbb{R}, 0 \leq z \leq \eta(x, t)\}.$$

De la deuxième équation de (1.1) (et du caractère simplement connexe de \mathcal{C}_t) on déduit qu'il existe une fonction $\phi \equiv \phi(\cdot, t) : \mathcal{C}_t \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $u = \nabla_{(x,z)} \phi$. En remplaçant u par

$\nabla_{(x,z)}\phi$ dans la première équation de (1.1) on obtient finalement l'équation de Laplace

$$\Delta\phi = 0.$$

Il nous reste à préciser des conditions aux bords (fond du canal et surface libre) pour ϕ ainsi qu'une loi régissant l'évolution de la surface libre.

Pour ce qui est du fond du canal, la composante verticale de la vitesse doit y être nulle, ce qui se traduit par l'équation

$$\partial_z\phi = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, z = 0.$$

Pour la surface libre, la fonction $z - \eta(x, t)$ est nulle lorsque évaluée le long de la trajectoire d'une particule de fluide initialement à la surface. Dès lors¹

$$0 = \frac{D}{Dt}(z - \eta(x, t)) = \partial_z\phi - \partial_t\eta - \partial_x\phi\partial_x\eta.$$

L'équation de Newton liant accélération et force exercée sur les particules du fluide nous donne

$$\frac{D}{Dt}u = \partial_t u + u\nabla u = F = -\nabla(p + gz),$$

où p représente la pression et g la constante de gravitation. L'évolution de la surface libre est obtenue en supposant que la pression y est constante (égale à la pression extérieure), constante que l'on peut supposer nulle sans perte de généralité. En remplaçant u par $\nabla\phi$ dans l'expression ci-dessus et en éliminant un gradient on obtient l'équation dite de Bernoulli

$$\partial_t\phi + \frac{1}{2}((\partial_x\phi)^2 + (\partial_z\phi)^2) + g\eta = 0.$$

On rassemble finalement les quatre équations ci-dessus pour obtenir le système des ondes à la surface de l'eau, aussi appelé système d'Euler ou encore des water waves :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \quad 0 < z < \eta(x, t) \\ \partial_z\phi = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, z = 0 \\ \partial_z\phi = \partial_t\eta + \partial_x\phi\partial_x\eta & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, z = \eta(x, t) \\ \partial_t\phi + \frac{1}{2}((\partial_x\phi)^2 + (\partial_z\phi)^2) + g\eta = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, z = \eta(x, t). \end{cases} \quad (1.2)$$

Nous allons procéder à une simplification (approximation) du système d'Euler en faisant l'hypothèse que les variations de la hauteur d'eau sont petites devant la hauteur d'eau moyenne et que la longueur d'onde de ces variations est grande devant la hauteur d'eau moyenne. Cette approximation porte le nom de Boussinesq² [2].

On note ϕ_b le potentiel au niveau du fond : $\phi_b(x, t) = \phi(x, 0, t)$ et on procède à un développement de ϕ en puissances de z autour de $z = 0$ (les troncatures de ce

1. $\frac{D}{Dt} = \partial_t + u\nabla_{(x,z)}$ est la dérivée particulière, c'est-à-dire la dérivée en temps après composition avec le flot engendré par le champ de vitesse.

2. Joseph Boussinesq (1842-1929). Né à Saint André de Sangonis (Hérault), il fut d'abord professeur en collège avant de préparer sa thèse sous la direction de Barré de Saint-Venant et d'être nommé professeur à l'université de Lille en 1872. Il succèdera à Henri Poincaré pour la chaire de physique mathématique de la faculté des sciences de Paris, où il terminera sa carrière.

développement seront donc d'autant meilleures que les hypothèses simplificatrices ci-dessus sont fortement vérifiées) :

$$\phi(x, z, t) = \phi_b(x, t) + z\partial_z\phi(x, 0, t) + \frac{z^2}{2}\partial_z^2\phi(x, 0, t) + \dots$$

Puisque ϕ est harmonique, on a pour $k \geq 0$,

$$\partial_z^{2k}\phi(x, 0, t) = (-1)^k\partial_x^{2k}\phi(x, 0, t)$$

et

$$\partial_z^{2k+1}\phi(x, 0, t) = (-1)^k\partial_x^{2k}\partial_z\phi(x, 0, t) = 0$$

en vertu de la condition de vitesse verticale nulle au fond.

Ainsi, on obtient l'expression

$$\phi(x, z, t) = \phi_b(x, t) - \frac{z^2}{2}\partial_x^2\phi_b(x, t) + \frac{z^4}{24}\partial_x^4\phi_b(x, t) - \dots, \quad (1.3)$$

qui ne fait intervenir que z (de manière très explicite) et ϕ_b (ainsi que ses dérivées).

Premier régime : (petite amplitude, onde longue). On suppose (ou plutôt on écrit puisque tout ceci n'est encore que formel) que

$$\begin{cases} \eta(x, t) = h + \varepsilon b(\varepsilon x, \varepsilon t) \\ \phi(x, z, t) = \varphi(\varepsilon x, z, \varepsilon t) \end{cases}$$

et on traduit les équations d'Euler (en fait uniquement celles liées à la surface libre, l'harmonicité de ϕ étant intégrée dans l'approximation) en termes de b et φ :

$$\begin{cases} \varepsilon^2\partial_t b + \varepsilon^2\partial_x b \varepsilon \partial_x \varphi = \partial_z \varphi \\ \varepsilon\partial_t \varphi + \frac{1}{2}\varepsilon^2(\partial_x \varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_z \varphi)^2 + \varepsilon g b = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

pour $z = h + \varepsilon b$.

Par (1.3), on a, en posant $\varphi_b = \varphi(\cdot, 0, \cdot)$,

$$\begin{aligned} \partial_z \varphi &= -z\varepsilon^2\partial_x^2\varphi_b + O(\varepsilon^4) \\ &= -h\varepsilon^2\partial_x^2\varphi_b + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

sur $z = h + \varepsilon b$. On obtient ainsi, après simplification et en dérivant la seconde équation suivant x ,

$$\begin{cases} \partial_t b + h\partial_x v_b = O(\varepsilon) \\ \partial_t v_b + g\partial_x b = O(\varepsilon) \end{cases} \quad (1.5)$$

où $v_b = \partial_x \varphi_b$.

Ce dernier système, si l'on y néglige les termes de reste en $O(\varepsilon)$, conduit à l'équation des ondes à vitesse \sqrt{gh} pour b :

$$\partial_t^2 b - c^2 \partial_x^2 b = 0$$

avec $c = \sqrt{gh}$.

Remarque 1. Ce modèle s'applique assez bien au cas des tsunamis : dans cette situation, on a $h \simeq 4 \cdot 10^3 m$, la hauteur d'eau déplacée est de l'ordre de 1m et la longueur d'onde de l'ordre de $10^5 m$. Pour faire apparaître un ε comme ci-dessus, on utilise par exemple pour unité le $M = 10^{\frac{5}{2}} m$ de sorte que $\varepsilon = 10^{-\frac{5}{2}}$, $h = 4 \cdot 10^{\frac{1}{2}} M$ et $g = 9.81 \cdot 10^{-\frac{5}{2}} M/s^2$. On obtient par l'expression ci-dessus $c = \sqrt{gh} \simeq 2 \cdot 10^{-\frac{1}{2}} M/s = 200 m/s = 720 km/h$.

Deuxième régime : (déviation par rapport au linéarisé). On suppose maintenant que l'amplitude de l'onde (mesurée en unité $h = 1$) est de l'ordre du carré de l'inverse de la longueur d'onde (pour les tsunamis on a $a/h \simeq 10^{-\frac{7}{2}}$ et $h/l \simeq 10^{-\frac{3}{2}}$) et on écrit³

$$\begin{cases} \eta(x, t) = h + \varepsilon^2 b(\varepsilon(x - \sqrt{gh}t), \varepsilon^3 t) \\ \phi(x, z, t) = \varepsilon \varphi(\varepsilon(x - \sqrt{gh}t), z, \varepsilon^3 t) \end{cases}$$

On traduit les équations sur la surface libre :

$$\begin{cases} -\varepsilon^3 \sqrt{gh} \partial_x b + \varepsilon^5 \partial_t b + \varepsilon^3 \partial_x b \varepsilon^2 \partial_x \varphi = \varepsilon \partial_z \varphi \\ -\varepsilon^2 \sqrt{gh} \partial_x \varphi + \varepsilon^4 \partial_t \varphi + \frac{1}{2} \varepsilon^4 (\partial_x \varphi)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\partial_z \varphi)^2 + g \varepsilon^2 b = 0. \end{cases}$$

Comme

$$\partial_z \varphi = -z \varepsilon^2 \partial_x^2 \varphi_b + \frac{z^3}{6} \varepsilon^4 \partial_x^4 \varphi_b + O(\varepsilon^6)$$

avec $z = h + \varepsilon^2 b$ sur l'interface, on obtient

$$\begin{cases} \varepsilon^{-2} (\sqrt{gh} \partial_x b - h \partial_x^2 \varphi_b) = \partial_t b + \partial_x b \partial_x \varphi_b + b \partial_x^2 \varphi_b - \frac{h^3}{6} \partial_x^4 \varphi_b + O(\varepsilon) \\ \varepsilon^{-2} (gb - \sqrt{gh} \partial_x \varphi_b) = -\partial_t \varphi_b - \frac{1}{2} (\partial_x \varphi_b)^2 - \frac{1}{2} \sqrt{gh} h^2 \partial_x^3 \varphi_b + O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

On dérive ensuite la seconde équation ci-dessus par rapport à x , on multiplie l'équation résultante par $\sqrt{h/g}$ et la retranche ensuite de la première. On obtient, en identifiant les termes de même ordre en ε :

$$\begin{cases} \partial_x \varphi_b = \sqrt{\frac{g}{h}} b + O(\varepsilon^2) \\ \partial_t b + \partial_x b \partial_x \varphi_b + b \partial_x^2 \varphi_b - \frac{h^3}{6} \partial_x^4 \varphi_b + \sqrt{\frac{h}{g}} \partial_t \partial_x \varphi_b + \sqrt{\frac{h}{g}} \partial_x \varphi_b \partial_x^2 \varphi_b + \frac{1}{2} h^3 \partial_x^4 \varphi_b = O(\varepsilon). \end{cases}$$

En réinjectant finalement la première équation ci-dessus dans la seconde, on aboutit au système

$$\begin{cases} \partial_x \varphi_b = \sqrt{\frac{g}{h}} b + O(\varepsilon^2) \\ \partial_t b + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} b \partial_x b + \frac{h^3}{3} \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_x^3 b = O(\varepsilon). \end{cases}$$

Modulo le terme de reste en $O(\varepsilon)$, la dernière équation est celle qui fut obtenue par Korteweg et de Vries en 1895 :

$$\boxed{\partial_t b + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} b \partial_x b + \frac{h^3}{3} \sqrt{\frac{g}{h}} \partial_x^3 b = 0.} \quad (1.6)$$

3. On note que les fonctions b et φ sont considérées dans un repère mobile en translation à vitesse c vers la droite, repère qui n'est pas sans lien avec la solution de l'équation des ondes ci-dessus...

1.2 Ondes solitaires, existence et unicité

Pour des raisons de commodité, l'équation de Korteweg - de Vries que nous étudierons par la suite s'écrit

$$\boxed{\partial_t u - 6u\partial_x u + \partial_x^3 u = 0.} \quad (1.7)$$

Il est facile de se rendre compte que (1.6) et (1.7) peuvent être transformées l'une en l'autre au moyen de changements de variable d'espace $x \mapsto \lambda x$ et d'inconnue $u \mapsto \alpha u$ bien choisis. La raison pour le choix du facteur -6 devant la nonlinéarité apparaîtra plus tard.

Définition 1. *On appelle solution en onde progressive, ou encore en onde solitaire, toute solution non identiquement nulle de (1.7) de la forme*

$$u(x, t) = U(x - ct)$$

pour un certain $c \in \mathbb{R}$. On dit que c est la vitesse de l'onde correspondante, car la solution est stationnaire dans un repère mobile se déplaçant à vitesse c .

Théorème 1. *Pour toute vitesse $c > 0$, et à translation près, il existe une unique solution de (1.7) en onde progressive à vitesse c parmi les fonctions trois fois continûment dérivables dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre trois tendent vers 0 à l'infini.*

Démonstration. Soit $u(x, t) = U(x - ct)$ une telle onde. En injectant cette expression dans l'équation (1.7) et on obtient

$$-cU' - 6UU' + U''' = 0,$$

autrement dit

$$(-cU - 3U^2 + U'')' = 0.$$

Par intégration et en tenant compte des conditions à l'infini on obtient la condition nécessaire

$$-cU - 3U^2 + U'' = 0. \quad (1.8)$$

Après multiplication par U' on obtient

$$\left(-\frac{c}{2}U^2 - U^3 + \frac{1}{2}(U')^2\right)' = 0$$

et de nouveau les conditions à l'infini nous fournissent la condition nécessaire

$$\frac{1}{2}(U')^2 = \frac{c}{2}U^2 + U^3. \quad (1.9)$$

On en déduit que U ne peut pas s'annuler, car auquel cas U' s'annulerait au même point (par (1.9)), il en viendrait ensuite de même pour U'' et U''' (par (1.7) et (1.8)), et finalement U serait identiquement nulle, par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

On déduit aussi de la relation (1.9) qu'en un point d'extremum de U on doit avoir $\frac{c}{2}U^2 + U^3 = 0$, autrement dit $U = -\frac{c}{2}$ ou $U = 0$. Si $c \leq 0$, la fonction $\frac{c}{2}t^2 + t^3$ est négative entre 0 et $-\frac{c}{2}$, ce qui n'est pas compatible avec (1.9). Dès lors nécessairement $c > 0$, et U est partout comprise entre $-\frac{c}{2}$ et 0.

Sans perte de généralité (invariance par translation et conditions à l'infini), on peut supposer que $x = 0$ est tel que $U(0) = -\frac{c}{2}$ et $U'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Après prise de racine carré, on peut alors récrire (1.9) sous la forme

$$\frac{U'}{\sqrt{cU^2 + 2U^3}} = 1 \quad \text{sur } (0, +\infty),$$

et après intégration

$$x = -\frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^x \frac{U'(y)}{U(y)\sqrt{1 + \frac{2}{c}U(y)}} dy = -\frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-\frac{c}{2}}^{U(x)} \frac{du}{u\sqrt{1 + \frac{2}{c}u}}.$$

Par le changement d'inconnue $v = \sqrt{1 + \frac{2}{c}u}$ (donc $u = \frac{c}{2}(v^2 - 1)$), on obtient

$$x = \frac{2}{\sqrt{c}} \int_0^{\sqrt{1 + \frac{2}{c}U(x)}} \frac{dv}{1 - v^2} = \frac{1}{\sqrt{c}} \left[\log \frac{1+v}{1-v} \right]_0^{\sqrt{1 + \frac{2}{c}U(x)}},$$

d'où il suit

$$\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{c}U(x)}}{1 - \sqrt{1 + \frac{2}{c}U(x)}} = \exp(\sqrt{c}x),$$

c'est-à-dire

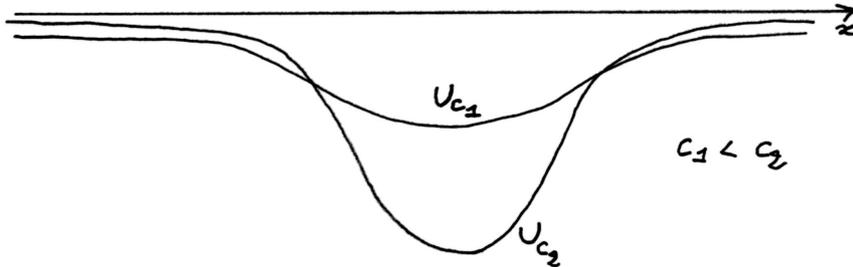
$$\sqrt{1 + \frac{2}{c}U(x)} = \frac{\exp(\sqrt{c}x) - 1}{\exp(\sqrt{c}x) + 1},$$

et finalement

$$U(x) = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}x\right).$$

On montre sans peine que nécessairement U possède la même expression pour $x \neq 0$, et l'unicité (ainsi que l'existence!) annoncées en découlent. \square

Remarque 2. *On remarque que les ondes progressives à grandes vitesse sont grandes (en amplitude) et ramassées (en extension spatiale), alors que les ondes progressives à petite vitesse sont petites et étendues. En fait, toutes sont obtenues par dilatation et mise à échelle d'une seule d'entre elles.*



Dans la suite, on retient la notation

$$U_c(x) = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}x\right).$$

1.3 Croisement d'ondes solitaires, une mise en bouche

Afin de percevoir une première facette de la richesse de la dynamique de l'équation de Korteweg - de Vries, considérons la donnée initiale⁴

$$u_0(x) = -6\operatorname{sech}^2(x).$$

On vérifiera par un calcul explicite un peu fastidieux mais élémentaire, que la fonction définie par

$$u(x, t) = -12 \frac{3 + 4\cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{(3\cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t))^2} \quad (1.10)$$

est solution de l'équation de Korteweg - de Vries et vérifie la relation de Cauchy

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

La forme (1.10) étant explicite mais pas illuminante, nous cherchons un (ou des) repère mobile (donc de la forme $\bar{x} = x - ct + x_0$ pour certains c et x_0 à déterminer) dans lequel l'asymptotique $t \rightarrow \pm\infty$ prendrait une forme plus commune.

On remarque que

$$\bar{u}(\bar{x}, t) \equiv u(\bar{x} + ct - x_0, t) = -12 \frac{A}{B}$$

où A et B sont de la forme $\sum c_k(\bar{x}, x_0) \exp(a_k(c)t)$. Dès lors, le comportement à l'infini du quotient A/B est totalement dépendant du plus grand $a_k(c)$ (pour les t positifs) ou du plus petit (pour les t négatifs).

Une rapide analyse de la situation nous amène à la conclusion que

$$\text{si } c \notin \{4, 16\}, \quad \text{alors } \lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{u}(\bar{x}, t) = 0$$

uniformément pour \bar{x} dans un compact de \mathbb{R} .

Lorsque $c = 4$, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{u}(\bar{x}, t) &= -12 \frac{\frac{1}{2} \exp(-4(\bar{x} - x_0))}{\left(\frac{3}{2} \exp(-(\bar{x} - x_0)) + \frac{1}{2} \exp(-3(\bar{x} - x_0))\right)^2} \\ &= -24 \frac{1}{\left(3 \exp((\bar{x} - x_0)) + \exp(-(\bar{x} - x_0))\right)^2}. \end{aligned}$$

Pour obtenir la forme la plus symétrique possible, on choisit ainsi x_0 de telle sorte que

$$3 \exp(-x_0) = \exp(x_0),$$

autrement dit

$$x_0 = \frac{1}{2} \log 3,$$

et on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{u}(\bar{x}, t) = -2 \operatorname{sech}^2(\bar{x}) = U_c(\bar{x}),$$

4. Bien qu'ayant une forme similaire aux ondes solitaires, noter qu'elle ne fait pas partie de la famille décrite à la section qui précède.

uniformément pour \bar{x} dans un compact de \mathbb{R} .

Une analyse très similaire nous amène à la conclusion

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{u}(\bar{x}, t) = -2 \operatorname{sech}^2(\bar{x}) = U_4(\bar{x}),$$

uniformément pour \bar{x} dans un compact de \mathbb{R} , à condition de choisir cette fois

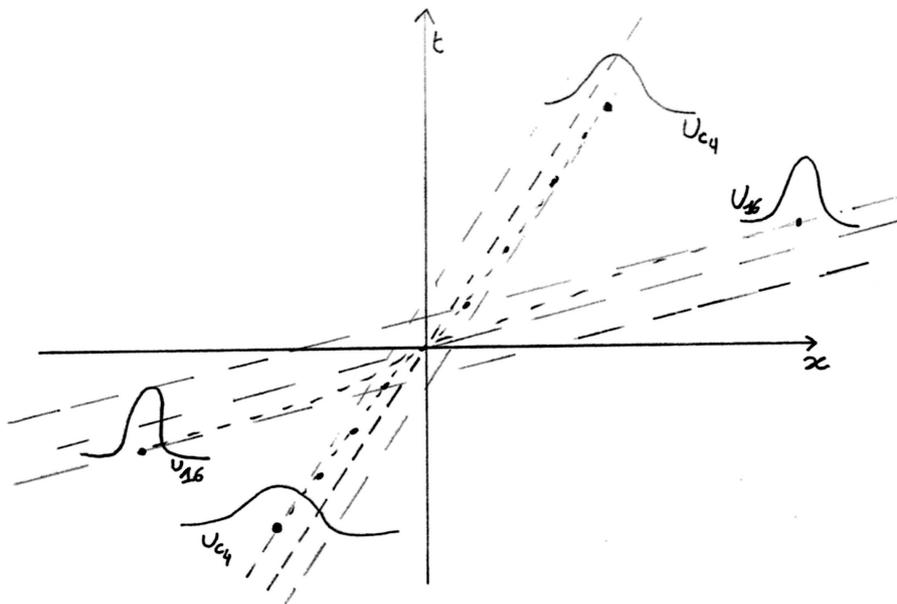
$$x_0 = -\frac{1}{2} \log 3.$$

Enfin, lorsque $c = 16$, on aboutit à

$$\lim_{t \rightarrow +\pm\infty} \bar{u}(\bar{x}, t) = -8 \operatorname{sech}^2(2\bar{x}) = U_{16}(\bar{x}),$$

modulo les choix $x_0 = \mp \frac{1}{4} \log 3$.

Comme le montre le dessin ci-dessous, l'interprétation des ces asymptotiques est que les solitons U_4 et U_{16} se sont croisés (celui à vitesse 16 rattrape celui à vitesse 4), ont interagé un temps, et sont ensuite ressortis pratiquement inchangés, si ce n'est par un décalage spatial ($\log 3$ pour le lent qui s'est donc vu accéléré, et $-\frac{1}{2} \log 3$ pour le rapide, qui s'est donc vu décéléré).



1.4 Quelques résultats pour les impatientes

Nous avons parlé de solutions de l'équation de Korteweg - de Vries sans s'assurer de leur existence. Bien que cela ne soit pas notre objectif d'étudier en détails le problème de Cauchy (bien que l'approche permet in fine de le résoudre) mentionnons néanmoins le résultat suivant (certainement pas le plus général mais suffisant pour ce qui nous concerne) :

Théorème 2 (Bona & Smith, 1975 [3]). *Si $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^5$, il existe une unique solution de (1.7) qui appartienne à $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ et qui coïncide à $t = 0$ avec u_0 .*

5. On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ la classe de Schwartz en dimension 1 d'espace, voir par exemple l'appendice.

Le théorème suivant est à la base de la méthode que nous présentons dans ces notes, nous le démontrerons dans le Chapitre 7.

Théorème 3 (Gardner, Greene, Kruskal & Miura, 1974 [8]). *Dans les conditions et avec les notations du théorème précédent, le spectre de l'opérateur de Schrödinger*⁶

$$L_t \Psi = -\Psi'' + u(\cdot, t)\Psi$$

où $u(\cdot, t)$ apparaît comme un potentiel, ne dépend pas du temps.

On dit que la famille $L_{t \in \mathbb{R}}$ est une déformation iso-spectrale de L_0 .

En allant un peu plus loin que ce que nous ferons, on peut alors démontrer le résultat suivant qui concerne maintenant une donnée initiale essentiellement quelconque (à la différence de notre exemple très explicite de la section précédente) :

Théorème 4 (Eckhaus & Schuur, 1983 [6, 10]). *Soit $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et N le nombre de valeurs propres négatives de L_0 . Alors il existe $0 < C_1 < \dots < c_N$ et $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x > \frac{c_1}{2}t} \left| u(x, t) - \sum_{k=1}^N U_{c_k}(x - c_k t - \bar{x}_k) \right| = 0.$$

De plus, pour chaque $1 \leq k \leq N$,

$$c_k = -4\lambda_k$$

où $\lambda_N < \dots < \lambda_1 < 0$ désignent les valeurs propres négatives de L_0 .

Ainsi, toute solution se comporte à l'infini en temps comme une superposition d'ondes solitaires⁷.

6. Il s'agit d'un opérateur non borné défini sur une partie dense de $L^2(\mathbb{R})$, nous y reviendrons au Chapitre 4.

7. Nous n'insisterons pas ici sur la condition $x > \frac{c_1}{2}t$

Chapitre 2

Equations d'ondes, relations de dispersion.

Nous avons rencontré au chapitre précédent une des équations aux dérivées partielles les plus simples, à savoir l'équation des ondes à vitesse $c > 0$ en dimension 1 d'espace :

$$\partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0. \quad (2.1)$$

Le problème de Cauchy associé à (2.1) consiste à déterminer une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable en x et en t , qui vérifie (2.1) ponctuellement sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, et telle que

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) \\ \partial_t u(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

où $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $v_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ sont des données (appelées données de Cauchy) du problème.

La solution à ce problème de Cauchy est fournie par **d'Alembert**¹ :

Théorème 5. *Soient $u_0 \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R})$ et $v_0 \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$. Il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ de (2.1) admettant u_0 et v_0 comme données de Cauchy et telle que quel que soit $T > 0$ il existe un compact $K_T \subset \mathbb{R}$ pour lequel $\{\text{supp } u\} \cap \{\mathbb{R} \times [0, T]\} \subset K_T \times [0, T]$.*

Démonstration. **Existence** : d'Alembert remarque que toute fonction de la forme

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct),$$

où f et g sont des fonctions de classe \mathcal{C}^2 quelconques, est solution de (2.1). Pour que cette solution satisfasse aux données de Cauchy, il faut, par identification, que

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = u_0(x) \\ cf'(x) - cg'(x) = v_0(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ce qui se ramène à

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{cu'_0(x) + v_0(x)}{2c} \\ g'(x) = \frac{cu'_0(x) - v_0(x)}{2c} \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

1. Bien que d'Alembert soit mort alors que Cauchy ne fut pas encore né!

dont une solution est fournie par intégration

$$f(x) = \int_{-\infty}^x \frac{cu'_0(y) + v_0(y)}{2c} dy \quad g(x) = \int_{-\infty}^x \frac{cu'_0(y) - v_0(y)}{2c} dy. \quad (2.3)$$

On notera que si f et g ne sont pas nécessairement à supports compacts, il en va différemment pour $f + g$ et plus généralement pour u qui elles le sont.

Unicité : Puisque l'équation est linéaire, on se ramène sans peine au cas où u_0 et v_0 sont identiquement nulles. Soit u une solution pour ces données de Cauchy, pour $t \geq 0$ on pose

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{c^2} (\partial_t u)^2(y, t) + (\partial_x u)^2(y, t) dy \right].$$

Pour $t \leq T$, l'intégrale ci-dessus définissant l'**énergie** $E(t)$ se résume en réalité à une intégrale sur le compact K_T . On obtient, par dérivation en t et intégration par parties, en tenant compte du support compact de u :

$$\frac{d}{dt} E(t) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{2}{c^2} \partial_t u \partial_{tt} u + 2 \partial_x u \partial_{xt} u \right] = \int_{\mathbb{R}} \left[2 \partial_t u \left(\frac{1}{c^2} \partial_{tt} u - \partial_{xx} u \right) \right] = 0,$$

où l'on a utilisé l'équation vérifiée par u pour la dernière égalité. Puisque $E(0) = 0$ en vertu des données de Cauchy, il s'en suit que $E(t) = 0$ pour tout t et par conséquent u est identiquement nulle. \square

Le corollaire suivant est une conséquence directe de la formule de d'Alembert :

Corollaire 1 (Vitesse de propagation finie). *Si $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ et $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$ sont toutes deux à support dans un compact $K_0 \subset \mathbb{R}$, alors l'unique solution u fournie par le théorème précédent est telle que*

$$\{\text{supp } u(\cdot, t)\} \cup \{\text{supp } \partial_t u(\cdot, t)\} \subset K_t \equiv K_0 + \overline{B(0, ct)}.$$

\square

Exercice 1. *Réfléchir à une extension du Théorème 5, en particulier pour ce qui est de l'unicité, pour des données de Cauchy qui ne soient pas à support compact.*

La solution fournie par d'Alembert laisse apparaître les opérateurs différentiels

$$u \mapsto \partial_t u - c \partial_x u \quad \text{et} \quad u \mapsto \partial_t u + c \partial_x u,$$

dont la composition, au moins de manière formelle, redonne l'équation des ondes :

$$\left(\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx} \right) = \left(\partial_t - c \partial_x \right) \left(\partial_t + c \partial_x \right) = \left(\partial_t + c \partial_x \right) \left(\partial_t - c \partial_x \right).$$

Les équations $\partial_t u \pm c \partial_x u$ sont deux cas particuliers d'**équations de transport linéaires** de la forme

$$\partial_t u + \vec{V}(x, t) \cdot \nabla_x u = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+,$$

dont les solutions sont constantes le long des courbes intégrales² du champ de vecteurs \vec{V} .³

Avant de poursuivre, notons une dernière fois trois propriétés importantes de la solution générale de d'Alembert, pour laquelle la partie en $f(x + ct)$ sera identifiée comme "bosse voyageant vers la gauche" et celle en $g(x - ct)$ bosse voyageant vers la droite. On a

- Invariabilité des profils f et g des deux bosses dans le temps.
- Non interaction entre celles-ci.
- Vitesse de propagation finie (et fixe) de chacune d'elles.

La première et la troisième propriétés sont liées aux fait que la vitesse d'une onde plane pour l'équation ne dépend pas de sa fréquence. On dit que la **relation de dispersion**⁴ est linéaire.

La deuxième propriété est caractéristique des équations linéaires, ce qui implique ce que les physiciens appellent le **principe de superposition** : si u et v sont deux solutions, alors il en va de même de toute combinaison linéaire de u et v .

Dans la suite de ce chapitre, nous modifions l'équation de transport $\partial_t u + c\partial_x u = 0$ afin de briser la relation de dispersion linéaire. Nous nous attaquerons à la linéarité de l'équation dans le chapitre suivant.

2.1 Equation d'Airy, relation de dispersion

Nous modifions l'équation de transport en y ajoutant un terme d'ordre 3^{5 6} :

$$\partial_t u + c\partial_x u + \partial_{xxx} u = 0. \quad (2.4)$$

Une telle équation possède des solutions dites en **ondes planes** :

$$u(x, t) = \exp(i(kx - \omega t)),$$

à condition que le **nombre d'onde** k et la **pulsation** ω soient liés par la **relation de dispersion**

$$\omega = \omega(k) \equiv ck - k^3.$$

Ces solutions sont fonctions de la variable

$$\xi = x - \frac{\omega(k)}{k}t,$$

de sorte qu'elles mettent en oeuvre un profil évoluant sans déformation dans un repère mobile à la vitesse

$$c(k) = \frac{\omega(k)}{k} = c - k^2. \quad (2.5)$$

2. C'est-à-dire des solutions du système d'équations différentielles ordinaires $\dot{x}(t) = \vec{V}(x(t), t)$.

3. On en dira un petit peu plus au chapitre suivant lorsqu'on esquissera la notion de courbe caractéristique.

4. Voir ci-après.

5. Ce choix qui peut paraître arbitraire à première vue se justifiera lorsque le concept de dispersion sera bien compris.

6. Pour $c = 0$ il est d'usage de l'appeler l'équation d'Airy.

Si $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est quelconque, la théorie de Fourier nous assure qu'elle peut être réalisée comme une superposition (infinie non dénombrable) d'ondes planes :

$$u_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} A(k) \exp(ikx) dk,$$

où

$$A(k) = \mathbb{F}u_0(k) = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \exp(-ikx) dx.$$

est la⁷ transformée de Fourier de u_0 .

Puisque nous connaissons l'évolution temporelle de chacune de ces ondes planes par l'équation (2.4), le principe de superposition⁸ nous fournit une solution de (2.4) pour la donnée de donnée de Cauchy u_0 . En effet, une application du théorème de dérivation sous le signe intégral nous assure le

Théorème 6. Soit $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, alors la fonction u définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par la relation

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} A(k) \exp(i(kx - \omega(k)t)) dk \quad (2.6)$$

appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, coïncide avec u_0 en $t = 0$, et vérifie l'équation (2.4) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Remarque 3. *i)* La formule pour u donnée par (2.6) permet de définir u pour $t < 0$, tout en restant solution, on parle d'une **équation réversible en temps**.

ii) En termes de transformée de Fourier suivant la variable x , on peut récrire (2.6) sous la forme

$$\mathbb{F}u(t, k) = \mathbb{F}u_0(k) \cdot \exp(-i\omega(k)t), \quad (2.7)$$

en particulier le module de $\mathbb{F}u(t, k)$ est indépendant de t car ω est réelle.

Exercice 2. Montrer que la solution fournie par le Théorème 6 est unique dans la classe des fonctions $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ telles que $u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ⁹ quel que soit $t \geq 0$. (Indication : on pourra utiliser une méthode d'énergie comme il a été fait dans le cas de l'équation des ondes, en posant cette fois $E(t) = \int_{\mathbb{R}} |u(y, t)|^2 dy$.)

Puisque la vitesse de chaque onde plane dépend de sa fréquence par le biais de la relation de dispersion (2.5), le paquet d'ondes initialement rassemblé en la donnée de Cauchy u_0 aura tendance à se disperser sur l'ensemble de la droite réelle et ainsi la solution $u(x, t)$ à s'aplatir lorsque t grandit.

Une telle estimation, objet du théorème suivant, est appelée une **estimation de dispersion**.

Théorème 7. Soit $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, alors la solution u de l'équation (2.4) fournie par la formule (2.6) vérifie l'inégalité

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t)| \leq C \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{3}} \quad (2.8)$$

pour chaque $t > 0$, où C est une constante universelle¹⁰.

7. Pour les diverses conventions de normalisation de la transformation de Fourier, ainsi que leurs propriétés, voir l'annexe A.

8. Ou plutôt une extension directe de celui-ci.

9. Pour la définition de la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, voir l'annexe A.

10. Dont nous serons en mesure de donner une valeur exacte dans la section suivante.

Démonstration. L'estimation est entièrement basée sur la formule explicite fournie par (2.7). Puisque la fonction $\Psi : k \mapsto \exp(i\frac{k^3}{3})$ est continue et bornée sur \mathbb{R} , elle s'identifie à une distribution tempérée. Par bijectivité de la transformation de Fourier de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, il existe une distribution tempérée $\text{Ai} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $\text{Ai} = \mathbb{F}^{-1}(\Psi)$. On écrit alors, après avoir posé $\lambda = (3t)^{-\frac{1}{3}}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(u_0) \exp(-i\omega(k)t) &= \mathbb{F}(u_0) \exp(-ickt) \exp(ik^3t) \\ &= \mathbb{F}(u_0) \exp(-ickt) \mathbb{F}(\mathcal{F}^{-1}(\partial_\lambda \Psi)) \\ &= \mathbb{F}(u_0) \mathbb{F}(\tau_{ct} \mathbb{F}^{-1}(\partial_\lambda \Psi)) \\ &= \mathbb{F}(u_0) \mathbb{F}(\tau_{ct} |\lambda| \partial_{\frac{1}{\lambda}} \mathcal{F}^{-1}(\Psi)) \\ &= |\lambda| \mathbb{F}(u_0 * (\tau_{ct} \partial_{\frac{1}{\lambda}} \text{Ai})), \end{aligned}$$

de sorte que par bijectivité de \mathbb{F} et (2.7) il vient

$$u(\cdot, t) = \frac{1}{\sqrt[3]{3t}} u_0 * \tau_{ct} \partial_{\sqrt[3]{3t}} \text{Ai} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (2.9)$$

Nous montrerons dans la section suivante que Ai est une distribution tempérée attachée à une fonction continue et bornée sur \mathbb{R} . Il s'en suit par l'inégalité de Young que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3t}} \|\text{Ai}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

d'où la conclusion. □

Remarque 4. *Puisque nous montrerons que $\text{Ai} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, on peut récrire (2.9) comme*

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt[3]{3t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \text{Ai}\left(\frac{(x-ct)-y}{\sqrt[3]{3t}}\right) dy, \quad (2.10)$$

ce qui constitue la formulation explicite de la solution de l'équation d'Airy (2.4).

2.2 Méthode du col et fonction d'Airy

Le but de cette section est de présenter par l'exemple la méthode dite du col pour le calcul d'intégrales dans le plan complexe. Cette méthode fut inventée par le physicien P. Debye et développée notamment par L. Brillouin (voir par exemple [4]).

D'un point de vue formel, la fonction d'Airy est définie sur la droite réelle par la formule

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(i\left(kx + \frac{k^3}{3}\right)\right) dk = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(kx + \frac{k^3}{3}\right) dk.$$

D'un point de vue mathématique, il est nécessaire de donner un sens aux intégrales ci-dessus, puisque leurs intégrands ne sont pas intégrables au sens de Lebesgue, et ensuite de vérifier que cette définition coïncide avec celle de la section précédente faisant intervenir une transformation de Fourier inverse au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Une fois cette tâche accomplie, nous chercherons également à donner un développement asymptotique de $\text{Ai}(x)$ pour $x \rightarrow \pm\infty$.

Étape 1 : donner un sens aux intégrales.

Nous allons montrer que la limite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \exp\left(i\left(kx + \frac{k^3}{3}\right)\right) dk$$

existe, uniformément pour x dans un compact de \mathbb{R} . Pour cela, il nous suffira d'invoquer le lemme suivant sur les **intégrales oscillantes** (voir par exemple [13]) :

Lemme 1 (van der Corput). Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_*$ et $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^k telle que $|\phi^{(k)}(x)| \geq 1$ pour tout x dans (a, b) . Alors, si $k \geq 2$ ou si $k = 1$ et ϕ' est monotone sur (a, b) , quel que soit $\lambda > 0$ on a l'estimation

$$\left| \int_a^b \exp(i\lambda\phi(x)) dx \right| \leq C_k \lambda^{-\frac{1}{k}},$$

où C_k ne dépend que de k (et en particulier ni de a , b , ou ϕ).

Démonstration. Supposons d'abord que $k = 1$. On note D l'opérateur différentiel à coefficients variables

$$D(f) = (i\lambda\phi')^{-1} f'$$

et D^t son transposé :

$$D^t(f) = -\left((i\lambda\phi')^{-1} f\right)'$$

Par construction, on a $D(\exp(i\lambda\phi)) = \exp(i\lambda\phi)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \int_a^b \exp(i\lambda\phi(x)) dx &= \int_a^b D(\exp(i\lambda\phi(x))) dx \\ &= \int_a^b \exp(i\lambda\phi(x)) D^t(1) dx + \left[(i\lambda\phi')^{-1} \exp(i\lambda\phi)\right]_a^b. \end{aligned}$$

Puisque $|\phi'| \geq 1$ par hypothèse,

$$\left| \left[(i\lambda\phi')^{-1} \exp(i\lambda\phi)\right]_a^b \right| \leq \frac{2}{\lambda}.$$

Enfin, puisque ϕ' est monotone,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \exp(i\lambda\phi(x)) D^t(1) dx \right| &\leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b \left| \left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)' \right| dx = \frac{1}{\lambda} \left| \int_a^b \left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)' dx \right| \\ &= \frac{1}{\lambda} \left| \left[\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right) \right]_a^b \right| \leq \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

La conclusion suit lorsque $k = 1$ en choisissant $C_1 = 3$.

On procède ensuite par récurrence sur k . Quitte à remplacer ϕ par son opposé, on peut supposer que $\phi^{(k+1)} \geq 1$ sur (a, b) , de sorte que $\phi^{(k)}$ est croissante sur (a, b) . S'il existe $c \in (a, b)$ tel que $\phi^{(k)}(c) = 0$, alors quel que soit $\delta > 0$, en dehors de l'intervalle $(c - \delta, c + \delta)$

on a $|\phi^{(k)}(x)| \geq \delta$, pour peu que l'intervalle soit entièrement contenu dans (a, b) . Dans ce cas, l'hypothèse de récurrence nous fournit les estimations

$$\left| \int_a^{c-\delta} \exp(i\lambda\phi(x)) dx \right| \leq C_k(\lambda\delta)^{-\frac{1}{k}},$$

et

$$\left| \int_{c+\delta}^b \exp(i\lambda\phi(x)) dx \right| \leq C_k(\lambda\delta)^{-\frac{1}{k}}.$$

D'autre part, on a toujours

$$\left| \int_{c-\delta}^{c+\delta} \exp(i\lambda\phi(x)) dx \right| \leq 2\delta.$$

Par sommation, on obtient

$$\left| \int_a^b \exp(i\lambda\phi(x)) dx \right| \leq 2C_k(\lambda\delta)^{-\frac{1}{k}} + 2\delta$$

que l'on optimise en choisissant $\delta = \lambda^{-\frac{1}{k+1}}$, ce qui donne

$$\left| \int_a^b \exp(i\lambda\phi(x)) dx \right| \leq (2C_k + 2)\lambda^{-\frac{1}{k+1}}.$$

Lorsque c n'existe pas ou lorsque $(c - \delta, c + \delta)$ n'est pas entièrement contenu dans (a, b) , le raisonnement est très similaire et l'estimation un peu meilleure. La conclusion suit en choisissant $C_{k+1} = (2C_k + 2)$. \square

Corollaire 2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $R > \sqrt{|x|}$. Quel que soit l'intervalle (a, b) d'intersection vide avec $(-R, R)$, on a

$$\left| \int_a^b \exp\left(i\left(xk + \frac{k^3}{3}\right)\right) dk \right| \leq \frac{3}{R^2 + x}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme de van der Corput à la fonction $\phi(k) = (xk + \frac{k^3}{3})/(x + R^2)$ avec le choix $\lambda = x + R^2$ et $k = 1$ ¹¹. \square

Corollaire 3. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la limite

$$\tilde{\text{Ai}}(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \exp\left(i\left(kx + \frac{k^3}{3}\right)\right) dk$$

existe. La convergence est uniforme en R pour $x \geq x_0$ avec x_0 fixé.

Etape 2 : concordance des définitions.

Dans la section qui précède, nous avons défini la distribution tempérée Ai comme étant la transformée de Fourier inverse de $\Psi : k \mapsto \exp(i\frac{k^3}{3})$.

Proposition 1. $\tilde{\text{Ai}} = \text{Ai}$.

11. Il y a ici une malencontreuse concordance des k , le lecteur attentif n'en fera cas.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}_*$, on pose $\Psi_n = \Psi 1_{[-n,n]}$, de sorte que $\Psi_n \in L^1(\mathbb{R})$. Des lors la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ de fonctions de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ définies par

$$g_n(x) = \mathbb{F}^{-1}(\Psi_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \exp\left(i\left(kx + \frac{k^3}{3}\right)\right) dk$$

converge uniformément sur les compacts vers $\tilde{\text{Ai}}$. D'autre part, il est aisé de vérifier que la suite $(\Psi_n)_{n \geq 1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers Ψ . Par continuité de la transformation de Fourier inverse de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on déduit que $(g_n)_{n \geq 1}$ converge au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{F}^{-1}(\Psi) = \text{Ai}$. La conclusion suit. \square

Nous pouvons aisément déduire de ce qui précède que la fonction $x \mapsto \text{Ai}(x)$ est continue sur \mathbb{R} et tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$. Le comportement lorsque $x \rightarrow -\infty$ est plus délicat.

Etape 3 : asymptotiques à l'infini.

Nous allons maintenant utiliser la théorie de Cauchy afin d'évaluer plus en détails les intégrales du type

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \exp\left(i\left(xk + \frac{k^3}{3}\right)\right) dk. \quad (2.11)$$

Pour ce faire, on remarque d'abord que pour x fixé, la fonction

$$\xi \mapsto \exp\left(i\left(x\xi + \frac{\xi^3}{3}\right)\right)$$

est analytique sur \mathbb{C} tout entier. Par conséquent,

$$\int_{-R}^R \exp\left(i\left(xk + \frac{k^3}{3}\right)\right) dk = \int_{\gamma} \exp\left(i\left(x\xi + \frac{\xi^3}{3}\right)\right) d\xi$$

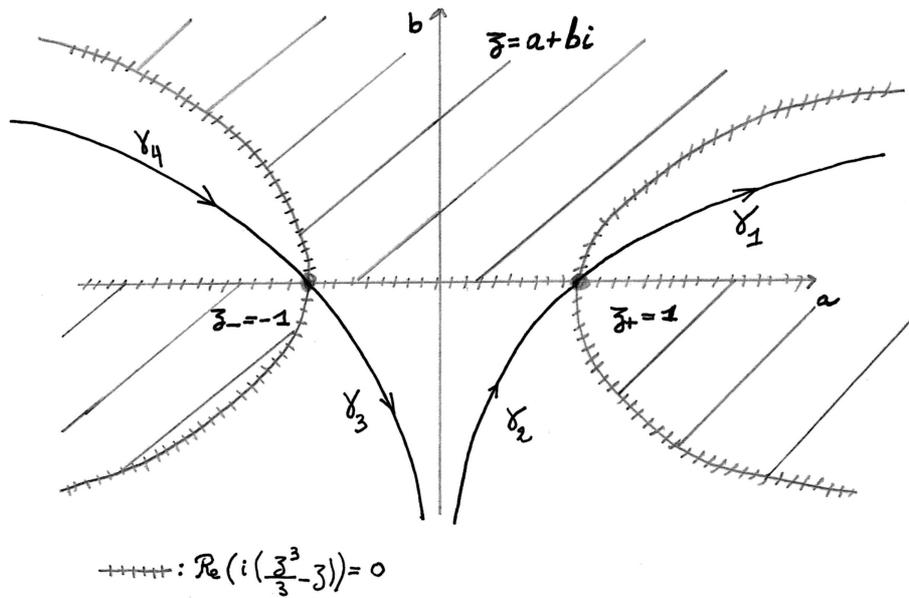
quel que soit le chemin γ reliant le point $-R + 0i$ au point $R + 0i$. La méthode du col consiste à choisir pour γ un chemin plongeant le plus efficacement possible vers les zones du plan complexe dans lesquelles $\text{Re}\left(i\left(x\xi + \frac{\xi^3}{3}\right)\right) \leq 0$. Décrivons la par l'exemple.

Cas où $x < 0$.

On rend d'abord les choses un peu plus homogènes en posant $\xi = |x|^{\frac{1}{2}}z$, transformant ainsi l'intégrale (2.11) en

$$\frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-R|x|^{-\frac{1}{2}}}^{R|x|^{-\frac{1}{2}}} \exp\left(i|x|^{\frac{3}{2}}\left(\frac{z^3}{3} - z\right)\right) dz. \quad (2.12)$$

La fonction $z \mapsto \frac{z^3}{3} - z$ possède deux points critiques $z_{\pm} = \pm 1$. Le chemin γ est tracé sur la figure ci-dessous, chaque branche $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et γ_4 correspondant à une ligne de flot moins gradient pour la fonction $\text{Re}\left(i\left(\frac{z^3}{3} - z\right)\right)$ aboutissant à ou partant de z_{\pm} .



Les équations de Cauchy-Riemann affirment que les gradients des parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique sont orthogonaux en tout point. Dès lors, la partie imaginaire $\text{Im}(i(\frac{z^3}{3} - z))$ est constante (égale à sa valeur en z_{\pm}) le long de chaque γ_k .

On écrit alors, par le changement $\tilde{z} = z - 1$ et un développement exact autour du point $z = z_+$,

$$I_1 = \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{\gamma_1} \exp(i|x|^{\frac{3}{2}}(\frac{z^3}{3} - z)) dz = \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \exp(-\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}i) \int_{\tilde{\gamma}_1} \exp(i|x|^{\frac{3}{2}}\tilde{z}^2(1 + \frac{1}{3}\tilde{z})) d\tilde{z},$$

où $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 - 1$.

Nous posons $t = -i\tilde{z}^2(1 + \frac{1}{3}\tilde{z})$, de sorte que $t \in [0, +\infty)$ est réel sur $\tilde{\gamma}_1$. Pour obtenir un changement de variables, nous considérons plutôt le changement

$$t = T^2 = -i\tilde{z}^2(1 + \frac{1}{3}\tilde{z})$$

ou encore

$$T = \exp(-\frac{\pi}{4}i)\tilde{z}(1 + \frac{1}{3}\tilde{z})^{\frac{1}{2}}.$$

(nous choisissons ici la détermination usuelle de la racine carrée)

Par le théorème d'inversion locale, la relation liant T et \tilde{z} est bijective et analytique sur un voisinage de l'origine dans \mathbb{C} . Sur ce voisinage¹² on écrit

$$\frac{d\tilde{z}}{dT} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k T^k.$$

12. Par commodité de présentation, nous ferons dans la suite comme si le changement de variable était licite sur \mathbb{C} tout entier et les développements tous convergents, nous indiquerons en fin d'étude les modifications essentielles.

On obtient alors, par changement de variable,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \exp(-\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}i) \int_0^\infty \exp(-|x|^{\frac{3}{2}}T^2) \sum_{k=0}^\infty \alpha_k T^k dT \\
&= \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{4\pi} \exp(-\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}i) \int_0^\infty \exp(-|x|^{\frac{3}{2}}t) \sum_{k=0}^\infty \alpha_k t^{\frac{k-1}{2}} dt \\
&= \frac{|x|^{-1}}{4\pi} \exp(-\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}i) \int_0^\infty \exp(-s) \sum_{k=0}^\infty \alpha_k |x|^{-\frac{3}{4}(k-1)} s^{\frac{k+1}{2}-1} ds \\
&= \frac{|x|^{-\frac{1}{4}}}{4\pi} \exp(-\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}i) \sum_{k=0}^\infty \alpha_k |x|^{-\frac{3}{4}k} \Gamma(\frac{k+1}{2}).
\end{aligned}$$

Il nous reste à déterminer les α_k . Par la formule des résidus,

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\tilde{z}}{dT} T^{-k-1} dT,$$

l'intégrale étant prise sur un cycle orienté d'indice 1 entourant l'origine. Dès lors, par changement de variables,

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \oint T(\tilde{z})^{-k-1} d\tilde{z}$$

égale ainsi le coefficient en \tilde{z}^{-1} dans le développement de Laurent de $T(\tilde{z})^{-k-1}$. Puisque $T(\tilde{z}) = \exp(-\frac{\pi}{4}i)\tilde{z}(1+\frac{1}{3}\tilde{z})^{\frac{1}{2}}$, ce coefficient est aussi égal à celui en \tilde{z}^k dans le développement en série entière de $\exp(\frac{\pi}{4}(k+1)i)(1+\frac{1}{3}\tilde{z})^{-\frac{k+1}{2}}$. Ce dernier s'évalue par la formule de Taylor, et on trouve

$$\alpha_k = \exp(\frac{\pi}{4}(k+1)i) \left(-\frac{1}{6}\right)^k \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (k+1+2j).$$

En rassemblant nos esprits, on arrive alors à

$$I_1 = \frac{|x|^{-1}}{4\pi} \exp\left(i\left(-\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \sum_{k=0}^\infty \left(-\frac{1}{6} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) |x|^{-\frac{3}{4}}\right)^k \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (k+1+2j).$$

Il nous reste maintenant à traiter γ_2 , γ_3 et γ_4 , des cas qui sont relativement similaires. Pour γ_2 , le calcul est quasiment identique. On pose cette fois

$$T = -\exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right)\tilde{z}\left(1 + \frac{1}{3}\tilde{z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(ce qui revient aussi à choisir l'autre détermination de la racine carrée)

et on doit tenir compte d'un changement de signe supplémentaire ayant trait au sens de parcours différent pour γ_2 . Chaque terme du développement est ainsi modifié par un facteur $(-1)(-1)^{k+1} = (-1)^k$. Ce faisant, on obtient

$$I_2 = \frac{|x|^{-1}}{4\pi} \exp\left(i\left(-\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{6} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) |x|^{-\frac{3}{4}}\right)^k \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (k+1+2j).$$

Par sommation, et puisque $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, on a

$$I_1 + I_2 = \frac{|x|^{-1}}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(i\left(-\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{36} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) |x|^{-\frac{3}{2}}\right)^l \frac{\Gamma(l + \frac{1}{2})}{(2l)!\Gamma(\frac{1}{2})} \prod_{j=0}^{2l-1} (2(l+j) + 1).$$

Pour les chemins γ_3 et γ_4 , on remarque que l'on se ramène au cas de γ_1 et γ_2 par la transformation $y = -\bar{z}$. Plus exactement ($\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$)

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{\gamma_3} \exp\left(i|x|^{\frac{3}{2}}\left(\frac{z^3}{3} - z\right)\right) dz \\ &= \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{\gamma_2} \exp\left(-i|x|^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\bar{y}^3}{3} - \bar{y}\right)\right) d(-\bar{y}) \\ &= \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{\gamma_2} \overline{\exp\left(i|x|^{\frac{3}{2}}\left(\frac{y^3}{3} - y\right)\right)} dy \\ &= \bar{I}_2. \end{aligned}$$

Il en va enfin de même pour $I_4 = \bar{I}_1$. Un dernier regroupement de termes nous fournit le développement

$$\text{Ai}(x) = \frac{|x|^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left[C(x) \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + D(x) \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

avec

$$\begin{aligned} C(x) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m |x|^{-3m} \frac{1}{12^{4m} (2m)!} \prod_{j=0}^{4m-1} (4m + 2j + 1), \\ D(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} |x|^{-3n-\frac{3}{2}} \frac{1}{12^{4n+2} (2n+1)!} \prod_{j=0}^{4n+1} (4n + 2j + 3). \end{aligned}$$

Désenchantement : un rapide examen du développement obtenu ci-dessus amène à l'amère constatation que celui-ci diverge quelle que soit la valeur de x !

Exercice 3. On définit, pour $k \geq 0$, le développement tronqué

$$\text{Ai}_k(x) = \frac{|x|^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left[C_k(x) \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + D_{k-1}(x) \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

où $C_k(x)$ et $D_{k-1}(x)$ désignent les sommes partielles obtenues en tronquant les développements formels de $C(x)$ et $D(x)$ aux ordres $m = k$ et $n = k - 1$.

Montrer que quel que soit $k \geq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\text{Ai}(x) - \text{Ai}_k(x)] |x|^{3k} = 0.$$

On dit alors que l'expression formelle pour $\text{Ai}(x)$ constitue un développement asymptotique semi-convergent lorsque $x \rightarrow -\infty$.

(Indication : tronquer les intégrales sur chaque chemin γ à un voisinage du point critique dont il est issu, et sur lequel la relation entre \tilde{z} et T est bijective. Estimer ensuite les termes de reste (pénible!).)

Cas où $x > 0$.

On pose cette fois $\xi = x^{\frac{1}{2}}z$ de sorte que

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-Rx^{-\frac{1}{2}}}^{Rx^{-\frac{1}{2}}} \exp\left(ix^{\frac{3}{2}}\left(\frac{z^3}{3} + z\right)\right) dz.$$

Les points critiques de $z \mapsto \frac{z^3}{3} + z$ sont donnés par $z_{\pm} = \pm i$. On choisit comme chemins d'intégration γ_1 et γ_2 , les lignes de moins gradient de la fonction $\operatorname{Re}\left(ix^{\frac{3}{2}}\left(\frac{z^3}{3} + z\right)\right)$ aboutissant au point critique $z_+ = i$, le seul correspondant à une partie réelle négative. On écrit alors, tenant compte de la symétrie entre γ_1 et γ_2 ,

$$\operatorname{Ai}(x) = 2\operatorname{Re} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{\gamma_1} \exp\left(ix^{\frac{3}{2}}\left(\frac{z^3}{3} + z\right)\right) dz = 2\operatorname{Re} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) \int_{\tilde{\gamma}_1} \exp\left(ix^{\frac{3}{2}}\tilde{z}^2\left(i + \frac{i}{3}\tilde{z}\right)\right) d\tilde{z}.$$

Au regard de ce qui a été fait dans le cas $x < 0$, on pose

$$t = T^2 = \tilde{z}^2\left(1 + \frac{1}{3}\tilde{z}\right)$$

et on obtient ainsi

$$\operatorname{Re} \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{2\pi} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{-\frac{3}{4}k} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right),$$

où cette fois

$$\alpha_k = \left(-\frac{1}{6}\right)^k \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (k+1+2j),$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{x^{\frac{3}{4}}}{6}\right)^k \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{k! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \prod_{j=0}^{k-1} (k+1+2j)\right].$$

La même remarque que précédemment vaut pour ce développement qui n'est que semi-convergent.

Exercice 4. Calculer $\operatorname{Ai}(0)$ après avoir représenté l'allure du col $\xi = 0$. Calculer ensuite un développement en série entière pour $\operatorname{Ai}(x)$ en posant $i\xi^3 = -t$. Montrer que ce développement converge pour toute valeur de x ! (Son usage est néanmoins limité aux petites valeurs de x car sa convergence est extrêmement lente).

Chapitre 3

Equation de transport non linéaire, méthode des caractéristiques, chocs.

Dans ce bref chapitre, nous nous intéressons à une variante non linéaire de l'équation de transport

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0 \quad (3.1)$$

qui a été abordée au chapitre précédent. Il s'agit de l'équation de Burgers-Hopf, qui s'écrit

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0. \quad (3.2)$$

Par analogie de (3.2) avec (3.1), l'intuition suggère que pour (3.2) la solution u sera transportée à une vitesse égale à la valeur de u . Si u n'est pas constante, les grandes valeurs de u auront tendance à rattraper (pour peu qu'il y en ait derrière) les petites valeurs de u , faisant ainsi perdre à u son statut de graphe, et donc de solution.

La **méthode des caractéristiques**, qui s'applique à bien d'autres équations du premier ordre, permet de donner forme à cette intuition. L'objet de cette méthode est de fournir des courbes (dans le cas présent des droites) le long desquelles l'équation prend une forme particulièrement simple, typiquement une équation différentielle ordinaire.

Proposition 2. Soit $T > 0$ et $u : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de classe \mathcal{C}^1 de (3.2). Quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et $t \in [0, T]$,

$$u(x_0 + u(x_0, 0)t, t) = u(x_0, 0).$$

Autrement dit, la solution u est constante le long du segment d'origine $(x_0, 0)$ et de pente¹ plan égale à $u(x_0, 0)$.

Démonstration. Notons g la fonction de classe \mathcal{C}^1 définie sur $[0, T]$ par la relation

$$g(s) = u(x_0 + u(x_0, 0)s, s).$$

En utilisant la règle de dérivation d'un composé ainsi que l'équation (3.2) on obtient

$$\begin{aligned} g'(s) &= \partial_x u(x_0 + u(x_0, 0)s, s) \cdot u(x_0, 0) + \partial_t u(x_0 + u(x_0, 0)s, s) \\ &= -\partial_x u(x_0 + u(x_0, 0)s, s) (u(x_0 + u(x_0, 0)s, s) - u(x_0, 0)), \end{aligned}$$

1. Dans le plan (t, x) , ou de pente inverse (éventuellement infinie) dans le plan (x, t) .

de sorte que si $f(s) = (g(s) - u(x_0, 0))^2$, on a pour $s \in [0, T]$,

$$f'(s) \leq C f(s),$$

où $C = 2 \max_{s \in [0, T]} |\partial_x u(x_0 + u(x_0, 0)s, s)| < +\infty$. Il s'en suit (il s'agit de la forme la plus simple de ce qui porte le nom d'inégalité de Gronwall) que

$$f(s) \leq f(0) \exp(Cs),$$

quel que soit $s \in [0, T]$. Comme $f(0) = 0$ par construction, la conclusion suit. \square

Les segments $s \mapsto (x_0 + u(x_0, 0)s, s)$ sont appelées les (courbes) caractéristiques associées à la donnée initiale u_0 .

Corollaire 4. *Soit $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 qui ne soit pas croissante sur \mathbb{R} . Alors il n'existe pas de solution u à l'équation de Burgers-Hopf qui soit définie sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ tout entier et qui coïncide avec u_0 en $t = 0$.*

Démonstration. Puisque u_0 n'est pas croissante, il existe $x_0 < x_1$ appartenant à \mathbb{R} tels que $u_0(x_0) > u_0(x_1)$. Si u est une solution \mathcal{C}^1 de l'équation de Burgers-Hopf sur $\mathbb{R} \times [0, T]$ coïncidant avec u_0 en $t = 0$, alors par la proposition précédente on a, pour $s \in [0, T]$,

$$u(x_0 + u_0(x_0)s, s) = u_0(x_0), \quad u(x_1 + u_0(x_1)s, s) = u_0(x_1).$$

Comme $x_0 + u_0(x_0)s = x_1 + u_0(x_1)s$ lorsque $s = \frac{x_1 - x_0}{u_0(x_0) - u_0(x_1)}$, et puisque $u_0(x_0) \neq u_0(x_1)$, on déduit que

$$T < \frac{x_1 - x_0}{u_0(x_0) - u_0(x_1)}.$$

\square

Exercice 5. *Etant donné $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\sigma \equiv \inf_{x \in \mathbb{R}} u_0'(s) > -\infty$, montrer que la méthode des caractéristiques permet de construire une solution $u : \mathbb{R} \times [0, T_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation de Burgers-Hopf admettant u_0 comme donnée initiale, où $T_{\max} = -\frac{1}{\sigma}$ si $\sigma > 0$, et $T_{\max} = +\infty$ sinon.*

Lorsque deux courbes caractéristiques se rencontrent (comme aux points $x_0 + u_0(x_0)s = x_1 + u_0(x_1)s$ avec $s = \frac{x_1 - x_0}{u_0(x_0) - u_0(x_1)}$ dans l'exemple précédent), on dit que la solution (pour autant qu'elle fut régulière jusqu'alors) développe un **choc**. Une branche importante de la théorie des équations aux dérivées partielles hyperboliques s'attache à donner un sens et à construire une (ou des) solutions au-delà de l'instant du premier choc.

Pour illustrer simplement le type de résultat et de comportement auquel on peut s'attendre, considérons la donnée initiale affine par morceaux donnée par

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1, \\ -x & \text{si } x \in [-1, 0], \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

La méthode des caractéristiques permet de construire une (la) solution \mathcal{C}^1 par morceaux pour $t < 1$. Celle-ci est donnée par

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 + t, \\ \frac{x}{t-1} & \text{si } x \in [-1 + t, 0], \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Lorsque $t \rightarrow 1$, la solution $u(\cdot, t)$ converge ponctuellement vers la fonction de Heaviside de sorte que formellement

$$u(x, 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Remarquons que l'équation de Burgers-Hopf peut être réécrite sous une forme dite conservative

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0.$$

Cette dernière forme permet de donner un sens (faible) à l'équation pour $u(\cdot, t)$ appartenant seulement à $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$:

Définition 2. On dit que $u \in \mathcal{C}([0, T], L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$ est solution faible de l'équation de Burgers-Hopf si quels que soient $t > 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ la fonction

$$s \mapsto \int_{\mathbb{R}} u(x, s) \varphi(x) dx$$

est dérivable en $s = t$, sa dérivée vérifiant la relation

$$\frac{d}{ds} \int_{\mathbb{R}} u(x, s) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{u^2(x, s)}{2} \partial_x \varphi(x) dx.$$

On vérifiera au moyen d'une intégration par parties que toute solution de classe \mathcal{C}^1 est une solution faible.

Lemme 2. La fonction u définie sur $\mathbb{R} \times [1, +\infty)$ par la relation

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq t/2, \\ 0 & \text{si } x > t/2, \end{cases}$$

est une solution faible de l'équation de Burgers-Hopf qui coïncide en $t = 1$ avec la fonction de Heaviside ci-dessus.

Démonstration. Soit $S(t) = t/2$ la fonction décrivant la position de l'unique singularité de u (la position du choc). Un calcul aisé montre que pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$,

$$\frac{d}{ds} \int_{\mathbb{R}} u(x, s) \varphi(x) dx = S'(s) (u(S_-(s), s) - u(S_+(s), s)) \varphi(S(s)) = -S'(s) \varphi(S(s)),$$

où $u(S_-(s), s) = 1$ et $u(S_+(s), s) = 0$ désignent les limites à gauche et à droite de u en la discontinuité $S(s)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^2(x, s)}{2} \partial_x \varphi(x) dx &= \int_{-\infty}^{S(s)} \frac{u^2(x, s)}{2} \partial_x \varphi(x) dx + \int_{S(s)}^{+\infty} \frac{u^2(x, s)}{2} \partial_x \varphi(x) dx \\ &= \left[\frac{u^2(\cdot, s)}{2} \varphi(\cdot) \right]_{-\infty}^{S_-(s)} + \left[\frac{u^2(\cdot, s)}{2} \varphi(\cdot) \right]_{S_+(s)}^{+\infty} \\ &= \left[\frac{u^2(\cdot, s)}{2} \right]_{S_+(s)}^{S_-(s)} \varphi(S(s)) = -\frac{1}{2} \varphi(S(s)), \end{aligned}$$

puisque $u(\cdot, s)$ est constante en dehors de $S(s)$ et φ est à support compact. \square

La démonstration précédente laisse apparaître le fait que si la fonction de Heaviside est remplacée par une homologue, égale à $u_- \in \mathbb{R}$ pour $x \leq S(t)$ et $u_+ \in \mathbb{R}$ pour $x > S(t)$, avec $u_- > u_+$, alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'il s'agisse d'une solution de l'équation de Burgers-Hopf est que la discontinuité $S(t)$ évolue suivant la loi

$$S'(t) = \frac{\left[\frac{u^2}{2} \right]}{\left[u \right]} = \frac{\frac{u_+^2}{2} - \frac{u_-^2}{2}}{u_+ - u_-},$$

où le symbole $[\]$ désigne le saut de discontinuité de la fonction qu'il encadre. Cette dernière relation porte le nom de **relation de Rankine-Hugoniot**.

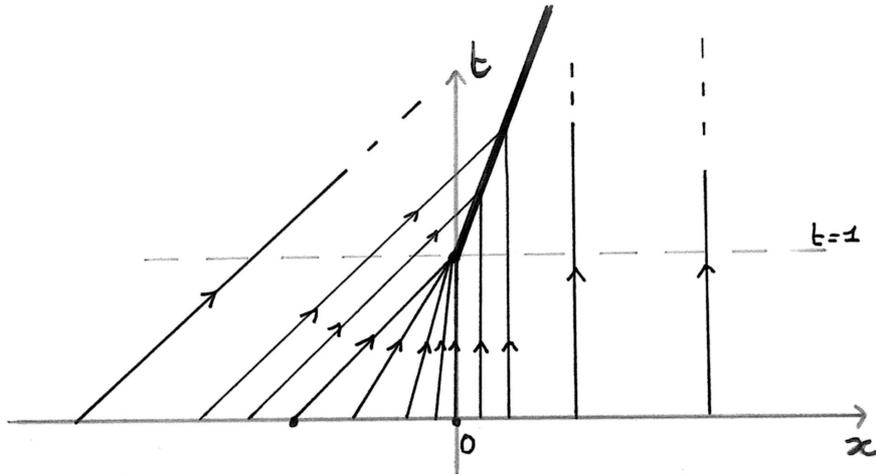
Dans le cadre plus large des lois de conservations de la forme

$$\partial_t g(u) + \partial_x f(u) = 0,$$

la relation de Rankine-Hugoniot, qui décrit toujours la vitesse des chocs, prend la forme

$$S'(t) = \frac{[f(u)]}{[g(u)]}.$$

La figure ci-dessous exhibe les courbes caractéristiques (lignes de niveaux) de la solution u que nous avons construite par étapes pour la donnée initiale u_0 donnée par (3.3).



Parmi les méthodes alternatives permettant de traiter les chocs, celle dite de la **viscosité évanescence** possède une interprétation physique directe. Elle consiste à résoudre, pour la même donnée de Cauchy en $t = 0$, une famille d'équations de Burgers modifiées par un paramètre de viscosité $\nu > 0$,

$$\partial_t u - \nu \partial_{xx} u + u \partial_x u = 0 \quad (3.4)$$

et de passer tant bien que mal à la limite $\nu \rightarrow 0$, dans un sens à découvrir (et qui devra être plus faible que la convergence uniforme, puisque la limite ne peut être continue en $t = T_{\max}$ si elle est \mathcal{C}^1 avant cela).

L'équation (3.4) possède la propriété remarquable de pouvoir être rendue linéaire par le biais de la transformation dite de **Hopf-Cole**. Plus précisément,

Chapitre 4

Spectre de Schrödinger, excursion en territoire non borné.

4.1 Motivation

Dans cette section nous décrirons, sans en modifier le cadre, la découverte qui est à l'origine du lien entre l'équation de Korteweg - de Vries et le spectre de l'opérateur de Schrödinger sur la droite.

La transformation non linéaire qui a permis d'aboutir à ce lien porte le nom de son auteur, Miura. Elle est de nature similaire à celle de la section précédente rapprochant l'équation de la chaleur à l'équation de Burgers visqueuse.

Proposition 3. *Soit v une solution régulière de l'équation de Korteweg - de Vries modifiée (mKdV)*

$$\partial_t v - 6v^2 \partial_x v + \partial_{xxx} v = 0,$$

et u la fonction régulière obtenue à partir de v par la transformation de Miura :

$$u = v^2 + \partial_x v,$$

alors u est une solution de l'équation de Korteweg - de Vries non modifiée

$$\partial_t u - 6u \partial_x u + \partial_{xxx} u = 0.$$

Démonstration. Il suffit de remplacer u par son expression en termes de v et d'utiliser (mKdV). □

La transformation de Miura peut être inversée dans certains cas.

Proposition 4. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $u_0 \in \mathcal{C}(I)$ et Ψ_0 une solution de classe $\mathcal{C}^2(I)$ strictement positive de l'équation aux valeurs propres*

$$-\partial_{xx} \Psi_0 + u_0 \Psi_0 = \lambda \Psi_0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Alors la fonction v_0 définie sur I par

$$v_0(x) = \partial_x \Psi_0(x) / \Psi_0(x)$$

est solution sur I de l'équation de Riccati

$$\partial_x v_0 + v_0^2 = u_0 - \lambda. \quad (4.2)$$

Démonstration. Il s'agit ici encore d'une simple substitution. \square

Supposons maintenant que u_0 et Ψ_0 soient des fonctions régulières 1-périodiques vérifiant (4.1) et que Ψ_0 soit strictement positive¹. La fonction v_0 étant définie par (4.2), on considère la solution² 1-périodique v de (mKdV) ayant v_0 pour donnée initiale, et on pose

$$v_t = v(\cdot, t), \quad \text{et} \quad u_t - \lambda = \partial_x v_t + v_t^2. \quad (4.3)$$

On construit alors pour $t > 0$ la fonction Ψ_t par la formule

$$\Psi_t(x) = \frac{1}{\Psi_0(0)} \exp\left(\int_0^x v_t(y) dy\right). \quad (4.4)$$

Par construction de Ψ_t et définition de u_t , on a l'équation

$$-\partial_{xx}\Psi_t + u_t(x)\Psi_t = \lambda\Psi_t$$

quel que soit $t > 0$.

Lemme 3. *Si u désigne la solution de l'équation de Korteweg - de Vries ayant u_0 pour donnée initiale, alors quels que soient $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, on a*

$$u(x, t) = u_t(x + 6\lambda t).$$

Démonstration. Posons $\tilde{u}(x, t) = u_t(x) - \lambda$. Il suit de (4.3) et de la Proposition 3 que \tilde{u} est la solution 1-périodique de l'équation de KdV ayant $u_0 - \lambda$ pour donnée initiale. On déduit de l'invariance galiléenne de l'équation de KdV que

$$u(x, t) = \lambda + \tilde{u}(x + 6\lambda t, t) = u_t(x + 6\lambda t).$$

En effet, on vérifie sans peine que ces fonctions sont toutes deux solutions 1-périodiques de l'équation de KdV avec u_0 pour donnée initiale. La conclusion suit de l'unicité. \square

Corollaire 5. *Il existe une famille régulière $\Psi \equiv \Psi(x, t)$ telle que $\Psi(\cdot, t)$ soit pour chaque $t \geq 0$ une solution 1-périodique de l'équation aux valeurs propres*

$$-\partial_{xx}\Psi(\cdot, t) + u(\cdot, t)\Psi(\cdot, t) = \lambda\Psi(\cdot, t).$$

En conséquence, la valeur propre λ appartient au spectre de l'opérateur de Schrödinger

$$\psi \mapsto -\partial_{xx}\psi + u(\cdot, t)\psi$$

avec condition de 1-périodicité quel que soit $t \geq 0$.

1. Cela est le cas pour la plus petite des valeurs propres.

2. Il existe une théorie d'existence et d'unicité pour le problème de Cauchy lié à mKdV) comme il en existe une pour Korteweg- de Vries.

Démonstration. La fonction Ψ_t construite en (4.4) est 1-périodique. En effet, puisque v vérifie l'équation mKdV,

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 v(y, t) dy = \int_0^1 \partial_y (2v^3 - \partial_{yy} v) (y, t) dy = 0$$

car v est 1-périodique. D'autre part,

$$\int_0^1 v(y, 0) dy = \int_0^1 \partial_y \log(\Psi_0)(y) dy = 0,$$

car Ψ_0 est elle aussi 1-périodique. On en déduit que

$$\Psi_t(x) = \frac{1}{\Psi_0(0)} \exp\left(\int_0^x v_t(y) dy\right)$$

est 1-périodique. Finalement, en posant

$$\Psi(x, t) = \Psi_t(x + 6\lambda t)$$

on obtient que $\Psi(\cdot, t)$ est 1-périodique pour tout $t \geq 0$, et

$$-\partial_{xx} \Psi(\cdot, t) + u(\cdot, t) \Psi(\cdot, t) = \lambda \Psi(\cdot, t),$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque 5. Lorsque λ n'est pas la plus petite valeur propre de l'opérateur de Schrödinger, la ou les fonctions propres ne sont jamais strictement positives, et v_0 est singulière. Nous verrons toutefois plus en avant dans le cours, que l'entièreté du spectre est préservé par le flot de KdV.

Nous avons parlé dans cette section de valeurs propres et de vecteurs propres sans en préciser vraiment le sens dans un contexte qui diffère quelque peu de celui des matrices ou des opérateurs bornés sur un espace de Banach. Dans la section qui suit, nous tenterons de remédier de la manière la plus brève possible à ce manque de rigueur. Le lecteur curieux d'en savoir un peu plus poursuivra par un vrai cours de théorie spectrale (par exemple [5]).

4.2 Un peu de théorie

Voulant appliquer les outils de l'analyse des opérateurs linéaires continus aux opérateurs différentiels, on est immédiatement confronté au fait que ceux-ci envoient rarement l'espace de fonctions considérées X dans lui-même. Pour ce faire, on est amené à étendre la notion d'opérateur en ne les définissant que sur une partie (souvent dense) de X .

Dans la suite, X désigne un espace de Banach sur le corps \mathbb{C} .

Définition 3. Une opérateur linéaire A sur X est une application linéaire d'un sous-espace vectoriel $D(A)$ dans X , appelé le domaine de A , dans X . On dit que A est inversible s'il existe un opérateur linéaire continu A^{-1} de X dans $D(A)$ tel que $AA^{-1} = 1_X$ et $A^{-1}A = 1_{D(A)}$.³

3. On désignera par 1_Y ou Id_Y l'application linéaire identité sur un sous-espace Y . On notera aussi 1 pour 1_X .

Remarque 6. Comme dans le cadre des opérateurs partout définis, on peut additionner ou composer des opérateurs linéaires entre eux. Il y a lieu de bien préciser le domaine sur lequel le résultat de l'opération a du sens. Nous considérerons dans la suite cette remarque comme implicite.

Définition 4. Soit A une opérateur linéaire de domaine $D(A)$.

1. Le spectre de A , noté $\sigma(A)$, est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels $A - \lambda$ n'est pas inversible⁴.
2. L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est le complémentaire de $\sigma(A)$ dans \mathbb{C} . La résolvante de A est la fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$ définie sur $\rho(A)$ par

$$R_A(\lambda) = (A - \lambda)^{-1}.$$

Proposition 5. Le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble fermé de \mathbb{C} et la fonction R_A est analytique⁵ sur l'ouvert $\rho(A)$.

Démonstration. Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ quelconque, on écrit

$$A - \lambda = (A - \lambda_0) [1 - (A - \lambda_0)^{-1}(\lambda - \lambda_0)].$$

Si

$$|\lambda - \lambda_0| < \|(A - \lambda_0)^{-1}\|,$$

la série

$$B_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (A - \lambda_0)^{-k} (\lambda - \lambda_0)^k$$

converge normalement dans $\mathcal{L}(X)$. Clairement,

$$B_\lambda [1 - (A - \lambda_0)^{-1}(\lambda - \lambda_0)] = [1 - (A - \lambda_0)^{-1}(\lambda - \lambda_0)] B_\lambda = 1,$$

et dès lors l'opérateur linéaire borné $C_\lambda = B_\lambda(A - \lambda_0)^{-1}$ est tel que

$$C_\lambda(A - \lambda) = (A - \lambda)C_\lambda = 1,$$

autrement dit $\lambda \in \rho(A)$ et $R_A(\lambda) = C_\lambda$. L'analyticité de R_A suit la construction de B_λ . \square

Dans le cas des opérateurs linéaires en dimension finie, l'injectivité et la surjectivité vont de pair. En dimension infinie il y a lieu de distinguer plusieurs composantes du spectre.

Définition 5. Pour un opérateur linéaire A de domaine $D(A)$,

-
4. Ici et après, on désigne par $A - \lambda$ l'opérateur linéaire $A - \lambda \text{Id}_X$, défini sur le même domaine que A .
 5. Au sens où quel que soit $\lambda_0 \in \rho(A)$ il existe $r_0 > 0$ tel que quel que soit $\lambda \in B(\lambda_0, r_0)$ on a

$$R_A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda - \lambda_0)^n,$$

où les coefficients α_n sont des éléments de $\mathcal{L}(X)$, la série convergeant normalement dans $\mathcal{L}(X)$.

1. Si $\lambda \in \sigma(A)$ et si $\text{Ker}(A - \lambda) \neq \{0\}$, on dit que λ est une valeur propre de A . Tout élément non nul de $\text{Ker}(A - \lambda) \neq \{0\}$ est appelé vecteur propre de A pour la valeur propre λ , et $\dim(\text{Ker}(A - \lambda))$ est appelée la multiplicité géométrique (éventuellement infinie) de λ .
2. Le spectre discret de A , noté $\sigma_d(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de multiplicité finie de A qui soient isolées dans le spectre de A .
3. Le spectre essentiel de A , noté $\sigma_e(A)$, est le complémentaire de $\sigma_d(A)$ dans $\sigma(A)$.
4. Le spectre ponctuel de A , noté $\sigma_p(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A . Le spectre continu de A , noté $\sigma_c(A)$ est l'ensemble des $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ pour lesquels $\text{Im}(A - \lambda)$ est dense dans X . Le spectre résiduel de A , noté $\sigma_r(A)$ est le complémentaire de $\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$ dans $\sigma(A)$.

Par construction,

$$\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \sigma_e(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A),$$

toutes les unions étant disjointes.

Définition 6. On dit qu'un opérateur A de domaine $D(A) \subset X$ est fermé si son graphe

$$\Gamma(A) = \{(u, Au) \text{ t.q. } u \in D(A)\}$$

est un fermé de $X \times X$.

On dit que A est fermable si la fermeture dans $X \times X$ de $\Gamma(A)$ est le graphe d'un opérateur, autrement dit si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $D(A)$ telle que

$$u_n \rightarrow u \in X \quad \text{et} \quad A(u_n) \rightarrow f \in X,$$

on a $u \in D(A)$ et $A(u) = f$. Lorsque A est fermable, l'opérateur dont $\overline{\Gamma(A)}$ est le graphe est appelé la fermeture de A .

Exercice 8. Montrer que si A n'est pas fermé alors $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

En ce sens, du point de vue de l'analyse spectrale seuls les opérateurs fermés ont un intérêt.

On se place désormais dans le cadre où $X = H$ est un espace de Hilbert sur \mathbb{C} pour le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Définition 7. L'adjoint de l'opérateur A , noté A^* , est l'opérateur défini sur le domaine

$$D(A^*) = \{v \in H \text{ t.q. } u \mapsto \langle Au, v \rangle \in \mathcal{L}(D(A), \mathbb{C})\},$$

par la relation univoque

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle \quad \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*).$$

Exercice 9. Montrer que si A est fermé et si $D(A)$ est dense dans H alors A^* est fermé et $D(A^*)$ est dense dans H . Montrer que dans ce cas, $A^{**} = A$.

Lemme 4. *Si A est de domaine dense,*

$$\overline{\text{Im}(A)} \oplus \text{Ker}(A^*) = H.$$

Démonstration. Nous allons montrer que

$$\text{Ker}(A^*) = \text{Im}(A)^\perp,$$

et puisque $\text{Im}(A)^\perp = \overline{\text{Im}(A)}^\perp$, la conclusion suivra alors du théorème d'analyse hilbertienne sur la projection sur les sous-espaces vectoriels fermés.

Soit $f \in \text{Im}(A)$ et $g \in \text{Ker}(A^*)$. Il existe $u \in D(A)$ tel que $Au = f$. Dès lors,

$$\langle f, g \rangle = \langle Au, g \rangle = \langle u, A^*g \rangle = 0,$$

et on déduit que $\text{Ker}(A^*) \subset \text{Im}(A)^\perp$. Si maintenant $h \in \text{Im}(A)^\perp$, quel que soit $u \in D(A)$,

$$\langle Au, h \rangle = 0,$$

par conséquent $h \in D(A^*)$, et quel que soit $u \in D(A)$

$$0 = \langle Au, h \rangle = \langle u, A^*h \rangle,$$

de sorte que $A^*h \in D(A)^\perp$. Comme $D(A)$ est supposé dense dans H , il s'en suit que $A^*h = 0$ et par conséquent $\text{Im}(A)^\perp \subset \text{Ker}(A^*)$. \square

Définition 8. *Un opérateur A de domaine $\text{dom}(A)$ dense dans H est dit symétrique si*

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle \quad \forall u, v \in \text{dom}(A).$$

Si A est symétrique, A^* est donc une extension de A .

Lemme 5. *Tout opérateur symétrique est fermable et sa fermeture est symétrique.*

Démonstration. Soit A un opérateur symétrique de domaine $D(A)$ sur H . Pour montrer que A est fermable, il suffit de vérifier que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans $D(A)$ telle que $u_n \rightarrow 0$ et $Au_n \rightarrow f \in H$, alors $f = 0$. Pour une telle suite, quel que soit $v \in D(A^*)$, on a

$$\langle f, v \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle Au_n, v \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle u_n, A^*v \rangle = 0.$$

Comme $D(A^*)$ contient $D(A)$ qui est dense dans H , la conclusion suit. La symétrie de la fermeture de A se démontre sans difficulté de manière analogue. \square

Exercice 10. *Exhiber un exemple d'opérateur symétrique fermé A pour lequel A^* soit une extension stricte et non symétrique de A .*

L'égalité élémentaire suivante joue un rôle important.

Lemme 6. *Si A est symétrique et $s \in \mathbb{R}$, on a*

$$\|(A + is)u\|^2 = \|Au\|^2 + s^2\|u\|^2 = \|(A - is)u\|^2.$$

quel que soit $u \in \text{dom}(A)$.

Démonstration. On récrit les normes au carré comme des carrés scalaires et on utilise l'hermitivité du produit scalaire. \square

Définition 9. *Un opérateur fermé de domaine dense est dit auto-adjoint s'il coïncide avec son adjoint⁶. Un opérateur fermable est dit essentiellement auto-adjoint si sa fermeture est auto-adjointe.*

Théorème 8. *Si A est auto-adjoint, alors*

1. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$,
2. $\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(\lambda)|}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,
3. $\sigma_r(A) = \emptyset$,
4. *Deux vecteurs propres de A correspondant à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.*

Démonstration. Si $\lambda = t + is \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, le Lemme 6 appliqué à l'opérateur $(A - t)$ nous assure que $\lambda \notin \sigma(A)$ et que $\|(A - \lambda)^{-1}\| = \|(A - t - is)^{-1}\| \leq s^{-1}$. Les conclusions 1) et 2) suivent. La conclusion 3) est une conséquence directe du Lemme 4 et du fait que $A = A^*$. Enfin, si u_1 et u_2 sont deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 , on a, puisque λ_2 est réelle,

$$\lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle = \langle Au_1, u_2 \rangle = \langle u_1, Au_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle \lambda_2,$$

d'où la conclusion 4). \square

Théorème 9. *Si A un opérateur fermé symétrique, chacune des trois affirmations suivantes équivaut au deux autres :*

1. A est auto-adjoint,
2. $\operatorname{Ker}(A^* \pm i) = \{0\}$,
3. $\operatorname{Im}(A \pm i) = H$.

Démonstration. Si $((A + i)u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\operatorname{Im}(A + i)$, le Lemme 6 nous assure que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans H . Comme H est complet et A est fermé, on déduit que $\operatorname{Im}(A + i)$ est fermé dans H . Le même raisonnement s'applique à $\operatorname{Im}(A - i)$. Utilisant le Lemme 4, on obtient ainsi

$$\operatorname{Im}(A - i) \oplus \operatorname{Ker}(A^* + i) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(A + i) \oplus \operatorname{Ker}(A^* - i),$$

de sorte que 2) et 3) sont équivalentes.

Si 1) est vérifiée, 2) l'est aussi puisque par le Théorème 8 on a $\pm i \notin \sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Supposons pour terminer que 2) et donc aussi 3) soient vérifiées. Soit $v \in D(A^*)$ quelconque. Par 3), puisque $(A + i)$ est surjective, il existe $u \in D(A)$ tel que $(A + i)u = (A^* + i)v$. Comme A est symétrique et $u \in D(A) \subset D(A^*)$, on a $A^*u = Au$. Dès lors,

$$(A^* + i)u = (A + i)u = (A^* + i)v,$$

et de 2) on déduit que $v = u \in D(A)$. Comme v était quelconque, $D(A^*) \subset D(A)$, ce qui entraîne la validité de 1). \square

6. C'est-à-dire s'il est symétrique et si de plus $D(A) = D(A^*)$.

Définition 10. Soit A un opérateur auto-adjoint de domaine $D(A)$ dans H . Soit B un opérateur symétrique dont le domaine contient celui de A . On dit que B est relativement borné par rapport à A , de borne relative $\alpha \geq 0$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|Bu\| \leq \alpha\|Au\| + C\|u\|$$

quel que soit $u \in \text{dom}(A)$.

Théorème 10 (Rellich). Soit A un opérateur auto-adjoint de domaine $D(A)$ dans H et B un opérateur symétrique de borne relative strictement inférieure à 1 par rapport à A . Alors l'opérateur $A + B$ de domaine égal à celui de A est lui aussi auto-adjoint.

Démonstration. L'opérateur $A + B$ est symétrique puisque A et B le sont. Montrons qu'il est fermé. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans $D(A)$ telle que $u_n \rightarrow u \in H$ et $(A+B)u_n \rightarrow f \in H$, alors

$$\begin{aligned} \|Au_n - Au_m\| &\leq \|(A+B)u_n - (A+B)u_m\| + \|Bu_n - Bu_m\| \\ &\leq \|(A+B)u_n - (A+B)u_m\| + \alpha\|Au_n - Au_m\| + C\|u_n - u_m\|, \end{aligned}$$

ou encore

$$\|Au_n - Au_m\| \leq \frac{1}{1-\alpha} (\|(A+B)u_n - (A+B)u_m\| + \alpha\|Au_n - Au_m\| + C\|u_n - u_m\|).$$

La suite $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy, et puisque H est complet et A fermé on déduit que $u \in D(A) = D(A+B)$ et ensuite que $(A+B)u_n \rightarrow (A+B)u$.

Soient $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $g \in H$ quelconques. Par le Théorème 9 appliqué à $s^{-1}A$, l'opérateur $(A - is)$ est inversible et dès lors $(A - is)^{-1}g \in D(A)$ est bien défini. De plus, on a

$$\begin{aligned} \|B(A - is)^{-1}g\|^2 &\leq \alpha (\|A(A - is)^{-1}g\| + C\|(A - is)^{-1}g\|)^2 \\ &\leq \frac{1+\alpha^2}{2} \|A(A - is)^{-1}g\|^2 + \frac{C^2}{1-\alpha^2} \|(A - is)^{-1}g\|^2. \end{aligned}$$

Fixons s suffisamment grand pour que $s^2 \geq \frac{2C^2}{1-\alpha^4}$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \|B(A - is)^{-1}g\|^2 &\leq \frac{1+\alpha^2}{2} (\|A(A - is)^{-1}g\|^2 + s^2\|(A - is)^{-1}g\|^2) \\ &= \frac{1+\alpha^2}{2} \|(A - is)(A - is)^{-1}g\|^2 = \frac{1+\alpha^2}{2} \|g\|^2, \end{aligned}$$

et puisque g était quelconque,

$$\|B(A - is)^{-1}\| \leq \frac{1+\alpha^2}{2} < 1.$$

De ce fait, la série

$$R_s \equiv (A - is)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-B(A - is)^{-1})^k$$

converge normalement dans $\mathcal{L}(H)$. Quel que soit $g \in H$, par passage à la limite on obtient

$$(A + B - is)R_s g = g,$$

ce qui implique que $\text{Im}(s^{-1}(A+B) - i) = H$. En remplaçant s par son opposé, on déduit de la même manière que $\text{Im}(s^{-1}(A+B) + i) = H$. Le Théorème 9 nous assure alors que $s^{-1}(A+B)$ et donc aussi $A+B$ sont auto-adjoints. \square

Définition 11. Soit A un opérateur auto-adjoint de domaine $D(A)$ dans H et B un opérateur dont le domaine contient celui de A . On dit que B est compact relativement à A si quel que soit $\lambda \in \rho(A)$,

$$BR_A(\lambda) \quad \text{est un opérateur compact sur } H.$$

Exercice 11. Montrer que si $BR_A(\lambda)$ est compact pour un certain $\lambda \in \rho(A)$, alors il l'est pour tous.

Proposition 6. Si A est auto-adjoint et B est symétrique et relativement compact par rapport à A , alors B est relativement borné par rapport à A , de borne relative α , quel que soit $\alpha > 0$. En particulier, $A + B$ est auto-adjoint.

Démonstration. Nous allons d'abord montrer que

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \|B(A - is)^{-1}\| = 0. \quad (4.5)$$

Pour cela, on écrit

$$B(A - is)^{-1} = B(A - i)^{-1}(A - i)(A - is)^{-1}$$

que l'on interprète comme la composition de l'opérateur compact (et donc limite d'opérateurs de rang fini) $B(A - i)^{-1}$ avec l'opérateur $(A - i)(A - is)^{-1}$. Pour montrer (4.5), il nous suffit donc de montrer que quel que soit $f \in H$,

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} (A - i)(A - is)^{-1}f = 0.$$

Cette dernière affirmation découle du Théorème 8 4) : en effet, si $f \in D(A)$

$$\|(A - i)(A - is)^{-1}f\| = \|(A - is)^{-1}(A - i)f\| \leq \frac{1}{s}\|(A - i)f\|$$

et si $f \in H \setminus D(A)$, on utilise la densité de $D(A)$ dans H et l'inégalité $\|(A - i)(A - is)^{-1}\| \leq 1$, valable pour $s^2 \geq 1$, qui découle du Lemme 6.

Si $0 < \alpha$ est fixé, on choisit s suffisamment grand pour que $\|B(A - is)^{-1}\| \leq \alpha$, et on écrit alors, pour $u \in D(A)$,

$$\begin{aligned} \|Bu\| &= \|B(A - is)^{-1}(A - is)u\| \\ &\leq \alpha\|(A - is)u\| \\ &\leq \alpha\|Au\| + \alpha s\|u\|, \end{aligned}$$

d'où la conclusion. □

Il est immédiat que $\lambda \in \sigma(A)$ si et seulement si il existe une suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ t.q. $\|u_n\| = 1 \forall n \in \mathbb{N}$, et $(A - \lambda)u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. La caractérisation suivante précise la partie essentielle du spectre dans le cas auto-adjoint, nous l'admettrons.⁷

7. Une alternative commode consiste à la considérer comme une définition de σ_e . Le fait que son complémentaire σ_d ne contienne que les valeurs propres isolées de multiplicité finie est alors un théorème à démontrer.

Théorème 11 (Critère de Weyl). *Soit A un opérateur auto-adjoint de domaine $D(A)$ dans H . Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $\lambda \in \sigma_e(A)$,
2. Il existe une **suite de Weyl** pour A et λ , c'est-à-dire une suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ t.q.

$$\|u_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \rightharpoonup 0 \text{ et } (A - \lambda)u_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

3. Quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un sous-espace vectoriel $L_\varepsilon \subset D(A)$ tel que

$$\|(A - \lambda)u\| \leq \varepsilon \|u\| \quad \forall u \in L_\varepsilon.$$

Théorème 12 (Théorème de stabilité de Weyl). *Si A est un opérateur auto-adjoint et si B est symétrique et relativement compact par rapport à A , alors*

$$\sigma_e(A) = \sigma_e(A + B).$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \sigma_e(A)$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Weyl pour A et λ . On écrit

$$(A + B - \lambda)u_n = (A - \lambda)u_n + B(A - i)^{-1}(A - i)u_n.$$

Comme $B(A - i)^{-1}$ est compact et $(A - i)u_n \rightharpoonup 0$, on déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Weyl pour $A + B$ et λ , de sorte que $\lambda \in \sigma_e(A + B)$ et ainsi $\sigma_e(A) \subset \sigma_e(A + B)$. Pour l'inclusion inverse, on écrit, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Weyl pour $A + B$ et λ ,

$$\begin{aligned} (A - \lambda)u_n &= (A + B - \lambda)u_n + B(A + B - i)^{-1}(A + B - i)u_n \\ &= (A + B - \lambda)u_n + B(A - i)^{-1}(1 + B(A - i)^{-1})^{-1}(A + B - i)u_n, \end{aligned}$$

et la conclusion suit pareillement. La justification de la dernière égalité repose sur celle de l'inversibilité de l'opérateur $(1 + B(A - i)^{-1})$. Puisque $B(A - i)^{-1}$ est compact par hypothèse, cette inversibilité est équivalente à l'injectivité du même opérateur. Or si pour $u \in H$ on avait $B(A - i)^{-1}u = -u$, alors pour $v = (A - i)^{-1}u$ on aurait $Bv = -(A - i)v$, ou encore $(A + B)v = iv$, ce qui est impossible puisque $A + B$ est auto-adjoint. \square

Nous terminons cette section par un outil élémentaire mais important dont nous ferons amplement usage dès la section suivante.

Définition 12. *Une application linéaire $U \in \mathcal{L}(H)$ est dite unitaire si elle est une bijection isométrique. De manière équivalente, U est unitaire si*

$$UU^* = U^*U = 1_H.$$

Deux opérateurs A et B sur H sont dits unitairement équivalents s'il existe une application unitaire U telle que

$$B = UAU^{-1}.$$

Cette égalité d'opérateurs implique en particulier que $D(B) = UD(A)$.

Théorème 13. *Deux opérateurs unitairement équivalents ont même spectre. L'un est auto-adjoint si et seulement si l'autre l'est.*

4.3 Un peu de pratique

L'opérateur laplacien peut-être défini de manière classique sur l'espace des fonctions deux fois dérivables à support compact. Comme tel il n'est pas fermé. Dans la suite nous démontrerons le

Théorème 14. *L'opérateur $u \mapsto -\Delta u$ défini sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset H = L^2(\mathbb{R}^N)$ possède une unique extension auto-adjointe, notée $-\Delta$. Le domaine de cette extension, noté $H^2(\mathbb{R}^N)$, peut être décrit de manière alternative par l'égalité⁸*

$$H^2(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ t.q. } \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |y|^2)^2 |\mathcal{F}u|^2(y) dy < +\infty \right\}.$$

Le point de départ est l'égalité

$$\mathcal{F}(\Delta u)(y) = -4\pi^2 |y|^2 \mathcal{F}u(y) \quad (4.6)$$

valide en particulier pour $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, et le caractère unitaire de \mathcal{F} sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ ⁹

Lemme 7. *Soit $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^N$ un sous-ensemble borélien et μ une mesure borélienne régulière sur \mathcal{B} finie sur les bornés. Soit $w : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle¹⁰ μ -mesurable dont la restriction à tout sous-ensemble borné de \mathcal{B} est bornée. Soit $D(M_w)$ le sous-espace de $L^2(\mathcal{B}, \mu)$ défini par*

$$D(M_w) = \left\{ u \in L^2(\mathcal{B}, \mu) \text{ t.q. } \int_{\mathcal{B}} (1 + w(x)^2) |u(x)|^2 d\mu < +\infty \right\}.$$

L'opérateur de multiplication M_w défini sur $D(M_w)$ par

$$(M_w u)(x) = w(x)u(x) \quad \forall x \in \mathcal{B}$$

est auto-adjoint. Son spectre se confond avec l'image essentielle de w

$$\sigma(M_w) = \{ \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall \varepsilon > 0, \mu(\{x : |w(x) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0 \}.$$

Pour $\lambda \notin \sigma(M_w)$, on a

$$\|R_{M_w}(\lambda)\| = (\text{dist}(\lambda, \sigma(M_w)))^{-1}. \quad (4.7)$$

Démonstration. Il est immédiat que M_w est fermé et symétrique. Puisque les fonctions $x \mapsto w(x) \pm i$ sont minorées uniformément en valeur absolue, on a $\text{Im}(M_w \pm i) = L^2(\mathcal{B}, \mu)$ avec $(M_w \pm i)^{-1} = M_{(w \mp i)^{-1}}$ et il suit du Théorème 9 que M_w est auto-adjoint. Si λ n'appartient pas à l'image essentielle de w , alors la fonction $x \mapsto (w(x) - \lambda)^{-1}$ est définie μ -presque partout et bornée en dehors d'un ensemble de μ -mesure nulle. L'opérateur $M_{(w-\lambda)^{-1}} \in \mathcal{L}(L^2(\mathcal{B}, \mu))$ est un inverse pour $M_w - \lambda$ de sorte que $\lambda \notin \sigma(M_w)$. Inversement, si λ appartient à l'image essentielle de w , alors si $(\omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$ désigne une suite d'ensembles boréliens bornés tels que $\mu(\omega_m) > 0$ et $|w(x) - \lambda| \leq 2^{-m}$ quels que soient $m \in \mathbb{N}$ et $x \in \omega_m$, on a $\|(M_w - \lambda)1_{\omega_m}\| \leq 2^{-m} \|1_{\omega_m}\|$ et par conséquent s'il est injectif, l'opérateur

8. Il s'agit d'un espace dit de Sobolev.

9. Voir en annexe.

10. Il est essentiel que w soit réelle.

$M_w - \lambda$ ne peut pas avoir un inverse borné et dès lors $\lambda \in \sigma(M_w)$. Enfin, l'égalité (4.7) se démontre en remarquant que pour $\lambda \notin \sigma(M_w)$,

$$\begin{aligned} \|(M_w - \lambda)^{-1}\| &= \|M_{(w-\bar{\lambda})^{-1}}\| = \sup_{ess} (|w - \bar{\lambda}|^{-1}) \\ &= (\text{dist}(\bar{\lambda}, \text{Im}_{ess}(w)))^{-1} = (\text{dist}(\lambda, \sigma(M_w)))^{-1}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 6. *L'opérateur $A = M_{4\pi^2|y|^2}$ de domaine $D(A) = D(M_{4\pi^2|y|^2})$ est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^N, dx)$. Son spectre, réel et purement continu, coïncide avec la demi-droite $[0, +\infty)$.*

Démonstration. La seule affirmation qui ne découle pas directement du lemme précédent est celle concernant le caractère continu du spectre. Puisque A est auto-adjoint, il suffit de montrer que A ne possède pas de vecteur propre dans $L^2(\mathbb{R}^N, dx)$, ce qui est immédiat puisque le poids $4\pi^2|y|^2$ n'est constant sur aucun ensemble de mesure positive. □

Démonstration du Théorème 14. C'est maintenant une conséquence directe du Lemme 7 et du Théorème 13, avec le choix $U = \mathcal{F}^{-1}$ d'opérateur unitaire :

$$-\Delta = \mathcal{F}^{-1} M_{4\pi^2|y|^2} \mathcal{F}.$$

Il suit de (4.6) que $-\Delta$ coïncide avec l'opposé du laplacien sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, et puisque $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ on déduit que $-\Delta$ est la fermeture (et donc aussi l'unique extension auto-adjointe) de ce dernier.

Nous ajoutons maintenant un potentiel à l'opérateur de Schrödinger libre.

Théorème 15. *Soit $V \in L^2(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N)$ à valeurs réelles avec $N \leq 3$. L'opérateur¹¹ $-\Delta + V$ de domaine $H^2(\mathbb{R}^N)$ est bien défini et auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. On se donne une décomposition $V = V_2 + V_\infty$ avec $V_2 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $V_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. L'opérateur $u \mapsto V_\infty u$ est partout défini sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ et borné :

$$\|V_\infty u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|V_\infty\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Si $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ on a

$$u = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} u = \mathcal{F}^{-1} \left((1 + 4\pi^2|y|^2)^{-1} (1 + 4\pi^2|y|^2) \mathcal{F} u \right). \quad (4.8)$$

Si de plus $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$, on a $(1 + 4\pi^2|y|^2) \mathcal{F} u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et comme $(1 + 4\pi^2|y|^2)^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ pour $N \leq 3$, on déduit que $(1 + 4\pi^2|y|^2)^{-1} (1 + 4\pi^2|y|^2) \mathcal{F} u \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Il suit de (4.8) et du Théorème de Riemann-Lebesgue¹² que $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ et¹³

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|(1 + 4\pi^2|y|^2)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|(1 + 4\pi^2|y|^2) \mathcal{F} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C \|(-\Delta + 1)u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \quad (4.9)$$

Ainsi, pour $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ on obtient $V_2 u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|V_2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C \|V_2\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|(-\Delta + 1)u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

11. Par V on entend l'opérateur de multiplication M_V .

12. Voir l'annexe.

13. Cette inégalité porte le nom d'inégalité de Sobolev.

On peut améliorer sensiblement l'inégalité précédente en remarquant que quel que soit $\varepsilon > 0$ on peut écrire, pour $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \|(1 + 4\pi^2|y|^2)^{-\frac{4}{5}}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|(1 + 4\pi^2|y|^2)^{\frac{4}{5}}\mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\leq \|(C_\varepsilon + 4\pi^2|y|^2\varepsilon)\mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|(-\varepsilon\Delta + C_\varepsilon)u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Il s'en suit que V_1 et V_2 sont bornés relativement à $-\Delta$ avec une borne relative aussi petite soit-elle. La conclusion suit alors du Théorème 10. \square

Lorsque V est suffisamment régulier et décroissant, le spectre de $-\Delta + V$ se déduit de celui de $-\Delta$ par le Théorème de stabilité de Weyl.

Théorème 16. *Soit $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ à valeurs réelles et $N \leq 3$. Le spectre de l'opérateur auto-adjoint $-\Delta + V$ est composé de la demi-droite $[0, +\infty)$ et d'une famille au plus dénombrable $(\lambda_i)_{i \in I}$ de valeurs propres négatives de multiplicité finie dont 0 est l'unique point d'accumulation éventuel. De plus, on a l'inclusion*

$$\sigma(-\Delta + V) \subseteq [V_{\min}, +\infty), \quad \text{où} \quad V_{\min} = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) \leq 0.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe $\lambda < V_{\min}$ et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\|u_n\| = 1$ pour tout n et $(-\Delta + V - \lambda)u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. On aurait alors

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle (-\Delta + V - \lambda)u_n, u_n \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} (V - \lambda)|u_n|^2] \\ &\geq (V_{\min} - \lambda), \end{aligned}$$

ce qui est absurde. On en déduit par un argument de densité que $\lambda \notin \sigma(-\Delta + V)$.

Pour conclure, au vu du Théorème 12, il nous suffit de montrer que l'opérateur de multiplication par V est compact relativement à $-\Delta$, c'est-à-dire que $V(-\Delta - i)^{-1}$ est un opérateur compact sur $L^2(\mathbb{R}^N)$. Pour cela, remarquons que

$$(-\Delta - i)^{-1} = \mathcal{F}^{-1}(4\pi^2|y|^2 - i)^{-1}\mathcal{F}.$$

Ainsi, pour $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} V(-\Delta - i)^{-1}u &= \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}V \cdot \mathcal{F}^{-1}(4\pi^2|y|^2 - i)^{-1}\mathcal{F}u \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}V * (4\pi^2|y|^2 - i)^{-1}\mathcal{F}u) \\ &= \mathcal{F}^{-1}G\mathcal{F}u, \end{aligned}$$

où

$$Gg = \mathcal{F}V * (4\pi^2|y|^2 - i)^{-1}g.$$

Puisque \mathcal{F} et son inverse sont linéaires continues, la compacité de $V(-\Delta - i)^{-1}$ suivra celle de G . Pour cette dernière, nous allons vérifier les critères du Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov (voir par exemple [12] Chapitre 4, page 15.)

Pour $h \in \mathbb{R}^N$ on a

$$\begin{aligned} \|\tau_h Gg - Gg\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \|(\tau_h \mathcal{F}V - \mathcal{F}V) * (4\pi^2|y|^2 - i)^{-1}g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|(\tau_h \mathcal{F}V - \mathcal{F}V)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|(4\pi^2|y|^2 - i)^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

de sorte, puisque $\mathcal{F}V \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et que les translations agissent de manière continue dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, que

$$\limsup_{|h| \rightarrow 0} \sup_{\|g\| \leq 1} \|\tau_h Gg - Gg\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

D'autre part, pour $R > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{|x| > R} |Gg(x)|^2 &= \int_{|x| > R} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}V(y) (4\pi^2|x-y|^2 - i)^{-1} g(x-y) dy \right|^2 dx \\ &\leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \int_{|x| > R} \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}V(y)|^2 |4\pi^2|x-y|^2 - i|^{-2} dy dx. \end{aligned}$$

La fonction $\mathcal{F}V$ appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, il existe une constante $C > 0$ telle que $|\mathcal{F}V(y)| \leq C(1 + |y|^2)^{-1}$. Dès lors,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}V(y)|^2 |4\pi^2|x-y|^2 - i|^{-2} dy \leq C(1 + |x|^2)^{-2},$$

et par conséquent ($N \leq 3$)

$$\int_{|x| > R} \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}V(y)|^2 |4\pi^2|x-y|^2 - i|^{-2} dy dx \leq CR^{-1},$$

d'où l'on déduit finalement

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \sup_{\|g\| \leq 1} \int_{|x| > R} |Gg(x)|^2 dx = 0.$$

Le Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov amène à la conclusion. \square

Exercice 12. *Etendre l'énoncé précédent pour $N > 3$.*

Indication : utiliser les propriétés de commutativité du produit de convolution et de la dérivation.

Chapitre 5

Théorie du scattering pour l'équation de Schrödinger sur la droite.

Dans ce chapitre nous analysons plus en détails les propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$ en une dimension d'espace et pour V on $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. La démarche, tout comme celle du chapitre qui suivra, est fortement inspirée par les notes de cours [7].

5.1 Potentiels à support compact.

Supposons pour commencer que V soit à support compact dans $[-R, R]$. Quel que soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, en dehors du support de V l'équation différentielle ordinaire

$$-\Psi''(x) + V(x)\Psi = \lambda\Psi(x) \tag{5.1}$$

se réduit à une équation à coefficients constants, dont toutes les solutions sont données par les combinaisons linéaires des ondes monochromatiques $\exp(ikx)$ et $\exp(-ikx)$, où $k \in \mathbb{C}^+$ (le demi-plan complexe supérieur $\text{Im}(z) \geq 0$) est tel que¹

$$k^2 = \lambda. \tag{5.2}$$

De plus, il existe une unique solution $\Psi_g(\cdot, k)$ et une unique solution $\Psi_d(\cdot, k)$ de l'équation (5.1) définies sur \mathbb{R} tout entier et qui vérifient

$$\begin{cases} \Psi_g(x, k) = \exp(ikx) & \text{pour } x > R, \\ \Psi_d(x, k) = \exp(-ikx) & \text{pour } x < -R. \end{cases}$$

Pour ces solutions, il existe des coefficients $g_+(k), g_-(k), d_+(k), d_-(k) \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} \Psi_g(x, k) = g_+(k) \exp(ikx) + g_-(k) \exp(-ikx) & \text{pour } x < -R, \\ \Psi_d(x, k) = d_-(k) \exp(-ikx) + d_+(k) \exp(ikx) & \text{pour } x > R. \end{cases}$$

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ le nombre k est déterminé au signe près, ce qui n'est pas gênant.

Lorsque $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\bar{\Psi}_g(\cdot, k)$ et $\bar{\Psi}_d(\cdot, k)$ sont également solutions de (5.1), et des asymptotiques ci-dessus on déduit

$$\begin{cases} \Psi_g(x, k) = g_+(k)\bar{\Psi}_d(x, k) + g_-(k)\Psi_d(x, k) \\ \Psi_d(x, k) = d_-(k)\bar{\Psi}_g(x, k) + d_+(k)\Psi_g(x, k). \end{cases} \quad (5.3)$$

Lemme 8. *Pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a*

1. $g_+(k) = d_-(k)$,
2. $|g_+(k)|^2 = |g_-(k)|^2 + 1$,
3. $|d_-(k)|^2 = |d_+(k)|^2 + 1$.

Démonstration. Si Ψ_1 et Ψ_2 sont deux solutions de (5.1) sur \mathbb{R} , alors

$$(\Psi_1\Psi_2' - \Psi_1'\Psi_2)' = \Psi_1\Psi_2'' - \Psi_1''\Psi_2 = (V - \lambda)\Psi_1\Psi_2 - (V - \lambda)\Psi_1\Psi_2 = 0,$$

de sorte que la fonction $\Psi_1\Psi_2' - \Psi_1'\Psi_2$ est constante sur \mathbb{R} . On obtient les trois affirmations de l'énoncé en choisissant respectivement pour le couple (Ψ_1, Ψ_2) les valeurs (Ψ_g, Ψ_d) , $(\Psi_g, \bar{\Psi}_g)$ et $(\Psi_d, \bar{\Psi}_d)$ et en identifiant les limites de $\Psi_1\Psi_2' - \Psi_1'\Psi_2$ en $+\infty$ et $-\infty$. \square

En particulier, pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a $|g_+(k)| = |d_-(k)| \geq 1$. On pose

$$a_g(k) = g_+(k)^{-1}, \quad a_d(k) = d_-(k)^{-1}, \quad b_g(k) = g_-(k)g_+(k)^{-1}, \quad b_d(k) = d_+(k)d_-(k)^{-1},$$

de sorte que

$$\begin{cases} a_g(k)\Psi_g(x, k) = b_g(k)\Psi_d(x, k) + \bar{\Psi}_d(x, k) \\ a_d(k)\Psi_d(x, k) = b_d(k)\Psi_g(x, k) + \bar{\Psi}_g(x, k), \end{cases} \quad (5.4)$$

avec les relations $a_g = a_d$ et $|a_g|^2 + |b_g|^2 = |a_d|^2 + |b_d|^2 = 1$.

Au voisinage de $-\infty$, $\bar{\Psi}_d(\cdot, k)$ correspond à une onde plane ‘‘voyageant vers la droite’’ tandis que $\Psi_d(\cdot, k)$ correspond à une onde plane ‘‘voyageant vers la gauche’’. Au voisinage de $+\infty$, Ψ_g correspond à une onde plane ‘‘voyageant vers la droite’’. L'interprétation physique des deux relations ci-dessus est donc la suivante : on envoie depuis l'infini une onde plane de module 1. Lorsque celle-ci rencontre le potentiel V , une partie est transmise, avec un coefficient a , et une partie est réfléchiée, avec un coefficient b . Les fonctions a_g et a_d sont ainsi appelées les **coefficients de transmission** (depuis la gauche et depuis la droite) tandis que les fonctions b_g et b_d sont appelées les **coefficients de réflexion** (depuis la gauche et depuis la droite).

5.2 Potentiels dans la classe de Schwartz.

On suppose maintenant² que $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2. En réalité nous pourrions nous affranchir dans une certaine mesure de tant de régularité et de décroissance, mais nous ne tenterons pas ici d'être dans l'optimalité.

Notre première tâche est de construire les équivalents des Ψ_g et Ψ_d de la section précédente. Plus précisément, nous cherchons à construire, pour $k \in \bar{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\}$, des solutions Ψ_g et Ψ_d de (5.1) avec $\lambda = k^2$ qui, en remplacement de (5.1), vérifient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_g(x, k) \exp(-ikx) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi_d(x, k) \exp(ikx) = 1.$$

Il est utile de procéder aux changements d'inconnues $g(x, k) = \Psi_g(x, k) \exp(-ikx)$ et $d(x, k) = \Psi_d(x, k) \exp(ikx)$. L'équation (5.1) augmentée des conditions aux limites ci-dessus se transforme respectivement en³

$$\begin{cases} g''(x, k) + 2ikg'(x, k) = V(x)g(x, k) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, k) = 1 \end{cases} \quad (5.5)$$

et

$$\begin{cases} d''(x, k) - 2ikd'(x, k) = V(x)d(x, k) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} d(x, k) = 1. \end{cases} \quad (5.6)$$

Exercice 13. *Montrer que si $g(\cdot, k)$ et $d(\cdot, k)$ sont supposées bornées, les problèmes aux limites 5.6 et 5.5 sont équivalents aux équations intégrales*

$$g(x, k) = 1 + \int_x^\infty V(y) \frac{\exp(2ik(y-x)) - 1}{2ik} g(y, k) dy, \quad (5.7)$$

et

$$d(x, k) = 1 + \int_{-\infty}^x V(y) \frac{\exp(2ik(x-y)) - 1}{2ik} d(y, k) dy. \quad (5.8)$$

Proposition 7. *Quel que soit $k \in \bar{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\}$, les équations intégrales (5.7) et (5.8) possèdent chacune une unique solution bornée. Les suites récurrentes définies par*

$$g_0(x, k) = 1, \quad g_{n+1}(x, k) = \int_x^\infty V(y) \frac{\exp(2ik(y-x)) - 1}{2ik} g_n(y, k) dy$$

et

$$d_0(x, k) = 1, \quad d_{n+1}(x, k) = \int_{-\infty}^x V(y) \frac{\exp(2ik(x-y)) - 1}{2ik} d_n(y, k) dy$$

sont telles que

$$g(x, k) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x, k) \quad \text{et} \quad d(x, k) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x, k), \quad (5.9)$$

les séries convergeant uniformément pour $x \in \mathbb{R}$ et k en dehors d'un voisinage de l'origine. Les fonctions g et d sont continues sur $\mathbb{R} \times (\bar{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\})$ et, pour x fixé quelconque, analytiques en k sur l'ouvert \mathbb{C}^+ .

Démonstration. Existence. On présente les détails pour g , ceux concernant d étant similaires. La construction itérative de g repose comme souvent sur l'identité

$$(\text{Id} - T)^{-1}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(f)$$

3. Ici et dans la suite les dérivations notées ' s'entendent par rapport à la variable x .

appliquée à $f = 1$, où T désigne l'opérateur

$$T(f)(x) = \int_x^\infty V(y) \frac{\exp(2ik(y-x)) - 1}{2ik} f(y) dy.$$

Puisque $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on montre facilement que T agit de manière linéaire continue sur l'espace affine des fonctions bornées continues qui tendent vers 1 en moins l'infini muni de la distance du supremum. En général, T n'est pas une contraction. Toutefois, nous allons montrer par récurrence que

$$|g_n(x, k)| = |T^n(1)(x, k)| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{PV(x)}{|k|} \right)^n, \quad (5.10)$$

où

$$PV(x) = \int_x^\infty |V(y)| dy.$$

L'inégalité (5.10) est une égalité pour $n = 0$. Utilisant l'hypothèse de récurrence, nous écrivons

$$\begin{aligned} |g_{n+1}(x, k)| &\leq \left| \int_x^\infty V(y) \frac{\exp(2ik(y-x)) - 1}{2ik} g_n(y, k) dy \right| \\ &\leq \int_x^\infty \frac{|V(y)|}{|k|} |g_n(y, k)| dy \\ &\leq \int_x^\infty \frac{|V(y)|}{|k|} \frac{1}{n!} \left(\frac{PV(y)}{|k|} \right)^n dy \\ &= \int_x^\infty -\frac{d}{dy} \left(\frac{PV(y)}{|k|} \right) \frac{1}{n!} \left(\frac{PV(y)}{|k|} \right)^n dy \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{PV(x)}{|k|} \right)^{n+1}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

ce qui termine de démontrer (5.10). Puisque PV est globalement bornée, on déduit que la série $\sum_n g_n(x, k)$ converge uniformément pour $x \in \mathbb{R}$ et k en dehors d'un voisinage de l'origine. On peut ainsi faire commuter T et la série, ce qui conduit au résultat d'existence.

Unicité. Il suffit de remarquer que du fait des propriétés de décroissance de V , pour x_0 suffisamment grand, l'opérateur T est une contraction si on le considère cette fois uniquement sur l'espace des fonctions définies, bornées, et continues sur $[x_0, +\infty)$ tendant vers 1 en plus l'infini, muni de la distance uniforme.

Régularité. Une limite uniforme de fonctions continues est continue. Une limite uniforme de fonctions analytiques est analytique. La conclusion suit des formules (5.9) et des propriétés classiques de continuité et d'analyticité des intégrales dépendant d'un paramètre. \square

Pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, les fonctions g_+ , g_- , r_k et r_- sont définies comme dans (5.3). Le Lemme 8 se transpose aussi ici sans modification.

Définition 13. Pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la matrice

$$S(k) = \frac{1}{g_+(k)} \begin{pmatrix} 1 & d_+(k) \\ g_-(k) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_g(k) & b_d(k) \\ b_g(k) & a_d(k) \end{pmatrix}$$

est appelée matrice de scattering de V au nombre d'onde k . Cette matrice est unitaire.

Définition 14. Les fonctions g_+ et d_- définies jusqu'alors sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sont étendues à $\bar{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\}$ par le biais de l'égalité

$$\begin{aligned} g_+(k) = d_-(k) &= \frac{1}{2ik} (\Psi'_g(x, k) \Psi_d(x, k) - \Psi_g(x, k) \Psi'_d(x, k)) \\ &= \frac{1}{2ik} (g'(x, k) d(x, k) - g(x, k) d'(x, k) + 2ikg(x, k) d(x, k)) \end{aligned} \quad (5.12)$$

pour laquelle les deux derniers termes sont indépendants de x et définis pour $k \in \bar{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\}$.

Corollaire 7. On a

1. Les fonctions g_+ et d_- sont continues sur $\bar{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\}$ et analytiques sur \mathbb{C}^+ .
2. Pour $k \in \mathbb{C}^+$,

$$\begin{aligned} g_+(k) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x, k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} V(y) g(y, k) dy, \\ d_-(k) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} d(x, k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} V(y) d(y, k) dy, \end{aligned}$$

les deux quantités étant par ailleurs égales. En particulier,

$$g_+(k) = d_-(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} V(y) dy + O(|k|^{-2}), \quad |k| \rightarrow +\infty.$$

3. Pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} g_-(k) &= \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} V(y) \exp(2iky) g(y, k) dy, \\ d_+(k) &= \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} V(y) \exp(-2iky) d(y, k) dy. \end{aligned}$$

Nous nous intéressons maintenant au comportement des fonctions g , d , g_+ et d_- lorsque $|k| \simeq 0$. L'estimation (5.11) diverge selon cette asymptotique. Nous la remplaçons par une estimation mieux adaptée dans ce cas.

Proposition 8. Pour $k = 0$, les équations intégrales (5.7) et (5.8) possèdent chacune une unique solution continue.⁴ Les fonctions g et d , ainsi que leurs dérivées d'ordres quelconques selon x et k sont continues sur $\mathbb{R} \times \bar{\mathbb{C}}^+$.

Démonstration. Le raisonnement est similaire à celui de la Proposition 7. Le point clé est de remplacer l'estimation (5.11) par⁵

$$|g_n(x, k)| \leq \frac{1}{n!} (x_- PV(x) + PV_1(x))^n,$$

où

$$PV(x) = \int_x^\infty |V(y)| dy \quad \text{et} \quad PV_1(x) = \int_x^\infty |V(y)| |y| dy.$$

4. En général toutefois, $g(x, 0)$ n'est pas bornée lorsque $x \rightarrow -\infty$ et $d(x, 0)$ n'est pas borné lorsque $x \rightarrow +\infty$.

5. On désigne par x_- la partie négative de x : $x_- = \max(0, -x)$.

En effet, puisque pour $y \geq x$

$$\left| \frac{\exp(2ik(y-x)) - 1}{2ik} \right| \leq y - x \leq |y| + x_-,$$

on a

$$\begin{aligned} |g_{n+1}(x, k)| &\leq \left| \int_x^\infty V(y) \frac{\exp(2ik(y-x)) - 1}{2ik} g_n(y, k) dy \right| \\ &\leq \int_x^\infty |V(y)| (|y| + x_-) |g_n(y, k)| dy \\ &\leq \int_x^\infty |V(y)| (|y| + x_-) \frac{1}{n!} (y_- PV(y) + PV_1(y))^n dy \\ &\leq \int_x^\infty |V(y)| (|y| + x_-) \frac{1}{n!} (x_- PV(y) + PV_1(y))^n dy \\ &= \int_x^\infty -\frac{d}{dy} (x_- PV(y) + PV_1(y)) \frac{1}{n!} \left(\frac{PV(x)}{|k|} \right)^n dy \\ &= \frac{1}{(n+1)!} (x_- PV(x) + PV_1(x))^{n+1}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Lorsque $k = 0$, la fonction $\frac{1}{2ik}(\exp(2ik(y-x)) - 1)$ est remplacée par la fonction $y - x$, qui n'est autre que sa limite ponctuelle lorsque $k \rightarrow 0$.

Les affirmations de l'énoncé de la proposition suivent sans trop de difficulté. Pour les dérivées d'ordre supérieur, on est amené à utiliser des moments d'ordre supérieur de V . Les détails sont laissés en exercice. \square

Corollaire 8. *Les fonctions $g_+(k) = d_-(k)$ définies pour $k \in \bar{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\}$ ne s'annulent pas sur un voisinage de 0. Les coefficients de transmission $a_g(k) = a_d(k)$ définis pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme les inverses de $g_+(k) = d_-(k)$ admettent un prolongement continu en $k = 0$, tout comme les coefficients de réflexion $b_g(k)$ et $b_d(k)$ définis par (5.4).*

Démonstration. Rappelons que par (5.12), pour $k \in \bar{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\}$

$$2ikg_+(k) = 2ikd_-(k) = (\Psi'_g(x, k)\Psi_d(x, k) - \Psi_g(x, k)\Psi'_d(x, k)) \equiv W(k).$$

Par la proposition précédente, la fonction W est régulière sur $\bar{\mathbb{C}}^+$ et dès lors,

$$W(k) = W(0) + W'(0)k + O(|k|^2) \quad \text{lorsque } k \rightarrow 0.$$

Si $W(0) \neq 0$, alors par continuité $g_+ = d_-$ ne s'annule pas sur un voisinage de 0 et $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{g_+(k)} = 0$.

Si $W(0) = 0$, alors comme $|g_+(k)| \geq 1$ pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a nécessairement $W'(0) \neq 0$ de sorte que $g_+(k) = \frac{1}{2i}W'(0) + o(1)$ lorsque $k \rightarrow 0$ ne s'annule pas sur un voisinage de 0, son inverse admettant un prolongement continu en 0. La continuité de b_g et b_d suit alors de (5.4), de la continuité de a_g et a_d et de la Proposition 8. \square

5.3 Coefficients de scattering.

Lorsque $k \in \mathbb{R}$, les solutions $\Psi_g(\cdot, k)$ et $\Psi_d(\cdot, k)$, en les tronquant de manière régulière de plus en plus loin et en renormalisant le résultat, permettent de construire des suites de Weyl pour l'opérateur $-\Delta + V$ et la valeur $\lambda = k^2$. La partie $[0, +\infty)$ du spectre de $-\Delta + V$ est ainsi purement continue.

Lorsque $k \in \mathbb{C}^+$, les fonctions $\exp(ikx)$ et $\exp(-ikx)$ ont chacune une croissance ou une décroissance exponentielle aux extrémités opposées de la droite réelle. Il s'en suit que les solutions Ψ_g et Ψ_d appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si $g_+(k) = d_-(k) = 0$. Il suit du Théorème 16 que ces zéros ne peuvent se situer que sur l'axe imaginaire et que zéro est leur éventuel unique point d'accumulation. Le Corollaire 8 exclut cette dernière hypothèse. Par conséquent, il existe un nombre fini (éventuellement nul) de nombres réels positifs $\mu_1 > \dots > \mu_\ell > 0$ tels que pour $k \in \mathbb{C}^+ \setminus \{0\}$,

$$g_+(k) = 0 \quad \text{ssi} \quad k \in \{i\mu_1, \dots, i\mu_\ell\}.$$

Dans ce cas, par unicité des Ψ_g et Ψ_d on déduit qu'il existe des constantes $(\alpha_j)_{j \in \{1, \dots, \ell\}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ telles que

$$\Psi_d(\cdot, i\mu_j) = \alpha_j \Psi_g(\cdot, i\mu_j) \quad \forall j \in \{1, \dots, \ell\}.$$

L'argumentation qui précède permet de préciser le Théorème 16 dans le cas de la dimension 1 d'espace :

Théorème 17. *Soit $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. Le spectre de l'opérateur auto-adjoint $-\Delta + V$ est composé de la demi-droite $[0, +\infty)$, correspondant à du spectre purement continu, et d'une famille finie (éventuellement vide) $-\mu_1^2 < \dots < -\mu_\ell^2 < 0$ de valeurs propres négatives de multiplicité 1. De plus, si $\ell \geq 1$ on a l'estimation*

$$-\mu_1^2 \geq \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x).$$

Pour chaque $j \in \{1, \dots, \ell\}$, on désigne par Ψ_j l'unique solution de (5.1) avec $\lambda = -\mu_j^2$ qui vérifie la condition de normalisation

$$\int_{\mathbb{R}} |\Psi_j(x)|^2 dx = 1.$$

Il existe une constante $C_j \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_j(x) \exp(\mu_j x) = C_j.$$

Définition 15. *Les coefficients de scattering du potentiel $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont définis par*

1. les valeurs propres $(\mu_j^2)_{j \in \{1, \dots, \ell\}}$ et les réels $(C_j)_{j \in \{1, \dots, \ell\}}$,
2. les coefficients de transmission $a_g(k) = a_d(k) \equiv a(k)$, $k \in \mathbb{R}$,
3. les coefficients de réflexion $b_g(k)$ et $b_d(k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Remarque 7. *En fait nous verrons que pour ce qui est des coefficients de réflexion, la connaissance d'une seule des deux fonctions b_g et b_d ferait l'affaire.*

5.4 Représentation intégrale de Ψ_g et Ψ_d .

Dans les sections précédentes, nous avons construit, pour $k \in \bar{\mathbb{C}}^+$, les fonctions⁶

$$g(x, k) = \exp(-ikx)\Psi_g(x, k).$$

Nous allons montrer que pour x fixé, la transformée de Fourier de $g(x, \cdot)$ par rapport à k est à support dans la demi-droite positive. L'idée sous-jacente est que les bornes sur $k \mapsto g(x, k)$, $k \in \bar{\mathbb{C}}^+$, ne sont compatibles avec les caractères de Fourier $\exp(iks)$ que lorsque ceux-ci sont bornés sur $\bar{\mathbb{C}}^+$, c'est-à-dire lorsque $s \geq 0$.

Dans le reste de la section, le symbole \mathbb{F} se réfère à la transformée de Fourier par rapport à la variable k .

Nous avons déjà établi que \bar{g} est continue sur $\mathbb{R} \times \bar{\mathbb{C}}^+$, et que

$$g(x, k) - 1 = O(|k|^{-1}) \quad \text{lorsque } |k| \rightarrow +\infty,$$

uniformément par rapport à x . Il s'en suit que d'une part, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $k \mapsto g(x, k) - 1$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$, et d'autre part, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\pi}\mathbb{F}(g(x, \cdot) - 1)$ est continue de \mathbb{R} dans $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 18. *Il existe une fonction $N : \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

1. N est continue sur $\mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}^+$,
2. La fonction $x \mapsto N(x, \cdot)$ est continue de \mathbb{R} dans $L^1(\mathbb{R}^+)$,
3. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2\pi}\mathbb{F}(g(x, \cdot) - 1)(s) = N(x, s)1_{s \geq 0}.$$

De plus, on a l'identité

$$N(x, 0) = \frac{1}{2} \int_x^\infty V(y) dy,$$

de sorte que

$$V(x) = -2 \frac{\partial}{\partial x} N(x, 0). \quad (5.14)$$

Démonstration. Reprenant la démonstration de la Proposition 7, on écrit

$$\begin{aligned} g(x, k) - 1 &= \int_x^\infty V(y) \frac{\exp(2ik(y-x)) - 1}{2ik} dy + \sum_{n=2}^\infty g_n(x, k), \\ &= \int_x^\infty \int_y^\infty V(z) dz \exp(2ik(y-x)) dy + \sum_{n=2}^\infty g_n(x, k), \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{x+\frac{1}{2}s}^\infty V(z) dz 1_{s \geq 0} \exp(iks) ds + \sum_{n=2}^\infty g_n(x, k), \end{aligned} \quad (5.15)$$

avec

$$\sum_{n=2}^\infty g_n(x, k) = O(|k|^{-2}) \quad \text{lorsque } |k| \rightarrow +\infty, \quad (5.16)$$

6. Le raisonnement qui suit peut-être accompli aussi bien pour Ψ_g que Ψ_d , un seul choix suffit.

uniformément par rapport à x . Par la formule d'inversion de Fourier,

$$J_0(x, s) \equiv \frac{1}{2\pi} \mathbb{F} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{x+\frac{1}{2}s}^{\infty} V(z) dz 1_{s \geq 0} \exp(iks) ds \right) (s) = \left(\int_{x+\frac{1}{2}s}^{\infty} V(z) dz \right) 1_{s \geq 0}. \quad (5.17)$$

Comme $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, J_0 est indéfiniment dérivable pour $x \in \mathbb{R}$ et $s > 0$, et décroît plus vite que s^{-n} lorsque $s \rightarrow +\infty$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, uniformément pour x dans un compact de \mathbb{R} . Il est immédiat d'en déduire que

$$x \mapsto J_0(x, \cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{C}_0(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R})).$$

Il suit de (5.16) et du Théorème de Riemann-Lebesgue⁷ que

$$x \mapsto J_1(x, \cdot) \equiv \frac{1}{2\pi} \mathbb{F} \left(\sum_{n=2}^{\infty} g_n(x, \cdot) \right) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{C}_0(\mathbb{R})).$$

La fonction $k \mapsto \frac{\exp(2ik(x-y))-1}{2ik}$ prolongée par $(x-y)$ pour $k=0$ est (indéfiniment) dérivable sur \mathbb{R} . Dès lors, un calcul similaire à celui de la démonstration de la Proposition 7 nous amène à la conclusion que

$$x \mapsto \left(\text{Id} + \frac{\partial}{\partial k} \right) \sum_{n=2}^{\infty} g_n(x, \cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R})).$$

Par transformation de Fourier, on déduit que

$$x \mapsto (1 + is) \mathbb{F} \sum_{n=2}^{\infty} g_n(x, \cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R})),$$

et enfin par l'inégalité de Hölder, écrivant $\sum_{n=2}^{\infty} g_n(x, \cdot) = (1 + is)^{-1} (1 + is) \sum_{n=2}^{\infty} g_n(x, \cdot)$, que

$$x \mapsto J_1(x, \cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R})).$$

Pour terminer la démonstration, il nous suffit donc de démontrer que

$$J_1(x, s) = 0 \quad \forall s \neq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

autrement dit, puisque $k \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} g_n(x, k) \in L^1(\mathbb{R})$, que

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=2}^{\infty} g_n(x, k) \exp(-iks) dk = 0 \quad \forall s \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par continuité de $k \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} g_n(x, k)$ sur $\bar{\mathbb{C}}^+$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=2}^{\infty} g_n(x, k) \exp(-iks) dk = \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{-R}^R \sum_{n=2}^{\infty} g_n(x, k + \delta i) \exp(-i(k + i\delta)s) dk.$$

Par analyticité de $k \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} g_n(x, k)$ sur \mathbb{C}^+ et la formule de Cauchy,

$$\int_{-R}^R \sum_{n=2}^{\infty} g_n(x, k + \delta i) \exp(-i(k + i\delta)s) dk = \int_{\gamma_{R,\delta}} \sum_{n=2}^{\infty} g_n(x, z) \exp(-izs) dz,$$

7. Voir annexe.

où $\gamma_{R,\delta}$ désigne l'arc de cercle dans \mathbb{C}^+ centré à l'origine, de rayon R , et dont les extrémités sont données par $-R + i\delta$ et $R + i\delta$. Pour $s \neq 0$, on a $|\exp(izs)| \leq 1$ lorsque $z \in \mathbb{C}^+$. On déduit alors de (5.16) que

$$\int_{\gamma_{R,\delta}} \sum_{n=2}^{\infty} g_n(x, z) \exp(-izs) dz = O(R^{-1}) \quad \text{lorsque } R \rightarrow +\infty.$$

La conclusion suit en définissant $N(x, s) = J_0(x, s) + J_1(x, s)$ sur $\mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}^+$. □

Corollaire 9. *Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \bar{\mathbb{C}}^+$ on a l'identité*

$$\Psi_g(x, k) = \exp(ikx) + \int_x^{\infty} K(x, s) \exp(iks) ds \quad (5.18)$$

où le noyau K est défini sur $\{(x, s), x \in \mathbb{R}, s \geq x\}$ par

$$K(x, s) = N(x, s - x).$$

Le potentiel $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se déduit du noyau K par la relation

$$V(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (5.19)$$

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{R}$, le Théorème précédent et la formule d'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ nous donnent

$$g(x, k) = 1 + \int_0^{\infty} N(x, s) \exp(iks) ds. \quad (5.20)$$

Multipliant les deux membres de cette équation par $\exp(ikx)$ on obtient (5.18).

Pour x fixé, les deux fonctions de k constituant les deux membres de (5.20) sont continues et bornées sur $\bar{\mathbb{C}}^+$, et analytiques sur \mathbb{C}^+ . Par le point précédent, ces deux fonctions ont même trace sur \mathbb{R} . Par unicité du prolongement analytique borné, on conclut qu'elles sont égales sur $\bar{\mathbb{C}}^+$. □

Chapitre 6

Scattering inverse pour l'opérateur de Schrödinger sur la droite.

Le Corollaire 9 permet de retrouver le potentiel V à partir de la connaissance des fonctions d'ondes $\Psi_g(\cdot, k)$. En général cependant, la connaissance de celles-ci n'est pas explicite. Le but de ce chapitre est de montrer que l'on peut retrouver le potentiel V uniquement en termes des coefficients de scattering, c'est-à-dire grosso modo en termes des asymptotiques des Ψ_g en plus et moins l'infini.

Le résultat principal que nous allons démontrer est le

Théorème 19 (Gel'fand-Levitan-Marchenko [9, 1]¹).

Existence. *Le noyau N défini dans la section précédente vérifie l'équation intégrale de Gel'fand-Levitan-Marchenko :*

$$B(2x + s) + N(x, s) + \int_0^\infty N(x, t)B(2x + s + t) dt = 0 \quad \forall s \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

où

$$B(z) = B_{\text{discr}}(z) + B_{\text{cont}}(z) = \sum_{j=1}^{\ell} C_j^2 \exp(-\mu_j z) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} b_d(k) \exp(ikz) dk. \quad (6.2)$$

Unicité. *Quel que soit $x \in \mathbb{R}$ fixé il existe une unique solution $N(x, \cdot)$ à (6.1) qui appartienne à $L^2(\mathbb{R}^+)$.*

Démonstration. Commençons par l'existence, ou plutôt la vérification du fait que N vérifie (6.1). La démonstration repose de manière quasi exclusive sur l'une ou l'autre des identités 5.4. Choisissons par exemple

$$a_d(k)\Psi_d(x, k) = b_d(k)\Psi_g(x, k) + \bar{\Psi}_g(x, k),$$

valable pour $k \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. En termes des fonctions g et d , celle-ci se récrit

$$a_d(k)d(x, k) = b_d(k)g(x, k) \exp(2ikx) + \bar{g}(x, k).$$

1. L'attribution des découvertes mathématiques est un exercice parfois périlleux, l'auteur n'est en rien responsable du choix opéré ici, que l'on qualifiera d'"usage courant".

On utilise ensuite l'identité²

$$g(x, k) = 1 + 2\pi(\mathbb{F}^{-1}N)(x, k)$$

de sorte que

$$a_d(k)d(x, k) - 1 = b_d(k) \exp(2ikx) + 2\pi b_d(k) \exp(2ikx)(\mathbb{F}^{-1}N)(x, k) + 2\pi\overline{(\mathbb{F}^{-1}N)}(x, k).$$

Comme la fonction N est réelle, on a

$$2\pi\overline{(\mathbb{F}^{-1}N)}(x, k) = (\mathbb{F}N)(x, k).$$

Ainsi, en appliquant l'opérateur \mathbb{F}^{-1} à l'avant dernière identité on obtient³

$$\mathbb{F}^{-1}(a_d d - 1) = \mathbb{F}^{-1}(b_d \exp(2ikx)) + 2\pi\mathbb{F}^{-1}(b_d \exp(2ikx)\mathbb{F}^{-1}N) + N. \quad (6.3)$$

Etape 1. On a

$$\mathbb{F}^{-1}(b_d \exp(2ikx))(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} b_d(k) \exp(2ikx) \exp(iks) dk = B_{\text{cont}}(2x + s). \quad (6.4)$$

Etape 2. De la même manière,

$$\begin{aligned} & 2\pi\mathbb{F}^{-1}(b_d \exp(2ikx)\mathbb{F}^{-1}N)(x, s) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} b_d(k) \exp(2ikx) \int_0^{\infty} N(x, t) \exp(ikt) dt \exp(isk) dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} N(x, t) \int_{\mathbb{R}} b_d(k) \exp(ik(2x + s + t)) dk dt \\ &= \int_0^{\infty} N(x, t) B_{\text{cont}}(2x + s + t) dt. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Etape 3. On s'intéresse maintenant au terme $\mathbb{F}^{-1}(a_d d - 1)$. Comme $a_d(k)d(x, k) - 1$ décroît a priori comme $|k|^{-1}$ en l'infini, on introduit un facteur de convergence afin d'obtenir une fonction de L^1 en k . Plus précisément, on définit pour $\varepsilon > 0$

$$I_{\varepsilon}(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (a_d(k)d(x, k) - 1) \frac{1}{1 - i\varepsilon k} \exp(iks) dk,$$

et il suit du théorème de convergence dominée de Lebesgue que pour $x \in \mathbb{R}$ fixé

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}(x, \cdot) = \mathbb{F}^{-1}(a_d d - 1)(x, \cdot) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}).$$

Pour x et s fixés, l'intégrand $(a_d(k)d(x, k) - 1) \frac{1}{1 - i\varepsilon k} \exp(iks)$ est bien défini⁴ pour $k \in \bar{\mathbb{C}}^+$, méromorphe sur \mathbb{C}^+ et continu sur $\bar{\mathbb{C}}^+$. Puisque $a_d = g_+^{-1}$, les pôles éventuels de l'intégrand

2. Dans la suite on confond N et son extension par zéro sur \mathbb{R}^- .

3. On vérifiera sans peine au moyen du Corollaire 7 que tous les termes auxquels on applique \mathbb{F}^{-1} sont (continus à valeurs dans) $L^2(\mathbb{R})$ (terme du membre de gauche) ou $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ (termes du membre de droite).

4. Jusqu'à présent nous n'avons définis les coefficients de transmission et de réflexion que sur \mathbb{R} , mais les expressions pour g_{\pm} et d_{\pm} fournies par le Corollaire 7 s'étendent à $\bar{\mathbb{C}}^+$ tout entier.

sont situés aux zéros de g_+ , à savoir $i\mu_1, \dots, i\mu_\ell$. En combinant ces dernières affirmations avec le théorème des résidus, on obtient

$$\begin{aligned} 2\pi I_\varepsilon(x, s) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0_+} \int_{-R}^R (a_d d - 1)(x, k + i\delta) \frac{1}{1 - i\varepsilon(k + i\delta)} \exp(i(k + i\delta)s) dk \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} (a_d d - 1)(x, z) \frac{1}{1 - i\varepsilon z} \exp(izs) dz \\ &\quad + 2i\pi \sum_{j=1}^{\ell} \text{rés}(a_d, i\mu_j) d(x, i\mu_j) \frac{1}{1 + \varepsilon\mu_j} \exp(-\mu_j s), \end{aligned}$$

où γ_R désigne l'arc de cercle dans $\bar{\mathbb{C}}^+$ centré à l'origine et joignant les points $-R + 0i$ à $R + 0i$. Comme

$$\left| (a_d d - 1)(x, z) \frac{1}{1 - i\varepsilon z} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|z|^2} \quad \text{quand } |z| \rightarrow +\infty,$$

l'intégrale sur l'arc de cercle tend vers 0 lorsque $R \rightarrow +\infty$. Faisant ensuite tendre ε vers 0 on obtient

$$\mathbb{F}^{-1}(a_d d - 1)(x, s) = i \sum_{j=1}^{\ell} \text{rés}(a_d, i\mu_j) d(x, i\mu_j) \exp(-\mu_j s), \quad \text{pour presque tout } s \in \mathbb{R}. \quad (6.6)$$

Etape 4. Il nous reste à calculer les résidus de a_d aux points $i\mu_j$, $j = 1, \dots, \ell$. Nous fixons j et allons déterminer la valeur (non nulle) de $\frac{d}{dk} g_+(i\mu_j) = \frac{d}{dk} d_-(i\mu_j)$. Comme la convergence énoncée au Corollaire 7 point 2 est uniforme pour k dans un compact de \mathbb{C}^+ et que les fonctions en présence sont analytiques, il suit que pour $k \in \mathbb{C}^+$

$$\frac{d}{dk} d_-(k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \partial_k d(x, k) \quad (6.7)$$

et aussi que

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \partial_k \partial_x d(x, k) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \partial_k \partial_x d(x, k) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \partial_k d(x, k). \quad (6.8)$$

On pose

$$\omega(x, k) = (d(x, k) \partial_k \partial_x d(x, k) - \partial_k d(x, k) \partial_x d(x, k)) \exp(-2ikx) \quad (6.9)$$

de sorte qu'en utilisant (5.6) on aboutit à l'équation différentielle ordinaire

$$\partial_x \omega(x, k) = 2i d(x, k) \partial_x d(x, k) \exp(-2ikx) = i(\partial_x \Psi_d^2 + 2ik \Psi_d^2)$$

avec la condition limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \omega(x, k) = 0,$$

dont l'unique solution est donnée par

$$\omega(x, k) = i \Psi_d^2(x, k) - 2k \int_{-\infty}^x \Psi_d^2(y, k) dy. \quad (6.10)$$

Pour $k = i\mu_j$, on a⁵ $\Psi_d(\cdot, i\mu_j) = \alpha_j \Psi_g(\cdot, i\mu_j)$, les deux fonctions étant exponentiellement décroissantes en $\pm\infty$. Prenant la limite $x \rightarrow +\infty$ dans (6.10) on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x, i\mu_j) = -2i\mu_j \int_{\mathbb{R}} \Psi_d^2(y, i\mu_j) dy. \quad (6.11)$$

D'autre part, on a aussi

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \alpha_j \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, i\mu_j) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_j \Psi_g(x, i\mu_j) \exp(-ikx) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_d(x, i\mu_j) \exp(-ikx) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} d(x, i\mu_j) \exp(-2ikx), \end{aligned}$$

et de la même manière

$$-2\mu_j \alpha_j = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-2ikx) \partial_x d(x, k). \quad (6.12)$$

Prenant alors la limite $x \rightarrow +\infty$ dans (6.9) et tenant compte de (6.7)(6.8) et (6.12) on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x, k) = 2\mu_j \alpha_j \frac{d}{dk} d_-(i\mu_j). \quad (6.13)$$

En égalant (6.11) et (6.13) on aboutit finalement à

$$\frac{d}{dk} d_-(x, i\mu_j) = \frac{1}{i\alpha_j} \int_{\mathbb{R}} \Psi_d(y, i\mu_j)^2 dy,$$

et donc

$$\text{rés}(a_d, i\mu_j) = i\alpha_j \left(\int_{\mathbb{R}} \Psi_d(y, i\mu_j)^2 dy \right)^{-1}. \quad (6.14)$$

Etape 5. On combine (6.6) avec (6.14) pour obtenir

$$\mathbb{F}^{-1}(a_d d - 1)(x, s) = - \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \left(\int_{\mathbb{R}} \Psi_d(y, i\mu_j)^2 dy \right)^{-1} d(x, i\mu_j) \exp(-\mu_j s). \quad (6.15)$$

Par définition de C_j et définition de Ψ_g on a

$$\frac{\Psi_d(\cdot, i\mu_j)}{\|\Psi_d(\cdot, i\mu_j)\|_{L^2(\mathbb{R})}} = C_j \Psi_g(\cdot, i\mu_j).$$

Comme on a aussi $\Psi_d(\cdot, i\mu_j) = \alpha_j \Psi_g(\cdot, i\mu_j)$, on peut récrire (6.15) sous la forme

$$\mathbb{F}^{-1}(a_d d - 1)(x, s) = - \sum_{j=1}^{\ell} C_j^2 g(x, i\mu_j) \exp(-\mu_j(s + 2x)). \quad (6.16)$$

5. Voir la section Coefficients de scattering.

Finalement, on injecte (5.20) dans le membre de droite ci-dessus, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}^{-1}(a_d d - 1)(x, s) &= - \sum_{j=1}^{\ell} C_j^2 \exp(-\mu_j(s + 2x)) \\
&\quad - \int_0^{\infty} N(x, t) \sum_{j=1}^{\ell} C_j^2 \exp(-\mu_j(s + 2x + t)) dt \\
&= -B_{\text{discr}}(s + 2x) - \int_0^{\infty} N(x, t) B_{\text{discr}}(s + 2x + t) dt.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Etape 6. La conclusion (6.1) suit en injectant (6.4),(6.5) et (6.17) dans (6.3).

Venons en maintenant à la question de l'unicité. Si pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $N_1(x, \cdot)$ et $N_2(x, \cdot)$ sont deux solutions dans $L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ de (6.1), alors en posant $M(s) = N_1(x, s) - N_2(x, s)$ on a

$$M(s) + \int_0^{\infty} M(t) B(2x + s + t) dt = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^+. \tag{6.18}$$

On calcule, d'une part

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} M(t) B(2x + s + t) dt M(s) ds \\
&= \int_0^{\infty} C_j M(t) \exp(-\mu_j(x + t)) dt \int_0^{\infty} C_j M(s) \exp(-\mu_j(x + s)) ds \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} M(t) \int_{\mathbb{R}} b_d(k) \exp(ik(2x + s + t)) dk M(s) ds \\
&\geq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} M(t) \exp(ikt) dt \int_0^{\infty} M(s) \exp(iks) ds b_d(k) \exp(2ikx) dk \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{\infty} M(s) \exp(iks) ds \right)^2 b_d(k) \exp(2ikx) dk,
\end{aligned} \tag{6.19}$$

et d'autre part, par l'identité de Plancherel

$$\int_0^{\infty} M(s)^2 ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^{\infty} M(s) \exp(iks) ds \right|^2 dk. \tag{6.20}$$

En additionnant (6.19) et (6.20) et en tenant compte de (6.18) on aboutit à

$$0 \geq \int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} M(s) \exp(iks) ds \right|^2 (1 - |b_d(k)|) dk. \tag{6.21}$$

Comme $|a_d|^2 + |b_d|^2 = 1$ avec $a_d(k) = g_+(k)^{-1} \neq 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a $|b_d(k)| < 1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, de sorte que (6.21) implique

$$0 = \int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} M(s) \exp(iks) ds \right|^2 dk.$$

Une nouvelle application de la formule de Plancherel implique que $M \equiv 0$. □

Enfin, comme à la section précédente on peut symétriser un peu plus la formule de Gel'fand-Levitan-Marchenko en posant $K(x, s) = N(x, s - x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $s \geq x$. On obtient après un changement de variable immédiat

$$B(x + s) + K(x, s) + \int_x^\infty K(x, t)B(t + s) dt = 0, \quad (6.22)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $s \geq x$.

Chapitre 7

Résolution de l'équation de KdV par scattering inverse.

Dans les deux chapitres précédents, le potentiel V était fixé une fois pour toutes. Dans la Section 4.1, nous avons aperçu qu'il était utile d'étudier l'opérateur de Schrödinger $\Psi \mapsto -\partial_{xx}\Psi + V(x)\Psi$ pour lequel $V(x) = u(x, t)$ avec u solution de l'équation de KdV.

Si $u(x, 0) = u_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la théorie de Cauchy¹ pour KdV nous apprend qu'il existe une unique solution u telle $t \mapsto u(\cdot, t) \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty), \mathcal{S}(\mathbb{R}))$. Pour chaque $t \geq 0$, on note L_u^t l'opérateur auto-adjoint²

$$L_u^t \Psi = -\partial_{xx}\Psi + u(x, t)\Psi \quad \forall \Psi \in H^2(\mathbb{R}).$$

Les valeurs propres négatives (qui sont toutes de multiplicité 1) ont été associées au Chapitre 5 aux zéros dans \mathbb{C}^+ de la fonction g_+ , ces zéros étant tous non dégénérés (étape 4 de la démonstration du Théorème 19). D'autre part, la représentation (5.9) des fonctions g et d , et ensuite celle du Corollaire 7 des fonctions g_\pm et d_\pm , permettent de conclure que toutes ces fonctions dépendent de manière régulière du potentiel V , et par conséquent de t dans le cas qui nous intéresse. Le théorème des fonctions implicites nous permet alors de décrire le spectre ainsi que les modes et quasi-modes de L_u^t au moyen de

1. ℓ fonctions régulières $t \mapsto \mu_j(t)$ avec $1 \leq j \leq \ell$ (les valeurs propres étant égales à $-\mu_j^2(t)$)
2. pour chaque $j \in 1, \dots, \ell$, la fonction propre (réelle) normalisée

$$x \mapsto \Psi_j(x, t) = \Psi_g(x, i\mu_j(t), t) / \|\Psi_g(\cdot, i\mu_j(t), t)\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

dont la dépendance en t est régulière,

3. pour chaque $k \in \mathbb{R}^+$, le quasi-mode

$$x \mapsto \Psi_d(x, k, t)$$

dont la dépendance en t est régulière.

Théorème 20. *Lorsque u vérifie l'équation de Korteweg - de Vries, les fonctions $\mu_j(t)$ ne dépendent pas de t .*

1. Que nous n'aborderons pas ici.
2. Voir le Théorème 15.

Démonstration. On part de l'équation aux valeurs propres

$$[\partial_{xx} - (u - \lambda)] \Psi = 0 \quad (7.1)$$

vérifiée par $\Psi = \Psi_j(\cdot, t)$ et $\lambda = i\mu_j(t)$. Après dérivation suivant les variables t et x on obtient les équations

$$[\partial_{xx} - (u - \lambda)] \partial_t \Psi = (\partial_t u - i\partial_t \mu_j) \Psi, \quad (7.2)$$

et

$$[\partial_{xx} - (u - \lambda)] \partial_x \Psi = \partial_x u \Psi. \quad (7.3)$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} [\partial_{xx} - (u - \lambda)] \partial_{xxx} \Psi &= [\partial_{xx} - (u - \lambda)] (\partial_x u \Psi + (u - \lambda) \partial_x \Psi), \\ &= \partial_x u [\partial_{xx} - (u - \lambda)] \Psi + \partial_{xxx} u \Psi + 2\partial_{xx} u \partial_x \Psi \\ &\quad + (u - \lambda) [\partial_{xx} - (u - \lambda)] \partial_x \Psi + \partial_{xx} u \partial_x \Psi + 2\partial_x u \partial_{xx} \Psi \\ &= (\partial_{xxx} u + 3(u - \lambda) \partial_x u) \Psi + 3\partial_{xx} u \partial_x \Psi, \end{aligned} \quad (7.4)$$

où l'on a utilisé (7.1) et (7.3). Afin d'éliminer le terme en $\partial_x \Psi$ dans le dernier terme de (7.4), on évalue

$$\begin{aligned} [\partial_{xx} - (u - \lambda)] (u \partial_x \Psi) &= u [\partial_{xx} - (u - \lambda)] \partial_x \Psi + \partial_{xxx} u \partial_x \Psi + 2\partial_x u \partial_{xx} \Psi \\ &= (3u \partial_x u - 2\lambda \partial_x u) \Psi + \partial_{xx} u \partial_x \Psi. \end{aligned} \quad (7.5)$$

de sorte que par soustraction pondérée,

$$[\partial_{xx} - (u - \lambda)] (\partial_{xxx} \Psi - 3u \partial_x \Psi) = (\partial_{xxx} u - 6u \partial_x u + 3\lambda \partial_x u) \Psi, \quad (7.6)$$

et finalement

$$[\partial_{xx} - (u - \lambda)] (\partial_t \Psi + \partial_{xxx} \Psi - 3(u + \lambda) \partial_x \Psi) = (\partial_t u + \partial_{xxx} u - 6u \partial_x u) \Psi - i\partial_t \mu_j \Psi. \quad (7.7)$$

Puisque u vérifie l'équation de KdV, il s'en suit

$$[\partial_{xx} - (u - \lambda)] (\partial_t \Psi + \partial_{xxx} \Psi - 3(u + \lambda) \partial_x \Psi) = -i\partial_t \mu_j \Psi. \quad (7.8)$$

En posant

$$R_u^t \Psi = \partial_t \Psi + \partial_{xxx} \Psi - 3(u + \lambda) \partial_x \Psi,$$

il vient pour le Wronskien

$$\partial_x \left((R_u^t \Psi) \partial_x \Psi - \partial_x (R_u^t \Psi) \Psi \right) = i\partial_t \mu_j \Psi^2.$$

Puisque $R_u^t \Psi$ décroît de manière exponentielle en $\pm\infty$, une intégration de l'égalité précédente sur \mathbb{R} implique

$$0 = i\partial_t \mu_j \int_{\mathbb{R}} \Psi^2,$$

d'où la conclusion suit sachant que Ψ est réelle. \square

L'invariance du spectre étant établie, on en vient au

Théorème 21. *Les coefficients de scattering de L_u^t évoluent suivant les lois*

$$\begin{aligned} C_j(t) &= \exp(4\mu_j^2 t) C_j(0), & \forall j \in \{1, \dots, \ell\}, \\ b_d(k, t) &= \exp(8i\mu_j^3 t) b_d(k, 0), & \forall k \in \mathbb{R}^+, \\ a_d(k, t) &= a_d(k, 0), & \forall k \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Démonstration. Fixons $j \in \{1, \dots, \ell\}$. Puisque $\partial_t \mu_j = 0$, l'équation (7.8) se récrit

$$[\partial_{xx} - (u - \lambda)] R_u^t \Psi_j = 0. \quad (7.9)$$

Comme $R_u^t \Psi_j \in L^2(\mathbb{R})$ (décroissance exponentielle) et μ_j est de multiplicité 1, il en découle qu'il existe $K_j = K_j(t) \in \mathbb{R}$ telle que

$$R_u^t \Psi_j = K_j \Psi_j.$$

En multipliant cette dernière égalité par Ψ et en intégrant le résultat sur \mathbb{R} on aboutit à

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t (\Psi_j^2 / 2) + \int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\Psi_j \partial_{xx} \Psi_j - 2(\partial_x \Psi_j)^2 - 3i\mu_j \Psi_j^2 \right) = K_j \int_{\mathbb{R}} \Psi_j^2.$$

Comme Ψ_j est normalisée, la première intégrale s'annule. La seconde est nulle car l'intégrand est une dérivée totale. On conclut à la nullité de K_j , et ainsi à l'égalité³

$$R_u^t \Psi_d = \partial_t \Psi_d + \partial_{xxx} \Psi_d - 3(u + \lambda) \partial_x \Psi_d = 0. \quad (7.10)$$

Par définition de $C_j(t)$, on a

$$\Psi_d(x, i\mu_j, t) \simeq C_j(t) \exp(-\mu_j x) \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty, \quad (7.11)$$

et la Proposition 7 permet de montrer que quels que soient $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\partial_t^p \partial_x^q \Psi_d(x, i\mu_j, t) \simeq \frac{d^p}{dt^p} C_j(t) (-\mu_j)^q \exp(-\mu_j x) \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent, en injectant dans (7.10) l'asymptotique pour Ψ_j déduite de (7.11), et en tenant compte du fait que $u(x, t) \rightarrow 0$ à l'infini en x , on obtient

$$\frac{d}{dt} C_j(t) - 4\mu_j^3 C_j(t) = 0, \quad (7.12)$$

d'où la loi pour $C_j(t)$.

Venons en maintenant aux coefficients de réflexion et de transmission, et fixons $k \in \mathbb{R}^+$, $\lambda = k^2$.

Un calcul identique à celui utilisé dans la démonstration du Théorème 20, appliqué cette fois à $\Psi = \Psi_d = \Psi_d(\cdot, k, t)$, amène à la conclusion

$$[\partial_{xx} - (u - \lambda)] R_u^t \Psi_d = 0. \quad (7.13)$$

3. Les fonctions Ψ_j et Ψ_d étant multiples l'une de l'autre.

Puisque Ψ_d et Ψ_g forment une base de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ordinaire $L_u^t \Psi = \lambda \Psi$, il existe des constantes $\alpha_k = \alpha_k(t)$ et $\beta_k = \beta_k(t)$ telles que

$$\partial_t \Psi_d + \partial_{xxx} \Psi_d - 3(u + \lambda) \partial_x \Psi_d = \alpha_k \Psi_g + \beta_k \Psi_d. \quad (7.14)$$

On remplace dans (7.14) les asymptotiques pour Ψ_g et Ψ_d , d'une part lorsque $x \rightarrow -\infty$ et d'autre part lorsque $x \rightarrow +\infty$: respectivement

$$\Psi_g \simeq \exp(ikx) + b_g(k, t) \exp(-ikx), \quad \Psi_d \simeq a_d(k, t) \exp(-ikx)$$

et

$$\Psi_g \simeq a_g(k, t) \exp(ikx), \quad \Psi_d \simeq \exp(-ikx) + b_d(k, t) \exp(ikx).$$

On obtient

$$\left(\partial_t a_d + 4ik^3 a_d \right) \exp(-ikx) = \alpha_k \left(\exp(ikx) + b_g \exp(ikx) \right) + \beta_k a_d \exp(-ikx),$$

et

$$\left(\partial_t b_d - 4ik^3 b_d \right) \exp(ikx) + 4ik^3 \exp(-ikx) = \alpha_k a_g \exp(ikx) + \beta_k \left(\exp(-ikx) + b_d \exp(ikx) \right).$$

Par identification des coefficients de $\exp(ikx)$ et $\exp(-ikx)$ dans les deux égalités qui précèdent, on aboutit aux relations

$$\alpha_k = 0, \quad \text{et} \quad \beta_k = 4ik^3$$

et finalement à

$$\partial_t a_d = 0, \quad \partial_t b_d = 8ik^3 b_d,$$

d'où les lois annoncées pour b_d et a_d suivent par intégration. \square

La méthode de résolution de KdV par scattering inverse est maintenant simple : à la donnée initiale $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on associe ses données de scattering, on les fait évoluer suivant les lois ci-dessus, et on recouvre $u(\cdot, t)$ au moyen de l'équation de Gel'fand-Levitan-Marchenko.

Pour qu'elle soit opérante, il faut être à même de calculer les coefficients de scattering de la donnée initiale (étape 1) et de résoudre l'équation de Gel'fand-Levitan-Marchenko (étape 3), ce qui en pratique peut se révéler ardu. Aussi, nous étudierons le cas particulier mais néanmoins important des potentiels dits sans réflexion, et qui correspondent aux solutions en multi-solitons évoquées au premier chapitre.

7.1 Solutions en multi-solitons

L'idée principale consiste à se fixer arbitrairement des coefficients de scattering pour lesquels la fonction b_d est identiquement nulle. On résout ensuite l'équation de Gel'fand-Levitan-Marchenko pour ces coefficients, ce qui permet de déterminer quel est le potentiel dont les coefficients de scattering sont ceux choisis.

On se fixe ainsi ℓ nombres réels positifs $0 < \mu_\ell < \dots < \mu_1$ et ℓ nombres réels positifs $C_j, j = 1, \dots, \ell$. Pour ces coefficients, et supposant que la fonction b_d soit nulle, le noyau B intervenant dans l'équation de Gel'fand-Levitan-Marchenko s'écrit

$$B(z) = \sum_{j=1}^{\ell} C_j^2 \exp(-\mu_j z).$$

Dès lors, (6.22) pour $K = K(x, y)$ se ramène à

$$\sum_{j=1}^{\ell} C_j^2 \exp(-\mu_j x) \exp(-\mu_j y) + K(x, y) + \sum_{j=1}^{\ell} C_j^2 \exp(-\mu_j y) \int_x^{\infty} K(x, t) \exp(-\mu_j t) dt = 0, \quad (7.15)$$

quels que soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \geq x$. Ecrite sous cette forme, il est clair que l'on peut chercher une solution sous la forme

$$K(x, y) = - \sum_{k=1}^{\ell} C_k f_k(x) \exp(-\mu_k y).$$

(le signe moins et la normalisation par C_k sont simplement commodes pour la suite) En remplaçant l'Ansatz ci-dessus dans (7.15) et en identifiant les termes en facteurs des $\exp(-\mu_j y)$ on obtient le système

$$f_j(x) + \sum_{k=1}^{\ell} C_j C_k f_k(x) \int_x^{\infty} \exp(-(\mu_j + \mu_k)t) dt = C_j \exp(-\mu_j x), \quad (7.16)$$

$j = 1, \dots, \ell$, ou encore

$$f_j(x) + \sum_{k=1}^{\ell} C_j C_k \frac{\exp(-(\mu_j + \mu_k)x)}{\mu_j + \mu_k} f_k(x) = C_j \exp(-\mu_j x), \quad (7.17)$$

$j = 1, \dots, \ell$. Si considère x comme un paramètre, (7.17) correspond à un système linéaire de ℓ équations à ℓ inconnues. Pour en analyser la résolution, on pose

$$I = \left(\delta_{jk} \right)_{1 \leq j, k \leq \ell}, \quad T = \left(C_j C_k \frac{\exp(-(\mu_j + \mu_k)x)}{\mu_j + \mu_k} \right)_{1 \leq j, k \leq \ell}, \quad b = \left(C_j \exp(-\mu_j x) \right)_{1 \leq j \leq \ell},$$

de sorte que (7.17) se réécrit

$$(I + T)f = b, \quad (7.18)$$

où $f = \left(f_j \right)_{1 \leq j \leq \ell}$. La matrice T est définie positive, en effet quel que soit $g = (g_j)_{1 \leq j \leq \ell}$,

$$\langle Tg, g \rangle = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} g_j g_k C_j C_k \frac{\exp(-(\mu_j + \mu_k)x)}{\mu_j + \mu_k} = \int_x^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\ell} g_j C_j \exp(-\mu_j y) \right)^2 dy,$$

et dès lors $I + T$ est inversible quel que soit x . On résout (7.18) par la méthode de Cramer. Le déterminant de $I + T$ est donné, lorsqu'on le développe suivant la colonne k , par

$$\Delta \equiv \det(I + T) = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\delta_{jk} + C_j C_k \frac{\exp(-(\mu_j + \mu_k)x)}{\mu_j + \mu_k} \right) T_{jk},$$

où $T_{j,k}$ désigne le cofacteur d'indice (j, k) de T . Ainsi, on obtient

$$f_k = f_k(x) = \Delta^{-1} \sum_{j=1}^{\ell} C_j \exp(-\mu_j x) T_{j,k}.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} K(x, x) &= - \sum_{k=1}^{\ell} C_k f_k(x) \exp(-\mu_k x) \\ &= -\Delta^{-1} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} C_j C_k \exp(-(\mu_j + \mu_k)x) T_{j,k} \\ &= \Delta^{-1} \frac{d}{dx} \Delta, \end{aligned} \tag{7.19}$$

la dernière égalité suivant du caractère multi-linéaire du déterminant.

On obtient ainsi le

Théorème 22 (Gardner, Greene, Kruskal, Miura [8]). *Tout potentiel sans réflexion peut s'écrire sous la forme*

$$V = -2 \frac{d^2}{dx^2} \log \det(I + T),$$

où T est défini comme ci-dessus au moyen de $\ell \geq 1$ réels positifs $(C_j)_{1 \leq j \leq \ell}$ et ℓ réels positifs distincts $(\mu_j)_{1 \leq j \leq \ell}$.

Le choix $\ell = 2$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$ permet par exemple de retrouver l'exemple de 2-soliton du Chapitre 1, modulo un facteur de translation en espace et en temps.

Nous allons maintenant analyser plus en détails le comportement en temps grand (positif ou négatif) des solutions correspondant à un potentiel sans réflexion. Nous verrons qu'elles se comportent alors comme une superposition de solitons.

Pour ce faire, on récrit

$$\begin{aligned} V &= -2 \frac{d}{dx} K(x, x) = 2 \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{\ell} C_j f_j(x) \exp(-\mu_j x) \\ &\equiv 2 \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{\ell} F_j(x) \\ &= 2 \sum_{j=1}^{\ell} F'_j(x), \end{aligned} \tag{7.20}$$

et on s'intéresse à l'asymptotique lorsque $t \rightarrow \pm\infty$ de $\sum F'_j$, en choisissant $V = u(\cdot, t)$. Cette analyse nécessite aussi de s'intéresser à l'asymptotique de $\sum F_j$.

Le système (7.17) devient ⁴

$$C_j^{-2}(t) \exp(2\mu_j x) F_j(x, t) + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{F_k(x, t)}{\mu_j + \mu_k} = 1, \tag{7.21}$$

4. La dépendance explicite $C_j \equiv C_j(t)$ est momentanément laissée de côté.

$j = 1, \dots, \ell$, duquel par dérivation on obtient⁵

$$C_j^{-2}(t) \exp(2\mu_j x) F'_j(x, t) + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{F'_k(x, t)}{\mu_j + \mu_k} = -2\mu_j C_j^{-2}(t) \exp(2\mu_j x) F_j(x, t), \quad (7.22)$$

$j = 1, \dots, \ell$.

On se fixe $j_0 \in \{1, \dots, \ell\}$ et on considère le repère en translation à vitesse uniforme $4\mu_{j_0}^2$ défini par la variable

$$\xi = x - 4\mu_{j_0}^2 t.$$

C'est dans ce (chacun de ces) repère(s) que nous allons analyser l'asymptotique en temps grand. Remarquons que l'on a

$$\begin{aligned} C_j^{-2}(t) \exp(2\mu_j x) &= C_j^{-2}(0) \exp(-8\mu_j^3 t + 2\mu_j x) \\ &= C_j^{-2}(0) \exp(2\mu_j \xi) \exp(-8\mu_j(\mu_j^2 - \mu_{j_0}^2)t) \\ &= D_j(\xi) \exp(-8\mu_j(\mu_j^2 - \mu_{j_0}^2)t). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Les systèmes (7.21) et (7.22) s'y transforment en

$$D_j(\xi) \exp(-8\mu_j(\mu_j^2 - \mu_{j_0}^2)t) F_j(x, t) + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{F_k(x, t)}{\mu_j + \mu_k} = 1, \quad (7.24)$$

$j = 1, \dots, \ell$, et

$$D_j(\xi) \exp(-8\mu_j(\mu_j^2 - \mu_{j_0}^2)t) F'_j(x, t) + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{F'_k(x, t)}{\mu_j + \mu_k} = -2\mu_j D_j(\xi) \exp(-8\mu_j(\mu_j^2 - \mu_{j_0}^2)t) F_j(x, t), \quad (7.25)$$

$j = 1, \dots, \ell$. On passe à la limite $t \rightarrow +\infty$ dans (7.24) et (7.25), à ξ **fixé**, ce qui amène, en posant⁶

$$F_j = \lim_{t \rightarrow +\infty} F_j(\xi + 4\mu_{j_0}^2 t, t), \quad F'_j = \lim_{t \rightarrow +\infty} F'_j(\xi + 4\mu_{j_0}^2 t, t)$$

à :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{j_0} \frac{F_k}{\mu_j + \mu_k} = 1 - \delta_{j, j_0} D_{j_0} F_{j_0}, & j = 1, \dots, j_0, \\ F_j = 0, & j = j_0 + 1, \dots, \ell. \end{cases} \quad (7.26)$$

et à

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{j_0} \frac{F'_k}{\mu_j + \mu_k} = -\delta_{j, j_0} D_{j_0} (2\mu_{j_0} F_{j_0} + F'_{j_0}), & j = 1, \dots, j_0, \\ F'_j = -2\mu_j F_j = 0, & j = j_0 + 1, \dots, \ell. \end{cases} \quad (7.27)$$

On note les matrices

$$M = \left(\frac{1}{\mu_j + \mu_k} \right)_{1 \leq j, k \leq j_0}, \quad M^- = \left(\frac{1}{\mu_j + \mu_k} \right)_{1 \leq j, k \leq j_0 - 1}$$

et $M^\#$ celle obtenue à partir des M en remplaçant la dernière colonne par une colonne de uns.

5. On note prime la dérivation en la variable d'espace.

6. F'_j est une notation, pas une dérivée.

En utilisant la formule de Cramer pour (7.26) et (7.27) on a

$$\begin{cases} F_j \det M = \sum_{k=1}^{j_0} M_{kj} - D_{j_0} M_{j_0 j} F_{j_0}, & j = 1, \dots, j_0, \\ F'_j \det M = -D_{j_0} M_{j_0 j} (2\mu_{j_0} F_{j_0} - F'_{j_0}), & j = 1, \dots, j_0, \end{cases} \quad (7.28)$$

où les M_{kj} se réfèrent aux cofacteurs de M . Pour $j = j_0$, on a aussi

$$F_{j_0} = \frac{\det M^\#}{\det M + D_{j_0} \det M^-} \quad F'_{j_0} = -\frac{2D_{j_0} \mu_{j_0} F_{j_0} \det M^\#}{\det M + D_{j_0} \det M^-}. \quad (7.29)$$

En sommant la deuxième équation de (7.28) sur j , faisant usage de (7.29), on obtient

$$\sum_{j=1}^{j_0} F'_j = -\frac{2D_{j_0} \mu_{j_0}}{(\det M / \det M^\# + D_{j_0} (\det M^- / \det M^\#))^2}. \quad (7.30)$$

On remarque que⁷

$$\det M = \frac{\prod_{j=1}^{j_0-1} (\mu_{j_0} - \mu_j)}{\prod_{j=1}^{j_0} (\mu_{j_0} + \mu_j)} \det M^\#$$

et⁸

$$\det M^\# = \frac{\prod_{j=1}^{j_0-1} (\mu_{j_0} - \mu_j)}{\prod_{j=1}^{j_0} (\mu_{j_0} + \mu_j)} \det M^-.$$

Dès lors, toujours pour ξ fixé,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(\xi + 4\mu_{j_0} t, t) = 2 \sum_{j=1}^{j_0} F'_j = -16\mu_{j_0}^3 D_{j_0} \prod_{j=1}^{j_0-1} \left(\frac{\mu_{j_0} + \mu_j}{\mu_{j_0} - \mu_j} \right)^2 \left[1 + 2\mu_{j_0} D_{j_0} \prod_{j=1}^{j_0-1} \left(\frac{\mu_{j_0} + \mu_j}{\mu_{j_0} - \mu_j} \right)^2 \right]^{-2}. \quad (7.31)$$

On se rappelle que

$$D_{j_0} = C_{j_0}(0)^{-2} \exp(2\mu_{j_0} \xi),$$

et on définit $\xi_{j_0}^+$ par la relation

$$\exp(2\mu_{j_0} \xi_{j_0}^+) = \frac{C_{j_0}(0)^2}{2\mu_{j_0}} \prod_{j=1}^{j_0-1} \left(\frac{\mu_{j_0} + \mu_j}{\mu_{j_0} - \mu_j} \right)^2$$

de sorte que (7.31) se retranscrit en

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(\xi + 4\mu_{j_0} t, t) = -2\mu_{j_0}^2 \operatorname{sech}^2(\mu_{j_0} (\xi - \xi_{j_0}^+)). \quad (7.32)$$

Un raisonnement parallèle permet, pour la limite $t \rightarrow -\infty$, d'obtenir

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(\xi + 4\mu_{j_0} t, t) = -2\mu_{j_0}^2 \operatorname{sech}^2(\mu_{j_0} (\xi - \xi_{j_0}^-)), \quad (7.33)$$

où cette fois $\xi_{j_0}^-$ est défini par

$$\exp(2\mu_{j_0} \xi_{j_0}^-) = \frac{C_{j_0}(0)^2}{2\mu_{j_0}} \prod_{j=j_0+1}^{\ell} \left(\frac{\mu_{j_0} + \mu_j}{\mu_{j_0} - \mu_j} \right)^2.$$

7. En soustrayant la colonne j_0 de chacune des précédentes pour le calcul de $\det M$.

8. En soustrayant la ligne j_0 de chacune des précédentes pour le calcul de $\det M^\#$.

La solution u se comporte donc (localement sur les bornés en ξ et asymptotiquement lorsque $t \rightarrow \pm\infty$) comme une onde progressive de vitesse $4\mu_{j_0}^2$ et d'amplitude $2\mu_{j_0}^2$. En balayant les choix possibles pour j_0 on peut alors mieux décrire la solution :

Théorème 23 (Gardner, Greene, Kruskal, Miura [8]). *Si la solution u de l'équation de KdV correspond à un potentiel sans réflexion, alors à chaque valeur propre $\lambda_{j_0} = -\mu_{j_0}^2$ est associée un soliton de vitesse $4\mu_{j_0}^2$ et d'amplitude $2\mu_{j_0}^2$ vers lequel u s'approche suivant (7.32) et (7.33) lorsque $t \rightarrow \pm\infty$. Les interactions à temps fini entre ces solitons engendrent des déphasages par rapport à un mouvement rectiligne uniforme dont l'amplitude est donnée par la formule*

$$\xi_{j_0}^+ - \xi_{j_0}^- = \frac{1}{\mu_{j_0}} \left[\sum_{j=1}^{j_0-1} \log \left(\frac{\mu_j - \mu_{j_0}}{\mu_j + \mu_{j_0}} \right) - \sum_{j=j_0+1}^{\ell} \log \left(\frac{\mu_{j_0} - \mu_j}{\mu_{j_0} + \mu_j} \right) \right].$$

Remarque 8. *La formule ci-dessus montre clairement que le déphasage total subi par un soliton est la somme de déphasages partiels engendrés par chacune des collisions avec chaque autre soliton.*

Annexe A

Transformation de Fourier et distributions tempérées

Dans cette annexe, on regroupe, sans en fournir de démonstrations, une série de concepts et de résultats fondamentaux liés à la transformation de Fourier. Pour plus de détails, voir par exemple [12].

Définition 16. La transformée de Fourier de $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ est définie en tout point y de \mathbb{R}^N par

$$\mathcal{F}u(y) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \exp(-2i\pi x \cdot y) dx.$$

Théorème 24 (Riemann-Lebesgue). Si $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $\mathcal{F}u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$.

Il est utile de déterminer un espace pour lequel la transformation de Fourier soit une transformation interne.

Définition 17. La classe de Schwartz des fonctions à décroissance rapide est définie par

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ t.q. } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N, \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < +\infty \right\},$$

où pour un multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, on note

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}, \quad \partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_N}^{\alpha_N}.$$

Théorème 25. La transformation de Fourier est une bijection linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ qui de plus vérifie la formule d'inversion

$$\mathcal{F}\mathcal{F}u(x) = u(-x), \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Définition 18. Pour une fonction $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, on définit ses fonctions translatées

$$\tau_a u(x) = u(x - a), \quad a \in \mathbb{R}^N,$$

ainsi que ses fonctions dilatées

$$\partial_\lambda u(x) = u\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Proposition 9. Si $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, α et $\beta \in \mathbb{N}^N$, on a

1. $\mathcal{F}((-2i\pi x)^\alpha u) = \partial^\alpha \mathcal{F}u$,
2. $\mathcal{F}\partial^\alpha u = (2i\pi y)^\alpha \mathcal{F}u$,
3. $\mathcal{F}\tau_a u = \exp(-2i\pi a \cdot y) \mathcal{F}u$,
4. $\mathcal{F}\partial_\lambda u = |\lambda|^N \partial_{1/\lambda} \mathcal{F}u$,
5. $uv \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $u * v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,
6. $\mathcal{F}u * \mathcal{F}v = \mathcal{F}(uv)$,
7. $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}u \mathcal{F}v$.

Lemme 9. Pour $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{F}u)v = \int_{\mathbb{R}^N} u(\mathcal{F}v)$$

d'où on déduit par la formule d'inversion l'identité de Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}u|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2.$$

Puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (qui contient $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$) est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et puisque \mathcal{F} est unitaire pour la norme $L^2(\mathbb{R}^N)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on peut étendre par continuité \mathcal{F} en une unique application linéaire unitaire de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. On démontre que cette extension coïncide avec \mathcal{F} sur $(L^1(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 26. La transformation de Fourier est une bijection unitaire de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, et quel que soit $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ on a la formule d'inversion

$$\mathcal{F}^{-1}u = \partial_{-1} \mathcal{F}u = \mathcal{F}\partial_{-1}u.$$

On introduit une structure de convergence sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ afin de s'embarquer dans la dualité et les distributions tempérées.

Définition 19. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ converge vers $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta (u - u_n)| = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N.$$

Définition 20. L'espace des distributions tempérées sur \mathbb{R}^N est défini par

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) = \{T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ t.q. } T \text{ est linéaire et séquentiellement continue} \}.$$

La convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est la convergence simple :

$$T_n \rightarrow T \text{ si et seulement si } T_n(u) \rightarrow T(u) \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Les distributions tempérées sur \mathbb{R}^N ne sont pas des fonctions sur \mathbb{R}^N . Toutefois l'espace des distributions tempérées peut être considéré comme une extension de la classe des fonctions de $L^p(\mathbb{R}^N)$ quel que soit $1 \leq p \leq \infty$. En effet, on a la

Proposition 10. Si $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, alors l'application linéaire T_f bien définie par

$$T_f(u) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)u(x) dx, \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

est une distribution tempérée.

Dans la pratique, on identifie f et T_f lorsque cela n'engendre pas de confusion. Pour cette raison, il est également fréquent de noter

$$\langle T, u \rangle \quad \text{ou même} \quad \int T(x)u(x) dx \quad \text{en lieu et place de} \quad T(u),$$

lorsque $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, même lorsque T n'est rattaché à aucune fonction. Dans ce cas, il faut bien être conscient qu'il ne s'agit que d'une notation et en rien d'une intégrale de Lebesgue.

Les opérations usuelles sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sont étendues à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ par transposition, eu égard aux propriétés vérifiées lorsque $T = T_v$ pour un certain $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 11. Les relations suivantes pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ quelconques définissent des applications linéaires continues sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$:

1. Dérivations : $\langle \partial^\alpha T, u \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha u \rangle$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$,
2. Multiplications : $\langle gT, u \rangle = \langle T, gu \rangle$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,
3. Translations : $\langle \tau_a T, u \rangle = \langle T, \tau_{-a} u \rangle$, $a \in \mathbb{R}^N$,
4. Dilatations : $\langle \partial_\lambda T, u \rangle = |\lambda|^N \langle T, \partial_{1/\lambda} u \rangle$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
5. Transformation de Fourier : $\langle \mathcal{F}T, u \rangle = \langle T, \mathcal{F}u \rangle$,
6. Convolutions : $\langle g * T, u \rangle = \langle T, (\partial_{-1}v) * u \rangle$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 27. La transformation de Fourier est une bijection linéaire de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et on a la formule d'inversion

$$\mathcal{F}^{-1}T = \partial_{-1}\mathcal{F}T = \mathcal{F}\partial_{-1}T \quad \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

Comme multiplicateur d'une distribution tempérée, on peut utiliser un espace plus large que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, à savoir l'espace des fonctions à croissance tempérées :

$$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^N) = \{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N), \text{ t.q. } \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \exists C > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}^N |\partial^\alpha g(x)| \leq C(1 + |x|^2)^m\}.$$

En particulier, les fonctions de type $x \mapsto \exp(2i\pi ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^N$ appartiennent à $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 12. Les sept propriétés énoncées à la Proposition 9 s'étendent au cas où $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Définition 21. Pour $a \in \mathbb{R}^N$, la masse de Dirac unité au point a est la distribution tempérée δ_a définie par

$$\langle \delta_a, u \rangle = u(a) \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Lorsque $a = 0$, on note simplement $\delta \equiv \delta_0$.

Proposition 13. *On a*¹

$$\mathcal{F}\delta_a = \exp(-2i\pi a \cdot y),$$

et en particulier

$$\mathcal{F}\delta = 1.$$

Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on en déduit

$$u * \delta = u,$$

c'est-à-dire que δ agit comme un neutre pour le produit de convolution.

L'identité suivante joue un rôle important dans la démonstration du Théorème 25. Elle possède un intérêt propre dans divers situations.

Lemme 10.

$$\mathcal{F} \exp(-\pi|x|^2) = \exp(-\pi|x|^2).$$

Pour terminer, mentionnons qu'il existe d'autres définitions (différentes) de la transformation de Fourier, les différences se cachant dans le choix de la normalisation. Parmi celles-ci, on rencontre notamment²

$$\mathbb{F}u(y) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \exp(-iy \cdot x) dx,$$

pour laquelle

$$\mathbb{F}^{-1}u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^N} u(y) \exp(iy \cdot x) dy.$$

Le lecteur notera que $\mathbb{F} = \partial_{2\pi}\mathcal{F}$ et pourra ainsi établir un catalogue de formules analogues à toutes celles ci-dessus mais valables pour \mathbb{F} . Il ne trouvera nul meilleur exercice pour vérifier sa compréhension!

1. Au sens de l'identification présentée après la Proposition 10.
2. Par exemple ailleurs dans ces notes!

Bibliographie

- [1] Z.S. Agranovich, V.A. Marchenko, The inverse problem of scattering theory. Translated from the Russian by B. D. Seckler Gordon and Breach Science Publishers, New York-London 1963.
- [2] J. Boussinesq, *Théorie de l'intumescence liquide, appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 1871.
- [3] J. L. Bona et R. Smith, *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 278 (1975), no. 1287, 555–601.
- [4] L. Brillouin, *Sur une méthode de calcul approchée de certaines intégrales dite méthode du col*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 33 (1916), 17–69.
- [5] E.B. Davies, Spectral theory and differential operators. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 42. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [6] W. Eckhaus, P.C. Schuur, *The emergence of solitons of the Korteweg de Vries equation from arbitrary initial conditions* Math. Methods Appl. Sci. 5 (1983), no. 1, 97–116.
- [7] W. Eckhaus, A. van Harten, The inverse scattering transformation and the theory of solitons. An introduction. North-Holland Mathematics Studies, 50. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981.
- [8] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, *Korteweg-de Vries equation and generalization. VI. Methods for exact solution*, Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 97–133.
- [9] I.M. Gel'fand, B.M. Levitan, *On the determination of a differential equation from its spectral function*. (Russe) Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 15, (1951). 309–360.
- [10] P.C. Schuur, Asymptotic analysis of soliton problems. An inverse scattering approach. Lecture Notes in Mathematics, 1232. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [11] D. Serre, Systèmes de lois de conservation. I. Hyperbolicité, entropies, ondes de choc. Diderot Editeur, Paris, 1996.
- [12] D. Smets, Bases d'analyse fonctionnelle, notes de cours disponibles à l'adresse <http://www/ann.jussieu.fr/smets/MM005/>.
- [13] E.M. Stein, Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton Mathematical Series, 43. Monographs in Harmonic Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.