

Capteurs et Actionneurs 2

Modélisation et Commande des Machines Électriques

Edouard Laroche
Université Louis Pasteur de Strasbourg
Master Ingénierie et Technologies
Spécialité Informatique Industrielle et Systèmes Automatisés
laroche@lsiit.u-strasbg.fr
<http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student>

11 janvier 2007

Table des matières

1	Notions de base	7
1.1	Grandeurs électriques	7
1.2	Magnétostatique : Production de couple et de force	9
1.2.1	Principe	9
1.2.2	Régime linéaire	10
1.2.3	Fonctionnement d'un moteur élémentaire	10
1.2.4	Système polyphasé	10
2	Les différentes technologies	13
2.1	Principe de fonctionnement	13
2.2	La machine à courant continu	14
2.2.1	Principe et équations	14
2.2.2	Différents types de moteurs	16
2.3	La machine synchrone	18
2.3.1	Rotor	18
2.3.2	Stator	19
2.3.3	Force électromotrice induite	20
2.3.4	Modèle de Behn-Eschenburg	21
2.4	La machine asynchrone	22
2.4.1	Constitution	22
2.4.2	Principe de fonctionnement	23
2.4.3	Modèle en régime permanent sinusoïdal	23
2.4.4	Bilan de puissance	25
2.4.5	Expression du couple	26
3	Modèles dynamiques	29
3.1	Production d'un champ tournant	29
3.1.1	Champ produit dans l'entrefer par une spire	29

3.1.2	Champ produit dans l'entrefer par un bobinage triphasé	30
3.1.3	Roue polaire	31
3.1.4	Flux traversant une spire	32
3.1.5	Mutuelle inductance entre deux spires décalées	32
3.2	Machine synchrone	32
3.2.1	Modèle triphasé	33
3.2.2	Modèle diphasé	35
3.2.3	Modèle de Park	40
3.2.4	Régime permanent	43
3.3	La machine asynchrone	45
3.3.1	Modèle triphasé	45
3.3.2	Modèle diphasé	49
3.3.3	Modèle de Park dans un repère quelconque	50
3.3.4	Modèle de Park dans le repère du stator	52
3.3.5	Commande par orientation du flux du rotor	53

Introduction

Ce document a été développé pour servir de support au cours de Capteurs et Actionneurs 2 du master Ingénierie et Technologies de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg. Il détaille notamment la modélisation des actionneurs électriques ainsi que la commande des machines à courant alternatif.

Ce document n'a pas été conçu pour être autosuffisant. La présence au cours et un complément de travail sont indispensables pour arriver à une maîtrise des problématiques visées par le cours. Il vous permettra cependant d'approfondir les aspects qui ne pourront qu'être traités rapidement en cours.

Chapitre 1

Notions de base pour l'électrotechnique

1.1 Grandeurs électriques

Les signaux électriques sont la tension, notée $u(t)$ ou $v(t)$ (unité le Volt, noté V) et le courant noté $i(t)$ ou $j(t)$ (unité l'ampère, noté A). On travaille également sur la puissance $p(t) = u(t) \times i(t)$ (unité le Watt, noté W=VA). Afin de présenter des définitions pour tout type de signal, on utilisera le signal $x(t)$ qui prendra la place de n'importe quel signal électrique.

La puissance $p(t)$ est la dérivée de l'énergie électrique $W_e(t)$ (en Joule, noté J=Ws) reçue par le dipôle :

$$p(t) = \frac{dW_e(t)}{dt} \quad (1.1)$$

Propriété 1 (Conservation de l'énergie) *L'énergie absorbée par un système est égale à la somme de l'énergie qu'il a dissipée et de l'énergie qu'il a emmagasinée.*

Pour un signal $x(t)$ périodique de période T , on définit la *valeur moyenne* et la *valeur efficace*.

Propriété 2 (Calcul de la valeur moyenne)

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad (1.2)$$

Propriété 3 (Calcul de la valeur efficace)

$$X_{eff} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle} \quad (1.3)$$

Remarque 1 (Valeur RMS = valeur efficace) *La valeur efficace est la racine carrée de la moyenne du carré du signal, ce qui se dit en anglais root mean square et donne les initiales RMS couramment utilisées.*

Propriété 4 (Valeur efficace nulle) *Un signal qui a une valeur efficace nulle est nul à tout instant.*

Définition 1 (Régime continu) *Le régime continu est caractérisé par des valeurs moyennes non nulles. Dans ce cas, c'est aux valeurs moyennes des signaux que l'on s'intéresse.*

Définition 2 (Régime alternatif) *Le régime alternatif est caractérisé par des valeurs moyennes nulles. Dans ce cas, c'est aux valeurs efficaces que l'on s'intéresse.*

Définition 3 (Puissance moyenne) *On appelle puissance moyenne ou puissance active la valeur moyenne de la puissance :*

$$P = \langle p(t) \rangle . \quad (1.4)$$

Définition 4 (Puissance apparente) *La puissance apparente S (unité VA) est définie comme le produit des valeurs efficaces de la tension et du courant :*

$$S = U_{eff} I_{eff} \quad (1.5)$$

La puissance apparente est supérieure ou égale à la puissance moyenne. Le facteur de puissance F_p caractérise le rapport entre ces deux grandeurs :

$$F_p = P/S \quad (1.6)$$

Avec les conventions adéquates, F_p est positif et on a $0 \leq F_p \leq 1$. Un facteur de puissance proche de 1 (0,9 par exemple) correspond à une bonne utilisation de l'électricité alors qu'un facteur de puissance nul ou très faible correspond à de la tension et du courant avec pas ou peu d'échange d'énergie.

1.2. MAGNÉTOSTATIQUE : PRODUCTION DE COUPLE ET DE FORCE 9

Exercice 1 (Valeur moyenne et efficace d'un créneau) On considère le signal $x(t)$ périodique de période T égal à E sur $[0; \alpha T[$ et à $-E$ sur $[\alpha T; T[$ avec $0 < \alpha < 1$. Déterminez la valeur moyenne et la valeur efficace de ce signal.

Exercice 2 (Valeur moyenne d'une sinusoïde redressée) On considère le signal $x(t)$ périodique de période $T/2$ égal à $X \cos(\omega t)$ sur $[-T/4; T/4]$. Déterminez sa valeur moyenne.

Exercice 3 (Valeur efficace d'une sinusoïde) Déterminez la valeur efficace de $x(t) = X \cos(\omega t)$.

Exercice 4 (Puissance en sinusoïdal) Un dipôle a à ses bornes la tension $u(t) = U \cos(\omega t)$ et est parcouru par le courant $i(t) = I \sin(\omega t - \phi)$. Déterminez sa puissance moyenne.

1.2 Magnétostatique : Production de couple et de force

1.2.1 Principe

Soit un système électromécanique comportant un degré de liberté en rotation et comportant un circuit électrique. Le circuit électrique est soumis à la tension $u(t)$ et est traversé par le courant $i(t)$ en convention récepteur. On note ϕ le flux total le traversant. La partie en rotation est à la position angulaire θ et applique un couple C à une charge mécanique. Le système reçoit de la puissance électrique, fournit de la puissance mécanique et peut stocker de l'énergie magnétique W_m . Le bilan de d'énergie pendant un intervalle de durée dt donne :

$$dW_m = u i dt - C \Omega dt \quad (1.7)$$

où $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$. Avec $u = \frac{d\phi}{dt}$, on obtient :

$$dW_m = i d\phi - C d\theta \quad (1.8)$$

Supposons que l'énergie magnétique puisse s'exprimer comme une fonction de ϕ et θ : $W_m(\phi, \theta)$; cela revient à prendre ϕ et θ comme variables

d'état et à poser que W_m est une fonction d'état. La dernière équation implique alors :

$$\frac{\partial W_m(\phi, \theta)}{\partial \phi} = i \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial W_m(\phi, \theta)}{\partial \theta} = -C \quad (1.10)$$

La première de ces deux équations signifie que l'énergie magnétique est l'intégrale de $i d\phi$ à θ constant. La seconde montre qu'un couple est produit par le système, correspondant à une variation à flux constant de l'énergie magnétique :

$$C = -\frac{\partial W_m(\phi, \theta)}{\partial \theta} \quad (1.11)$$

1.2.2 Régime linéaire

Dans le cas du régime linéaire (absence de saturation magnétique), le flux est proportionnel au courant et on peut donc écrire $\phi = L(\theta)i$ où l'inductance L dépend ici de la position du rotor. L'énergie magnétique s'écrit $W_m = \frac{1}{2}L(\theta)i^2 = \frac{\phi^2}{2L(\theta)}$. Pour calculer le couple, c'est la seconde expression qu'il faut considérer, c'est-à-dire $W_m(\phi, \theta) = \frac{\phi^2}{2L(\theta)}$. On obtient alors :

$$C = \frac{\phi^2}{2L^2(\theta)} \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad (1.12)$$

1.2.3 Fonctionnement d'un moteur élémentaire

1.2.4 Système polyphasé

Soit un système à n phases; notons i_k le courant et ϕ_k le flux relatifs à la phase k . Utilisons les notations vectorielles $\mathbf{i} = [i_1 \dots i_n]^T$ et $\phi = [\phi_1 \dots \phi_n]$. L'énergie associée à l'interaction entre le courant de la bobine j et le flux traversant la bobine i s'écrit $W_{mij} = \frac{1}{2}\phi_i i_j$. L'énergie magnétique s'écrit désormais comme la somme des différentes contributions, soit :

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i i_j = \frac{1}{2} \phi^T \mathbf{i}. \quad (1.13)$$

1.2. MAGNÉTOSTATIQUE : PRODUCTION DE COUPLE ET DE FORCE 11

En régime linéaire, le flux ϕ_k s'écrit comme une somme de termes linéaires :

$$\phi_k = \sum_{j=1}^n L_{kj}(\theta) i_j. \quad (1.14)$$

Ce qui s'écrit aussi $\phi = \mathcal{L}(\theta)\mathbf{i}$ avec :

$$\mathcal{L}(\theta) = \begin{bmatrix} L_{11}(\theta) & \dots & L_{1n}(\theta) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{n1}(\theta) & \dots & L_{nn}(\theta) \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

On peut alors écrire l'énergie magnétique sous la forme $W_m(\phi, \theta) = \frac{1}{2}\phi^T \mathcal{L}^{-1}(\theta)\phi$ et le couple s'écrit : $C = \frac{1}{2}\phi^T \frac{d\mathcal{L}^{-1}(\theta)}{d\theta}\phi$. En utilisant la relation¹ $\frac{d\mathcal{L}^{-1}(\theta)}{d\theta} = -\mathcal{L}^{-1}(\theta) \frac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} \mathcal{L}^{-1}(\theta)$, on obtient :

$$C = \frac{1}{2}\phi^T \mathcal{L}^{-1}(\theta) \frac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} \mathcal{L}^{-1}(\theta) \phi. \quad (1.16)$$

La matrice \mathcal{L} des inductance est symétrique², donc son inverse l'est aussi et on peut écrire :

$$C = \frac{1}{2}\mathbf{i}^T \frac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} \mathbf{i}. \quad (1.17)$$

Cette relation peut aussi s'écrire :

$$C = \frac{1}{2}\mathbf{i}^T \frac{\partial \phi(\theta, \mathbf{i})}{\partial \theta}. \quad (1.18)$$

¹Cette relation se montre facilement en écrivant que $\mathcal{L}(\theta) \mathcal{L}^{-1}(\theta) = \mathcal{I}$ et en dérivant. On obtient alors $\frac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} \mathcal{L}^{-1}(\theta) + \mathcal{L}(\theta) \frac{d\mathcal{L}^{-1}(\theta)}{d\theta} = \mathcal{O}$ d'où $\frac{d\mathcal{L}^{-1}(\theta)}{d\theta} = -\mathcal{L}^{-1}(\theta) \frac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} \mathcal{L}^{-1}(\theta)$.

²Les matrices d'inductance sont toujours symétriques.

Chapitre 2

Présentation des différentes technologies d'actionneurs électriques

Les actionneurs électriques sont de deux types : les actionneurs linéaires qui produisent des mouvements de translation et les actionneurs rotatifs qui produisent des rotations par rapport à un axe. Ces derniers étant les plus courants, nous nous concentrerons sur leur étude. Par ailleurs, les principes de fonctionnement des actionneurs sont les mêmes pour les actionneurs linéaires que pour les actionneurs rotatifs.

2.1 Principe de fonctionnement

Un actionneur est constitué de deux parties : le *stator* est la partie fixe. La partie mobile est nommée *rotor*. l'espace séparant le stator du rotor est occupé par de l'air ; on le nomme *entrefer*. Sa largeur est généralement inférieure au millimètre. Pour comprendre le fonctionnement des machines électriques, on est amené à s'intéresser de près à ce qui se passe dans l'entrefer. Cette partie étant à l'interface du stator et du rotor, c'est l'interaction des champs magnétiques dans son espace qui est responsable de la production de couple. On fait généralement l'hypothèse que le champ magnétique dans l'entrefer est radial. Supposons que la composante radiale du champ dans l'entrefer produit par le stator soit de la forme :

$$B_s(\xi) = B_s^{\max} \cos(p\xi - \alpha_s) \quad (2.1)$$

Il s'agit d'un champ à $2p$ pôles (p pôles nord et p pôles sud) à répartition spatiale sinusoïdale calé sur l'axe $\xi = \alpha_s$. Supposons que le rotor produise un champ de même nature :

$$B_r(\xi) = B_r^{\max} \cos(p\xi - \alpha_r) \quad (2.2)$$

Les deux champs opèrent comme deux aimants et cherchent à se rapprocher. On peut facilement imaginer que le couple qu'appliquera le stator au rotor est de la forme :

$$C = C^{\max} \sin(\alpha_s - \alpha_r) \quad (2.3)$$

En effet, ce couple est nul dès lors que les champs du rotor et du stator sont en phase ; il est maximum pour un décalage d'un quart de période. Lorsque c'est possible, on s'arrangera pour avoir $\alpha_s = \alpha_r + \frac{\pi}{2}$ afin d'utiliser le moteur au maximum de son efficacité. Le couple pourra être réglé avec les amplitudes des champs B_s^{\max} et B_r^{\max} .

2.2 La machine à courant continu

Le champ dans une machine à courant continu a la propriété d'être statique avec $\alpha_r = 0$ et $\alpha_s = \frac{\pi}{2}$. Le champ du rotor est réalisé soit par des aimants permanents (pour les puissances inférieures au kW environ) soit par un bobinage dans lequel circule un courant appelé *courant d'excitation*.

2.2.1 Principe et équations

Imaginons que le stator impose un champ constant sortant par un pôle nord et entrant par un pôle sud, l'axe du champ étant dans la direction $\alpha_s = 0$. Notons Φ_s le flux de ce champ et S la surface sous un pôle. Dans le cas où ce champ est produit par un bobinage, il s'écrit $\Phi_s = L_s i_s$ où i_s est le courant d'excitation du stator et L_s est son inductance.

Considérons que le rotor est formé d'une seule spire de section S parcourue par un courant i_r et ayant une tension u_s à ses bornes. On adoptera la convention récepteur. Le flux total ϕ_r qui traverse cette spire est la somme de deux flux :

- le flux auto-induit qui s'écrit $L_r i_r$ où L_r est l'inductance de la spire,
- le flux produit par l'excitation présente au stator ; celui-ci dépend de la position respective du rotor par rapport à la spire. En notant θ

l'angle du rotor avec le stator et en faisant l'hypothèse qu'il a une forme sinusoïdale, il s'écrit $\Phi_s \cos(\theta)$ où Φ_s est le flux d'excitation ou encore $M(\theta)i_s$ où $M(\theta) = L_s \cos(\theta)$ est la mutuelle inductance supposée varier de manière sinusoïdale en fonction de la position.

On a donc $\phi_r = \Phi_s \cos(\theta) + L_r i_r = M(\theta)i_s + L_r i_r$. En notations vectorielles, la matrice des inductance s'écrit alors :

$$\mathcal{L}(\theta) = \begin{bmatrix} L_s & M(\theta) \\ M(\theta) & L_r \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

et la relation 1.17 donne $C = i_s \frac{dM}{d\theta} i_r$, ce qui s'écrit $C = -i_s i_r L_s \sin(\theta)$ ou encore $C = -\Phi_s i_r \sin(\theta)$.

La tension s'écrit par la loi de Lenz $u_r = \frac{d\phi_r}{dt}$ soit $u_r = -\Phi_s \sin(\theta)\Omega + L_r \frac{di_r}{dt}$. On peut distinguer la force électromotrice induite par le champ du stator $e_r = -\Phi_s \sin(\theta)\Omega$. En tenant compte de la résistance interne R_r de la spire, cela donne $u_r(t) = e_r(t) + L_r \frac{di_r(t)}{dt} + R_r i_r(t)$.

Si le courant i_r était constant, le moteur ne tournerait pas longtemps et s'immobiliserait dans la position de conjonction des champs du rotor et du stator $\theta = 0$. Pour maintenir un couple positif, il faut être capable d'imposer un courant $i_r(t)$ qui est en permanence du signe opposé à $\sin(\theta)$. Le système mécanique qui réalise cette fonction se nomme le *collecteur*¹. Cette pièce relie le courant d'alimentation continu à la spire par un contact glissant entre des lames de cuivre connectées à la spire et deux charbons par lesquels arrivent le courant d'alimentation $i(t)$. Les équations s'écrivent alors $C = i\Phi_s |\sin(\theta)|$ et $e = \Phi_s |\sin(\theta)|\Omega$.

Dans la pratique, le rotor est équipé de nombreuses spires ce qui permet de lisser le couple et la force électromotrice. On conserve toutefois la dépendance linéaire de la fem en fonction de la vitesse Ω et du couple en fonction du

¹Le collecteur est une pièce d'usure et les balais doivent être changés au bout d'un certain temps. De plus le contact glissant entre un balais et les lames du collecteur produit des étincelles. De ce fait, les moteurs à courants continus sont exclus de certaines applications.

courant. Les équations de l'*induit*² s'écrivent alors³ :

$$e(t) = k\Phi_s\Omega(t) \quad (2.5)$$

$$C(t) = k\Phi_s i(t) \quad (2.6)$$

$$u(t) = e(t) + L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) \quad (2.7)$$

où k est un coefficient sans unité dépendant du bobinage du rotor, R est la résistance de l'induit ; L est son inductance. On notera que les deux premières équations lient les grandeurs électriques, magnétiques et mécaniques alors que la troisième équation, qui est une équation différentielle, ne concerne que les grandeurs électriques.

L'évolution de la vitesse est déterminée par la relation fondamentale de la dynamique :

$$J\frac{d\Omega}{dt} = C - C_r \quad (2.8)$$

où J est l'inertie du moteur et de l'ensemble des parties mobiles qui lui sont connectées (en Kg.m²), C_r est la somme des couples résistants (en N.m) qui freinent le moteur en s'opposant au couple moteur.

2.2.2 Différents types de moteurs

Moteur à aimants permanents

Le type de moteur à courant continu le plus répandu et notamment pour les petites puissances (< 1 kW) possède un stator équipé d'aimants permanents. Dans ce cas, le flux Φ est constant et on peut réécrire les équations de la fem et du couple en faisant apparaître la constante $K = k\Phi$:

$$e(t) = K\Omega(t) \quad (2.9)$$

$$C(t) = Ki(t) \quad (2.10)$$

Il apparaît que la fem est rigidement liée à la vitesse et que le couple est lié au courant.

²Par opposition au stator qui a le rôle d'inducteur ou encore d'excitation, le rotor d'un moteur à courant continu est qualifié d'induit.

³Ces équations sont valables quelque soit le nombre de paires de pôles de la machine.

Moteur à rotor bobiné

Pour les puissances plus importantes où pour des applications particulières, on utilise des rotors bobinés. L'excitation est alors réalisée par un électro-aimant parcouru par un courant d'excitation i_e .

Intéressons nous aux variations du flux en fonction du courant d'excitation. A défaut de mesurer le flux, on peut estimer $k\Phi$ de la manière suivante : on entraîne la machine à courant continu grâce à une autre machine à une vitesse Ω . L'induit est maintenu ouvert de sorte d'avoir $i(t) = 0$, ce qui fait que la tension est égale à la fem : $u(t) = e(t)$. En mesurant la tension et la vitesse, on peut déterminer $k\Phi = \frac{u}{\Omega}$. A titre d'exemple, une allure typique est donnée sur la figure 2.1. Cette caractéristique a la même allure que la courbe $B(H)$ d'un matériau magnétique. On observe une zone linéaire pour les faibles valeurs du courant où on peut écrire $k\Phi = L_e i_e$. Le coude de saturation apparaît dans cet exemple aux alentours de 0,75 A.

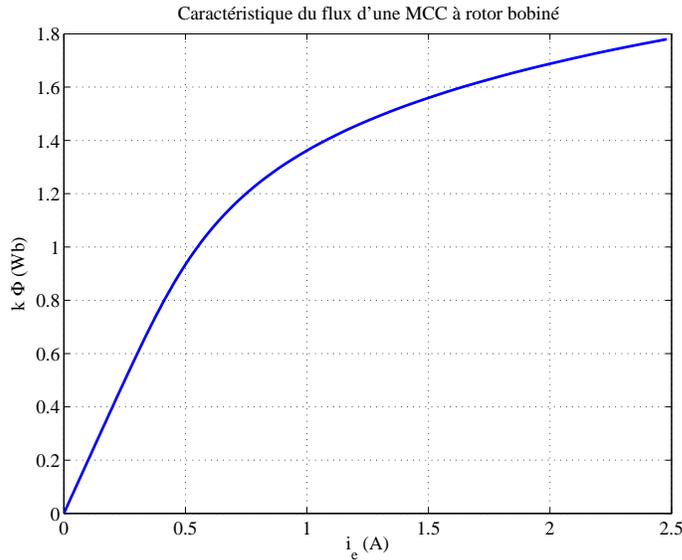


FIG. 2.1 – Caractéristique du flux d'une MCC

En tenant compte de la résistance R_e du circuit d'excitation, l'équation de la tension s'écrit : $u_e(t) = R_e i_e(t) + \frac{d\Phi}{dt}$ où $u_e(t)$ est la tension d'alimentation de l'inducteur. En régime permanent, le courant se stabilise à $i_e = \frac{u_e}{R_e}$. En régime

linéaire, le régime transitoire peut aussi s'écrire : $u_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{di_e(t)}{dt}$.

Les moteurs à rotor bobiné offrent différentes possibilités quant à l'alimentation du circuit d'excitation. On peut utiliser une alimentation indépendante permettant alors de régler le flux de manière arbitraire. Si on ne dispose pas d'alimentation supplémentaire à dédier à l'excitation, il faut alors utiliser la même alimentation que pour l'induit en le couplant soit en série, soit en parallèle.

Moteur universel

Considérons le cas du moteur à excitation série non saturé. Avec $i_e(t) = i(t)$, son couple s'écrit alors : $C(t) = L_e i^2(t)$. Ainsi, on observe que le couple est positif quelque soit le signe du courant. Il s'agit donc d'un moteur capable de fonctionner aussi bien sous alimentation continue qu'alternative. Pour cette raison, on le nomme *moteur universel*. Ces moteurs sont utilisées pour des applications bas coût de faible puissance comme les perceuses électriques.

2.3 La machine synchrone

On considère la machine synchrone à pôles lisses, à entrefer uniforme et en régime linéaire (absence de saturation magnétique). Le champ dans l'entrefer est considéré comme radial à tout instant et s'écrit $\vec{B}(\xi) = B(\xi)\vec{u}_r$ en un point situé à un angle ξ par rapport au repère du stator.

2.3.1 Rotor

Le rotor est constitué d'une roue polaire à $2p$ pôles alternativement nord et sud. En notant θ l'angle que fait un pôle nord du rotor avec le stator et sous l'hypothèse de la répartition sinusoïdale, le champ produit dans l'entrefer s'écrit :

$$B_r(\xi, t) = B_r^{\max} \cos(p\xi - p\theta). \quad (2.11)$$

Il s'agit d'un *champ tournant*; sa vitesse de rotation est $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$. Ce champ peut-être produit par des aimants permanents et dans ce cas, l'amplitude du champ est fixée. Il peut également être produit par un bobinage alimenté par un courant continu I_r ; dans ce cas, l'amplitude du champ est variable et réglable à travers I_r . Dans le cas linéaire, on pourra écrire $B_r^{\max} = \lambda_r I_r$.

2.3.2 Stator

Le stator est constitué d'un ensemble de trois bobinages à $2p$ pôles, placés dans des encoches, noté 'a', 'b' et 'c', régulièrement espacés et orientés dans les directions $\xi = 0$, $\xi = \frac{2\pi}{3p}$ et $\xi = \frac{4\pi}{3p}$, et respectivement parcourus par les courants $i_a(t)$, $i_b(t)$ et $i_c(t)$. Sous l'hypothèse du premier harmonique (hypothèse de la répartition spatiale sinusoïdale des champs), ils produisent respectivement dans l'entrefer trois champs de la forme :

$$B_a(\xi) = \lambda_s i_a(t) \cos(p\xi) \quad (2.12)$$

$$B_b(\xi) = \lambda_s i_b(t) \cos\left(p\xi - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (2.13)$$

$$B_c(\xi) = \lambda_s i_c(t) \cos\left(p\xi + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (2.14)$$

En absence de saturation (régime linéaire), le champ résultant est la somme des trois champs :

$$B_s(\xi, t) = \lambda_s \left(i_a(t) \cos(p\xi) + i_b(t) \cos\left(p\xi - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c(t) \cos\left(p\xi + \frac{2\pi}{3}\right) \right). \quad (2.15)$$

Dans le cas d'une alimentation sinusoïdale avec :

$$i_a(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha) \quad (2.16)$$

$$i_b(t) = I_m \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (2.17)$$

$$i_c(t) = I_m \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (2.18)$$

le champ résultant est alors :

$$B_s(\xi, t) = \frac{3}{2} \lambda_s I_m \cos(p\xi - \omega t - \alpha). \quad (2.19)$$

Il s'agit d'un champ tournant, de même nature que celui produit par la roue du rotor. Sa vitesse de rotation $\frac{\omega}{p}$ est rigidement liée à la pulsation ω des courants. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Ferraris*. En fonctionnement normal, les champs du stator et du rotor tournent à la même vitesse, ce qui donne la relation suivante :

$$\Omega = \frac{\omega}{p}. \quad (2.20)$$

On dit qu'ils sont synchrones, d'où le nom de la machine. Par la suite, on supposera que les champs sont synchrones et que $\theta(t) = \Omega t + \theta_0$. En moteur l'obligation d'avoir des courants du stator en phase avec la position du rotor donne lieu au principe de l'autopilotage. C'est-à-dire que pour maintenir un couple constant dans la machine, il faut alimenter la stator avec des courants dont la phase est déterminée par la position du rotor. Ainsi, c'est la machine elle-même qui pilote ses courants d'où le terme d'autopilotage.

2.3.3 Force électromotrice induite

Soit une spire placée au stator et orientée selon l'angle mécanique β constituée d'un conducteur aller placé à l'angle $\beta - \frac{\pi}{2p}$ et d'un conducteur retour placé à l'angle $\beta + \frac{\pi}{2p}$. Le champ étant radial, il est pratique de considérer comme surface une portion de cylindre délimitée par la spire, donnant ainsi $\vec{dS} = dS\vec{u}_r$ et $\vec{B}d\vec{S} = B \times dS$. Le champ étant uniforme selon la longueur de la machine, on peut donc considérer des éléments de surface qui sont des portions de cylindre d'angle $d\xi$, de longueur L et de surface $RLd\xi$ où R est le rayon moyen de l'entrefer. Calculons le flux produit par le champ du rotor dans cette spire :

$$\phi_{r\beta}(t) = \int_{\xi=\beta-\frac{\pi}{2p}}^{\xi=\beta+\frac{\pi}{2p}} B_r(\xi, t)RLd\xi \quad (2.21)$$

$$= RLB_r^{\max} \int_{\xi=\beta-\frac{\pi}{2p}}^{\xi=\beta+\frac{\pi}{2p}} \cos(p\xi - p\theta)d\xi \quad (2.22)$$

$$= \frac{2RLB_r^{\max}}{p} \cos(p\theta - p\beta) \quad (2.23)$$

De manière analogue, le flux produit par le champ du stator s'écrit :

$$\phi_{s\beta}(t) = \frac{2RLB_s^{\max}}{p} \cos(\omega t + \alpha - p\beta) \quad (2.24)$$

Pour obtenir le flux dans les trois phases du stator, il suffit de considérer respectivement $p\beta = 0$ pour la phase 'a', $p\beta = \frac{2\pi}{3}$ pour la phase 'b' et $p\beta = -\frac{2\pi}{3}$ pour la phase 'c', donnant ainsi un système triphasé équilibré de flux. Si on s'intéresse désormais à la phase 'a', on peut noter :

$$\underline{\phi}_{ra} = \phi_r^{\max} \exp(jp\theta) \quad (2.25)$$

ce qui signifie que le vecteur de Fresnel représentatif du flux tourne avec la position du rotor et pour le flux produit par le stator :

$$\underline{\phi}_{sa} = \phi_s^{\max} \exp(j(\omega t + \alpha)). \quad (2.26)$$

On remarque que le flux produit par le stator est en phase avec son propre courant. De plus, en régime linéaire (en absence de saturation magnétique), on peut considérer que l'amplitude du flux est proportionnelle à l'amplitude I_m du courant et écrire $\phi_s^{\max} = L_s I_m$, d'où :

$$\underline{\phi}_{sa} = L_s \underline{I}_a. \quad (2.27)$$

où \underline{I}_a est le vecteur de Fresnel représentatif de $i_a(t)$.

Le flux résultant $\underline{\phi}_a$ est la somme des flux produits par le stator et le rotor ($\underline{\phi}_a = \underline{\phi}_{ra} + \underline{\phi}_{sa}$). La force électromotrice totale $e_a(t)$ s'écrit en convention générateur $e_a = -\frac{d\phi_a}{dt}$, soit en vecteurs :

$$\underline{E}_a = -j\omega \underline{\phi}_a \quad (2.28)$$

$$= -j\omega (\underline{\phi}_{ra} + \underline{\phi}_{sa}) \quad (2.29)$$

$$= \underline{E}_{0a} - jL_s \omega \underline{I}_a \quad (2.30)$$

où \underline{E}_{0a} est la force électromotrice à vide de la phase 'a'.

2.3.4 Modèle de Behn-Eschenburg

En tenant compte du flux de fuites $\underline{\phi}_{fa} = L_{fa} \underline{I}_a$ et de la chute de tension résistive $R_s \underline{I}_a$ où L_{fa} et R_s sont respectivement l'inductance des fuites et la résistance d'induit du stator, on obtient :

$$\underline{V}_{sa} = \underline{E}_a - jL_s \omega \underline{I}_a - R_s \underline{I}_a. \quad (2.31)$$

En notant $X_s = (L_s + L_{fs})\omega$ la réactance synchrone, on obtient le modèle de Behn-Eschenburg permettant de modéliser les machines synchrones à pôles lisses en régime non saturé :

$$\underline{V}_{sa} = \underline{E}_{0a} - jX_s \underline{I}_a - R_s \underline{I}_a. \quad (2.32)$$

Dans ce modèle, on considère la vitesse et la fréquence comme constantes ; la force électromotrice dépend donc uniquement du courant d'excitation :

$E_0 a = E_0(I_r)$ où I_r est le courant d'excitation pour un rotor bobiné. Dans le cas d'un moteur à aimants, $E_0 a$ est constant égal à E_0 .

Naturellement, cette étude faite pour la phase 'a' reste valable pour les autres phases. Il faudra donc considérer que chacune des phases de la machine synchrone est modélisée par la mise en série d'une f.e.m. sinusoïdale, d'une réactance synchrone et d'une résistance. Afin de simplifier les équations, on pourra être amené à négliger la résistance de l'induit. On ne négligera cependant jamais la réactance synchrone qui est un paramètre essentiel de la machine; en effet, il représente la réaction magnétique d'induit, c'est-à-dire l'effet des courants d'induit sur le champ dans l'entrefer, phénomène fondamental dans les machines tournantes. Remarquons d'ailleurs que cette RMI n'est pas compensable alors que c'était le cas pour le moteur à courant continu.

2.4 La machine asynchrone

On parle également de *moteur à induction*.

2.4.1 Constitution

Le stator d'un moteur asynchrone est identique à celui d'une machine synchrone. Il est donc constitué d'un enroulement triphasé à $2p$ pôles qui, lorsqu'il est parcouru par des courants à la pulsation ω , crée un champ tournant à la vitesse $\frac{\omega}{p}$.

Le rotor d'une machine asynchrone est une structure purement passive. Différentes technologies sont disponibles.

Rotor à cage

C'est la technologie de loin la plus répandue. Le rotor est constitué d'un ensemble de barres conductrices le plus souvent en aluminium et parfois en cuivre qui sont reliées entre elles à chaque extrémité par un anneau de court-circuit. Ce système de conducteurs de courant est coulé dans un empilage de tôles magnétiques qui favoriseront le passage du champ magnétique entre les conducteurs, permettant ainsi la création de courants par induction magnétique.

Rotor bobiné

Le rotor peut-être constitué d'une structure identique à celle du stator ; c'est-à-dire un systèmes polyphasé de conducteurs à $2p$ pôles. En utilisation courante, ces conducteurs sont court-circuités.

2.4.2 Principe de fonctionnement

Afin d'expliquer plus simplement le fonctionnement, considérons le cas d'un rotor bobiné. Les structures sont donc identiques au stator et au rotor ; on sait que la vitesse du champ produit par les courants est rigidement liée à leur pulsation.

Imaginons que le rotor tourne à la vitesse Ω . En se plaçant dans un référentiel lié au rotor, on voit le champ tournant circuler à la vitesse $\frac{\omega}{p} - \Omega$. Ce champ tournant donne donc naissance au rotor à des fem et à des courants à la pulsation ω_r où $\frac{\omega_r}{p} = \frac{\omega}{p} - \Omega$. Notons $\omega_r = g\omega$ où g est appelé *glissement*. On peut alors écrire $\Omega = (1 - g)\frac{\omega}{p}$. Un glissement unitaire correspond à l'arrêt ; un glissement nul correspond à une vitesse de rotation égale à la vitesse du champ tournant.

Les courants induits obéissent à la loi de Lenz, c'est-à-dire qu'il s'opposent aux variations de champ. Dans quelle situation le rotor ne voit-il pas de variation de champ ? Uniquement lorsqu'il tourne à la même vitesse que le champ tournant, c'est-à-dire pour un glissement nul. Dans ce cas précis, il n'y a pas de courant induit et donc pas de couple. Si la vitesse du rotor ralentit, devenant ainsi inférieure à celle du champ tournant, les courants induits agissent de sorte de ramener le rotor à la vitesse de synchronisme. Ils vont ainsi produire un couple positif. Au contraire, si la vitesse est supérieure à la vitesse du champ tournant, le couple produit par les courants induits est négatif. On peut donc postuler que le couple est de même signe que le glissement.

2.4.3 Modèle en régime permanent sinusoïdal

Modèle du transformateur tournant

La machine asynchrone peut-être considérée comme un transformateur particulier dans lequel les grandeurs du rotor sont à la pulsation $g\omega$. En notant \underline{V}_s et \underline{V}_r les tensions d'une phase du stator et du rotor ; \underline{I}_s et \underline{I}_r les

courants ; R_s et R_r les résistances ; L_s et L_r les inductances propres et M la mutuelle inductance, les équations s'écrivent :

$$\underline{V}_s = R_s \underline{I}_s + j\omega \underline{\phi}_s \quad (2.33)$$

$$\underline{V}_r = R_r \underline{I}_r + jg\omega \underline{\phi}_r \quad (2.34)$$

où les flux s'écrivent :

$$\underline{\phi}_s = L_s \underline{I}_s + M \underline{I}_r \quad (2.35)$$

$$\underline{\phi}_r = M \underline{I}_s + L_r \underline{I}_r \quad (2.36)$$

Le rotor étant court-circuité ($\underline{V}_r = 0$), l'équation de la tension du rotor s'écrit alors en divisant par g :

$$0 = \frac{R_r}{g} \underline{I}_r + j\omega \underline{\phi}_r \quad (2.37)$$

Les équations 2.33 et 2.35 à 2.37 sont celles d'un transformateur court-circuité au secondaire dont la résistance du secondaire serait $\frac{R_2}{g}$.

Les modèles classiquement développés pour le transformateur sont variables. En ramenant l'ensemble des grandeurs au primaire du transformateur idéal, on obtient le schéma équivalent représenté sur la figure 2.2 où L_m est l'inductance magnétisante ; R_f est la résistance des pertes fer ; N_2 est l'inductance totale des fuites ramenées au stator ; R_2 est la résistance du rotor ramenée au stator ($R_2 = R_r/m^2$ où m est le rapport de transformation). On a $\underline{I}_2 = m \underline{I}_r$. Chaque phase du moteur est donc équivalent à une impédance $\underline{Z}(g)$ dépendant du glissement.

$$\underline{Z}(g) = R_s + \frac{1}{\frac{1}{jL_m\omega} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{jN_2\omega + \frac{R_2}{g}}} \quad (2.38)$$

Diagramme du cercle

Si on néglige la résistance du stator, le modèle s'écrit sous la forme d'une admittance $\underline{Y}(g) = \frac{1}{\underline{Z}(g)}$:

$$\underline{Y}(g) = \frac{1}{jL_m\omega} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{jN_2\omega + \frac{R_2}{g}} \quad (2.39)$$

Pour une tension \underline{V}_s donnée, le lieu du courant lorsque g varie est $\underline{I}_s = \underline{V}_s \underline{Y}(g)$. En prenant $\underline{V}_s = V_s$ comme référence, cela donne $\underline{I}_s = V_s \underline{Y}(g)$.

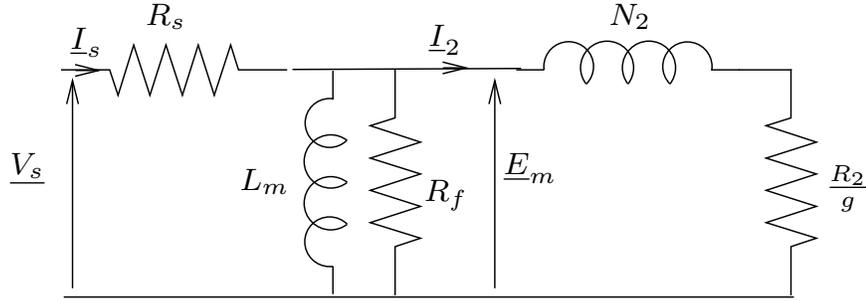


FIG. 2.2 – Modèle du moteur asynchrone

Cherchons maintenant à déterminer ce lieu. Le lieu de $\frac{R_2}{g}$ est l'axe réel. Le lieu de $jN_2\omega + \frac{R_2}{g}$ est une droite parallèle à l'axe réel et de partie imaginaire constante égale à $jN_2\omega$. Le lieu de $\frac{1}{jN_2\omega + \frac{R_2}{g}}$ est un cercle passant par l'origine et le point d'affixe $-j/(N_2\omega)$ qui est symétrique par rapport à l'axe imaginaire. Le lieu de $\underline{Y}(g)$ est un cercle de même taille que le cercle précédent mais translaté de $1/R_f - j/(L_m\omega)$. Le lieu du courant est alors obtenu par une dilatation de coefficient V_s . Sur ce cercle, on repère facilement les points correspondant aux glissements $g = 0$ et $g = \infty$ qui sont diamétralement opposés.

Exercice 5 (Diagramme du cercle) *En négligeant la résistance du stator, montrez que le lieu du vecteur de Fresnel du courant statorique est un cercle. Vous prendrez le soin de dessiner tous les ensembles intermédiaires vous permettant d'arriver à ce résultat. Précisez les points correspondant à $g = 0$ et $g = \infty$.*

2.4.4 Bilan de puissance

Puissance électromécanique

La résistance $\frac{R_2}{g}$ ne correspond pas uniquement à des pertes. En effet, elle inclut également la puissance électromagnétique qui est la puissance convertie. En décomposant $\frac{R_2}{g} = R_2 + \frac{1-g}{g}R_2$, on observe que la puissance dissipée dans $\frac{R_r}{g}$ se décompose en pertes Joule rotoriques $P_{jr} = 3R_2I_2^2 = 3R_rI_r^2$ et puissance électromécanique $P_{em} = 3\frac{1-g}{g}R_2I_2^2$. Avec $P_{em} = C_{em}\Omega$ et $\Omega =$

$(1 - g)\frac{\omega}{p}$, on obtient :

$$C_{em} = \frac{3p R_2}{\omega g} I_2^2 \quad (2.40)$$

qui est bien de même signe que le glissement.

La proportion entre les pertes Joule du rotor et la puissance électromécanique dépend du glissement : $P_{em} = \frac{1-g}{g} P_{jr}$. Si on note $P_2 = P_{em} + P_{jr}$ la puissance échangée entre le stator et le rotor, on a $P_{jr} = gP_2$ et $P_{em} = (1 - g)P_2$.

Fonctionnement moteur

Le fonctionnement moteur correspond à $g \geq 0$. Le moteur absorbe l'énergie électrique au stator $P_a = 3V_s I_s \cos(\phi_s)$ et fournit l'énergie mécanique $P_u = C_{em}\Omega$ (on négligera les pertes mécaniques). Les pertes sont :

- les pertes Joule au stator $P_{js} = 3R_s I_s^2$,
- les pertes fer $P_f = 3\frac{E_m^2}{R_f}$,
- les pertes Joule au rotor $P_{jr} = 3R_r I_r^2$.

Le rendement est $\eta = \frac{P_u}{P_a}$. La conservation de l'énergie permet d'écrire $P_a = P_u + P_{js} + P_f + P_{jr}$. Si on ne tient compte que des pertes Joule au rotor, on obtient $\eta = \frac{P_{em}}{P_2} = 1 - g$. Il s'agit d'un rendement idéalisé ; on a donc en pratique $\eta \leq 1 - g$.

Fonctionnement en génératrice

Le fonctionnement en génératrice correspond à $g \leq 0$. La génératrice absorbe l'énergie mécanique $P_a = C_{em}\Omega$ et fournit l'énergie électrique $P_u = 3V_s I_s \cos(\phi_s)$. Les pertes sont inchangées et le rendement s'écrit toujours $\eta = \frac{P_u}{P_a}$ avec $P_a = P_u + P_{js} + P_f + P_{jr}$. Dans le cas où ne tient compte que des pertes Joule au rotor, on a $P_u = P_2$ et $P_a = P_{em}$ d'où $\eta = \frac{1}{1-g}$. Dans la pratique, on a $\eta \leq \frac{1}{1-g}$.

2.4.5 Expression du couple

Nous avons vu que le couple est de même signe que le glissement. Cherchons désormais à déterminer une expression analytique du couple. Pour cela, nous allons négliger les pertes Joule du stator ($R_s = 0$) afin de simplifier les

calculs. Le module du courant I_2 est déterminé par :

$$I_2^2 = \frac{V_s^2}{\left(\frac{R_r}{g}\right)^2 + (N_r\omega)^2} \quad (2.41)$$

En remplaçant dans l'équation 2.40, et en réarrangeant l'expression, on obtient :

$$C_{em} = \frac{2C_m}{\frac{g}{g_m} + \frac{g_m}{g}}. \quad (2.42)$$

où $g_m = \frac{R_2}{N_2\omega}$ et $C_m = \frac{3pV_s^2}{2N_2\omega^2}$. Il s'agit d'une fonction impaire qui présente un maximum pour $(g, C_{em}) = (g_m, C_m)$ et un minimum en $(g, C_{em}) = (-g_m, -C_m)$.

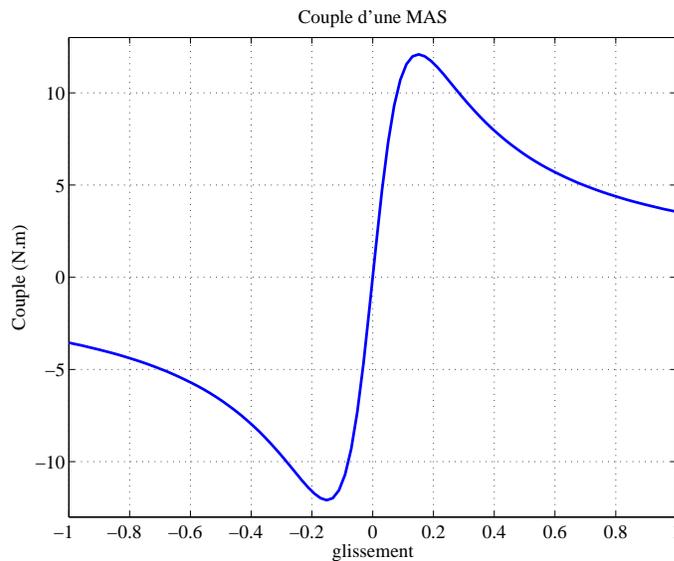


FIG. 2.3 – Couple d'une machine asynchrone

Sur la figure 2.3 est représentée l'allure du couple pour une machine à une paire de pôles d'une puissance nominale de 1,5 kW. On observe que le couple à l'arrêt ($g = 0$) est relativement faible par rapport au couple maximal. Dans la pratique, la machine est utilisée sur une plage de glissement relativement faible entre $-g_m$ et g_m . En dehors de cette plage, le rendement n'est plus acceptable.

Exercice 6 (Expression du couple de la machine asynchrone) *A partir du schéma équivalent d'une phase de la machine asynchrone représenté sur la figure 2.2, montrez que si on néglige la résistance du stator, on peut écrire le couple sous la forme $C_{em} = 2C_m / (\frac{g}{g_m} + \frac{g_m}{g})$. Donnez les expressions de C_m et g_m en fonction des paramètres du modèle, de la tension d'alimentation et de la pulsation.*

Chapitre 3

Modèles dynamiques des machines à courant alternatif

3.1 Production d'un champ tournant

Le principe de base des machines électriques tournantes est de réaliser deux champs tournants, l'un par le rotor, l'autre par le stator ; l'attraction mutuelle de ces deux champs entraînant le rotor.

3.1.1 Champ produit dans l'entrefer par une spire

Soit une spire d'ouverture diamétrale, constituée d'un conducteur aller placé près de l'entrefer à l'angle $\alpha - \pi/2$ et d'un conducteur retour placé à l'angle $\alpha + \pi/2$. La spire étant parcourue par un courant i , un champ magnétique est donc présent dans l'entrefer. L'entrefer étant faible, on suppose le champ radial et on ne s'intéresse qu'à sa composante radiale que nous noterons B . Cette composante n'est pas uniforme sur l'entrefer et dépend de l'angle ξ repérant un point dans l'entrefer. Pour $\xi = \alpha$, on est dans l'axe de la bobine et le champ est maximal. Pour $\xi = \alpha - \pi/2$ et $\xi = \alpha + \pi/2$, la composante radiale du champ est nulle ; pour $\xi = -\alpha$, la composante radiale du champ est minimale et on a $B(-\alpha) = B(\alpha)$. On le voit donc, $B(\xi)$ a toutes les symétries du signal $\cos(\xi - \alpha)$.

Dans la suite, nous supposons que les champs produits par les enroulements ont des répartitions spatiales sinusoïdales. Ainsi, nous écrirons $B(\xi) = B_{\max} \cos(\xi - \alpha)$. Dans la pratique, cela est réalisé en multipliant le nombre de spires et en les répartissant dans différentes encoches.

Nous supposons également que la machine n'est pas saturée et que le champ magnétique est proportionnel au courant traversant la spire. Ainsi, on a $B_{\max} = \lambda i$. Notez bien que le maximum est un maximum sur l'entrefer qui peut varier au cours du temps si le courant varie : $B_{\max}(t) = \lambda i(t)$, d'où l'expression du champ produit par un bobinage monophasé à répartition sinusoïdale :

$$B(\xi, t) = \lambda i(t) \cos(\xi - \alpha) \quad (3.1)$$

Le champ produit ci-dessus a deux pôles (ou une paire de pôles) : un pôle nord et un pôle sud. Il est également possible de réaliser des champs ayant un nombre plus élevé de pôles en multipliant le nombre d'encoches et de conducteurs. Par exemple, on réalise un champ à 4 pôles en plaçant des conducteurs aller aux angles $\alpha - \pi/4$ et $\alpha + 3\pi/4$ et des conducteurs retour aux angles $\alpha + \pi/4$ et $\alpha - 3\pi/4$. Pour un enroulement monophasé à $2p$ pôles, le champ est :

$$B(\xi, t) = \lambda i(t) \cos(p(\xi - \alpha)). \quad (3.2)$$

De manière générale, le fonctionnement des machines ne dépend pas du nombre de paires de pôles et peut être expliqué en prenant $p = 1$. Lors d'une première lecture, il vous est donc conseillé de considérer le cas $p = 1$.

3.1.2 Champ produit dans l'entrefer par un bobinage triphasé

Le stator des machines à courant alternatif triphasées (synchrones et asynchrones) est constitué de trois bobinages à p paires de pôles, notés par les indices a , b et c . Notons i_a , i_b et i_c les courants les parcourant. Les trois bobinages sont répartis autour de l'entrefer. Par exemple, on a $\alpha_a = 0$, $\alpha_b = 2\pi/3p$ et $\alpha_c = -2\pi/3p$. En reprenant l'expression (3.2) du champ produit par un bobinage monophasé à répartition sinusoïdale et en l'appliquant pour chacun des trois bobinages, on obtient l'expression du champ total :

$$B(\xi, t) = \lambda (i_a(t) \cos(p\xi) + i_b(t) \cos(p\xi - 2\pi/3) + i_c(t) \cos(p\xi + 2\pi/3)) \quad (3.3)$$

Considérons maintenant le cas où les trois courants forment un système triphasé sinusoïdal équilibré :

$$i_a(t) = I_m \cos(\delta(t)) \quad (3.4)$$

$$i_b(t) = I_m \cos(\delta(t) - 2\pi/3) \quad (3.5)$$

$$i_c(t) = I_m \cos(\delta(t) + 2\pi/3) \quad (3.6)$$

avec par exemple $\delta(t) = \omega t + \delta_0$. Alors, le champ s'écrit :

$$B(\xi, t) = \lambda I_m (\cos(\delta(t)) \cos(p\xi) + \cos(\delta(t) - 2\pi/3) \cos(p\xi - 2\pi/3) + \cos(\delta(t) + 2\pi/3) \cos(p\xi + 2\pi/3)). \quad (3.7)$$

En utilisant la formule $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$, on obtient :

$$B(\xi, t) = \frac{1}{2} \lambda I_m (3 \cos(\delta(t) - \xi) + \cos(\delta(t) + \xi) + \cos(\delta(t) + \xi + 2\pi/3) + \cos(\delta(t) + \xi - 2\pi/3)). \quad (3.8)$$

En sachant que la somme de trois cosinus régulièrement décalés de $2\pi/3$ est nulle, on obtient que :

$$B(\xi, t) = \frac{3}{2} \lambda I_m \cos(\delta(t) - p\xi). \quad (3.9)$$

Analysons l'expression de ce champ. A un instant t fixé, il s'agit d'un champ ayant une répartition spatiale sinusoïdale en fonction de la variable d'espace ξ . A un endroit fixé de l'entrefer défini par une valeur de ξ , on voit un champ variant de manière sinusoïdale en fonction du temps. Si on cherche à suivre le point où le champ est maximal, c'est-à-dire où l'argument du cosinus est nul, on obtient $\xi = \delta(t)/p$. Il s'agit donc d'un champ tournant en fonction de la phase du courant. Pour un courant de pulsation ω , la vitesse de ce champ, aussi appelée vitesse de synchronisme est :

$$\Omega_s = \frac{\omega}{p} \quad (3.10)$$

Ce résultat est également connu sous le nom de *théorème de Ferraris*. On retiendra que la vitesse de synchronisme est un sous-multiple de la pulsation des courants; le rapport étant le nombre de paires de pôles. Pour une fréquence de 50 Hz, on obtient donc les vitesses de rotation de 3000, 1500, 1000, 750 tr/min... suivant le nombre de paires de pôles.

3.1.3 Roue polaire

Le rotor d'une machine synchrone est constitué d'une roue polaire à $2p$ pôles alternativement nord et sud. En notant θ l'angle que fait un pôle nord du rotor avec le stator et sous l'hypothèse de la répartition sinusoïdale, le champ produit dans l'entrefer s'écrit :

$$B_r(\xi, t) = B_r^{\max} \cos(p\xi - p\theta). \quad (3.11)$$

Il s'agit d'un *champ tournant*; sa vitesse de rotation est $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$. Ce champ peut-être produit par des aimants permanents et dans ce cas, l'amplitude du champ est fixée. Il peut également être produit par un bobinage alimenté par un courant continu I_r ; dans ce cas, l'amplitude du champ est variable et réglable à travers I_r . Dans le cas linéaire, on pourra écrire $B_r^{\max} = \lambda_r I_r$.

3.1.4 Flux traversant une spire

Considérons qu'un champ de répartition sinusoïdale est produit dans l'entrefer : $B(\xi) = B_{\max} \cos(\xi - \alpha)$. Une spire d'ouverture diamétrale, d'axe β faisant avec l'axe du champ un angle $\alpha - \beta$ est traversée par le champ magnétique. Le flux de ce champ peut-être calculé sur la surface d'un demi cylindre de rayon R et de longueur L s'appuyant sur la spire :

$$\Phi = \int_{\xi=\beta-\pi/2}^{\xi=\beta+\pi/2} B(\xi) LR d\xi \quad (3.12)$$

ce qui donne $\Phi = 2LRB_{\max} \cos(\beta - \alpha)$.

3.1.5 Mutuelle inductance entre deux spires décalées

Soit deux spires, d'ouverture diamétrale, placées soit au rotor, soit au stator et décalées d'un angle α variable. Ces spires échangent du champ magnétique. Pour un angle $\alpha = 0$, les spires sont dans le même sens et leur mutuelle inductance est maximale. Pour un angle $\alpha = \pi/2$, les spires sont en quadrature; elles n'échange plus de champ et leur mutuelle inductance est donc nulle. Pour $\alpha = \pi$, les spires sont en sens inverse. Elles échangent un champ dans le sens inverse et on a donc $M(\pi) = -M(0)$. Sous l'hypothèse du premier harmonique, on suppose que la mutuelle inductance s'écrit :

$$M(\alpha) = M_{\max} \cos(\alpha) \quad (3.13)$$

3.2 Machine synchrone

On se limitera au cas des machines synchrones triphasées à pôles lisses non saturées.

3.2.1 Modèle triphasé

Flux propre du stator

Le stator est composé de 3 enroulements à 2p pôles comme décrit au paragraphe 3.1.2. Ces trois enroulements sont identiques. Notons L_{s0} l'inductance propre d'une phase du stator. Si on néglige les fuites, la mutuelle inductance entre 2 enroulements séparés d'un angle $2\pi/3p$ est $L_{s0} \cos(2\pi/3) = -L_{s0}/2$. Ainsi, le flux produit par les courant du stator sur lui-même s'écrit :

$$\phi_{sa}(t) = L_{s0}i_a(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_b(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_c(t) \quad (3.14)$$

$$\phi_{sb}(t) = -\frac{1}{2}L_{s0}i_a(t) + L_{s0}i_b(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_c(t) \quad (3.15)$$

$$\phi_{sc}(t) = -\frac{1}{2}L_{s0}i_a(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_b(t) + L_{s0}i_c(t) \quad (3.16)$$

Les fuites diminuent le flux produit par chaque enroulement. En notant l_f l'inductance de fuite, les flux de fuite sont respectivement $l_f i_a(t)$, $l_f i_b(t)$ et $l_f i_c(t)$. On obtient donc :

$$\phi_{sa}(t) - l_f i_a(t) = L_{s0}i_a(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_b(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_c(t) \quad (3.17)$$

$$\phi_{sb}(t) - l_f i_b(t) = -\frac{1}{2}L_{s0}i_a(t) + L_{s0}i_b(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_c(t) \quad (3.18)$$

$$\phi_{sc}(t) - l_f i_c(t) = -\frac{1}{2}L_{s0}i_a(t) - \frac{1}{2}L_{s0}i_b(t) + L_{s0}i_c(t) \quad (3.19)$$

En notant $L_s = l_f + L_{s0}$ l'inductance propre du stator et $M_s = -\frac{1}{2}L_{s0}$ la mutuelle inductance entre deux enroulements, les flux s'écrivent alors :

$$\phi_{sa}(t) = L_s i_a(t) + M_s i_b(t) + M_s i_c(t) \quad (3.20)$$

$$\phi_{sb}(t) = M_s i_a(t) + L_s i_b(t) + M_s i_c(t) \quad (3.21)$$

$$\phi_{sc}(t) = M_s i_a(t) + M_s i_b(t) + L_s i_c(t) \quad (3.22)$$

ce qui se met sous forme vectorielle

$$\phi_{3s} = \mathcal{M} \mathbf{i}_3 \quad (3.23)$$

avec $\phi_{3s} = [\phi_{sa} \ \phi_{sb} \ \phi_{sc}]^T$ et $\mathbf{i}_3 = [i_a \ i_b \ i_c]^T$ et :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Flux du stator produit par le rotor

Le rotor est assimilé à un enroulement à $2p$ pôles d'axe $\theta(t)$. Il fait donc un angle avec les trois bobinages du stator respectivement de θ , $\theta - 2\pi/3p$ et $\theta - 4\pi/3p$. En notant ϕ_f le flux maximal reçu du rotor par un enroulement du stator, le flux créé au stator par le rotor s'écrit :

$$\phi_{ra}(t) = \phi_f \cos(p\theta) \quad (3.25)$$

$$\phi_{rb}(t) = \phi_f \cos(p\theta - 2\pi/3) \quad (3.26)$$

$$\phi_{rc}(t) = \phi_f \cos(p\theta + 2\pi/3) \quad (3.27)$$

ce qui se met sous forme vectorielle

$$\phi_{3r} = \begin{bmatrix} \phi_{ra} \\ \phi_{rb} \\ \phi_{rc} \end{bmatrix} = \phi_f \begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \cos(p\theta - 2\pi/3) \\ \cos(p\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Flux totaux

Le flux total reçu au stator est la somme du flux propre produit au stator et du flux produit au rotor, soit $\phi_3 = \phi_{3s} + \phi_{3r}$. En notant L_r l'inductance du rotor avec $\phi_f = L_r i_f$, on peut écrire :

$$\phi_3 = \mathcal{M} \mathbf{i}_3 + L_r \begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \cos(p\theta - 2\pi/3) \\ \cos(p\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

On peut compléter cette équation en écrivant le flux du rotor :

$$\phi_r = L_r [\cos(p\theta) \quad \cos(p\theta - 2\pi/3) \quad \cos(p\theta + 2\pi/3)] \mathbf{i}_3 + L_r i_r \quad (3.30)$$

En notant $\phi = [\phi_s^T \quad \phi_r]^T$ le vecteur de l'ensemble des flux et $\mathbf{i} = [\mathbf{i}_3 \quad i_r]$ le vecteur de l'ensemble des courants, on peut réécrire le flux :

$$\phi = \mathcal{L}(\theta) \mathbf{i} \quad (3.31)$$

avec :

$$\mathcal{L}(\theta) = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{M} & M_{sr}(\theta) \\ \hline M_{sr}^T(\theta) & L_r \end{array} \right] \quad (3.32)$$

avec

$$M_{sr}(\theta) = L_r [\cos(p\theta) \quad \cos(p\theta - 2\pi/3) \quad \cos(p\theta + 2\pi/3)]^T. \quad (3.33)$$

Équation de la tension

En notant R_s la résistance d'un enroulement du stator (on suppose que cette résistance est identique sur les trois phases), les équations aux tensions s'écrivent :

$$v_a(t) = R_s i_a(t) + \frac{d\phi_a}{dt} \quad (3.34)$$

$$v_b(t) = R_s i_b(t) + \frac{d\phi_b}{dt} \quad (3.35)$$

$$v_c(t) = R_s i_c(t) + \frac{d\phi_c}{dt} \quad (3.36)$$

ce qui se met sous forme vectorielle :

$$\mathbf{v}_3 = R_s \mathbf{i}_3 + \frac{d\phi_3}{dt} \quad (3.37)$$

avec $\mathbf{v}_3 = [v_a \ v_b \ v_c]^T$.

Expression du couple

En reprenant l'expression générale du couple (1.17) et en l'appliquant à l'expression du flux (3.32), on obtient :

$$C = \mathbf{i}_3^T p \phi_f \begin{bmatrix} \sin(p\theta) \\ \sin(p\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

ce qui se réécrit :

$$C = p \phi_f \left(i_a(t) \sin(p\theta) + i_b(t) \sin(p\theta - \frac{2\pi}{3}) + i_c(t) \sin(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \right) \quad (3.39)$$

3.2.2 Modèle diphasé de la machine synchrone

Transformation de Concordia

Au vu de l'expression du couple développée ci-dessus, il s'avère qu'une composante homopolaire¹ intervenant simultanément sur les trois phases du

¹On appelle composante homopolaire une composante qui intervient simultanément sur les trois phases, sans déphasage.

courant ne produirait pas de couple². Parmi les trois courants, il n'y a donc que deux degrés de liberté et non trois comme on pourrait le croire. Nous allons donc présenter un changement de variable permettant de se ramener à deux courants au lieu de trois, ce qui aura le mérite de nettement simplifier les équations. Ce modèle, nous le verrons ressemble à celui d'une machine diphasée.

Le vecteur des trois cosinus intervenant dans l'expression des flux ainsi que dans le couple peut se réécrire de la manière suivante en fonction de $\cos(p\theta)$ et de $\sin(p\theta)$:

$$\begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \cos(p\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \sin(p\theta) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Notons C_{32} cette matrice de passage, aussi appelée matrice de Concordia d'après le nom d'une scientifique ayant travaillé sur le sujet au début du vingtième siècle.

$$C_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Notons que cette matrice a quelques propriétés intéressantes qui permettront de simplifier les expressions :

$$C_{32}C_{32}^T = \mathcal{I}_3 \quad (3.42)$$

et

$$C_{32}^T C_{32} = \frac{3}{2} \mathcal{I}_2 \quad (3.43)$$

Exercice 7 (Propriétés de la matrice de Concordia) *Montrez les propriétés de la matrice de Concordia présentées ci-dessus.*

La transformation de Concordia consiste à travailler à partir de deux composantes notées avec les indices α et β au lieu de trois. Ainsi, pour les courants, définissons i_α et i_β tels que :

$$\mathbf{i}_3 = C_{32} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

²En effet, ajouter i_0 à chacun des trois courants revient à ajouter au couple $p\phi_f i_0 (\sin(p\theta) + \sin(p\theta - \frac{2\pi}{3}) + \sin(p\theta + \frac{2\pi}{3}))$ ce qui est nul puisque la somme de trois sinus déphasés de $2\pi/3$ est nulle.

et notons $\mathbf{i}_2 = [i_\alpha \ i_\beta]^T$. On vérifie bien que la somme des courants $i_a + i_b + i_c$ est nulle puisque la somme des éléments des deux colonnes de C_{32} est bien nulle. Ainsi, cette transformation permet de régler les courants triphasés tout en maintenant leur somme nulle.

En multipliant à gauche la relation précédente par C_{32}^T et en utilisant la relation 3.43, on obtient la relation inverse :

$$\mathbf{i}_2 = \frac{2}{3} C_{32}^T \mathbf{i}_3 \quad (3.45)$$

qui permet d'obtenir des composantes diphasées à partir des composantes triphasées.

Expression des flux

Le flux créé par le rotor au stator s'écrit alors :

$$\phi_{3r} = \phi_f C_{32} \begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \sin(p\theta) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Notons $\phi_{2r} = [\phi_{r\alpha} \ \phi_{r\beta}]$ le vecteur des composantes diphasées du flux du stator produit par le rotor et définis par $\phi_{3r} = C_{32} \phi_{2r}$. En remplaçant dans l'équation ci-dessus ϕ_{3r} par $C_{32} \phi_{2r}$ puis en multipliant à gauche par C_{32}^T on obtient :

$$C_{32}^T C_{32} \phi_{2r} = \phi_f C_{32}^T C_{32} \begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \sin(p\theta) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

En utilisant la propriété 3.43, on obtient finalement :

$$\phi_{2r} = \phi_f \begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \sin(p\theta) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Reprenons l'expression 3.23 du flux propre du stator. En notant $\phi_{2s} = [\phi_{s\alpha} \ \phi_{s\beta}]^T$ le vecteur des composantes diphasées du flux propre du stator, on obtient $C_{32} \phi_{2s} = \mathcal{M} C_{32} \mathbf{i}_2$. En multipliant à gauche par C_{32}^T , on obtient alors $C_{32}^T C_{32} \phi_{2s} = \frac{3}{2} \phi_{2s} = C_{32}^T \mathcal{M} C_{32} \mathbf{i}_2$. Cette dernière équation se simplifie grandement en vérifiant que $C_{32}^T \mathcal{M} C_{32} = \frac{3}{2} (L_s - M_s) \mathcal{I}_2$, ce qui donne $\phi_{2s} = (L_s - M_s) \mathbf{i}_2$. Par la suite, on notera $L_{cs} = L_s - M_s$ que l'on appelle *inductance propre cyclique* du stator.

En tenant compte du flux propre et du flux mutuel, on obtient finalement :

$$\phi_2 = L_{cs} \mathbf{i}_2 + \phi_f \begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ \sin(p\theta) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Exercice 8 Montez que $C_{32}^T \mathcal{M} C_{32} = \frac{3}{2} L_{cs} \mathcal{I}_2$

Équations aux tensions

Reprenons l'équation 3.37 aux tensions. En remplaçant \mathbf{v}_3 par $C_{32}\mathbf{v}_2$, \mathbf{i}_3 par $C_{32}\mathbf{i}_2$ et ϕ_3 par $C_{32}\phi_2$ puis en multipliant à gauche les deux membres par C_{32}^T , on obtient l'équation suivante :

$$\mathbf{v}_2 = R_s \mathbf{i}_2 + \frac{d\phi_2}{dt} \quad (3.50)$$

Expression du couple

Reprenons l'expression 3.38 du couple. On peut faire intervenir la matrice C_{32} pour simplifier le vecteur des trois sinus. En effet, on a :

$$\begin{bmatrix} \sin(p\theta) \\ \sin(p\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} = C_{32} \begin{bmatrix} \sin(p\theta) \\ -\cos(p\theta) \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

On obtient alors :

$$C = p\phi_f \mathbf{i}_2^T C_{32}^T C_{32} \begin{bmatrix} \sin(p\theta) \\ -\cos(p\theta) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

ce qui se simplifie en :

$$C = \frac{3}{2} p\phi_f \mathbf{i}_2^T \begin{bmatrix} \sin(p\theta) \\ -\cos(p\theta) \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

où encore $C = \frac{3}{2} p\phi_f (i_\alpha \sin(p\theta) - i_\beta \cos(p\theta))$.

Modèle d'état

A partir des différentes équations déterminées ci-dessus (expressions du flux, équations aux tensions et expression du couple), il est possible d'écrire un modèle d'état permettant de simuler la machine synchrone ou encore de synthétiser une loi de commande. Les deux dérivées intervenant dans ces équations sont celles des flux ϕ_α et ϕ_β . On peut donc logiquement choisir ces grandeurs comme variables d'état ($x = \phi_2$). L'équation d'état vient alors de l'équation de la tension $\frac{d\phi_2}{dt} = \mathbf{v}_2 - R_s \mathbf{i}_2$; mais encore faut-il écrire la dérivée de l'état en fonction de l'entrée du système et de l'état. Les courants et les flux sont liés par l'expression 3.49 qui fait également intervenir la position

θ du rotor. Considérons θ comme une entrée du système. On peut alors déterminer le courant à partir de l'état et de l'entrée par la relation $\mathbf{i}_2(\phi_2, \theta) = \frac{1}{L_s - M_s}(\phi_2 - \phi_f[\cos(p\theta) \ \sin(p\theta)]^T)$. La tension \mathbf{v}_2 fait également partie des entrées du système; l'équation d'état est finalement $\frac{d\phi_2}{dt} = \mathbf{v}_2 - R_s \mathbf{i}_2(\phi_2, \theta)$.

En sortie, on donnera généralement les courants diphasés et le couple (on peut également sortir les flux). On utilisera également les matrices de Concordia C_{32} et C_{32}^T afin de passer des grandeurs triphasées aux grandeurs diphasées.

La position du rotor, considérée comme une entrée du système peut-être calculée à partir de l'équation dynamique. La vitesse est la dérivée de la position : $\frac{d\theta}{dt} = \Omega(t)$ où la vitesse de rotation $\Omega(t)$ est donnée par l'équation mécanique $J \frac{d\Omega}{dt} = C - C_r$ faisant intervenir l'inertie J des parties tournantes, le couple moteur C et le couple résistant C_r considéré comme une entrée du système mécanique.

Exercice 9 (Modèle de simulation de la machine synchrone)

Donnez un schéma de simulation de la machine synchrone sous forme de schéma-bloc faisant apparaître deux blocs : un bloc contenant l'équation électrique d'entrées les tensions et la position du rotor et comme sorties les courants et le couple ; et un second bloc d'entrée le couple moteur et le couple résistant et de sortie la position et la vitesse du moteur.

Il est également possible de choisir les courants comme variables d'état à la place des flux.

Exercice 10 (Modèle de la machine synchrone basé sur les courants)

Donnez les équations d'état de la machine synchrone où les courants diphasés du stator sont choisis comme variables d'état.

Commande vectorielle

Afin de maintenir un couple constant lorsque le rotor tourne, il est nécessaire d'imposer au stator un champ tournant à la même vitesse que le rotor. Choisissons par exemple les courants sous la forme :

$$i_\alpha(t) = I_m \cos(p\theta(t) - \delta) \quad (3.54)$$

$$i_\beta(t) = I_m \sin(p\theta(t) - \delta) \quad (3.55)$$

Le couple s'écrit alors $C = \frac{3}{4} p \phi_f I_m \sin(\delta)$. Pour une amplitude des courants I_m fixée, le couple est une fonction sinusoïdale du déphasage δ . Il apparaît

clairement que le couple est maximal pour $\delta = \pi/2$. Afin d'utiliser la machine au mieux de son efficacité (en réduisant ses pertes au minimum), on choisit comme stratégie de commande de fixer $\delta = \pi/2$ et de réguler le couple en réglant I_m . Cela peut se faire par deux boucles de courant sur i_α et i_β ayant comme référence respectivement $i_\alpha^* = I_m^* \cos(p\theta - \pi/2)$ et $i_\beta^* = I_m^* \sin(p\theta - \pi/2)$ avec $I_m^* = \frac{4C^*}{3p\phi_f}$ où C^* est la valeur de référence du couple.

On utilise généralement des correcteurs PI. Afin de les régler, il importe de connaître le transfert entre la tension et le courant. Développons donc l'équation 3.50 de la tension en remplaçant le flux par son expression 3.49. On obtient :

$$\mathbf{v}_2 = R_s \mathbf{i}_2 + L_{cs} \frac{d\mathbf{i}_2}{dt} + \phi_f \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} \cos(p\theta) \\ -\sin(p\theta) \end{bmatrix} \right) \quad (3.56)$$

$$= R_s \mathbf{i}_2 + L_{cs} \frac{d\mathbf{i}_2}{dt} + p\Omega\phi_f \begin{bmatrix} -\sin(p\theta) \\ \cos(p\theta) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

ce qui peut se réécrire sous la forme $\mathbf{v}_2 = R_s \mathbf{i}_2 + L_{cs} \frac{d\mathbf{i}_2}{dt} + \mathbf{e}_2$ où \mathbf{e}_2 regroupe les termes de force électromotrice induites par la rotation du rotor :

$$\mathbf{e}_2 = p\Omega\phi_f \begin{bmatrix} -\sin(p\theta) \\ \cos(p\theta) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Le modèle du système peut-être représenté comme suit : pour chaque composante, à la tension de commande, on retranche la fem avant de passer la différence dans la fonction de transfert du premier ordre $1/(R+L_{cs}p)$; la sortie donnant le courant. Afin d'améliorer les résultats de l'asservissement, il est possible d'estimer les termes de fem et de les compenser dans la commande.

L'inconvénient de cette stratégie de commande est qu'elle travaille avec des consignes sinusoïdales. Ainsi, on n'atteint pas de régime permanent constant et une erreur de suivi risque d'altérer la qualité de la régulation. Pour pallier ce problème, on peut choisir d'effectuer un changement de repère de manière à se placer dans le repère du rotor grâce à une matrice de rotation.

3.2.3 Modèle de Park de la machine synchrone

Transformation de Park

Soit $R(x)$ la matrice de rotation d'angle x :

$$R(x) = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Cette matrice présente un certain nombre de propriétés.

Propriété 5 (Propriétés de la matrice de rotation)

- $R^{-1}(x) = R^T(x) = R(-x)$
- $\frac{d}{dx}(R(x)) = R(x + \pi/2)$
- $R(x + y) = R(x)R(y)$

La matrice $R(p\theta)$ permet de passer du repère du stator au repère du rotor. Pour le vecteur $\mathbf{i}_2 = [i_\alpha \ i_\beta]^T$, définissons les grandeurs (d,q) $\mathbf{i}_{dq} = [i_d \ i_q]^T$ définies par $\mathbf{i}_2 = R(p\theta)\mathbf{i}_{dq}$; la transformation inverse étant $\mathbf{i}_{dq} = R(-p\theta)\mathbf{i}_2$. De la même manière, on définit les composantes (d,q) du flux et de la tension.

La composition de la transformation de Concordia et de la matrice de rotation est appelée transformation de Park du nom du scientifique qui a travaillé sur le domaine. On note cette matrice $P(p\theta) = C_{32}R(p\theta)$.

Équation du flux

En remplaçant dans l'équation 3.49 des flux ϕ_2 par $R(p\theta)\phi_{dq}$, \mathbf{i}_{dq} par $R(p\theta)\mathbf{i}_{dq}$, on obtient :

$$R(p\theta)\phi_{dq} = L_{cs}R(p\theta)\mathbf{i}_{dq} + \phi_f R(p\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

En multipliant les deux membre à gauche par $R(-p\theta)$, on obtient l'expression simplifiée du flux :

$$\phi_{dq} = L_{cs}\mathbf{i}_{dq} + \phi_f \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Cette expression montre bien l'intérêt de la transformation : l'axe d, appelé axe direct, est orienté dans la direction du flux du rotor. L'axe q, appelé axe en quadrature, est orienté orthogonalement au flux du rotor. Ainsi, le flux ϕ_f du rotor n'intervient que sur la composante d du flux du stator.

Équation de la tension

En reprenant les équations 3.50 de la tension et en y faisant le même changement de variable que pour l'équation des flux, on obtient :

$$R(p\theta)\mathbf{v}_{dq} = R_s R(p\theta)\mathbf{i}_{dq} + \frac{d}{dt}(R(p\theta)\phi_{dq}) \quad (3.62)$$

Le dernier terme de cette équation est la dérivée d'un produit et se développe comme suit :

$$\frac{d}{dt}(R(p\theta)\phi_{dq}) = \frac{d}{dt}(R(p\theta))\phi_{dq} + R(p\theta)\frac{d}{dt}(\phi_{dq}) \quad (3.63)$$

$$= \frac{dp\theta}{dt} \frac{d}{dp\theta}(R(p\theta))\phi_{dq} + R(p\theta)\frac{d}{dt}(\phi_{dq}) \quad (3.64)$$

$$= p\Omega R(p\theta + \frac{\pi}{2})\phi_{dq} + R(p\theta)\frac{d}{dt}(\phi_{dq}) \quad (3.65)$$

$$(3.66)$$

où Ω est la vitesse de rotation du rotor. En multipliant à gauche par $R(-p\theta)$, on obtient l'équation de la tension :

$$\mathbf{v}_{dq} = R_s \mathbf{i}_{dq} + p\Omega R(\frac{\pi}{2})\phi_{dq} + \frac{d}{dt}(\phi_{dq}) \quad (3.67)$$

Le changement de repère a fait apparaître un terme $p\Omega R(\frac{\pi}{2})\phi_{dq}$ dépendant de la vitesse de rotation et du flux du rotor. Il s'agit d'une force électromotrice induite par la rotation du rotor.

Expression du couple

Reprenons l'expression 3.53 du couple. La partie de droite peut se transformer de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \sin(p\theta) \\ -\cos(p\theta) \end{bmatrix} = R(p\theta + \frac{\pi}{2}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

On obtient donc

$$C = \frac{3}{2} p \phi_f \mathbf{i}_{dq}^T R^T(p\theta) R(p\theta + \frac{\pi}{2}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

qui se simplifie en :

$$C = \frac{3}{2} p \phi_f i_q \quad (3.70)$$

On retrouve là un résultat classique de la commande des machines synchrones qui énonce que seule la composante en quadrature avec le flux du rotor produit du couple.

Modèle d'état

Comme pour le modèle en (α, β) , il est possible d'écrire le modèle d'état en prenant comme variables d'état soit les flux, soit les courants.

Exercice 11 (Modèle d'état dans le repère de Park) *Donnez les équations d'état du modèle de Park de la machine synchrone dans les deux cas suivants :*

- en prenant les composantes du courant comme variables d'état,
- en prenant les composantes du flux comme variables d'état (vous penserez à préciser la relation permettant d'écrire les courants à partir des flux).

Commande vectorielle du couple

Après changement de repère, le couple ne dépend plus que de la composante i_q du courant du stator. On règle donc le couple en réglant ce courant tout en asservissant i_d à une consigne nulle. On effectue donc un asservissement du courant i_q à une valeur $i_q^* = \frac{4C^*}{3p\phi_f}$ où C^* est la valeur de référence du couple.

Le modèle entre la tension et le courant s'obtient en reprenant les équations de la tension et en remplaçant les flux par leurs expressions. On obtient alors :

$$\mathbf{v}_{dq} = R_s \mathbf{i}_{dq} + L_{cs} \frac{d\mathbf{i}_{dq}}{dt} + \mathbf{e}_{dq} \quad (3.71)$$

où \mathbf{e}_{dq} est un terme de fem défini par :

$$\mathbf{e}_{dq} = \begin{bmatrix} -p\Omega\phi_q \\ p\Omega\phi_d \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Pour chacune des deux phase, le modèle est donc composé d'un sommateur où la fem est retranchée à la tension d'alimentation ; la différence est ensuite dans une fonction de transfert $\frac{1}{R+L_{cs}}$ pour donner en sortie le courant. Le cas échéant, les termes de fem peuvent être estimés et compensés par la commande.

3.2.4 Régime permanent sinusoïdal

Notations complexes

A partir des grandeurs $(x_\alpha(t), x_\beta(t))$ du modèle de Concordia, introduisons le vecteur :

$$\underline{x}_2(t) = x_\alpha(t) + jx_\beta(t). \quad (3.73)$$

La transformation permettant de passer des composantes triphasées (x_a, x_b, x_c) au nombre complexe \underline{x}_2 est appelée transformation de Clarke. En appliquant cette transformation aux différentes grandeurs (tension, courant et flux), on peut réécrire les équations de la machine synchrone de manière plus compacte. L'équation de la tension s'écrit alors :

$$\underline{v}_2(t) = R_s \underline{i}_2(t) + \frac{d\phi_2(t)}{dt} ; \quad (3.74)$$

l'équation du flux s'écrit :

$$\phi_2(t) = L_{cs} \underline{i}_2(t) + \phi_f \exp(jp\theta(t)). \quad (3.75)$$

En notant $\underline{\phi}_f(t) = \phi_f \exp(jp\theta(t))$ le vecteur du flux d'excitation, on obtient :

$$\underline{\phi}_2(t) = L_{cs} \underline{i}_2(t) + \underline{\phi}_f(t). \quad (3.76)$$

Le couple s'écrit :

$$C(t) = \frac{3}{2} p \operatorname{Im}(\underline{i}_2^*(t) \underline{\phi}_f(t)). \quad (3.77)$$

Régime sinusoïdal

En régime permanent sinusoïdal équilibré, les grandeurs triphasées s'écrivent sous la forme :

$$x_a(t) = X\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha) \quad (3.78)$$

$$x_b(t) = X\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \quad (3.79)$$

$$x_c(t) = X\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \quad (3.80)$$

où X est la valeur efficace. Pour la phase 'a', on définit le vecteur de Fresnel comme le nombre complexe suivant :

$$\underline{X}_a = X \exp(j\alpha). \quad (3.81)$$

En appliquant la transformation de Concordia (3.41) à ces grandeurs triphasées, on obtient :

$$x_\alpha(t) = \frac{3}{2} X\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha) \quad (3.82)$$

$$x_\beta(t) = \frac{3}{2} X\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha) \quad (3.83)$$

ou encore :

$$\underline{x}_2(t) = \frac{3}{2}X \exp(j(\omega t + \alpha)) = \frac{3}{2}\underline{X}_a \exp(j\omega t) \quad (3.84)$$

On observe donc que les grandeurs diphasées complexes (composantes de Clarke) sont identiques aux grandeurs de Fresnel (ou amplitude complexe) de la première phase, à un facteur multiplicatif $\frac{3}{2} \exp(j\omega t)$ près.

Par ailleurs, le modèle dynamique peut s'écrire plus simplement en notant qu'en régime sinusoïdal, la dérivée est équivalente à une multiplication par $j\omega$. L'équation de la tension s'écrit alors :

$$\underline{v}_2(t) = R_s \underline{i}_2(t) + jL_{cs}\omega \underline{i}_2(t) + j\omega \underline{\phi}_f(t). \quad (3.85)$$

Dans cette équation, on reconnaît que le modèle en régime permanent est composé de la mise en série de trois termes : une résistance, une inductance et une force-électromotrice $j\omega \underline{\phi}_f$. Ce modèle est également valable avec les grandeurs de Fresnel relatives à la première des trois phases :

$$\underline{V}_a = R_s \underline{I}_a + jL_{cs}\omega \underline{I}_a + \underline{E}_a \quad (3.86)$$

où

$$\underline{E}_a = j\omega \underline{\Phi}_f \quad (3.87)$$

et $\underline{\Phi}_f = \frac{2}{3}\underline{\phi}_f$. Il s'agit du modèle de Behn-Eschenburg classiquement utilisé pour l'analyse du régime sinusoïdal des machines synchrones à pôles lisses non saturée (cf. paragraphe 2.3.4).

3.3 La machine asynchrone

On considère le cas des machines triphasées à rotor bobiné sachant que le modèle est globalement valable pour les machines à rotor à cage. Le stator est identique à celui des machines synchrones. Le rotor est de même nature que le stator.

3.3.1 Modèle triphasé

Le stator est constitué de trois enroulements faisant respectivement un angle avec l'axe de référence du rotor de $\xi = 0, 2\pi/3p$ et $-2\pi/3p$. Le rotor faisant un angle θ avec le stator est composé de trois enroulements faisant respectivement un angle avec l'axe du stator de $\xi = \theta, \theta + 2\pi/3p$ et $\theta - 2\pi/3p$.

Les enroulements du stator sont parcourus par les courants i_{sa} , i_{sb} et i_{sc} ; ceux du rotor par i_{ra} , i_{rb} et i_{rc} . Notons ϕ_{sa} , ϕ_{sb} et ϕ_{sc} les flux du stator et ϕ_{ra} , ϕ_{rb} et ϕ_{rc} ceux du rotor.

Flux propre

Les flux propres du stator et du rotor s'expriment comme dans le cas du flux du stator de la machine synchrone. Notons ϕ_{ssa} , ϕ_{ssb} et ϕ_{ssc} les flux propres du stator et ϕ_{rra} , ϕ_{rrb} et ϕ_{rrc} ceux du rotor. En notant L_s l'inductance propre d'une phase du stator et M_s la mutuelle inductance entre 2 phases du stator, on a :

$$\phi_{ssa}(t) = L_s i_{sa}(t) + M_s i_{sb}(t) + M_s i_{sc}(t) \quad (3.88)$$

$$\phi_{ssb}(t) = M_s i_{sa}(t) + L_s i_{sb}(t) + M_s i_{sc}(t) \quad (3.89)$$

$$\phi_{ssc}(t) = M_s i_{sa}(t) + M_s i_{sb}(t) + L_s i_{sc}(t) \quad (3.90)$$

En notant L_r l'inductance propre d'une phase du rotor et M_r la mutuelle inductance entre 2 phases du rotor, on a :

$$\phi_{rra}(t) = L_r i_{ra}(t) + M_r i_{rb}(t) + M_r i_{rc}(t) \quad (3.91)$$

$$\phi_{rrb}(t) = M_r i_{ra}(t) + L_r i_{rb}(t) + M_r i_{rc}(t) \quad (3.92)$$

$$\phi_{rrc}(t) = M_r i_{ra}(t) + M_r i_{rb}(t) + L_r i_{rc}(t) \quad (3.93)$$

Ces équations se mettent sous forme vectorielle

$$\phi_{3ss} = \mathcal{M}_s \mathbf{i}_{3s} \quad (3.94)$$

$$\phi_{3rr} = \mathcal{M}_r \mathbf{i}_{3r} \quad (3.95)$$

avec $\phi_{3ss} = [\phi_{ssa} \ \phi_{ssb} \ \phi_{ssc}]^T$ et $\mathbf{i}_{3s} = [i_{sa} \ i_{sb} \ i_{sc}]^T$,

$$\mathcal{M}_s = \begin{bmatrix} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

et

$$\mathcal{M}_r = \begin{bmatrix} L_r & M_r & M_r \\ M_r & L_r & M_r \\ M_r & M_r & L_r \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Flux mutuel

Notons ϕ_{sra} , ϕ_{srb} et ϕ_{src} les flux du stator produits par le rotor. En notant M_{rs} la mutuelle inductance maximale entre un enroulement du stator et un enroulement du rotor. Il suffit de multiplier cette grandeur par le cosinus de p fois l'angle entre deux enroulements pour déterminer son inductance mutuelle. Ainsi, on obtient pour le flux du stator produit par le rotor :

$$\begin{aligned}\phi_{sra}(t) &= M_{rs} \cos(p\theta) i_{ra}(t) + M_{rs} \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3p}\right) i_{rb}(t) + M_{rs} \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3p}\right) i_{rc}(t) \\ \phi_{srb}(t) &= M_{rs} \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3p}\right) i_{ra}(t) + M_{rs} \cos(p\theta) i_{rb}(t) + M_{rs} \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3p}\right) i_{rc}(t) \\ \phi_{src}(t) &= M_{rs} \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3p}\right) i_{ra}(t) + M_{rs} \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3p}\right) i_{rb}(t) + M_{rs} \cos(p\theta) i_{rc}(t)\end{aligned}$$

Ce qui se met sous la forme $\phi_{3sr} = \mathcal{M}_{sr}(\theta) \mathbf{i}_{3r}$ où $\phi_{3sr} = [\phi_{sra} \ \phi_{srb} \ \phi_{src}]^T$, $\mathbf{i}_{3r} = [i_{ra} \ i_{rb} \ i_{rc}]^T$ et $\mathcal{M}_{sr}(\theta) = M_{rs} S(p\theta)$ avec :

$$S(x) = \begin{bmatrix} \cos(x) & \cos\left(x + \frac{2\pi}{3p}\right) & \cos\left(x - \frac{2\pi}{3p}\right) \\ \cos\left(x - \frac{2\pi}{3p}\right) & \cos(x) & \cos\left(x + \frac{2\pi}{3p}\right) \\ \cos\left(x + \frac{2\pi}{3p}\right) & \cos\left(x - \frac{2\pi}{3p}\right) & \cos(x) \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

Le flux produit par le stator sur le rotor s'écrit avec la même matrice : $\phi_{3rs} = \mathcal{M}_{rs}(\theta) \mathbf{i}_{3s}$ où $\phi_{3rs} = [\phi_{rsa} \ \phi_{rsb} \ \phi_{rsc}]^T$, $\mathbf{i}_{3s} = [i_{sa} \ i_{sb} \ i_{sc}]^T$ et avec $\mathcal{M}_{rs}(\theta) = \mathcal{M}_{sr}^T(\theta)$.

Flux total et équations aux tensions

Le flux total reçu au stator est la somme du flux propre produit au stator et du flux produit au rotor, soit $\phi_{3s} = \phi_{3ss} + \phi_{3sr}$; de même, pour les flux produits au rotor, on a $\phi_{3r} = \phi_{3rr} + \phi_{3rs}$, ce qui donne les relations :

$$\phi_{s3} = \mathcal{M}_s \mathbf{i}_{s3} + \mathcal{M}_{sr}(\theta) \mathbf{i}_{r3} \quad (3.99)$$

$$\phi_{r3} = \mathcal{M}_{sr}^T(\theta) \mathbf{i}_{s3} + \mathcal{M}_r \mathbf{i}_{r3} \quad (3.100)$$

En notant R_s la résistance d'un enroulement du stator et R_r celle d'un

enroulement du rotor, les équations aux tensions s'écrivent pour le stator :

$$v_{sa}(t) = R_s i_{sa}(t) + \frac{d\phi_{sa}(t)}{dt} \quad (3.101)$$

$$v_{sb}(t) = R_s i_{sb}(t) + \frac{d\phi_{sb}(t)}{dt} \quad (3.102)$$

$$v_{sc}(t) = R_s i_{sc}(t) + \frac{d\phi_{sc}(t)}{dt} \quad (3.103)$$

et pour le rotor supposé court-circuité :

$$v_{ra}(t) = 0 = R_r i_{ra}(t) + \frac{d\phi_{ra}(t)}{dt} \quad (3.104)$$

$$v_{rb}(t) = 0 = R_r i_{rb}(t) + \frac{d\phi_{rb}(t)}{dt} \quad (3.105)$$

$$v_{rc}(t) = 0 = R_r i_{rc}(t) + \frac{d\phi_{rc}(t)}{dt} \quad (3.106)$$

ce qui se met sous forme vectorielle :

$$\mathbf{v}_{s3} = R_s \mathbf{i}_{s3} + \frac{d\phi_{s3}}{dt} \quad (3.107)$$

$$0 = R_r \mathbf{i}_{r3} + \frac{d\phi_{r3}}{dt} \quad (3.108)$$

$$(3.109)$$

avec $\mathbf{v}_3 = [v_{sa} \ v_{sb} \ v_{sc}]^T$.

Expression du couple

En reprenant l'expression générale du couple (1.17) avec $\mathbf{i} = [\mathbf{i}_{3s}^T \ \mathbf{i}_{3r}^T]^T$ et :

$$\mathcal{L}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_s & \mathcal{M}_{sr}(\theta) \\ \mathcal{M}_{sr}^T(\theta) & \mathcal{M}_r \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

on obtient :

$$C = \frac{1}{2} \left(\mathbf{i}_{3s}^T \frac{d\mathcal{M}_{sr}(\theta)}{d\theta} \mathbf{i}_{3r} + \mathbf{i}_{3r}^T \frac{d\mathcal{M}_{sr}^T(\theta)}{d\theta} \mathbf{i}_{3s} \right) \quad (3.111)$$

En notant que $\frac{d\mathcal{M}_{sr}(\theta)}{d\theta} = p\mathcal{M}_{sr}(\theta + \frac{\pi}{2p})$ et que les deux termes de la somme sont identiques, le couple se réécrit :

$$C = pM_{sr} \mathbf{i}_{3s}^T S(p\theta + \frac{\pi}{2}) \mathbf{i}_{3r} \quad (3.112)$$

3.3.2 Modèle diphasé

Effectuons la transformation de Concordia afin de transformer les grandeurs triphasées en des grandeurs diphasées. Au stator, nous avons $\mathbf{i}_{2s} = [i_{s\alpha} \ i_{s\beta}]$ tel que $\mathbf{i}_{3s} = C_{32}\mathbf{i}_{2s}$, $\phi_{2s} = [\phi_{s\alpha} \ \phi_{s\beta}]$ tel que $\phi_{3s} = C_{32}\phi_{2s}$ et $\mathbf{v}_{3s} = C_{32}\mathbf{v}_{2s}$. Au rotor, nous avons $\mathbf{i}_{2r} = [i_{r\alpha} \ i_{r\beta}]$ tel que $\mathbf{i}_{3r} = C_{32}\mathbf{i}_{2r}$ et $\phi_{2r} = [\phi_{r\alpha} \ \phi_{r\beta}]$ tel que $\phi_{3r} = C_{32}\phi_{2r}$.

Expressions des flux

Prenons l'expression des flux du stator et du rotor, remplaçons les grandeurs triphasées par C_{32} fois la grandeur diphasée et multiplions les deux termes de l'équation par C_{32}^T .

$$\frac{3}{2}\phi_{2s} = C_{32}^T \mathcal{M}_s C_{32} \mathbf{i}_{2s} + C_{32}^T \mathcal{M}_{sr}(\theta) C_{32} \mathbf{i}_{2r} \quad (3.113)$$

$$\frac{3}{2}\phi_{2r} = C_{32}^T \mathcal{M}_{sr}^T(\theta) C_{32} \mathbf{i}_{2s} + C_{32}^T \mathcal{M}_r C_{32} \mathbf{i}_{2r} \quad (3.114)$$

Comme pour la machine synchrone, nous avons $C_{32}^T \mathcal{M}_s C_{32} = \frac{3}{2} L_{cs} \mathcal{I}_2$ où $L_{cs} = L_s - M_s$ est l'inductance propre cyclique du stator ainsi que $C_{32}^T \mathcal{M}_r C_{32} = \frac{3}{2} L_{cr} \mathcal{I}_2$ où $L_{cr} = L_r - M_r$ est l'inductance propre cyclique du rotor.

Par ailleurs, on peut montrer que :

$$C_{32}^T S(x) C_{32} = \frac{3}{2} R(x) \quad (3.115)$$

où $R(x)$ est la matrice de rotation d'angle x . Ainsi, on obtient les expressions simplifiées des flux :

$$\phi_{2s} = L_{cs} \mathbf{i}_{2s} + M_{sr} R(p\theta) \mathbf{i}_{2r} \quad (3.116)$$

$$\phi_{2r} = M_{sr} R(-p\theta) \mathbf{i}_{2s} + L_{cr} \mathbf{i}_{2r} \quad (3.117)$$

Exercice 12 (Propriétés de la matrice $S(x)$)

Montrez que $C_{32}^T S(x) C_{32} = \frac{3}{2} R(x)$.

Équations aux tensions

Comme pour la machine synchrone, les équations aux tensions s'écrivent simplement :

$$\mathbf{v}_{2s} = R_s \mathbf{i}_{2s} + \frac{d\phi_{2s}}{dt} \quad (3.118)$$

$$\mathbf{v}_{2r} = R_r \mathbf{i}_{2r} + \frac{d\phi_{2r}}{dt} \quad (3.119)$$

$$(3.120)$$

avec $\mathbf{v}_{2r} = 0$ lorsque le rotor est court-circuité.

Expression du couple

A partir de l'expression 3.112 du couple, on obtient :

$$C = \frac{3}{2} p M_{sr} \mathbf{i}_{2s}^T R(p\theta + \frac{\pi}{2}) \mathbf{i}_{2r} \quad (3.121)$$

Modèle d'état

A partir des équations des tensions, des flux et de l'expression du couple, il est possible d'écrire un modèle d'état utilisable par exemple pour simuler la machine. Néanmoins, le modèle présenté a l'inconvénient de conserver des grandeurs au stator et au rotor à des pulsations différentes ce qui se manifeste dans les équations par la matrice de rotation $R(p\theta)$. Nous allons donc présenter le modèle diphasé où les grandeurs sont ramenées dans le même repère grâce à une transformation de Park.

3.3.3 Modèle de Park dans un repère quelconque

On effectue un changement de repère qui est une rotation d'angle respectivement ξ_s sur les grandeurs du stator et ξ_r sur celles du rotor. Sur les courants, nous avons $\mathbf{i}_{2s} = R(\xi_s) \mathbf{i}_{sdq}$ et $\mathbf{i}_{2r} = R(\xi_r) \mathbf{i}_{rdq}$.

Les expressions des flux sont les suivantes :

$$\phi_{sdq} = L_{cs} \mathbf{i}_{sdq} + M_{sr} R(p\theta - \xi_s + \xi_r) \mathbf{i}_{rdq} \quad (3.122)$$

$$\phi_{rdq} = M_{sr} R(-p\theta + \xi_s - \xi_r) \mathbf{i}_{sdq} + L_{cr} \mathbf{i}_{rdq} \quad (3.123)$$

Afin de simplifier les équations, il convient de ramener les grandeurs du rotor et du stator dans un unique repère, ce qui correspond à imposer $\xi_r + p\theta = \xi_s$. Dans la suite, nous nous placerons dans ce cas. L'expression des flux se simplifie :

$$\phi_{sdq} = L_{cs}\mathbf{i}_{sdq} + M_{sr}\mathbf{i}_{rdq} \quad (3.124)$$

$$\phi_{rdq} = M_{sr}\mathbf{i}_{sdq} + L_{cr}\mathbf{i}_{rdq} \quad (3.125)$$

ce qui s'écrit aussi en notations scalaires :

$$\phi_{sd} = L_{cs}i_{sd} + M_{sr}i_{rd} \quad (3.126)$$

$$\phi_{sq} = L_{cs}i_{sq} + M_{sr}i_{rq} \quad (3.127)$$

$$\phi_{rd} = M_{sr}i_{sd} + L_{cr}i_{rd} \quad (3.128)$$

$$\phi_{rq} = M_{sr}i_{sq} + L_{cr}i_{rq} \quad (3.129)$$

Ces équations peuvent s'inverser pour exprimer les courants en fonction des flux :

$$\mathbf{i}_{sdq} = \frac{1}{L_{cs}L_{cr} - M_{sr}^2} (L_{cr}\phi_{sdq} - M_{sr}\phi_{rdq}) \quad (3.130)$$

$$\mathbf{i}_{rdq} = \frac{1}{L_{cs}L_{cr} - M_{sr}^2} (-M_{sr}\phi_{sdq} + L_{cr}\phi_{rdq}) \quad (3.131)$$

Les équations des tensions s'écrivent :

$$\mathbf{v}_{sdq} = R_s\mathbf{i}_{sdq} + R(-\xi_s)\frac{d}{dt}(R(\xi_s)\phi_{sdq}) \quad (3.132)$$

$$\mathbf{v}_{rdq} = R_r\mathbf{i}_{rdq} + R(-\xi_r)\frac{d}{dt}(R(\xi_r)\phi_{rdq}) \quad (3.133)$$

En notant que $\frac{d}{dt}(R(\xi_s)\phi_{sdq}) = \frac{d}{dt}(R(\xi_s))\phi_{sdq} + R(\xi_s)\frac{d\phi_{sdq}}{dt} = \dot{\xi}_s R(\xi_s + \frac{\pi}{2})\phi_{sdq} + R(\xi_s)\frac{d\phi_{sdq}}{dt}$, on obtient :

$$\mathbf{v}_{sdq} = R_s\mathbf{i}_{sdq} + \dot{\xi}_s R(\frac{\pi}{2})\phi_{sdq} + \frac{d\phi_{sdq}}{dt} \quad (3.134)$$

$$\mathbf{v}_{rdq} = R_r\mathbf{i}_{rdq} + \dot{\xi}_r R(\frac{\pi}{2})\phi_{rdq} + \frac{d\phi_{rdq}}{dt} \quad (3.135)$$

ce qui s'écrit aussi en notation scalaire :

$$v_{sd} = R_s i_{sd} - \dot{\xi}_s \phi_{sq} + \frac{d\phi_{sd}}{dt} \quad (3.136)$$

$$v_{sq} = R_s i_{sq} + \dot{\xi}_s \phi_{sd} + \frac{d\phi_{sq}}{dt} \quad (3.137)$$

$$v_{rd} = R_r i_{rd} - \dot{\xi}_r \phi_{rq} + \frac{d\phi_{rd}}{dt} \quad (3.138)$$

$$v_{rq} = R_r i_{rq} + \dot{\xi}_r \phi_{rd} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} \quad (3.139)$$

L'expression du couple est :

$$C = \frac{3}{2} p M_{sr} \mathbf{i}_{sdq}^T R \left(\frac{\pi}{2} \right) \mathbf{i}_{rdq} \quad (3.140)$$

ce qui s'écrit aussi $C = \frac{3}{2} p M_{sr} (-i_{sd} i_{rq} + i_{sq} i_{rd})$.

3.3.4 Modèle de Park dans le repère du stator

Nous avons déjà précisé qu'un unique repère était choisi pour les grandeurs du stator et du rotor, mais nous n'avons pas précisé lequel. Différents choix sont possibles. On peut choisir de se placer dans le repère du stator avec $\xi_s = 0$ et $\xi_r = -p\theta$; on peut choisir de se placer dans le repère du rotor avec $\xi_s = p\theta$ et $\xi_r = 0$; on peut aussi se placer dans un repère suivant le flux du rotor où toute autre grandeur du stator ou du rotor.

Pour la simulation, il est conseillé de choisir le repère du stator qui a l'avantage de ne pas obliger à effectuer de changer de repère les grandeurs du stator, ce qui simplifie quelque peu le modèle. Par rapport au modèle dans un repère quelconque, seules les équations des tensions sont simplifiées :

$$v_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{d\phi_{sd}}{dt} \quad (3.141)$$

$$v_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{d\phi_{sq}}{dt} \quad (3.142)$$

$$0 = R_r i_{rd} + p\Omega \phi_{rq} + \frac{d\phi_{rd}}{dt} \quad (3.143)$$

$$0 = R_r i_{rq} - p\Omega \phi_{rd} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} \quad (3.144)$$

où Ω est la vitesse de rotation.

Un modèle d'état peut-être établi basé, soit sur les flux, soit sur les courants. Notons que ce modèle a besoin de la connaissance de la vitesse Ω qui doit donc lui être fournie en entrée alors que le modèle de la machine synchrone avait besoin de la position θ .

Exercice 13 (Modèle de simulation de la machine asynchrone) *Déterminez un modèle de simulation de la machine asynchrone basé sur les équations diphasées exprimées dans le repère du stator. Vous donnerez les équations d'état en fonction soit des flux, soit des courants du stator. Vous préciserez les transformations permettant de passer des grandeurs triphasées aux grandeurs diphasées.*

3.3.5 Commande par orientation du flux du rotor

La technique de commande vectorielle du couple la plus répandue s'appuie sur les équations dans le repère du flux du rotor. On parle de flux rotorique orienté (FRO ou en anglais FOC pour flux oriented control). Cette méthode a été développée à la fin des années 1980 par Siemens. Son intérêt se trouve dans une simplification de l'expression du couple. Elle est généralement employée pour la commande vectorielle des machines de faible et moyenne puissance; pour les machines de forte et de très forte puissance où l'effet de l'onduleur devient sensible³, on préfère généralement les techniques appelées *commande directe du couple* (DTC pour *direct torque control* en anglais).

Principe

A partir des expressions des courants en fonction des courants, on peut établir différentes expressions du couple. Choisisant de l'exprimer en fonction du flux du rotor et du courant du stator, l'expression du flux du rotor nous permet d'écrire $\mathbf{i}_{rdq} = \frac{1}{L_{cr}}(\phi_{rdq} - M_{sr}\mathbf{i}_{sdq})$. En remplaçant dans l'expression du couple, on obtient :

$$C = k\mathbf{i}_{sdq}^T R\left(\frac{\pi}{2}\right)\phi_{rdq} \quad (3.145)$$

³Les constantes de temps des machines augmentent avec leur taille et leur puissance; mais les temps de commutation des composants semi-conducteurs utilisés dans les onduleurs (transistors, IGBT, GTO) augmente plus rapidement encore ce qui fait que l'effet de l'onduleur est plus critique pour les fortes puissances.

avec $k = \frac{3pM_{sr}}{2L_{cr}}$, ce qui s'écrit aussi $C = k(-i_{sd}\phi_{rq} + i_{sq}\phi_{rd})$. En imposant la relation $\phi_{rq} = 0$, c'est-à-dire en choisissant le repère, aligné avec le champ du rotor, on obtient une expression simplifiée du couple :

$$C = ki_{sq}\phi_{rd} \quad (3.146)$$

ce qui ressemble à l'expression du couple d'une machine à courant continu ou encore à celle d'une machine synchrone autopilotée.

Les variables pertinentes pour cette commande sont les courants du stator et les flux du rotor. Commençons par écrire les équations en fonction de ces grandeurs tout en tenant compte du fait qu'on suppose $\phi_{rq} = 0$. Il faut pour cela exprimer les flux du stator et les courants du rotor en fonctions des variables choisies. A partir des expressions des flux du rotor (3.128) et (3.129), on obtient :

$$i_{rd} = \frac{1}{L_{cr}}(\phi_{rd} - M_{sr}i_{sd}) \quad (3.147)$$

$$i_{rq} = -\frac{M_{sr}}{L_{cr}}i_{sd} \quad (3.148)$$

En remplaçant dans les expressions 3.126 et 3.127 des flux du stator, on obtient :

$$\phi_{sd} = \sigma L_{cs}i_{sd} + \frac{M_{sr}}{L_{cr}}\phi_{rd} \quad (3.149)$$

$$\phi_{sq} = \sigma L_{cs}i_{sq} \quad (3.150)$$

où $\sigma = 1 - \frac{M_{sr}^2}{L_{cs}L_{cr}}$ est le coefficient de dispersion des fuites.

Avec ces relations, on peut réécrire les équations aux tensions :

$$v_{sd} = R_s i_{sd} - \dot{\xi}_s \sigma L_{cs} i_{sq} + \sigma L_{cs} \frac{di_{sd}}{dt} + \frac{M_{sr}}{L_{cr}} \frac{d\phi_{rd}}{dt} \quad (3.151)$$

$$v_{sq} = R_s i_{sq} + \dot{\xi}_s (\sigma L_{cs} i_{sd} + \frac{M_{sr}}{L_{cr}} \phi_{rd}) + \sigma L_{cs} \frac{di_{sq}}{dt} \quad (3.152)$$

$$0 = -\frac{R_r M_{sr}}{L_{cr}} i_{sd} + \frac{R_r}{L_{cr}} \phi_{rd} + \frac{d\phi_{rd}}{dt} \quad (3.153)$$

$$0 = -\frac{R_r M_{sr}}{L_{cr}} i_{sq} + \dot{\xi}_r \phi_{rd} \quad (3.154)$$

Estimateurs

Afin d'asservir le couple par la méthode FRO, il convient d'estimer ϕ_{rd} ainsi que l'angle ξ_s de changement de repère des grandeurs du stator.

L'équation 3.154 se réécrit :

$$\dot{\xi}_r = \frac{R_r M_{sr}}{L_{cr}} \frac{i_{sq}}{\phi_{rd}} \quad (3.155)$$

Cette relation permet de déterminer l'angle ξ_r de changement de repère des grandeurs du rotor à condition de connaître ϕ_{rd} . Pour le stator, il suffit d'ajouter $p\theta$:

$$\xi_s = \xi_r + p\theta \quad (3.156)$$

où ξ_r est calculé par intégration de $\dot{\xi}_r$. La connaissance de cet angle permet de calculer les composantes de Park des courants mesurés et de calculer les tensions triphasées à fournir par l'onduleur à partir des composantes (d,q).

L'estimation de ϕ_{rd} est donnée par l'équation 3.153 : ϕ_{rd} peut être estimé à partir de i_{sd} grâce à une fonction de transfert du premier ordre $H(s) = \frac{R_r M_{sr}}{L_{cr}s + R_r}$.

Boucles de régulation

Il convient d'asservir les grandeurs intervenant dans l'expression du couple. ϕ_{rd} est généralement régulé à sa valeur nominale ϕ_{rd}^* alors que i_{sq} est asservi de manière à faire varier le couple. Pour une référence C^* , on asservit i_{sq} à une valeur de référence $i_{sq}^* = \frac{C^*}{k\phi_{rd}^*}$ ou encore $C^* = \frac{C^*}{k\phi_{rd}^*}$. Généralement l'asservissement du flux présente un asservissement de la composante directe du courant afin d'éviter que le courant ne dépasse les valeurs maximales autorisées.

L'équation 3.151 de la tension v_{sd} contient à la fois des dérivées du courant et du flux. On peut faire disparaître les dérivées du flux en retranchant $\frac{M_{sr}}{L_{cr}}$ fois l'équation 3.153 à l'équation 3.151, ce qui donne :

$$v_{sd} = R_t i_{sd} - \dot{\xi}_s \sigma L_{cs} i_{sq} + \sigma L_{cs} \frac{di_{sd}}{dt} - \frac{R_r M_{sr}}{L_{cr}^2} \phi_{rd} \quad (3.157)$$

où $R_t = R_s + R_r \left(\frac{M_{sr}}{L_{cr}} \right)^2$. Cette équation se réécrit sous la forme :

$$v_{sd} = R_t i_{sd} + \sigma L_{cs} \frac{di_{sd}}{dt} + e_d(t) \quad (3.158)$$

avec $e_d(t) = -\dot{\xi}_s \sigma L_{cs} i_{sq} - \frac{R_r M_{sr}}{L_{cr}^2} \phi_{rd}$. Notons que le terme de perturbation e_d ne fait pas intervenir de terme en i_{sd} .

Pour l'axe q, il est préférable de décomposer le terme $\dot{\xi}_s$ car il fait intervenir i_{sq} à travers $\dot{\xi}_s$. On obtient alors :

$$v_{sq} = R_t i_{sq} + \sigma L_{cs} \frac{di_{sq}}{dt} + e_q(t) \quad (3.159)$$

avec $e_q(t) = p\Omega(\sigma L_{cs} i_{sd} + \frac{M_{sr}}{L_{cr}} \phi_{rd}) + \frac{pR_r M_{sr} L_{cs}}{L_{cr}} \frac{i_{sq}^2}{\phi_{rd}}$ qui ne contient pas de terme linéaire en i_{sq} . Remarquons que, bien que passablement plus compliqué que les fem des machines à courant continu et synchrones auto-pilotées, cette fem contient bien le produit de la vitesse et du flux ; terme qui est d'ailleurs prépondérant.

Des correcteurs PI sont généralement utilisés pour asservir les composantes i_{sd} et i_{sq} du courant. La commande peut également compenser les termes de perturbation e_d et e_q . En régime permanent, on a $\phi_{rd} = M_{sr} i_{sd}$. Ainsi, dans le cas d'une consigne de flux constante, il suffit de réguler i_{sd} à la valeur de consigne $i_{sd}^* = \frac{\phi_{rd}^*}{M_{sr}}$.