



# Cours de Traitement du Signal

D. Baudois  
J. Chanussot  
J. Mars



<b>SOMMAIRE</b>	
<b>PREAMBULE</b>	<b>5</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>7</b>
<b>LE SIGNAL DETERMINISTE</b>	<b>7</b>
I. AXIOMATIQUE	7
II. CHANGEMENT DE REPRESENTATION	8
III. ESPACE DES SIGNAUX D'ENERGIE FINIE : ( $L^2$ )	9
IV. SIGNAUX DE PUISSANCE MOYENNE FINIE (NON NULLE)	13
<b>FILTRAGE LINEAIRE ET HOMOGENE DES SIGNAUX DETERMINISTES</b>	<b>16</b>
I. FILTRE L.H. (LINEAIRE HOMOGENE)	16
II. CAS DES SIGNAUX D'ENERGIE FINIE	16
III. CAS DES SIGNAUX DE PM FINIE	17
<b>LES SIGNAUX BL<sup>2</sup></b>	<b>20</b>
I. DEFINITION	20
II. THEOREME DE BERNSTEIN	20
III. THEOREME DE SHANNON	21
<b>LE SIGNAL ALEATOIRE</b>	<b>26</b>
I. GENERALITES	26
II. SIGNAL ALEATOIRE	26
III. STATIONNARITE	26
A. EFFET DE LA STATIONNARITE STRICTE POUR $N = 1$ :	27
B. EFFET DE LA STATIONNARITE STRICTE POUR $N = 2$ :	27
IV. ETUDE CONJOINTE	28
V. INDEPENDANCE	29
VI. PROCESSUS GAUSSIEN	29
<b>ETUDE FREQUENTIELLE DES FONCTIONS ALEATOIRES</b>	<b>30</b>
I. DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE MOYENNE (DSPM) D'UN SIGNAL ALEATOIRE STATIONNAIRE $X(T)$	30
II. THEOREME DE WIENER-KHINCHINE	31
III. NOTION DE COHERENCE	31
<b>FILTRAGE LINEAIRE ET HOMOGENE DES PROCESSUS ALEATOIRES ET STATIONNAIRES DU 2<sup>ND</sup> ORDRE</b>	<b>33</b>
I. CARACTERISATION AU 1 <sup>ER</sup> ORDRE (FORMULE DE LA MOYENNE)	33
II. CARACTERISATION AU 2 <sup>ND</sup> ORDRE	33
A. DESCRIPTION DES RELATIONS ENTREE/SORTIE D'UN FILTRE	33
B. FORMULE DES INTERFERENCES	34
C. APPLICATION A L'ANALYSE SPECTRALE : ANALYSEUR DE SPECTRE F.Q.I.	36
<b>SIGNAUX LARGE BANDE / BRUIT BLANC</b>	<b>39</b>
I. SIGNAUX "LARGE-BANDE" (MODELE THEORIQUE)	39
II. TENDANCE VERS LE BRUIT BLANC	39
III. APPROCHE SYSTEMIQUE DES SIGNAUX	40
IV. IDENTIFICATION D'UN FILTRE LINEAIRE ET HOMOGENE	42
A. 1 <sup>ERE</sup> METHODE : APPROCHE DIRECTE	42
B. 2 <sup>EME</sup> METHODE : UTILISATION DE LA REPONSE INDICIELLE	42
C. 3 <sup>EME</sup> METHODE : IDENTIFICATION PAR INTERCORRELATION ENTREE / SORTIE	43
<b>NOTION DE RAPPORT SIGNAL A BRUIT FILTRAGE ADAPTE</b>	<b>44</b>
I. POSITION DU PROBLEME	44
II. APPLICATION : MESURE DE LA DATE D'ARRIVEE D'UN SIGNAL CERTAIN CONNU	48



## PREAMBULE

Ce document est un extrait du cours de traitement du signal qui était dispensé en première année de l'ENSIEG (21 heures). Il était alors associé à des travaux dirigés (19 heures 30).

L'enseignement qui sera présenté à l'ENSE3 ne reprendra qu'une partie de ce cours et des travaux dirigés. Il nous a semblé judicieux de mettre à disposition l'ensemble de l'enseignement antérieurement présenté. Il constitue un ensemble de base qui peut servir de référence, en particulier pour ceux d'entre vous qui souhaiteraient approfondir cette discipline (modules électifs, filière SICOM ...filière commune avec l'école PHELMA).

Un polycopié constitué des notes de cours prises par un étudiant, relues et corrigées par Daniel Baudois, qui était alors en charge de ce cours doit être également disponible au cercle poly. Cette année le cours sera dispensé par Daniel Baudois, Jocelyn Chanussot et Jerome Mars. ([prenom.nom@gipsa-lab.inpg.fr](mailto:prenom.nom@gipsa-lab.inpg.fr)).

Pour plus d'information, vous pouvez les contacter au Laboratoire GIPSA-Lab, ([www.gipsa-lab.inpg.fr](http://www.gipsa-lab.inpg.fr)) et plus précisément au Département Signal Images situé au bâtiment D. du site Ampère. (<http://www.gipsa-lab.inpg.fr/index.php?id=333> )

Vous trouverez sur dokeos, l'ensemble des documents disponibles.

- Cours de Traitement de Signal
- Intégralité des énoncés d'exercices et de travaux dirigés.

### **Quelques liens....**

Information générale sur la filière SICOM : [www.gipsa-lab.inpg.fr/SICOM](http://www.gipsa-lab.inpg.fr/SICOM)

Par ENSE3 : [http://ense3.grenoble-inp.fr/29593296/0/fiche\\_\\_pagelibre/&RH=E3Lesfilieres](http://ense3.grenoble-inp.fr/29593296/0/fiche__pagelibre/&RH=E3Lesfilieres)

Par l'école PHELMA : [www.phelma.grenoble-inp.fr](http://www.phelma.grenoble-inp.fr)

Info. sur le Département Images et Signal : <http://www.gipsa-lab.inpg.fr/index.php?id=333>

Blog de la filière SICOM [http://intranet.phelma.fr/83605340/0/fiche\\_\\_pagelibre/](http://intranet.phelma.fr/83605340/0/fiche__pagelibre/)



## INTRODUCTION

Pour transmettre de l'information, on utilise une quantité physique qui varie au cours du temps, appelée signal (exemple : un signal de parole peut être représenté par les variations temporelles d'une pression acoustique, une image est représentée par les variations de niveaux de gris de points appelés pixels, un message téléphonique est codé par les variations d'un signal électromagnétique, converti à la réception en signal électrique puis sonore...).

Le signal est engendré par un émetteur naturel (rayonnement d'une étoile, vibration de la glotte, secousse sismique...) ou artificielle (générateur de tension, vibrations de moteurs...). Il se propage dans un canal de transmission (fil, atmosphère, milieu marin...) puis est recueilli par un récepteur (antenne...). Lors de la propagation, le signal peut être altéré et à la réception, on enregistre en général du bruit additif provenant de l'environnement. Il est alors nécessaire de traiter le signal afin de récupérer l'information transmise.

L'étude des signaux se subdivise en deux parties :

le signal déterministe, qui sert de modèle d'études dont l'évolution temporelle est parfaitement connue (passé, présent et futur)

le signal aléatoire, qui sert de modèle lorsque la description déterministe est impossible (manque de connaissances du phénomène, paramètres imprédictibles...)

## LE SIGNAL DETERMINISTE

### I. Axiomatique

En général, on privilégie la représentation temporelle (qui est naturelle) du signal.

Le signal  $x(t)$  est une fonction réelle (voire complexe) de la variable réelle  $t$ .

- de module borné
- continue ou possédant un nombre fini (ou une infinité dénombrable) de discontinuités de première espèce (saut de hauteur finie).

L'ensemble des signaux ainsi défini a une structure **d'espace vectoriel** (stabilité par l'addition et la multiplication par un scalaire, par exemple la somme de deux tensions est une tension, ainsi que le produit d'une tension par un nombre) :

- dans cet espace, on définit un produit scalaire, noté  $\langle x, y \rangle$
- puis la norme associée à ce produit scalaire :  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
- et la distance qui en découle :  $d(x, y) = \|x - y\|$

- si l'espace est de dimension finie  $n$ , chaque vecteur signal peut s'écrire comme la combinaison linéaire des signaux formant une base de cet espace :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i(t)$$

- si l'espace est de dimension infinie de la puissance du dénombrable, on peut trouver une base infinie discrète  $e_1(t), \dots, e_n(t), \dots$  ; telle que  $\forall \varepsilon > 0, \forall x(t)$ ,

$$\exists N \text{ fini ; } \left\| x(t) - \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot e_i(t) \right\| < \varepsilon$$

et on écrit alors :  $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot e_i(t)$

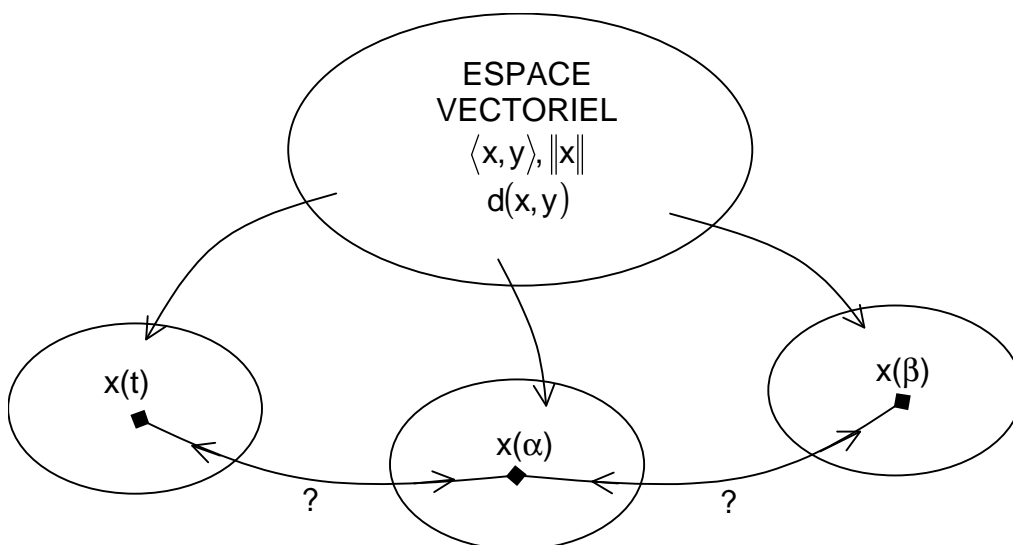
par exemple, l'ensemble des signaux périodiques de période  $T$  forme un espace de dimension infinie de la puissance du dénombrable : tout signal de cet ensemble peut se décomposer sur la base infinie de Fourier (décomposition en série de Fourier)

- dans le cas contraire, l'espace est dit de dimension infinie de la puissance du continu.

## II. Changement de représentation

La représentation temporelle n'est pas forcément toujours la plus adaptée pour décrire les signaux. Par exemple, on peut décrire simplement un signal sinusoïdal par sa fréquence, sa phase et son amplitude (3 paramètres).

On définit un espace axiomatique des signaux en tant qu'espace vectoriel normé qui sera observé dans diverses représentations, la représentation temporelle n'est que l'une d'entre elles. On passe d'une représentation à une autre par le biais de transformations bijectives.





Le passage de la représentation temporelle  $x(t)$  à la représentation  $X(\alpha)$  s'écrit de façon générale :

$$X(\alpha) = \int_{\Delta} \underbrace{K(\alpha, t)}_{\text{noyau}} x(t) dt$$

on montre alors que la transformation inverse s'écrit :

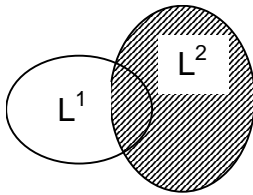
$$x(t) = \int_{\Delta'} K^{-1}(\alpha, t) X(\alpha) d\alpha$$

Les exemples les plus classiques sont les transformations de Laplace et Fourier.

$$\text{Laplace} \Rightarrow K(s, t) = e^{-st} ; \begin{cases} \Delta = [0, +\infty[ \\ \alpha = s \end{cases}$$

$$\text{Fourier} \Rightarrow K(v, t) = e^{-2j\pi vt} ; \begin{cases} \Delta = ]-\infty, +\infty[ \\ \alpha = v(\text{réel}) \end{cases}$$

Rappel :  $x(t)$  admet une transformée de Fourier (TF) si



- $x(t) \in L^1 \Leftrightarrow \int_{\mathfrak{R}} |x(t)| dt$  CVG (Converge)
- $x(t) \in L^2 \Leftrightarrow \int_{\mathfrak{R}} |x(t)|^2 dt$  CVG

### III. Espace des signaux d'énergie finie : ( $L^2$ )

**Définition** :  $x(t)$  réel est **d'énergie finie** si il est de carré sommable, c'est à dire si  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$  converge. On dit alors que  $x(t) \in L^2$ . Il est possible d'interpréter la quantité

$$E_{12} = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \quad \text{comme l'énergie du signal emmagasinée (ou restituée) entre les}$$

instants  $t_1$  et  $t_2$ . Par exemple, l'énergie Joule est proportionnelle à l'intégrale du carré de l'intensité, l'énergie cinétique est proportionnelle à l'intégrale du carré de la vitesse ...

L'énergie intrinsèque du signal est définie par  $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|x(t)|^2}_{\substack{\text{densité d'énergie} \\ \text{(puissance instantanée)}}} dt$

L'extension au cas d'un signal complexe est immédiate en utilisant le module carré.

Dans cet espace, on définit le produit scalaire entre les signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  par

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{\Re} x(t) \bar{y}(t) dt$$

Dans ce cas, l'énergie du signal est sa norme carrée :  $\|x(t)\|^2 = \int_{\Re} |x(t)|^2 dt = E_x$

Remarque : ceci définit une relation d'ordre sur les signaux : un signal « plus grand » qu'un autre si son énergie est plus grande.

La distance entre deux signaux est définie par :  $d^2(x, y) = \int_{\Re} |x(t) - y(t)|^2 dt$

On appelle fonction d'intercorrélation pour le retard  $\tau$  entre  $x(t)$  et  $y(t)$  le produit scalaire  $\langle x, y_{\tau} \rangle$  entre  $x(t)$  et  $y(t-\tau)$ , notée :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{\Re} x(t) \bar{y}(t-\tau) dt$$

$\tau$  est le décalage temporel entre les signaux et peut être interprété comme un retard.

Si  $x(t) = y(t)$ , on obtient la fonction d'autocorrélation du signal  $x(t)$  :  $\Gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \bar{x}(t-\tau) dt$

### Propriétés de l'autocorrélation :

1.  $\Gamma_{xx}(0) = \int_{\Re} |x(t)|^2 dt = E_x$  : l'autocorrélation en 0 correspond à l'énergie du signal
2. si  $t - \tau = u \Rightarrow \Gamma_{xx}(\tau) = \int_{\Re} x(u + \tau) \cdot \bar{x}(u) du \Rightarrow \Gamma_{xx}(\tau) = \overline{\Gamma_{xx}(-\tau)}$  : symétrie hermitienne.
3. En remarquant que  $\int_{\Re} |x(t) - x(t-\tau)|^2 dt \geq 0$  (intégrale de termes positifs)

En développant, il vient :  $2\Gamma_{xx}(0) - 2\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \bar{x}(t-\tau) dt \geq 0$

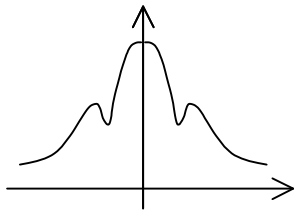
D'où :  $\Gamma_{xx}(0) \geq \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \bar{x}(t-\tau) dt$

Et donc, pour tout  $\tau$  :  $\Gamma_{xx}(0) \geq \operatorname{Re}[\Gamma_{xx}(\tau)]$

cas où  $x(t)$  est réel :

$$\Gamma_{xx}(0) = E_x$$

$$\Gamma_{xx}(\tau) \text{ est paire}$$



La corrélation est maximum en 0 :  $\Gamma_{xx}(0)$  **est un maximum global.**

4. Pour l'intercorrélation, on a :  $\Gamma_{xy}(\tau) = \overline{\Gamma_{yx}(-\tau)}$

### Représentation fréquentielle :

Les signaux de  $L^2$  admettent une représentation fréquentielle par transformée de Fourier :

$$x(t) \in L^2 \Rightarrow X(v) \text{ existe et est définie par : } X(v) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{+\lambda} x(t) e^{-2\pi jvt} dt$$

Note : on conservera dans la suite ces notations classiques  $x(t)$  et  $X(v)$

### Propriétés :

1. Théorème de Parseval :  $\int_{\Re} x(t) \bar{y}(t) dt = \int_{\Re} X(v) \bar{Y}(v) dv$

$$\text{En particulier, avec } x(t)=y(t), \text{ on obtient } \Rightarrow \int_{\Re} |x(t)|^2 dt = \int_{\Re} |X(v)|^2 dv = E_X$$

L'énergie du signal est la même, que l'on considère le signal dans sa représentation temporelle ou fréquentielle.

$|X(v)|^2$ , qui est réel et positif, s'appelle la **densité spectrale d'énergie (D.S.E.)**

si  $x(t)$  est réel,  $|X(v)|^2$  est paire.

$$\text{En effet : } X(v) = \int_{\Re} x(t) e^{-2\pi jvt} dt$$

$$\bar{X}(v) = \int_{\Re} x(t) e^{+2\pi jvt} dt = X(-v)$$

la fonction  $|X(v)|^2 = X(v) \cdot X(-v)$  est donc paire

2. Théorème de Plancherel : un produit de convolution se transforme en un produit simple (et réciproquement).

$$\text{TF}[(a * b)(t)] = A(v) \cdot B(v)$$

En appliquant cette formule au cas particulier :  $A(v) = X(v)$   
 $B(v) = \bar{Y}(v)$

$$a(t) = x(t)$$

On obtient alors :  $b(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{Y}(v) e^{+2\pi j v t} dv$

$$\text{Soit : } b(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(v) e^{+2\pi j v (-t)} dv = \bar{y}(-t)$$

Le produit de convolution devient :  $a * b(\tau) = \int_{\mathfrak{R}} \underbrace{a(t)}_{x(t)} \underbrace{b(\tau-t)}_{\bar{y}(t-\tau)} dt$

$$\text{Ce qui entraîne : } \boxed{\text{TF}[\Gamma_{xy}(\tau)] = X(v) \bar{Y}(v)}$$

3. En prenant  $x=y$  dans l'expression précédente, on retrouve la densité spectrale d'énergie, qui est la transformée de Fourier de l'autocorrélation :  $\text{TF}[\Gamma_{xx}(\tau)] = |X(v)|^2$ .

4. Calcul de l'énergie de  $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$  :

$$E_y = \int_{\mathfrak{R}} |y(t)|^2 dt = E_{x_1} + E_{x_2} + 2 \cdot \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \overline{x_2(t)} dt$$

$$E_y = \int_{\mathfrak{R}} |y(t)|^2 dt = E_{x_1} + E_{x_2} + 2 \cdot \text{Re} \langle x_1, x_2 \rangle$$

On constate que :  $E_y = E_{x_1} + E_{x_2}$  si  $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ , lorsque  $x_1$  et  $x_2$  sont orthogonaux, il n'y a pas d'échange d'énergie entre les deux signaux. Cette énergie d'interaction est définie, respectivement en temporel ou en fréquentiel (Parseval) par :

$$E_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x_1(t) \cdot \overline{x_2(t)}}_{\substack{\text{puissance d'interaction} \\ \text{ins tan tan ée}}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(v) \cdot \bar{Y}(v)}_{\substack{\text{dsi} \\ \text{densité spectrale d'interaction}}} dv$$

Le produit  $X(v) \cdot \bar{Y}(v)$  s'appelle la densité spectrale d'énergie d'interaction (D.S.I.).

Remarque :

$x(t)$  et  $x(t-\tau)$  ont même densité spectrale d'énergie (d.s.e.)

$$X(v) = \text{TF}[x(t)] \rightarrow \text{dse } |X(v)|^2$$

$$\text{TF}\{x(t-\tau)\} = X(v) e^{-2\pi j v \tau} \rightarrow \text{dse } |X(v) e^{-2\pi j v \tau}|^2 = |X(v)|^2$$

## IV. Signaux de puissance moyenne finie (non nulle)

**Définition** : lorsque le signal n'est pas d'énergie finie,  $\int |x(t)|^2 dt$  n'existe pas.

On définit alors  $x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{si } t \notin [-T/2, T/2] \end{cases}$

Dans ces conditions,  $x(t) \in L^2$  et représente l'observation du signal  $x(t)$  sur la durée  $T$ .  
On définit la puissance moyenne  $P_T$  de  $x(t)$  sur  $[-T/2, T/2]$  par :

$$P_T = \frac{E_T}{T} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt}{T} = \frac{\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt}{T}$$

on note que  $|P_T| \leq \frac{A^2 T}{T}$ ,  $\forall t$  puisque  $|x(t)| \leq A$  ( $x(t)$  borné), et donc  $P_T$  ne peut pas diverger lorsque  $T$  tend vers l'infini.

Par la suite, on s'intéressera aux signaux pour lesquels  $P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} P_T$  est finie, cette limite sera appelée puissance moyenne du signal  $x(t)$ .

### Représentation fréquentielle :

$x_T(t)$  étant d'énergie finie, il admet une TF :  $X_T(v) = \int_{\Re} x_T(t) e^{-2\pi jvt} dt$

$$X_T(v) = \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-2\pi jvt} dt$$

En procédant de même avec un autre signal  $y(t) \in L^2 \Rightarrow y_T(t) \leftrightarrow Y_T(v)$ , en utilisant la formule de Parseval il vient :  $\int_{\Re} x_T(t) \overline{y_T(t)} dt = \int_{\Re} X_T(v) \overline{Y_T(v)} dv$

$$\text{soit : } \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \overline{y(t)} dt = \int_{\Re} X_T(v) \overline{Y_T(v)} dv$$

- densité spectrale de puissance moyenne (dspm) :

dans l'expression précédente, avec  $x=y$ , et en divisant par  $T$ , il vient :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{\Re} \frac{|X_T(v)|^2}{T} dv$$

Lorsque  $T$  tend vers l'infini, la première intégrale s'interprète comme la puissance moyenne de  $x(t)$ . On en déduit que  $\frac{|X_T(v)|^2}{T}$  est une densité de puissance. On définit

alors  $\gamma_{xx}(v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(v)|^2}{T}$  qui est la densité spectrale de puissance moyenne (dspm) de  $x(t)$ .

- densité spectrale de puissance croisée (dspc) :

En cherchant la puissance moyenne d'une somme de deux signaux  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  de puissance moyenne finie:

$$P_{M_{X_1+X_2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x_1(t) + x_2(t)|^2 dt$$

$$P_{M_{X_1+X_2}} = P_{M_{X_1}} + P_{M_{X_2}} + 2 \operatorname{Re} \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_1(t) \bar{x}_2(t) dt}_{\langle x_1, x_2 \rangle},$$

il apparaît le terme suivant :  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_1(t) \bar{x}_2(t) dt = \langle x_1, x_2 \rangle$

qui représente la puissance d'interaction entre  $x_1$  et  $x_2$ . Elle s'interprète comme le produit scalaire des deux signaux. Dans ces conditions, la norme carrée de  $x$  est la puissance moyenne :

$$\|x\|^2 = P_x$$

Avec la relation de Parseval, on peut écrire l'expression analogue dans le domaine

$$\text{fréquentiel : } \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{x(t) \bar{y}(t)}{T} dt = \int_{\Re} \frac{x_T(t) \bar{y}_T(t)}{T} dt = \int_{\Re} \frac{X_T(v) \bar{Y}_T(v)}{T} dv$$

On peut alors définir la densité spectrale de puissance croisée (dspc) par

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} X_T(v) \bar{Y}_T(v).$$

### Fonctions de corrélation :

On appelle fonction d'intercorrélation :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \langle x, y_\tau \rangle$$

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \bar{y}(t - \tau) dt$$

On appelle fonction d'autocorrélation :  $\Gamma_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \bar{x}(t - \tau) dt$

Propriétés de la fonction d'autocorrélation :

1.  $\Gamma_{xx}(0) = P_x$
2.  $\Gamma_{xx}(\tau) = \overline{\Gamma_{xx}(-\tau)}$
3.  $\Gamma_{xx}(0) \geq \text{Re}[\Gamma_{xx}(\tau)] \quad \forall \tau$
4.  $\text{TF}[\Gamma_{xx}(\tau)] = \text{dspm}$   
 $\text{TF}[\Gamma_{xy}(\tau)] = \text{dspc}$  pour l'intercorrél.

## FILTRAGE LINEAIRE ET HOMOGENE DES SIGNAUX DETERMINISTES

### I. Filtre L.H. (Linéaire Homogène)



La sortie  $y(t)$  d'un filtre linéaire homogène excité par un signal  $x(t)$  en entrée est régie par

une équation différentielle de la forme :

$$\sum_{q=0}^n a_q \frac{d^q y(t)}{dt^q} = \sum_{r=0}^m b_r \frac{d^r x(t)}{dt^r}$$

Le filtre est dit homogène lorsque les coefficients  $a_q$  et  $b_r$  sont indépendants de  $t$ .  $n$  est l'ordre du filtre.

### II. Cas des signaux d'énergie finie

Si  $x(t)$  est d'énergie finie alors  $X(v)$  existe.

En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, on a :

$$x^{(n)}(t) = (2\pi jv)^n X(v) \quad \text{et} \quad y^{(q)}(t) = (2\pi jv)^q Y(v)$$

L'équation du filtre devient alors :  $Y(v) \sum_{q=0}^n a_q (2\pi jv)^q = X(v) \sum_{r=0}^m b_r (2\pi jv)^r$  et peut s'écrire sous

la forme suivante :

$$Y(v) = G(v)X(v); \quad G(v) = \frac{\sum_{r=0}^m b_r (2\pi jv)^r}{\sum_{q=0}^n a_q (2\pi jv)^q}$$

avec  $G(v)$  le gain complexe.

La sortie  $y(t)$  du filtre peut également s'écrire comme le produit de convolution entre l'entrée  $x(t)$  et la réponse impulsionnelle  $h(t)$  :

$$y(t) = (h * x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

$h(t)$ , transformée de Fourier inverse du gain complexe  $G(v)$  est la réponse impulsionnelle du système :



$$h(t) = \text{TF}^{-1}\{G(v)\}$$

Il découle les relations suivantes :

- $\underbrace{|Y(v)|^2}_{\gamma_{YY}(v)} = |G(v)|^2 \cdot \underbrace{|X(v)|^2}_{\gamma_{XX}(v)}$  : la dspm de sortie est égale au produit de la dspm d'entrée par le module carré du gain complexe. Ainsi un filtrage linéaire ne peut qu'appauvrir le spectre du signal d'entrée :  $\gamma_{XX}(v)=0$  entraîne  $\gamma_{YY}(v)=0$ .
- $\text{Arg } Y(v) = \text{Arg } G(v) + \text{Arg } X(v)$  : le filtrage introduit un déphasage par canal de fréquence

**Calcul de l'énergie de y :**

$$E_Y = \int_{\Re} |Y(v)|^2 dv$$

$$E_Y = \int_{\Re} |G(v)|^2 |X(v)|^2 dv$$

$$\Rightarrow \text{si } |G(v)|^2 < A^2, \text{ alors } E_Y < A^2 E_X$$

si  $x(t)$  est d'énergie infinie alors la sortie  $y(t)$  est également d'énergie finie.

### III. Cas des signaux de PM finie

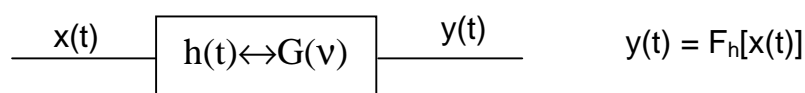
La relation  $Y(v)=G(v).X(v)$  reste valable, même si  $X(v)$  n'est défini qu'au sens des distributions. En particulier, on constate que :

$$Y(v) = G(v) \text{ si } X(v) = 1 \quad \text{soit :} \quad y(t) = h(t) \text{ si } x(t) = \delta$$

ce qui justifie l'appellation de réponse impulsionnelle pour  $h(t)$  (sortie du filtre excité par une impulsion en entrée).

- Fonctions propres des FLH:

Les signaux harmoniques de la forme  $x(t) = e^{2\pi j v_0 t}$  sont les fonctions propres des F.L.H.



en effet, on a alors :

$$X(v) = \delta_{v_0} = \delta(v - v_0)$$

$$Y(v) = G(v)X(v)$$

et donc 
$$\boxed{\begin{aligned} Y(v) &= G(v) \cdot \delta(v - v_0) \\ Y(v) &= G(v_0) \cdot \delta(v - v_0) \end{aligned}}$$

$$y(t) = G(v_0) \cdot e^{2\pi j v_0 t}$$

$F_h[x(t)] = G(v_0)x(t)$  où  $F_h$  désigne la transformée par le filtre.

La filtrée est proportionnelle à l'entrée, ce qui est la définition d'une fonction propre.

- Cas d'un filtre et d'un signal réel : application à l'analyse harmonique

On a  $h(t)$  et  $x(t)$  réels.

$x(t) = A \cdot \cos(2\pi v_0 t + \varphi)$ ; on pose  $\varphi = 2\pi v_0 t_0$

on a donc :  $x(t) = A \cdot \cos(2\pi v_0(t+t_0))$  dont la transformée de Fourier est :

$$X(v) = \frac{A}{2} [\delta(v - v_0) + \delta(v + v_0)] e^{2\pi j v t_0}$$

$G(v) = K(v) e^{j\psi(v)}$  étant le gain d'un filtre réel, son module  $K(v) = |G(v)|$  est paire  
Et son argument  $\psi(v) = \text{Arg } G(v)$  est impaire.

La transformée de Fourier de la sortie est :  $Y(v) = X(v)G(v)$ , soit :

$$Y(v) = \frac{A}{2} [\delta(v - v_0) + \delta(v + v_0)] \overbrace{e^{2\pi j v t_0} \cdot K(v) e^{j\psi(v)}}^{F(v)}$$

$$Y(v) = \frac{A}{2} \left[ \delta(v - v_0) \underbrace{K(v_0)}_{K(v_0)} e^{j\psi(v_0)} e^{j\varphi} + \delta(v + v_0) \underbrace{K(-v_0)}_{K(v_0)} \underbrace{e^{j\psi(-v_0)}}_{e^{-j\psi(v_0)}} e^{-j\varphi} \right]$$

$$Y(v) = \frac{A}{2} [\delta(v - v_0) F(v_0) + \delta(v + v_0) F(-v_0)]$$

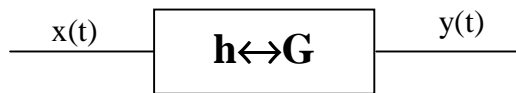
$$Y(v) = \frac{A}{2} K(v_0) \left[ \underbrace{\delta(v - v_0)}_{\updownarrow e^{2\pi j v_0 t}} e^{j[\psi(v_0) + \varphi]} + \underbrace{\delta(v + v_0)}_{\updownarrow e^{-2\pi j v_0 t}} e^{-j[\psi(v_0) + \varphi]} \right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= A \cdot K(v_0) \cos[2\pi v_0 t + \varphi + \psi(v_0)] \\ x(t) &= A \cdot \cos(2\pi v_0 t + \varphi) \end{aligned}}$$

On constate que la sortie reste une sinusoïde de même fréquence dont l'amplitude est multipliée par  $K(v_0)$  ayant subi un déphasage de  $\Psi(v_0)$ . Il est alors possible de tracer l'évolution du module et de la phase du gain en faisant varier la fréquence d'entrée  $v_0$  : c'est l'analyse harmonique (diagramme de Bode), ce qui permet d'identifier le système linéaire.

- Relation entrée / sortie

On se propose de déterminer l'expression de la dspm de la sortie  $y(t)$ .



Le produit de convolution s'écrit :  $y(t) = \int_{\Re} h(u)x(t-u)du$

De même :  $\bar{y}(t-\theta) = \int_{\Re} \bar{h}(u)\bar{x}(t-\theta-u)du$

d'où l'expression de la fonction d'autocorrélation de  $y(t)$  :  $\Gamma_{yy}(\theta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{(T)} y(t)\bar{y}(t-\theta)dt$

et celle de sa densité spectrale :

$$\gamma_{xx}(v) = \int_{\Re} \frac{1}{T} \int_{(T)} \int_{\Re} \int_{\Re} \underbrace{h(u)}_{u_1} \underbrace{\bar{h}(v)}_{v_1} \underbrace{x(t-u)}_{\tau} \underbrace{\bar{x}(t-\theta-v)}_{\tau-\alpha} du dv dt e^{-2\pi jv\theta} d\theta$$

On calcule cette intégrale à l'aide du changement de variable de dimension 4 suivant :

$$\begin{aligned} \tau &= t-u & u &= u_1 \\ \tau - \alpha &= t-\theta-v & v &= v_1 \\ u_1 &= u & t &= u_1 + \tau \\ v_1 &= v & \theta &= t - v - \tau + \alpha \\ & & \theta &= u_1 - v_1 + \alpha \end{aligned}$$

Le Jacobien de la matrice obtenue vaut :  $j = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Et l'intégrale devient :  $\frac{1}{T} \int_{\Re} \int_{\Re} \int_{\Re} \int_{(T)} \underbrace{h(u_1)}_{u_1} \underbrace{\bar{h}(v_1)}_{v_1} \underbrace{x(\tau)}_{\tau} \underbrace{\bar{x}(\tau-\alpha)}_{\tau-\alpha} e^{-2\pi jv(u_1-v_1+\alpha)} du_1 dv_1 d\tau d\alpha$

Elle est à variables séparables.

Lorsque  $T \rightarrow \infty$   $\gamma_{YY}(v) = \bar{G}(v)G(v)\gamma_{XX}(v)$

$$\boxed{\gamma_{YY}(v) = |G(v)|^2 \gamma_{XX}(v)}$$

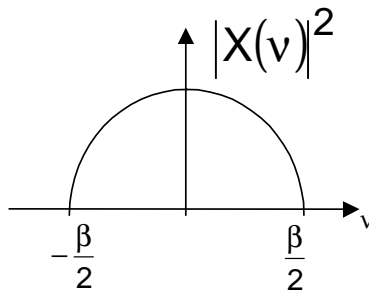
**Remarque** : on retrouve la même formule de filtrage que dans le cas des signaux d'énergie finie.

## LES SIGNAUX $BL^2$

### I. Définition

Un signal  $x(t)$  est dit  $BL^2$  si il répond aux deux conditions suivantes :

- $x(t)$  est d'énergie finie
- $|X(v)|^2 = 0$  pour  $|v| \geq \frac{\beta}{2}$  :  $X(v)$  est à support borné.  $\rightarrow |X(v)| = 0$  pour  $|v| \geq \frac{\beta}{2}$



### II. Théorème de Bernstein

Par transformée de Fourier inverse, on a  $\Rightarrow x(t) = \int_{-\beta/2}^{+\beta/2} X(v) e^{2\pi jvt} dv$

On peut alors dériver sous le signe somme :  $\dot{x}(t) = 2\pi j \int_{-\beta/2}^{+\beta/2} v X(v) e^{2\pi jvt} dv$

De même :  $x^{(n)}(t) = (2\pi j)^n \int_{-\beta/2}^{+\beta/2} v^n X(v) e^{2\pi jvt} dv$

En majorant le module de la dérivée, il vient :

$$|\dot{x}(t)| \leq 2\pi \int_{-\beta/2}^{+\beta/2} |v| |X(v)| dv \leq 2\pi \underbrace{\frac{\beta}{2} \int_{-\beta/2}^{+\beta/2} |X(v)| dv}_M$$

$$\text{et } |x^{(n)}(t)| \leq (2\pi)^n \int_{-\beta/2}^{+\beta/2} |v|^n |X(v)| dv \leq \left(2\pi \frac{\beta}{2}\right)^n \underbrace{\int_{-\beta/2}^{+\beta/2} |X(v)| dv}_M$$

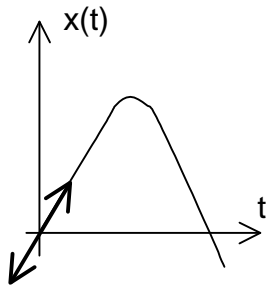
Ce qui peut s'écrire sous la forme :  $|\dot{x}(t)| \leq \pi\beta M$  et  $|x^{(n)}(t)| \leq (\pi\beta)^n M$

Le théorème indique que la variation maximum du signal donné par la valeur de la dérivée est bornée. Cette borne est proportionnelle à la bande  $\beta$  du signal. Lorsque la bande est faible, les variations sont lentes et lorsque la bande est grande, les variations peuvent être très rapides (« hautes fréquences »).

**Remarque :** Ce théorème est vrai pour les signaux de Puissance Moyenne finie.

Exemple:  $x(t) = A \sin(2\pi\nu_0 t)$  ;  $A > 0$   
 $\dot{x}(t) = A \cdot 2\pi\nu_0 \cdot \cos(2\pi\nu_0 t)$   
 $|\dot{x}(t)| \leq A \cdot 2\pi\nu_0$

La valeur maximum de la dérivée est atteinte à l'origine.

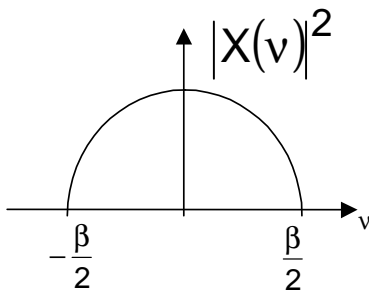


### III. Théorème de Shannon

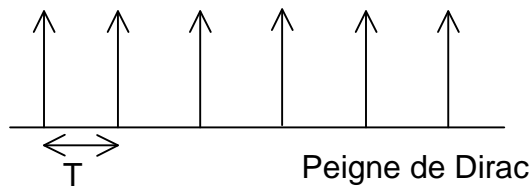
Le stockage d'un signal analogique nécessitant une importante place mémoire, nous allons montrer que sous certaines conditions, il est possible de ne conserver que quelques points convenablement choisis du signal sans perte d'information. Cette étape d'échantillonnage est la base de tous les traitements numériques effectués sur DSP, par ordinateur etc...

Soit  $x(t) \in BL^2$

On appelle signal échantillonné  $x_e(t)$  la distribution  $x_e(t) = x(t)\delta_T(t)$



où  $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_T(t - kT)$  représente le peigne de Dirac, dont la transformée de Fourier est proportionnelle à un peigne de Dirac de pas inverse ( $1/T$ ).



On se propose de déterminer la transformée de Fourier du signal échantillonné.

$$x_e(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_T(t - kT)$$

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) \delta_T(t - kT) ; \text{ et, en utilisant la propriété } \boxed{F(t)\delta(t - t_0) = F(t_0)\delta(t - t_0)}$$

$$\text{On obtient : } x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \delta_T(t - kT)$$

soit, par application de la transformée de Fourier :

$$X_e(v) = X(v) * \frac{1}{T} \delta_{1/T}$$

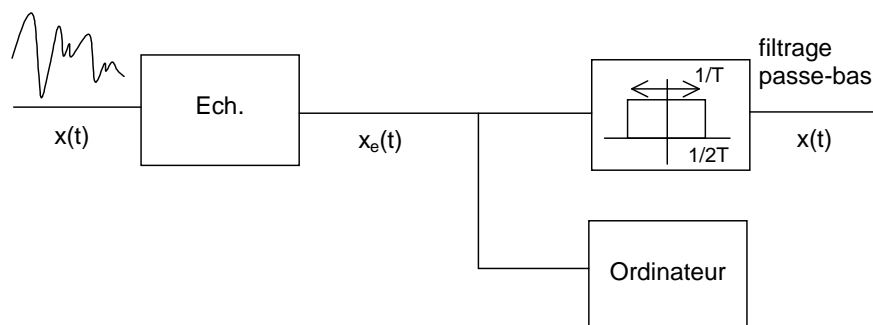
$$X_e(v) = X(v) * \frac{1}{T} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta\left(v - \frac{p}{T}\right)$$

$$X_e(v) = \frac{1}{T} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} X(v) * \delta\left(v - \frac{p}{T}\right) ; \text{ et, en utilisant la propriété } \boxed{F(t) * \delta(t - t_0) = F(t - t_0)}$$

$$\text{on obtient : } \boxed{X_e(v) = \frac{1}{T} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} X\left(v - \frac{p}{T}\right)}$$

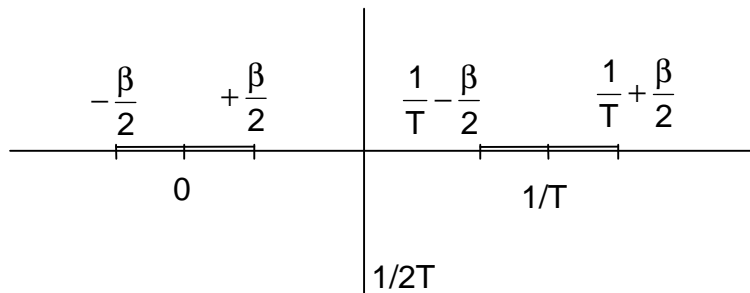
**Le spectre du signal échantillonné est obtenu en périodisant le spectre du signal initial.**

Pour  $1/T > \beta$ , les motifs  $X(v - p/T)$  sont disjoints, il est donc possible de reconstruire le signal continu  $x(t)$  en isolant le motif  $X(v)$  ( $p=0$ ) par filtrage passe bas.



donc, si on prend pour  $G(v)$  la fonction  $T \cdot \Pi_{1/2T}(v)$  définie par  $G(v)=0$  si  $v > 1/2T$  et  $G(v)=T$  ailleurs, on a alors :

$$X_e(\nu)G(\nu) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} X\left(\nu - \frac{p}{T}\right) \Pi_{1/T}(\nu) = X(\nu)$$



**Reconstitution temporelle du signal (formule d'interpolation de Shannon) :**

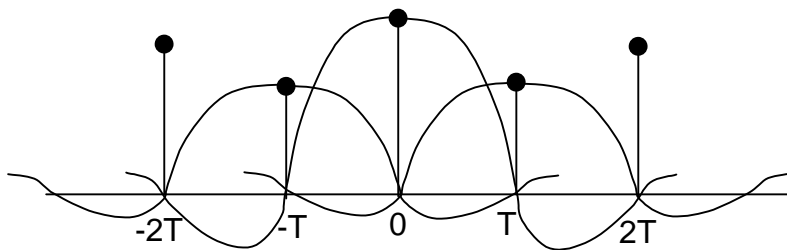
$$X_e(\nu)G(\nu) = X(\nu) \rightarrow x(t) = x_e(t) * T \frac{\sin \pi \nu_e t}{\pi \nu_e t}$$

$$G(\nu) = T \cdot \Pi_{1/T}(\nu) = T \cdot \Pi_{\nu_e}(\nu)$$

$$x_e(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \delta(t - kT)$$

$$x(t) = x_e(t) * T \frac{\sin \pi \nu_e t}{\pi \nu_e t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \frac{\sin \pi \nu_e (t - kT)}{\pi \nu_e (t - kT)}$$

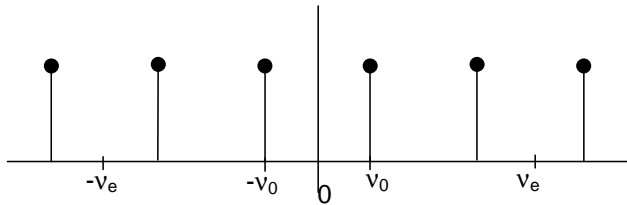


La reconstitution est parfaite si on connaît tous les échantillons, en particulier les échantillons **futurs** : cette reconstitution n'est pas **causale**.

Le théorème de Shannon est vrai pour les signaux de Puissance Moyenne finie et de densité spectrale de puissance moyenne  $\gamma_{XX}(\nu) = 0, |\nu| > \frac{\beta}{2}$

Lorsque le signal n'est plus de bande finie, pour éviter le phénomène de repliement (superposition des différents motifs spectraux lors de la périodisation induite par l'échantillonnage), on filtre le signal initial à l'aide d'un filtre passe bas (filtre « anti-repliement ») qui limite sa bande et permet de se placer dans les conditions d'application du théorème de Shannon.

Exemple : échantillonnage d'une sinusoïde  $x(t) = A \cdot \cos(2\pi\nu_0 t)$



Spectre de la sinusoïde échantillonnée

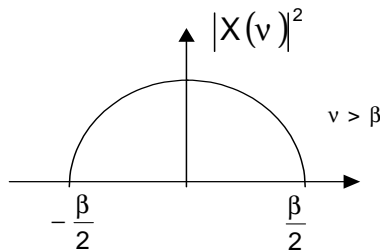
#### IV. Modulation d'amplitude

Les signaux basses fréquences (exemple : musique) se propagent très mal dans les milieux naturels. Afin de transmettre de l'information sur de longues distances, il est donc nécessaire de les adapter au canal de transmission.

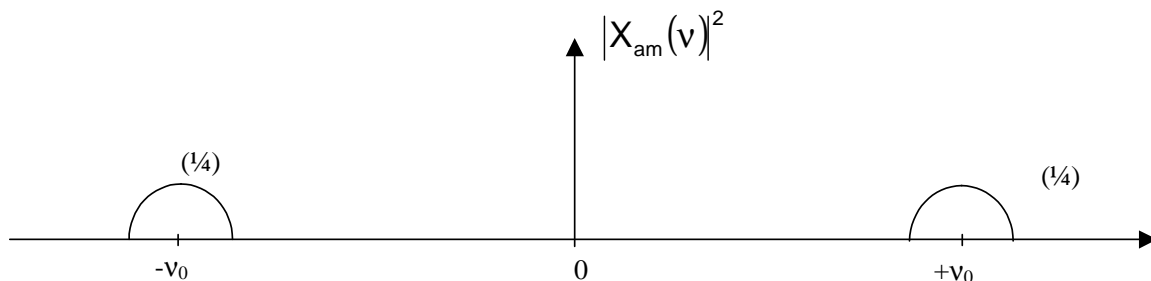
La transmission d'un signal par modulation d'amplitude consiste à engendrer :

$$x_{am}(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi\nu_0 t)$$

dont la transformée de Fourier est :  $X_{am}(\nu) = \frac{1}{2} [X(\nu - \nu_0) + X(\nu + \nu_0)]$



et la dspm du signal modulé :  $|X_{am}(\nu)|^2 = \frac{1}{4} [ |X(\nu - \nu_0)|^2 + |X(\nu + \nu_0)|^2 ]$



L'effet de la modulation est de transporter le spectre du signal initial autour de la fréquence  $\nu_0$ , appelée fréquence porteuse.

L'énergie du signal  $x(t)$  étant :  $E_x = \int_{\Re} |X(\nu)|^2 d\nu$



Celle du signal modulé est :  $E_{x_{am}} = \int_{\Re} |X_{am}(v)|^2 dv = \frac{E_x}{2}$  : lors d'une modulation d'amplitude, on n'engendre que la moitié de l'énergie du signal initial.

On retrouve ce résultat dans la représentation temporelle :  $E_{x_{am}} = \int_{\Re} x_{am}^2(t) dt$

$$E_{x_{am}} = \int_{\Re} x^2(t) \cdot \cos^2(2\pi v_0 t) dt$$

$$E_{x_{am}} = \frac{1}{2} \int_{\Re} x^2(t) \cdot (1 + \cos(4\pi v_0 t)) dt$$

d'où  $E_{x_{am}} = \frac{E_x}{2} + \frac{1}{2} \int_{\Re} x^2(t) \cdot \cos(4\pi v_0 t) dt$  dont le deuxième terme est nul (théorème de la phase stationnaire).

Calcul de la fonction d'autocorrélation du signal modulé :

$$\Gamma_{x_{am}}(\tau) = \text{TF}^{-1} \{ |X_{am}(v)|^2 \}$$

$$\Gamma_{x_{am}}(\tau) = \frac{1}{4} \Gamma_{xx}(\tau) \times 2 \cos(2\pi v_0 \tau)$$

$$\Gamma_{x_{am}}(\tau) = \frac{1}{2} \Gamma_{xx}(\tau) \cdot \cos(2\pi v_0 \tau)$$

L'enveloppe de la fonction d'autocorrélation du signal modulé est la fonction d'autocorrélation du signal initial.

## LE SIGNAL ALEATOIRE

### I. Généralités

Certains phénomènes complexes ne peuvent être décrits par des équations déterministes.

On a alors recours à une modélisation aléatoire qui pourra permettre d'exploiter, de manière statistique, l'information du signal.

La notion d'aléatoire est basée sur le concept de non-reproductibilité du phénomène étudié : deux expériences faites dans les mêmes conditions ne conduisent pas strictement au même résultat, mais on observe néanmoins certaines similitudes (tendances et évolutions analogues, fluctuations analogues etc.). De tels signaux sont aussi appelés non prédictibles : la connaissance du passé ne permet de prédire sans erreur l'avenir, même si la modélisation aléatoire permet d'effectuer des prévisions assorties d'une erreur calculable en moyenne (prédiction de température...).

### II. Signal aléatoire

Un signal est dit **aléatoire** si son observation aux instants  $(t_i)_{i=1\dots n}$ ,  $x(t_1)$ ,  $x(t_2)$ , ...,  $x(t_n)$  est une variable aléatoire n-dimensionnelle  $\forall t_i, \forall n$  (fini ou infini dénombrable).

Un tel signal a une fonction de répartition du type :

$$F_{2n}(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) = P(X(t_1) < x_1 \cap X(t_2) < x_2 \cap \dots \cap X(t_n) < x_n)$$

Lorsque cette fonction de répartition existe  $\forall t_i$  et  $\forall n$ , le signal aléatoire est dit à loi temporelle.

### III. Stationnarité

On dit que  $x(t)$  est **stationnaire au sens strict** si la fonction de répartition  $F_{2n}$  est invariante lors d'une translation du temps :

$$F_{2n}(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) = F_{2n}(t_1 + \lambda, x_1; t_2 + \lambda, x_2; \dots; t_n + \lambda, x_n)$$

ceci doit être valable  $\forall n, \forall t_i, \forall \lambda$ .

#### • Etude à un instant d'observation :

Pour  $n = 1$ ,  $x(t_1)$  est une variable aléatoire unidimensionnelle,  $\forall t_1$  :

$F_2(x_1, t_1) = P\{x(t_1) < x_1\}$  s'appelle la **fonction de répartition** première du processus.

La dérivée de cette fonction de répartition  $\frac{\partial F_2(x_1, t_1)}{\partial x_1} = f_2(x_1, t_1)$  donne la **densité de probabilité** (notée d.d.p. dans la suite) première du processus. A partir de cette d.d.p., on peut calculer **l'espérance** mathématique (ou valeur moyenne statistique) de la variable aléatoire  $X(t_1)$  :

$$E\{x(t_1)\} = \int_{\mathfrak{R}} x_1 \cdot f_2(x_1, t_1) dx_1 = M_x(t_1)$$

Lorsque  $t_1$  varie, cette quantité représente l'évolution de la moyenne statistique en fonction du temps.

**A. • Effet de la stationnarité stricte pour  $n = 1$  :**

Dans le cas  $n=1$ , la stationnarité au sens strict s'écrit :  $F_2(x_1, t_1) = F_2(x_1, t_1 + \lambda) \quad \forall \lambda, \forall t_1$

En particulier, pour  $\lambda = -t_1$ , on a :  $F_2(x_1, t_1) = F_2(x_1, 0)$

Ce qui signifie que la fonction de répartition ne dépend plus du temps.

Il en va de même pour la d.d.p.  $\Rightarrow f_2(x_1, t_1) = f_2(x_1, 0) \quad [\text{d.d.p.}]$

Ainsi que pour l'espérance  $\Rightarrow \boxed{E\{x(t_1)\} = \text{cste}}$

**Si le signal est stationnaire, la valeur de sa moyenne statistique est indépendante du temps  $M_x(t_1) = \text{cste} = M_x$ .**

**B. • Effet de la stationnarité stricte pour  $n = 2$  :**

Pour  $n=2$ ,  $x(t_1)$  et  $x(t_2)$  constituent une variable aléatoire bidimensionnelle (couple aléatoire). Sa fonction de répartition est :

$$F_4(x_1, t_1; x_2, t_2) = P(x(t_1) < x_1 \cap x(t_2) < x_2)$$

et sa d.d.p. :  $\frac{\partial^2 F_4}{\partial x_1 \partial x_2} = f_4(x_1, t_1, x_2, t_2)$

De même, on peut calculer le moment croisé d'ordre deux :

$$E\{x(t_1)x(t_2)\} = \iint x_1 x_2 \cdot f_4(x_1, t_1, x_2, t_2) dx_1 dx_2$$

Cette grandeur nous renseigne sur l'éventuelle dépendance existant entre  $x(t_1)$  et  $x(t_2)$ .

Rappel :

Si  $u$  et  $v$  sont 2 variables aléatoires indépendantes, la d.d.p. du couple est séparable (elle est égale au produit des deux d.d.p. des variables seules) :  $f_{uv}(u, v) = f_u(u) \cdot f_v(v)$

Ayant  $E\{uv\} = \iint uv \cdot f_{uv}(u, v) du dv$ , l'indépendance entraîne donc  $E\{u\}E\{v\} = E\{uv\}$ .

Attention : l'égalité précédente n'entraîne en général pas l'indépendance de  $u$  et de  $v$  (mais si cette égalité n'est pas vérifiée, on est sûr d'avoir une dépendance).

La stationnarité au sens strict s'écrit ici :  $F_4(x_1, t_1; x_2, t_2) = F_4(x_1, t_1 + \lambda; x_2, t_2 + \lambda)$

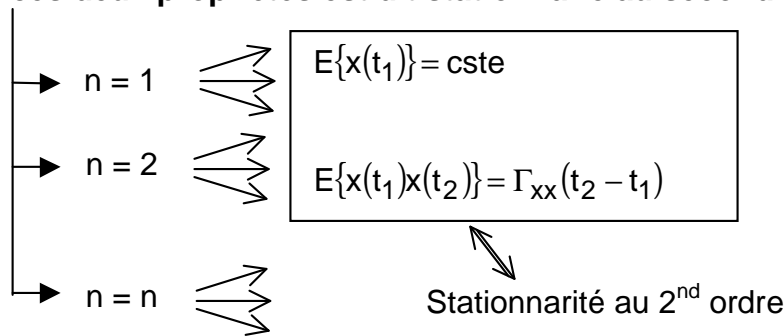
Et donc, pour  $\lambda = -t_1$ , on obtient :  $F_4(x_1, t_1; x_2, t_2) = F_4(x_1, 0; x_2, t_2 - t_1)$

La fonction de répartition ne dépend que de la différence  $t_2 - t_1$  et non de  $t_2$  et de  $t_1$  indépendamment.

On en déduit la même propriété pour la d.d.p. du couple :  $f_4(x_1, 0; x_2, t_2 - t_1)$

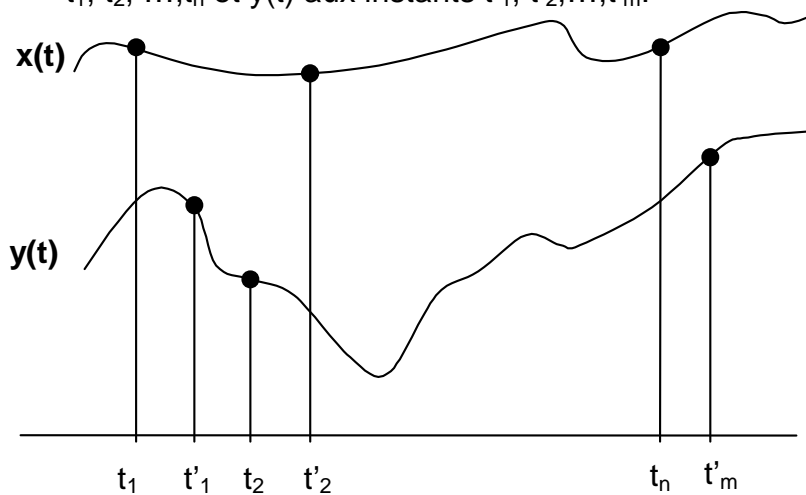
Et pour le moment croisé qui s'écrit alors  $E\{x(t_1)x(t_2)\} = \Gamma_{xx}(t_2 - t_1)$  où  $\Gamma_{xx}$  désigne la fonction d'autocorrélation de X.

En résumé : la stationnarité au sens strict entraîne de nombreuses propriétés, parmi lesquelles on ne retient que les deux encadrées ci dessous. **Tout signal possédant ces deux propriétés est dit stationnaire au second ordre.**



#### IV. Etude conjointe

On envisage maintenant deux signaux aléatoires  $x(t)$  et  $y(t)$ . On observe  $x(t)$  aux instants  $t_1, t_2, \dots, t_n$  et  $y(t)$  aux instants  $t'_1, t'_2, \dots, t'_m$ .



$x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n), y(t'_1), y(t'_2), \dots, y(t'_m)$ , est une variable aléatoire de dimension  $(n+m)$ . sa fonction de répartition est :  $F_{2(n+m)}(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n, y_1, t'_1, \dots, y_m, t'_m) \quad \forall t_i, t'_j, n, m$

On dit que ces processus sont conjointement stationnaires au sens strict lorsque :

$$F_{2(n+m)}(x_1, t_1, \dots, y_m, t'_m) = F_{2(n+m)}(x_1, t_1 + \lambda, \dots, y_m, t'_m + \lambda) \quad \forall \lambda$$

• **Etude du cas  $n=m=1$  :**

$x(t_1), y(t'_1)$  est un couple aléatoire.

Si il y a stationnarité conjointe au sens strict, avec  $\lambda=-t'_1$ , on a :

$$F_4(x_1, t_1, y_1, t'_1) = F_4(x_1, t_1 - t'_1, y_1, 0)$$

Ce qui conduit à :  $E\{x(t_1), y(t'_1)\} = \Gamma_{xy}(t_1 - t'_1)$ . La fonction d'intercorrélacion entre  $x(t)$  et  $y(t)$  ne dépend que de l'écart temporel considéré, et non des deux instants indépendamment.

Si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont tels que  $E\{x(t_1), y(t'_1)\} = \Gamma_{xy}(t_1 - t'_1)$ , ces deux processus sont dits conjointement stationnaires à l'ordre 2.

## V. Indépendance

**Définition :** On dit que  $x(t)$  et  $y(t)$  sont indépendants si et seulement si la variable aléatoire de dimension  $n$   $[x(t_1), \dots, x(t_n)]$  est indépendante de la variable aléatoire de dimension  $m$   $[y(t'_1), \dots, y(t'_m)]$ , et ce  $\forall n, \forall m, \forall t_i, \forall t'_k$ .

## VI. Processus Gaussien

On dit qu'une variable aléatoire scalaire est **gaussienne** si sa d.d.p. est de la forme suivante :

$$f_x(x) = Ke^{-x^2/2}$$

On dit qu'une variable aléatoire de dimension  $n$  est gaussienne si sa d.d.p. est de la forme :

$$f_x(x_1, x_2, \dots, x_n) = Ke^{-\frac{1}{2}Q(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

où  $Q$  est une forme quadratique définie positive (quelles que soient les valeurs de  $x_1, \dots, x_n$ ,  $Q(x_1, \dots, x_n)$  est strictement positive).

On dit qu'un signal aléatoire est **gaussien** si son observation  $(x(t_1), \dots, x(t_n))$  est une variable aléatoire gaussienne de dimension  $n$ .

**Remarque :** dans le cours de probabilité, il a été montré que la moyenne arithmétique de  $n$  variable aléatoires centrées (i.e. : de moyenne nulle), réduites (i.e. : de variance unité) et indépendantes deux à deux tend vers une variable gaussienne lorsque  $n$  tend vers l'infini (théorème central limite). La plupart des bruits physiques, qui peuvent être vus comme la résultante (somme) de phénomènes aléatoires élémentaires (agitation électronique, photons...), sont donc généralement gaussiens.

## ETUDE FREQUENTIELLE DES FONCTIONS ALEATOIRES

### Remarque préliminaire :

Si  $x(t)$  est stationnaire au 2<sup>nd</sup> ordre, ses réalisations sont presque toutes d'énergie infinie.

En effet, si  $X_k$  est une réalisation d'un signal aléatoire stationnaire au 2<sup>nd</sup> ordre, son

énergie s'écrit :  $E_k = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_k(t)]^2 dt$ . En calculant l'espérance de cette énergie, il vient :

$$E\{E_k\} = \int_{\mathfrak{R}} \Gamma_{xx}(0) dt = \infty \text{ qui diverge.}$$

### I. Densité spectrale de puissance moyenne (dspm) d'un signal aléatoire stationnaire $x(t)$

L'idée générale est de définir les grandeurs énergétiques en tant que moyennes statistiques des quantités définies sur les réalisations, qui sont des signaux déterministes. Ainsi, on définit la d.s.p.m. d'un signal aléatoire par :

$$\gamma_{xx}(v) = E\{\gamma_{kk}(v)\}$$

où  $\gamma_{kk}(v)$  est la d.s.p.m. de la réalisation  $x_k(t)$  de  $x(t)$ . Ce qui conduit à l'expression :

$$\Rightarrow \gamma_{xx}(v) = E\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^{+T} x(t) e^{-2\pi jvt} dt \right|^2 \right\}$$

en posant :  $X_T(v) = \int_{-T}^{+T} x(t) e^{-2\pi jvt} dt$ , la dspm s'écrit alors :

$$\gamma_{xx}(v) = E\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(v)|^2 \right\}$$

soit :

$$\gamma_{xx}(v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot E\left\{ |X_T(v)|^2 \right\}$$

Si on est en présence de deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$ , on exprime la densité spectrale de puissance croisée, encore appelée densité spectrale de puissance d'interaction (dspci), par :

$$\gamma_{xy}(v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot E\left\{ X_T(v) Y_T^*(v) \right\}$$

et par analogie, on a

$$\gamma_{xx}(v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot E\left\{ |X_T(v)|^2 \right\}$$

$$\text{car } E\{|X_T(v)|^2\} = E\{X_T(v)X_T^*(v)\}.$$

## II. Théorème de Wiener-Khinchine

Il existe une relation entre la dsp et la fonction d'autocorrélation :

**Théorème** : La dspm (resp. dsp) d'un signal aléatoire  $x(t)$  (resp.  $y(t)$ ) stationnaire, est la TF de la fonction de corrélation (resp. d'intercorrélation).

$$\gamma_{XX}(v) \leftrightarrow \Gamma_{XX}(\tau) \text{ et } \gamma_{XY}(v) \leftrightarrow \Gamma_{XY}(\tau)$$

**Démonstration** :

Soit  $x(t)$  un signal aléatoire stationnaire et de puissance moyenne finie.

$$\text{On a : } \gamma_{XX}(v) = E\{\gamma_{kk}(v)\}$$

$$\text{Et : } \gamma_{kk}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_k(\tau) e^{-2\pi j v \tau} d\tau,$$

$$\text{Avec : } \Gamma_k(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_k(t) x_k^*(t-\tau) dt$$

$$\text{On a donc : } \gamma_{XX}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E\{x_k(t) x_k^*(t-\tau)\} dt e^{-2\pi j v \tau} d\tau$$

$$\text{Par stationnarité, on a pour tout } k : E\{x_k(t) x_k^*(t-\tau)\} = \Gamma(\tau)$$

$$\text{il vient donc : } \gamma_{XX}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Gamma(\tau) dt e^{-2\pi j v \tau} d\tau$$

$$\text{soit, CQFD, : } \gamma_{XX}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau) e^{-2\pi j v \tau} d\tau$$

La démonstration est analogue dans le cas de deux signaux aléatoires stationnaires et conjointement stationnaires au second ordre.

## III. Notion de cohérence

La cohérence est une fonction de la fréquence qui est l'équivalent du coefficient de corrélation vis à vis du temps. Cette grandeur décrit les relations entre deux signaux : la cohérence (ou dsp normée ou interspectre normé) est défini par :

$$C_{XY}(v) = \frac{\gamma_{XY}(v)}{\sqrt{\gamma_{XX}(v)\gamma_{YY}(v)}} \text{ qui décrit les relations statistiques à chaque fréquence.}$$

**Attention** : dans cette expression, les signaux sont supposés **centrés**, aléatoires et stationnaires au second ordre.

**Propriété :**  $|C_{XY}(v)| \leq 1$

**Démonstration :**

on appelle transformée de Fourier à court terme la grandeur définie par :

$$X_T(v) = \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-2\pi jvt} dt$$

On applique l'inégalité de Schwartz à  $X_T(v)$  et  $Y_T(v)$  qui sont 2 variables aléatoires.

$$\Rightarrow |\langle X_T(v), Y_T(v) \rangle| \leq \|X_T(v)\| \cdot \|Y_T(v)\|$$

Rappel : dans l'espace des variables aléatoires, on définit le produit scalaire par :

$$\langle u, v \rangle = E[u\bar{v}]$$

L'inégalité de Schwartz s'écrit donc, après division par T :

$$\Rightarrow \left| \frac{E[X_T(v)\bar{Y}_T(v)]}{T} \right| \leq \sqrt{\frac{E[X_T(v)^2]}{T} \cdot \frac{E[Y_T(v)^2]}{T}}$$

$$\text{car } E[X_T(v)^2] = \|X_T(v)\|^2$$

On fait alors tendre T vers l'infini et on obtient :

$$|\gamma_{XY}(v)| \leq \sqrt{\gamma_{XX}(v)\gamma_{YY}(v)}, \text{ ce qui démontre la propriété.}$$

**Remarque :** Si X et Y sont indépendants, alors  $C_{XY}(v) = 0$

**Attention :** si  $C_{XY}(v) = 0$ , les signaux ne sont pas nécessairement indépendants,

$\Rightarrow$  ils sont décorrélés

Si  $|C_{XY}(v)| = 1$  et ce quelle que soit v, l'inégalité de Schwartz devient une égalité et donc Y(v)

est proportionnel à X(v), il existe donc un système linéaire et homogène entre X et

$$Y : \boxed{Y_T(v) = \lambda(v) \cdot X_T(v)}$$



## FILTRAGE LINEAIRE ET HOMEGENE DES PROCESSUS ALEATOIRES ET STATIONNAIRES DU 2<sup>ND</sup> ORDRE

Dans ce chapitre nous nous proposons de déterminer les propriétés statistiques de la sortie d'un filtre linéaire et homogène dont l'entrée est un signal aléatoire.

### I. Caractérisation au 1<sup>er</sup> ordre (formule de la moyenne)

On considère  $x(t)$  un signal aléatoire que l'on filtre par un filtre linéaire homogène. Pour toute réalisation de  $x(t)$ , la sortie du filtre  $y(t)$  est :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

d'où l'expression de l'espérance de  $y(t)$  :

$$E\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} E\{h(\tau)x(t-\tau)\}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)E\{x(t-\tau)\}d\tau$$

si on suppose que  $x(t)$  est stationnaire au premier ordre,  $E\{x(t-\tau)\} = M_x = \text{constante}$ .

On a alors :

$$E\{y(t)\} = M_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau, \text{ qui est une constante.}$$

En remarquant que  $G(v)$  est la TF de  $h(\tau)$ , on a  $E\{y(t)\} = M_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-2\pi jv\tau}d\tau = M_x \cdot G(0)$

$$\boxed{E\{y(t)\} = M_x \cdot G(0)}$$

La sortie d'un filtre LH  $\{h(\tau), G(v)\}$  excité par un signal aléatoire stationnaire au premier ordre  $\{M_x, \Gamma_{xx}(\tau)\}$  est stationnaire au 1<sup>er</sup> ordre.

$$M_y = M_x \cdot G(0)$$

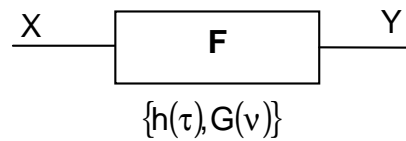
Remarques : si l'entrée est centrée, la sortie l'est aussi :  $M_x = 0 \Rightarrow M_y = 0$

Un filtre de gain nul à fréquence nulle centre le signal de sortie :  $G(0) = 0 \Rightarrow M_y = 0$

### II. Caractérisation au 2<sup>nd</sup> ordre

#### A. Description des relations Entrée/Sortie d'un filtre

On considère un filtre linéaire et homogène de réponse impulsionnelle  $h(\tau)$  et on se propose de calculer l'intercorrélation entre la sortie et l'entrée de ce filtre.



La sortie s'écrit en tant que produit de convolution :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

en supposant que l'entrée  $x(t)$  peut être un signal complexe, il vient :

$$\Leftrightarrow y(t)x^*(t-\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)x^*(t-\theta)d\tau$$

La fonction d'intercorrélation s'obtient en prenant l'espérance mathématique de cette grandeur aléatoire :

$$E\{y(t)x^*(t-\theta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)E\left\{ \underbrace{x(t-\tau)}_u \underbrace{x^*(t-\theta)}_{u-(\theta-\tau)} \right\} d\tau$$

et en supposant que  $x(t)$  est stationnaire au second ordre, on remarque que le second membre ne dépend plus de l'instant  $t$ , ce qui entraîne la stationnarité conjointe de la sortie et de l'entrée :

$$E\{y(t)x^*(t-\theta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\Gamma_{xx}(\theta-\tau)d\tau$$

$$\boxed{\Gamma_{xy}(\theta) = h * \Gamma_{xx}(\theta)}$$

La transformée de Fourier de cette expression conduit à :  $\gamma_{XY}(v) = G(v)\gamma_{XX}(v)$

### Application : identification d'un filtre linéaire homogène inconnu.

Si  $X$  est bruit blanc normé :

- son autocorrélation est une distribution de Dirac en 0 :  $\Gamma_{xx}(\tau) = \delta_0(\tau)$
- sa dspm est une constante égale à 1

dans ces conditions, on a alors :  $\boxed{\Gamma_{xy}(\theta) = h(\theta)}$  et  $\gamma_{XY}(v) = G(v)$ .

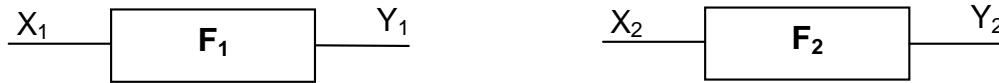
L'identification du filtre (tracé de la réponse impulsionnelle ou du gain complexe) s'obtient en calculant la fonction d'intercorrélation entrée/sortie (ou la dsp d'interaction) lorsque l'entrée est blanche.

En réalité, il suffit que le bruit soit blanc dans la bande passante du filtre. C'est à dire que  $\gamma_{XY}(v)$  soit égale à 1 là où  $G(v)$  est différent de 0.

### B. Formule des interférences

On considère deux filtres linéaires et homogènes définis respectivement par  $\{h_1(\tau), G_1(v)\}$  et  $\{h_2(\tau), G_2(v)\}$ . On suppose que les deux entrées  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont conjointement

stationnaires à l'ordre deux. Leur fonction d'intercorrélation est donnée par :  $\Gamma_{x_1 x_2}(\tau) = E\{x_1(t)x_2^*(t-\tau)\}$ .



On se propose de calculer la fonction d'intercorrélation entre les deux sorties qui s'écrivent :

$$\begin{cases} y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau)x_1(t-\tau)d\tau \\ y_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \end{cases}$$

Cette fonction d'intercorrélation s'écrit alors :

$$E\{y_1(t)y_2^*(t-\theta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau)h_2^*(\tau') \underbrace{E\{x_1(t-\tau)x_2^*(t-\tau'-\theta)\}}_{\Gamma_{x_1 x_2}(\theta+\tau-\tau')} d\tau d\tau'$$

On remarque que l'on retrouve la fonction d'intercorrélation des entrées dans l'intégrale double. Dans ces conditions, le second membre ne dépend plus de t, ce qui implique que les deux sorties sont conjointement stationnaires à l'ordre deux. Cette formule étant en pratique peu utilisable, on se propose maintenant de trouver une formule équivalente plus simple.

On prend la transformée de Fourier des deux membres de l'équation précédente rappelée ci-dessous :

$$\Gamma_{Y_1 Y_2}(\theta) = \iint h_1(\tau)h_2^*(\tau')\Gamma_{X_1 X_2}(\theta - \tau + \tau')d\tau d\tau'$$

TF ↓

$$\gamma_{Y_1 Y_2}(v) = \iiint h_1(\tau)h_2^*(\tau')\Gamma_{X_1 X_2}(\theta - \tau + \tau')e^{-2\pi j v \theta} d\tau d\tau' d\theta$$

Pour calculer cette intégrale triple, on effectue le changement de variable suivant, dont le jacobien est égal à 1 :

$$\begin{aligned} u_1 &= \tau \\ u_2 &= \tau' \\ u_3 &= \theta + \tau' - \tau \end{aligned}$$

d'où  $\theta = u_3 - u_2 + u_1$ .

$$\gamma_{Y_1 Y_2}(v) = \iiint h_1(u_1)h_2^*(u_2)\Gamma_{X_1 X_2}(u_3)e^{-2\pi j v(u_3 - u_2 + u_1)} du_1 du_2 du_3$$

Cette intégrale est séparable : on peut l'écrire comme le produit de 3 intégrales simples :

$$\gamma_{Y_1 Y_2}(v) = \int h_1(u_1)e^{-2\pi j v u_1} du_1 \int h_2^*(u_2)e^{-2\pi j v u_2} du_2 \int \Gamma_{X_1 X_2}(u_3)e^{-2\pi j v u_3} du_3$$

Ce qui s'écrit finalement comme :

$$\gamma_{Y_1 Y_2}(v) = G_1(v)G_2^*(v)\gamma_{X_1 X_2}(v)$$

En prenant la transformée de Fourier inverse, on obtient l'expression suivante, appelée **formule des interférences** (par analogie avec son interprétation en optique) :

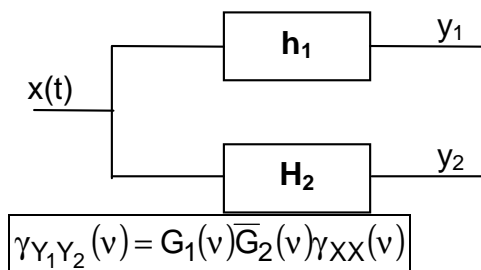
$$\Gamma_{y_1 y_2}(\theta) = \left( h_1 * h_2^* * \Gamma_{x_1 x_2} \right)_\theta$$

On remarque que si les deux filtres ont des bandes passantes disjointes, le produit  $G_1(v) \cdot G_2^*(v) = 0$ , ce qui entraîne  $\gamma_{y_1 y_2}(v) = 0$  : les sorties de deux filtres de supports fréquentiels disjointes sont décorrélés. Si de plus, les deux entrées sont conjointement gaussiennes, la décorrélation entraîne l'indépendance des deux sorties.

**Cas particuliers :**

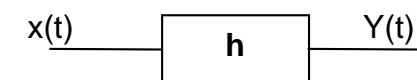
- ◆  $x_1 = x_2 = x$

si  $x$  est stationnaire d'ordre 2, il vient :



- ◆  $x_1 = x_2 = x$  et  $h_1 = h_2 = h$

si  $x$  est stationnaire d'ordre 2, il vient :

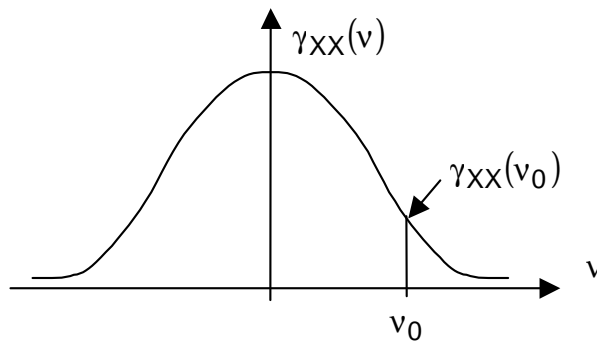


$$\gamma_{Y_1 Y_2}(v) = |G(v)|^2 \gamma_{X X}(v)$$

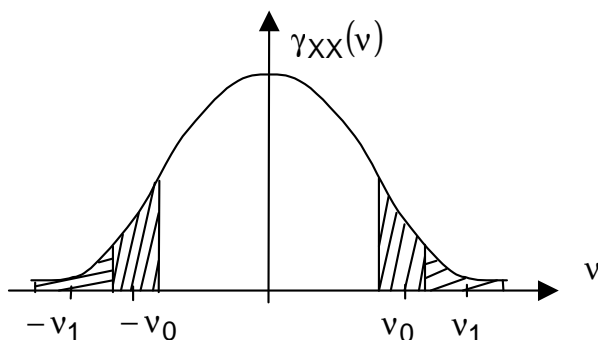
La dspsm de la sortie d'un filtre linéaire homogène est égale au produit du module carré du gain complexe du filtre par la dspsm de l'entrée.

**C. Application à l'analyse spectrale : analyseur de spectre F.Q.I.**

On considère un signal aléatoire stationnaire au second ordre  $x(t)$  de dspsm  $\gamma_{xx}(v)$  (inconnue). On souhaite estimer cette dspsm pour une fréquence donnée  $v_0$ .



On filtre ce signal avec un filtre passe bande de fréquence centrale  $v_0$  et de largeur  $\Delta v$ . La puissance de la sortie  $y(t)$  est égale à l'intégrale de sa dsp (aire hachurée autour de  $+v_0$  et  $-v_0$  sur la figure suivante) :



$$\gamma_{YY}(v) = |G(v)|^2 \gamma_{XX}(v)$$

$$P_Y = \int_{\Re} \gamma_{YY}(v) dv \text{ (puissance)}$$

Si  $\Delta v$  est petit, on peut assimiler chaque surface hachurée par celle d'un rectangle de base  $\Delta v$  et de hauteur  $\gamma_{XX}(v_0)$ . On a alors l'estimation suivante :  $P_Y \approx 2\gamma_{XX}(v_0)\Delta v$

L'estimation de la puissance de  $y(t)$  peut être également obtenue par intégration du carré de  $y$  (cf. définition). Ainsi, on obtient l'estimation de  $\gamma_{XX}(v_0)$  à l'aide de la formule suivante :

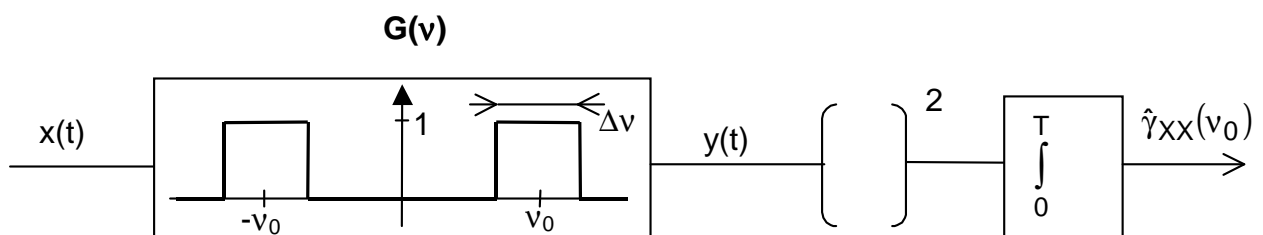
$$\hat{\gamma}_{XX}(v_0) = \frac{P_Y}{2\Delta v} = \frac{\int_0^T y^2(t) dt}{2\Delta v \cdot T}$$

en supposant que  $\Delta v$  est suffisamment petit et  $T$  suffisamment grand. On se rend compte qu'en réalité cette estimation dépend du produit  $\Delta v \cdot T$ . On pourrait caractériser cet estimateur en calculant son biais et sa variance. Ces calculs montreraient que la variance dépend de ce produit : pour diminuer cette variance, le produit doit être le plus grand possible.

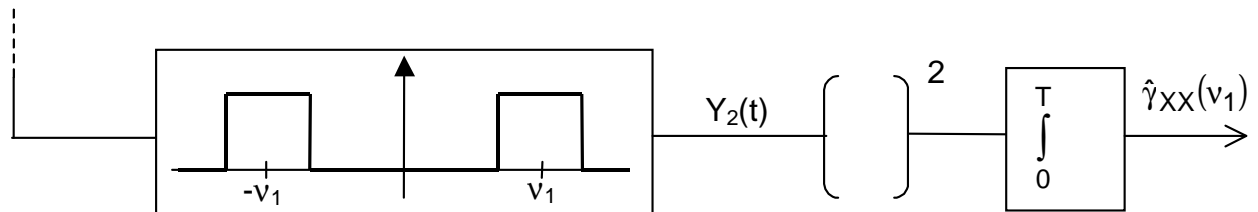
$\Delta v$  est la résolution fréquentielle de l'analyseur

$T$  est le temps d'intégration.

Cette technique est illustrée par le schéma suivant. Elle s'appelle analyse spectrale FQI (Filtrage, Quadrature, Intégration) :



Pour estimer la valeur de la dsp pour une autre fréquence  $\nu_1$ , un schéma identique est utilisé en centrant le filtre sur  $\nu_1$ . Les calculs correspondant aux estimations pour différentes fréquences sont effectués en parallèle (batterie de filtres) :



En choisissant des filtres adjacents (bandes disjointes mais dont la réunion reconstitue l'ensemble du spectre), on décrit toute la puissance de  $x(t)$  mais les différentes sorties n'échangent pas de puissance (elles n'interfèrent pas car leurs dsp d'interaction sont nulles).

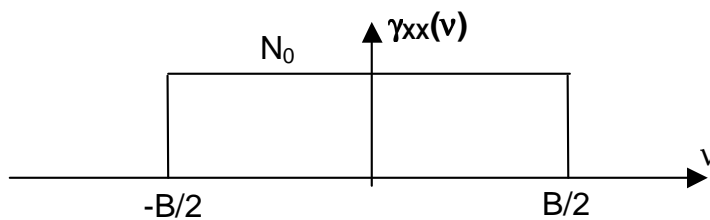
## SIGNAUX LARGE BANDE / BRUIT BLANC

### I. Signaux "large-bande" (modèle théorique)

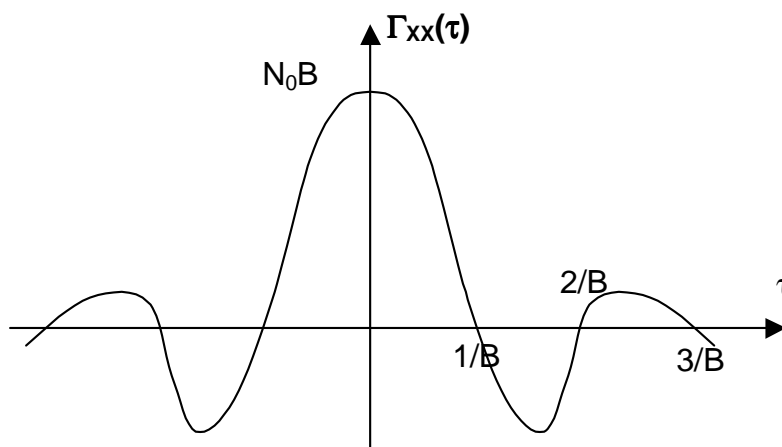
**Définition :** Un signal aléatoire  $x(t)$  est dit "à large-bande" si

- ◆  $x(t)$  est stationnaire au 2<sup>nd</sup> ordre
- ◆  $\gamma_{XX}(v) = N_0$  si  $|v| \leq B/2$

$$\gamma_{XX}(v) = 0 \quad \text{si } |v| > B/2$$



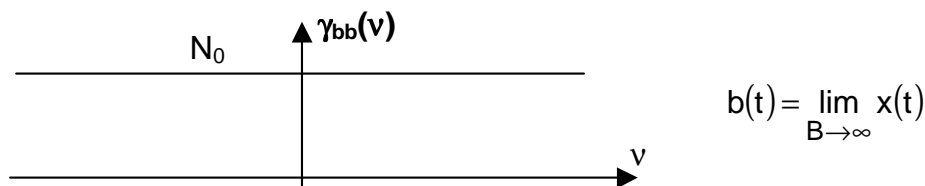
Dans ces conditions, la fonction d'autocorrélation est un sinus cardinal (TF inverse d'une porte) :



$$\Gamma_{XX}(\tau) = \frac{N_0 \cdot \sin(\pi B \tau)}{\pi \tau} \quad \text{et } \Gamma_{XX}(0) = BN_0 \quad \Rightarrow \Gamma_{XX}(\tau) = BN_0 \cdot \text{sinc}(\pi B \tau)$$

### II. Tendence vers le bruit blanc

Lorsque la bande  $B$  du signal  $x(t)$  tend vers l'infini, le signal  $x(t)$  tend vers le modèle théorique appelé **bruit blanc**.



La dspm tend vers une fonction constante. Cela implique que la puissance moyenne de ce signal est infinie : le bruit blanc n'a donc pas de réalité physique et ne peut être vu que comme un modèle théorique.

La fonction d'autocorrélation correspondante tend alors vers la distribution de Dirac en 0 :

$$\Gamma_{bb}(\tau) = N_0 \delta_0 = N_0 \delta(\tau)$$

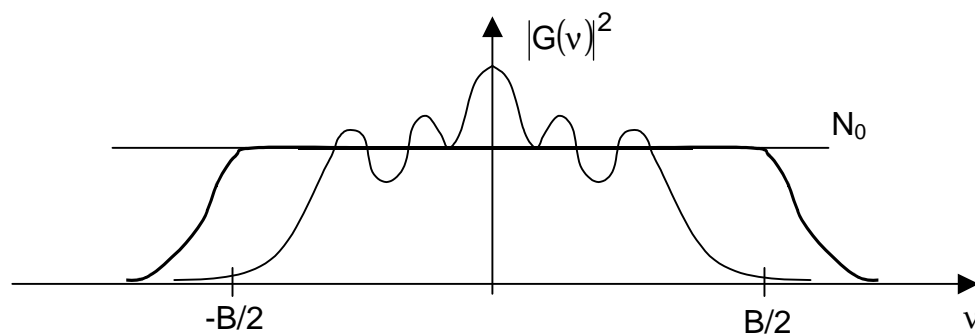
Ceci signifie que deux observations de ce signal à deux instants différents, aussi proches soient ils, sont décorrélés. On appelle alors parfois le bruit blanc bruit « à corrélation microscopique ».

**Remarque** : on parle de bruit blanc par analogie à la lumière blanche dont le spectre est constant dans le domaine des rayonnements visibles. Avec la même analogie, un bruit non blanc est parfois appelé bruit coloré.

### III. Approche systémique des signaux

#### ● Bruit à corrélation microscopique (ou blanc) devant un filtre :

**Définition** : On dit qu'un bruit est à corrélation microscopique devant un filtre si sa dspm est constante dans la bande passante du filtre.



Ce bruit a une réalité physique si cette dspm est intégrable ; sa puissance moyenne est alors finie. Il se comporte comme un bruit blanc vis à vis de ce filtre. En effet, la dspm de la sortie est la même que l'entrée soit blanche (théorique) ou blanche devant le filtre.

#### ● Approche systémique des signaux :

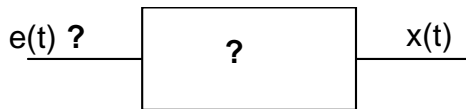
Dans tout ce qui précède, nous avons caractérisé les signaux à l'aide de l'approche signal.

Approche signal : elle consiste à définir les signaux par des grandeurs qui leur sont caractéristiques (fonction de corrélation, dspm...)



Une autre approche qui permet certaines généralisations consiste à définir un signal en tant que filtrée d'une certaine entrée par un certain filtre.

Approche système :



On définit un signal par le système qui l'engendre (e(t) et le filtre).

On souhaite définir l'entrée et la classe des filtres générateurs engendrant tous les signaux aléatoires stationnaires au second ordre possibles. Ceci est possible en utilisant la classe des filtres linéaires homogènes. En choisissant une entrée e(t) stationnaire au 2<sup>nd</sup> ordre, il vient :

$$\gamma_{XX}(v) = |G(v)|^2 \gamma_{ee}(v)$$

On remarque que si  $\gamma_{ee}(v_0) = 0 \Rightarrow \gamma_{XX}(v_0) = 0$  car  $G(v_0)$  ne peut pas être infini (stabilité du filtre). Il est donc nécessaire que  $\gamma_{ee}(v)$  ne soit jamais nul. Afin d'utiliser le moins de paramètres possible, il est classique d'utiliser un bruit blanc normé ( $\gamma_{ee}(v) = 1$ ).

On a alors :

$$\gamma_{XX}(v) = |G(v)|^2 \quad G(v) \rightarrow \gamma_{XX}(v) \text{ connu}$$

la connaissance de  $G(v)$  entraîne celle de la dspm.

En revanche, la connaissance de la dspm n'entraîne que la connaissance du module de  $G(v)$ . En imposant au filtre générateur d'être inversible (afin de ne pas perdre d'information), on peut déterminer de manière unique  $G(v)$  à partir de la dspm.

**Exemple :** on souhaite déterminer le filtre  $G(v)$  qui, excité par un bruit blanc normé,

$$\text{engendre le signal } x(t) \text{ de dspm } \gamma_{XX}(v) = \frac{v^2 + 1}{(v^2 + 4)^2}$$

Le signal étant réel, sa dspm est paire et réelle. On peut alors la factoriser sous la forme :

$$\gamma_{XX}(v) = \frac{(v-j)(v+j)}{(v-2j)^2(v+2j)^2} = G(v)\overline{G(v)}$$

Il faut que les pôles et les zéros de  $G(v)$  soient au dessus de l'axe réel pour que ce filtre soit causal et causalement inversible.

$$\text{La solution cherchée est donc } \Rightarrow G(v) = \frac{v-j}{(v-2j)^2}$$

**Remarque :** parmi tous les filtres de gabarit identique (même module), on choisit celui à déphasage minimal (c'est le seul qui soit causalement inversible).

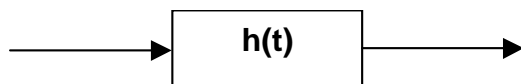
Connaître  $\gamma_{XX}(v)$  revient alors à connaître  $G(v)$ .

**L'approche système consiste à dire que  $x(t)$  résulte du filtrage d'un bruit blanc normé par le filtre de gain complexe  $G(v)$ .**

Cette approche peut être généralisable. En effet, un filtre peut être décrit autrement que par son gain complexe, par exemple à l'aide d'un modèle d'état. De plus, on peut engendrer des classes plus larges de signaux en utilisant des filtres linéaires non homogènes (à paramètres variables) ou des filtres non linéaires, contrairement à l'approche signal qui ne permet que la description des signaux stationnaires au second ordre.

#### IV. Identification d'un filtre linéaire et homogène

Identifier un filtre consiste à déterminer soit sa réponse impulsionnelle, soit son gain complexe. Nous avons vu précédemment que réaliser l'analyse harmonique d'un filtre (excitation par une sinusoïde) constituait une méthode de tracé point par point du gain complexe. Nous nous proposons de décrire d'autres méthodes qui ont pour but de tracer la réponse impulsionnelle  $h(t)$ .



##### A. 1<sup>ère</sup> méthode : approche directe

Par définition, la réponse impulsionnelle est la réponse à la distribution de Dirac (modèle théorique d'une impulsion). Cette méthode n'est pas satisfaisante car on ne peut qu'approcher un tel modèle. De plus, les risques d'endommager le système sont grands, car on doit engendrer en entrée une tension très élevée (pendant un temps très bref).

##### B. 2<sup>ème</sup> méthode : utilisation de la réponse indicielle

En automatique, on utilise classiquement la réponse indicielle  $i(t)$  qui est la réponse à un échelon unité, ce qui techniquement comporte moins de risque. Cependant l'échelon n'étant appliqué que sur une durée finie, on ne mesure en fait que la réponse à une porte qui est une approximation de la réponse indicielle.

La réponse impulsionnelle est la dérivée de la réponse indicielle :

$$i(t) = h * T_u$$

La dérivée au sens des distributions consiste à convoluer  $i(t)$  par la distribution  $\delta'$ .

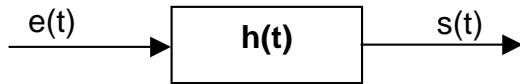
De plus, la convolution de  $\delta'$  par  $T_u$  étant égale à  $\delta$ , il vient :

$$i'(t) = \delta' * i = h * \underbrace{T_u * \delta'}_{\delta} = h$$

Cette méthode n'est pas très précise. On ne dispose que d'une estimation de  $i(t)$ . L'erreur d'estimation  $\varepsilon$  conduit après dérivation à une erreur  $\varepsilon'$  sur l'estimation de la réponse impulsionnelle, qui peut être de puissance importante.

**C. 3<sup>ème</sup> méthode : identification par intercorrélation entrée / sortie**

Comme vu précédemment, cette méthode consiste à utiliser un bruit blanc en entrée et à calculer son intercorrélation avec la sortie.



$$\Gamma_{se}(\tau) = \left( h * \underset{=\delta}{\Gamma_{ee}} \right) (\tau) \quad \text{bruit blanc normé à l'entrée}$$

$$\Gamma_{se}(\tau) = h(\tau)$$

$$\rightarrow \gamma_{se}(v) = G(v) \cdot \gamma_{ee}(v)$$

réponse impulsionnelle = corrélation entrée/sortie

Le bruit blanc n'étant pas réalisable physiquement, nous avons vu que nous pouvons utiliser à la place un bruit blanc dans la bande du filtre, ce qui nécessite la connaissance *a priori* de celle-ci (on en connaît souvent un ordre de grandeur).

## NOTION DE RAPPORT SIGNAL A BRUIT FILTRAGE ADAPTE

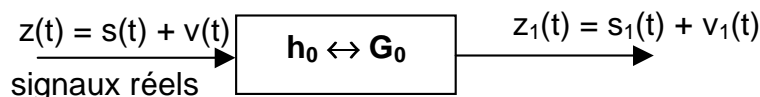
### I. Position du problème

On dispose d'une observation  $z(t)$  constituée de la somme d'un signal déterministe  $s(t)$  et d'un bruit  $v(t)$ .

$$z(t) = s(t) + v(t)$$

Avec  $s(t)$  signal déterministe d'énergie finie  
 $v(t)$  signal aléatoire stationnaire au 2<sup>nd</sup> ordre et centré.

On se propose de déterminer un filtre linéaire permettant de détecter la présence du signal  $s(t)$  dans l'observation  $z(t)$ . L'idée générale consiste à choisir un instant  $t_m$  pour lequel la contribution du signal est la plus importante.



Le filtre étant linéaire, la sortie s'exprime comme la somme des deux signaux filtrés.

$$s(t) \rightarrow s_1(t)$$

$s(t)$  étant déterministe d'énergie finie,  $s_1(t)$  l'est aussi.

$$v(t) \rightarrow v_1(t)$$

$v(t)$  étant aléatoire stationnaire au 2<sup>nd</sup> ordre centré,  $v_1(t)$  l'est aussi.

Pour quantifier les performances de la détection, on définit le rapport signal à bruit (noté RSB ou SNR pour « Signal Noise Ratio ») qui est le rapport des puissances instantanées du signal et du bruit :

$$X^2(t_m) = \frac{[s_1(t_m)]^2}{E\{v_1^2(t_m)\}}$$

La méthode consiste à déterminer la réponse impulsionnelle  $h_0$  (ou le gain complexe  $G_0$ ) telle que le RSB  $X^2(t_m)$  soit maximum.

- calcul du dénominateur :

$v_1(t)$  étant stationnaire au second ordre, on a pour tout  $t$  (et donc pour  $t_m$ ) :

$$E\{v_1^2(t)\} = \Gamma_{v_1 v_1}(0) \rightarrow \text{qui représente la puissance moyenne de } v_1.$$

Cette puissance moyenne est l'intégrale de la dspm (TF en 0) :

$$E\{v_1^2(t)\} = \int_{\Re} \gamma_{v_1 v_1}(v) dv$$

en utilisant la formule du filtrage, il vient : 
$$E\{v_1^2(t)\} = \int_{\Re} |G_0(v)|^2 \gamma_{vv}(v) dv$$

- calcul du numérateur :

Par TF inverse, le signal  $s_1(t)$  peut s'écrire :  $s_1(t) = \int_{\mathfrak{R}} S_1(\nu) e^{+2\pi j \nu t} d\nu$

Soit, avec le gain complexe du filtre :  $s_1(t) = \int_{\mathfrak{R}} G_0(\nu) S(\nu) e^{+2\pi j \nu t} d\nu$

On en déduit l'expression suivante du RSB :

$$X^2(t_m) = \frac{\left[ \int_{\mathfrak{R}} G_0(\nu) S(\nu) e^{+2\pi j \nu t} d\nu \right]^2}{\int_{\mathfrak{R}} |G_0(\nu)|^2 \gamma_{\nu\nu}(\nu) d\nu}$$

Il est possible de maximiser ce RSB en utilisant une méthode variationnelle. Elle consiste à dire que tout filtre autre que le filtre optimal (de gain  $G_0(\nu)$ ) rend le RSB plus petit. Tout filtre peut s'écrire formellement comme une variation du filtre optimal :  $H(\nu) = G_0(\nu) + \lambda K(\nu)$

( $\lambda = 0$  pour un filtre optimal). Le maximum du RSB  $X^2(t_m, \lambda)$  correspond à l'annulation de sa dérivée par rapport à  $\lambda$  lorsque  $\lambda=0$  :

$$\left. \frac{\partial X^2(t_m, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0 ; \forall H$$

Une méthode plus rapide consiste à utiliser l'inégalité de Schwartz.

**Rappel :**

Si  $A(\nu)$  et  $B(\nu)$  sont  $L^2$  (de carré intégrable), on a :

$$\left| \int_{\mathfrak{R}} A(\nu) \overline{B(\nu)} d\nu \right|^2 \leq \int_{\mathfrak{R}} |A(\nu)|^2 d\nu \int_{\mathfrak{R}} |B(\nu)|^2 d\nu$$

Dans la suite, nous allons considérer que  $v(t)$  est blanc de dspm  $\gamma_{\nu\nu}(\nu) = N_0$ . Dans ces

conditions, le RSB s'écrit :  $X_2(tm) = \frac{\left[ \int_{\mathfrak{R}} G_0(\nu) S(\nu) e^{+2\pi j \nu t} d\nu \right]^2}{N_0 \int_{\mathfrak{R}} |G_0(\nu)|^2 d\nu}$

En utilisant l'inégalité de Schwartz avec :  $\begin{cases} A(v) = G_0(v) \\ B(v) = \overline{S(v)} \cdot e^{-2\pi j v t_m} \end{cases}$ , on majore le numérateur du RSB :

$$\left| \int_{\mathfrak{R}} G_0(v) S(v) e^{-2\pi j v t_m} dv \right|^2 \leq \int_{\mathfrak{R}} |G_0(v)|^2 dv \int_{\mathfrak{R}} |S(v)|^2 dv$$

ce qui entraîne :

$$X^2(t_m) = \frac{\left[ \int_{\mathfrak{R}} G_0(v) S(v) e^{+2\pi j v t} dv \right]^2}{N_0 \int_{\mathfrak{R}} |G_0(v)|^2 dv} \leq \frac{\int_{\mathfrak{R}} |S(v)|^2 dv}{N_0}$$

$X^2(t_m)$  sera maximum quand on aura l'égalité, c'est-à-dire lorsque  $A(v)$  et  $B(v)$  sont proportionnels :

$$\boxed{G_0(v) = \alpha \cdot \overline{S(v)} \cdot e^{-2\pi j v t_m}}$$

Il est logique de trouver un coefficient de proportionnalité  $\alpha$ . En effet, si  $G_0$  est le filtre optimal, tout filtre qui lui est proportionnel l'est aussi (le coefficient de proportionnalité disparaît pour le calcul du RSB).

La réponse impulsionnelle du filtre est donnée par TF inverse de  $G_0$  :

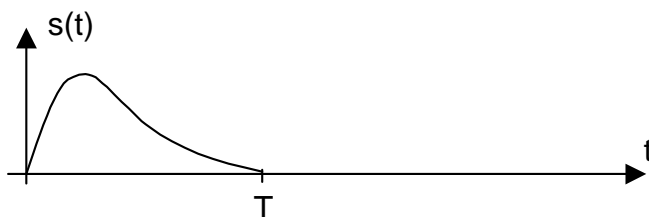
$$h_0(\tau) = \alpha \cdot \int_{\mathfrak{R}} \overline{S(v)} e^{-2\pi j v t_m} e^{+2\pi j v \tau} dv$$

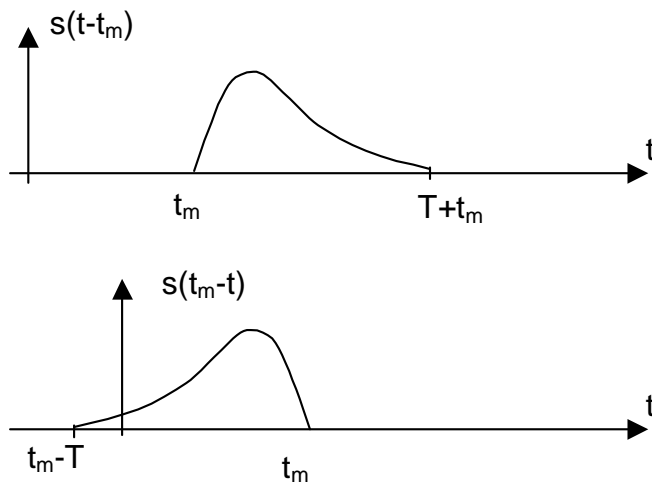
$$\text{soit : } h_0(\tau) = \alpha \cdot \int_{\mathfrak{R}} \overline{S(v)} e^{-2\pi j v (t_m - \tau)} dv$$

Ayant  $s(t) = \int_{\mathfrak{R}} S(v) e^{+2\pi j v \tau} dv$ , on a :  $h_0(\tau) = \alpha \cdot \overline{s}(t_m - \tau)$

Le filtre ainsi trouvé s'appelle le filtre adapté au signal  $s(t)$  de forme connue (dit « filtre adapté »). **Sa réponse impulsionnelle est la copie retournée et décalée du signal  $s(t)$ .**

Graphiquement, on a :





Or,  $h_0(t) = s(t_m - t)$  doit être causal. Cela implique :

- que le signal  $s(t)$  soit de durée finie  $T$
- que  $t_m$  soit supérieur ou égal à  $T$

Afin d'obtenir la détection le plus rapidement possible, on choisit  $t_m = T$ .

• calcul de la sortie  $z_1(t)$  :

Par convolution, on a :  $z_1(t) = h_0 * z(t)$

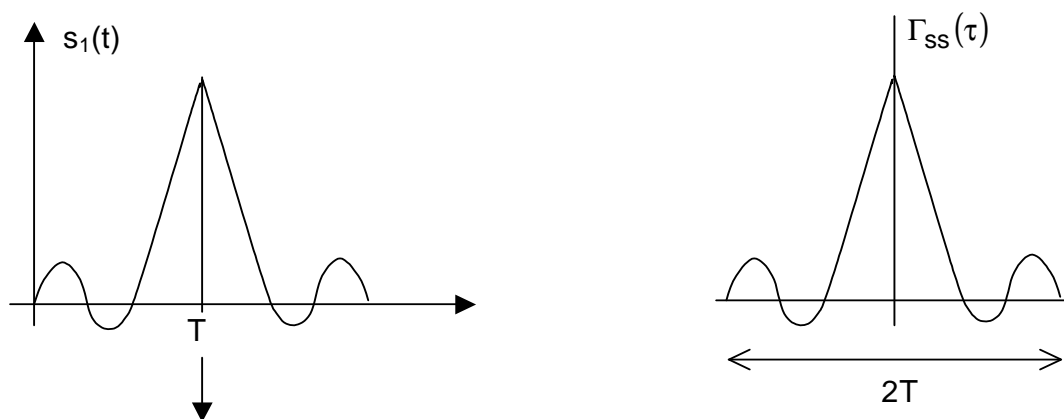
La linéarité conduit à :  $z_1(t) = h_0 * s + h_0 * v$

$$\text{Soit : } z_1(t) = \int_{\mathfrak{R}} h_0(u) s(t-u) du + \underbrace{h_0 * v}_{v_1}$$

$$\text{En remplaçant } h_0 \text{ par son expression : } z_1(t) = \alpha \cdot \int_{\mathfrak{R}} s(t_m - u) s(t-u) du + v_1(t)$$

On retrouve l'expression de l'autocorrélation du signal translatée au point  $t_m$  :

$$z_1(t) = \alpha \cdot \Gamma_{ss}(t - \underset{\uparrow T}{t_m}) + v_1(t)$$



$$s_1(t_m) = s_1(T) = \alpha \cdot E_s \quad \text{: où } E_s \text{ est l'énergie du signal } s(t)$$

- caractérisation de  $v_1(t)$  :

$v_1(t)$  est un bruit dont nous allons calculer la moyenne et la variance.

$$v_1(t) = h_0 * v(t)$$

$$v_1(t) = \int_{\mathfrak{R}} h_0(u) v(t-u) du$$

$v(t)$  étant centré, on vérifie simplement que  $v_1(t)$  l'est aussi.

En remplaçant  $h_0$  par son expression : 
$$v_1(t) = \alpha \int_{\mathfrak{R}} s(t_m - u) v(t-u) du$$

$$v_1(t)^2 = \alpha^2 \cdot \int_{\mathfrak{R}} s(t_m - u_1) v(t-u_1) du_1 \cdot \int_{\mathfrak{R}} s(t_m - u_2) v(t-u_2) du_2$$

Ce produit de deux intégrales peut s'écrire sous la forme d'une intégrale double :

$$v_1(t)^2 = \alpha^2 \int_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{R}} s(t_m - u_1) v(t-u_1) s(t_m - u_2) v(t-u_2) du_1 du_2$$

dont on prend l'espérance mathématique :

$$E[v_1(t)^2] = \alpha^2 \int_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{R}} s(t_m - u_1) s(t_m - u_2) E[v(t-u_1) v(t-u_2)] du_1 du_2$$

Ce terme est le dénominateur du RSB. Il peut être calculé analytiquement avec l'expression de l'autocorrélation du bruit. Dans le cas où le bruit est blanc de dsp  $N_0$ , on a  $E[v(t-u_1) v(t-u_2)] = N_0 \cdot \delta(u_1 - u_2)$ .

$$E[v_1(t)^2] = N_0 \cdot \alpha^2 \int_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{R}} s(t_m - u_1) s(t_m - u_2) \delta(u_1 - u_2) du_1 du_2$$

Ayant par définition de la distribution de Dirac : 
$$\int_{\mathfrak{R}} s(t_m - u_1) \delta(u_1 - u_2) du_1 = s(t_m - u_2)$$

On obtient : 
$$E[v_1(t)^2] = N_0 \cdot \alpha^2 \int_{\mathfrak{R}} s(t_m - u_2)^2 du_2 = N_0 \cdot \alpha^2 \cdot \Gamma_{SS}(0)$$
, où  $\Gamma_{SS}(0)$  est l'énergie  $E_S$  du signal  $s(t)$ .

Le RSB s'écrit donc  $\frac{\alpha^2 \cdot E_S^2}{\alpha^2 \cdot N_0 \cdot E_S} = \frac{E_S}{N_0}$ . Il est égal au rapport de l'énergie de  $s(t)$  à la puissance du bruit dans une bande 1Hz.

## II. Application : mesure de la date d'arrivée d'un signal certain connu

On suppose que le signal que l'on cherche à détecter arrive à une date  $t_0$  inconnue. On peut donc modéliser  $z(t)$  par :

$$z(t) = s(t - t_0) + v(t)$$

où  $s(t)$  est le signal de même forme que celui recherché mais qui arrive avec un retard nul.

On applique le filtre adapté à  $s(t)$  dont la réponse impulsionnelle est :

$$h_0(\tau) = \alpha \cdot s(T - \tau).$$



La sortie  $s_1(t)$  s'écrit :  $s_1(t) = \int_{\Re} h_0(u) \cdot s(t-u-t_0) du$

Soit :  $s_1(t) = \alpha \int_{\Re} s(T-u) \cdot s(t-u-t_0) du = \alpha \cdot \Gamma_{ss}(t-t_0-T)$

$s_1(t)$  est maximum à la date  $t_0+T$ , ce qui permet de déterminer  $t_0$  ( $T$  est connu).