

PHY 569A Système intégré sur Puce

Promotion X2003

Filtrage & Introduction au traitement du signal

Sommaire

- ❑ **Éléments de traitement de Signal**
- ❑ **Filtrage Analogique**
- ❑ **Numérisation d'un signal analogique**
- ❑ **Filtrage numérique**
- ❑ **Annexe (Laplace & stabilité)**

Éléments de traitement du Signal

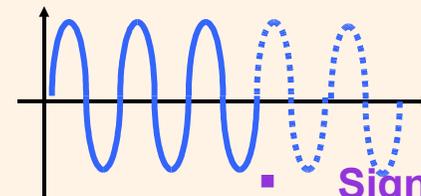
Classification des signaux

- Définition d'un signal



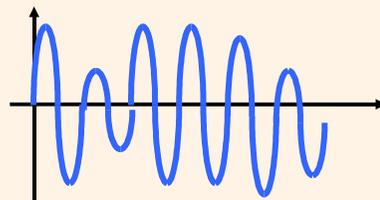
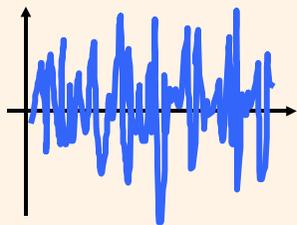
- Représentation des signaux

- Signaux Aléatoires

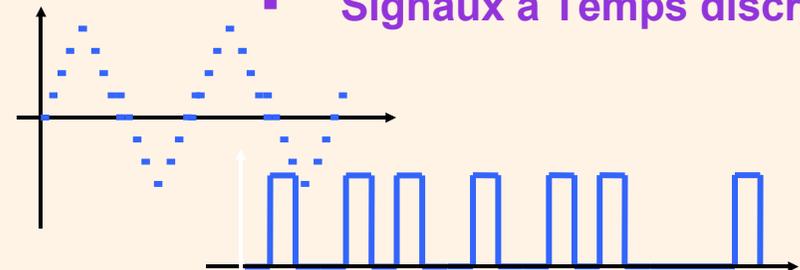


- Signaux Déterministe

- Signaux à Temps Continu



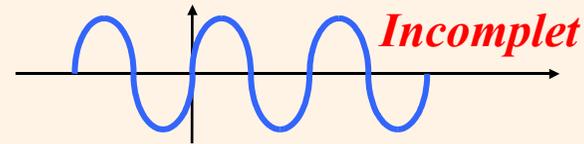
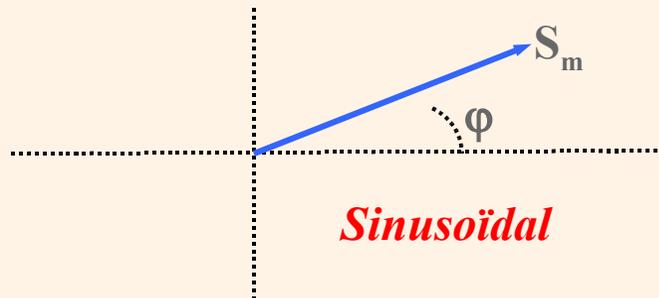
- Signaux à Temps discret



Représentation des signaux

- Dans le plan temporel

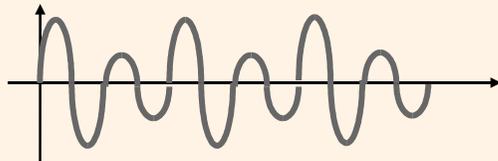
$$S(t) = S_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi)$$



- Dans le plan complexe

$$S(t) = S_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi) \Rightarrow \bar{S} = S_m \cdot e^{j\varphi}$$

- Limitation des représentation précédente



Équation temporelle ?
Déphasage ?
Valeur efficace ?

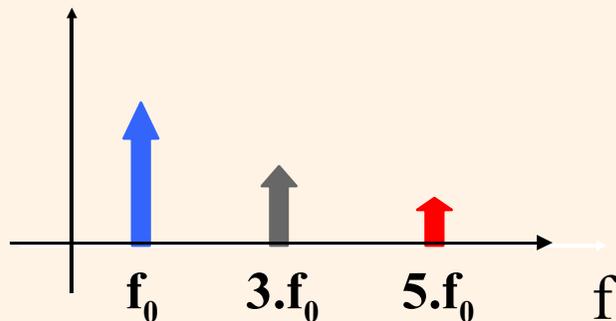
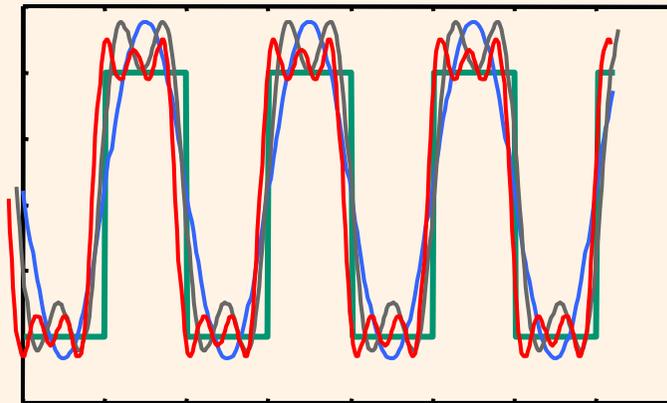
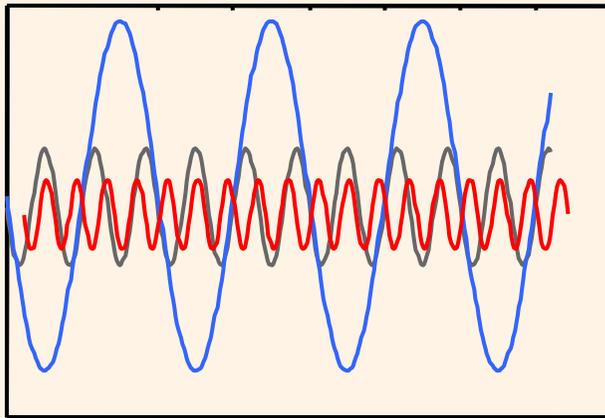
La série de Fourier

- Rappel : la série de Fourier

$$s(t) = c_0 + \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=1}^{n=+\infty} (a_n \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \sin(n \cdot \omega \cdot t))$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) \cdot \cos(n\omega t) \cdot dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) \cdot \sin(n\omega t) \cdot dt$$



Valable uniquement pour les signaux périodiques

La Transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'un signal temporel $x(t)$ est une fonction $E(f)$

$$TF(e(t)) = E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \cdot e^{-2j\pi ft} \cdot dt$$

Notion de spectre en fréquence

Le module de $E(f)$, , appelé **spectre** de $e(t)$

$$|E(f)|$$

Le carré du module de $E(f)$, , et **spectre d'énergie** de $e(t)$

$$|E(f)|^2$$

Transformée de Fourier inverse

Cette dualité implique une transformée de Fourier inverse de la forme:

$$F^{-1}(E(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(f) \cdot e^{2j\pi ft} \cdot dt = e(t)$$

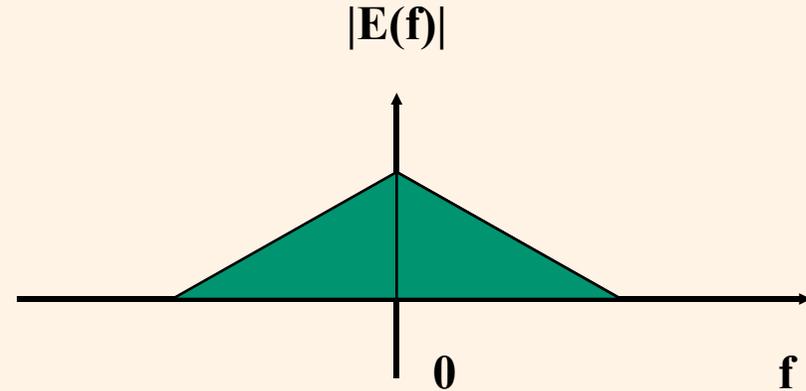
Rappel de traitement du signal (V)

Propriétés de La Transformée de Fourier

Parité du spectre :

Signal non causal

Signal causal



Linéarité

$$a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \xrightarrow{TF} a \cdot X(f) + b \cdot Y(f)$$

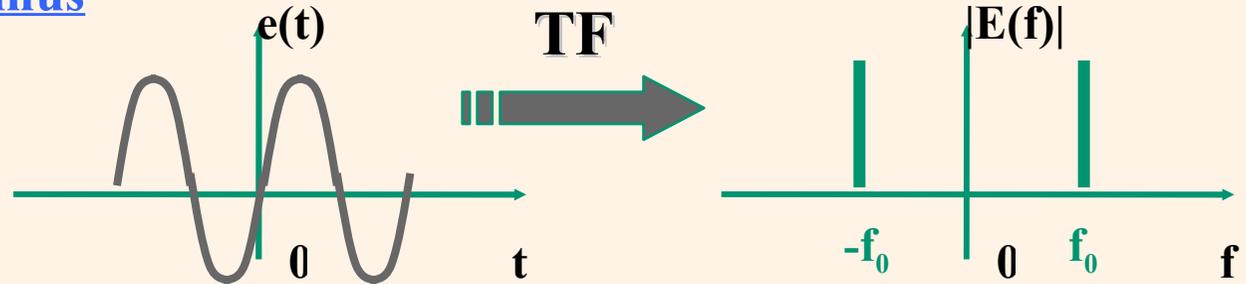
Translation temporelle

$$x(t - t_0) \xrightarrow{TF} e^{-2\pi f t_0} \cdot X(f)$$

Nous introduit un déphasage proportionnel à la fréquence. $= 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0$

Exemples de transformées de Fourier

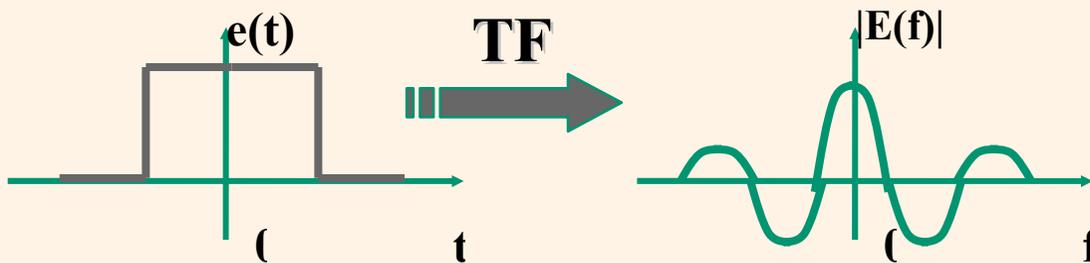
Sinus et Cosinus



$$F(\cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2} \cdot (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

$$F(\sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t)) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2} \cdot j \cdot (\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0))$$

Sinus cardinal et rectangle



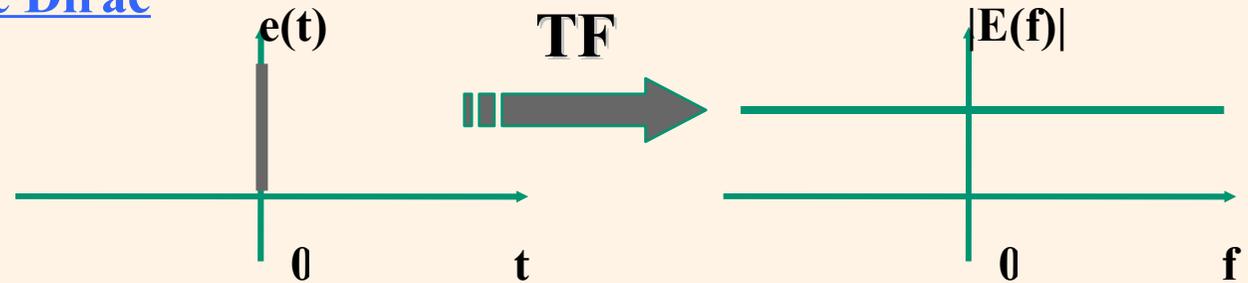
$$F(\text{rect}(t)) \xrightarrow{TF} \text{sinc}(f)$$

$$F(\text{sinc}(t)) \xrightarrow{TF} \text{rect}(f)$$

l'image d'un rectangle de largeur T_0 par la TF est un sinus cardinal qui s'annule modulo f_0

Exemples de transformées de Fourier

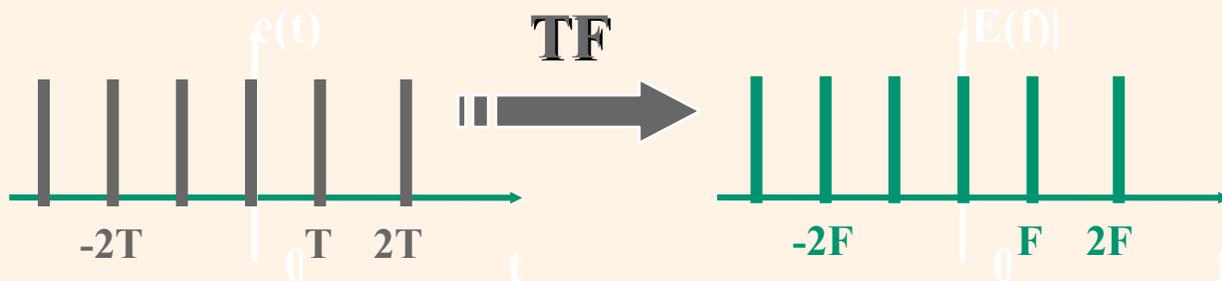
Impulsion de Dirac



$$\delta(t) \xrightarrow{\text{TF}} 1$$

$$F(1) \xrightarrow{\text{TF}} \delta(f)$$

Peigne de Dirac



$$P_{\text{gn}_T}(t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{T} \cdot P_{\text{gn}_{\frac{1}{T}}}(f)$$

Le produit de convolution

Définition

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \cdot h(t - \lambda) \cdot d\lambda$$

Élément neutre

L'impulsion de Dirac est l'élément neutre de la convolution

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Transformée de Fourier

$$x(t) * h(t) \xrightarrow{TF} X(f) \cdot H(f)$$

La transformée de Fourier transforme:

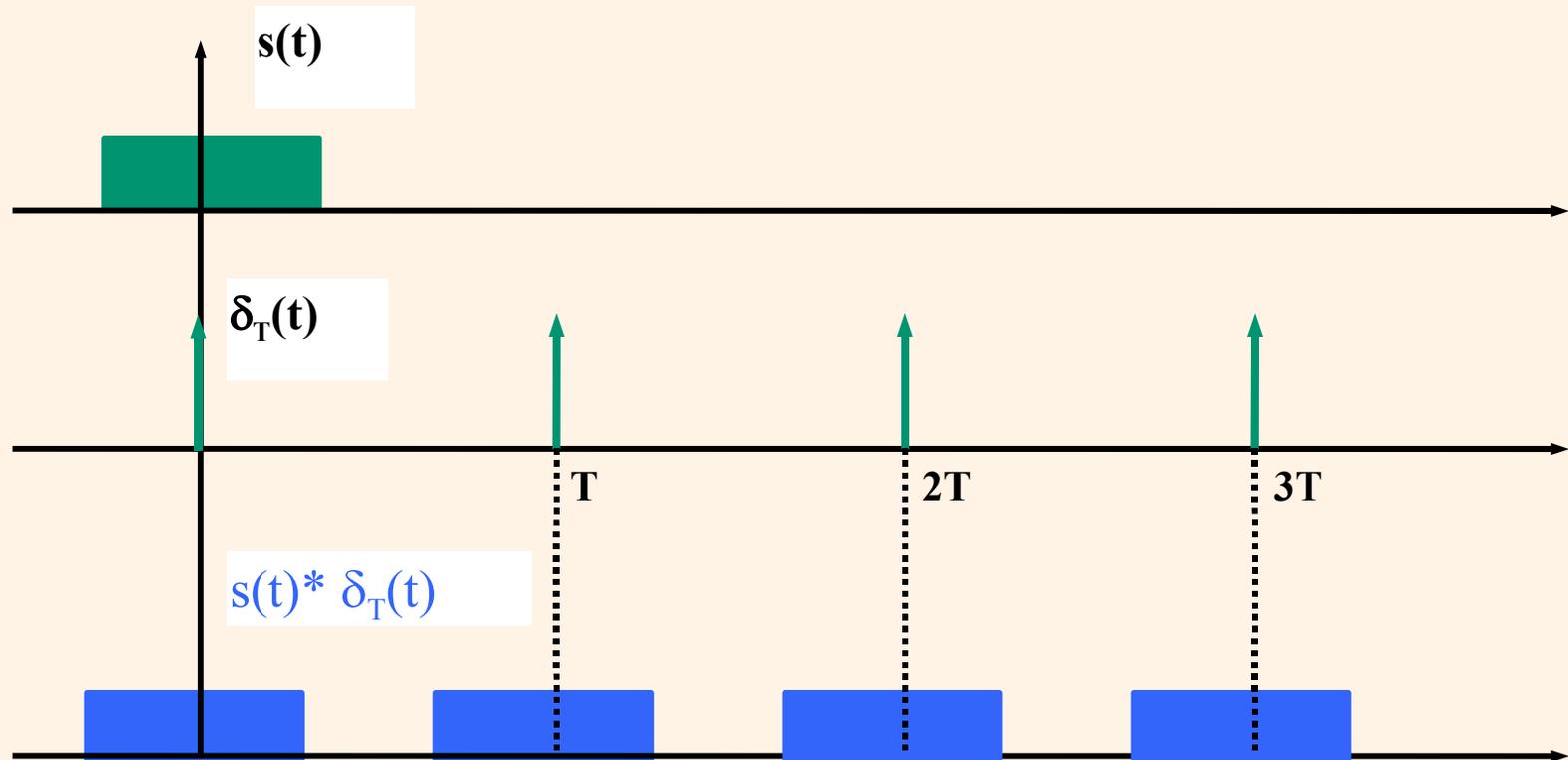
le produit de convolution en produit simple.

Par dualité

$$(x(t) \cdot h(t)) \xrightarrow{TF} X(f) * H(f)$$

Exemple important du produit de convolution

Calcul de $Pgn_T(t) * rect_T(t)$



Système linéaire

Définition

Un processus physique qui relie un signal d'entrée à un signal de sortie



$$P[e_1(t)+e_2(t)] = P[e_1(t)] + P[e_2(t)] = s_1(t) + s_2(t).$$

Réponse impulsionnelle

la fonction $h(t)$ telle que la sortie du système $s(t)$ réponde à l'équation $s(t) = h(t) * e(t)$.



$$s(t) = h(t) * e(t) = h(t) * \delta(t) = h(t).$$

Réponse fréquentielle

$$s(t) = h(t) * e(t) \quad \xrightarrow{\text{TF}} \quad S(f) = H(f) \cdot E(f)$$

Fonction de transfert $H(f) = \frac{S(f)}{E(f)}$

Filtrage Analogique

Principe

On cherche à ce que

$|H(j.\omega)|$ soit aussi proche de 1 que possible en *bande passante*, aussi proche de zéro que possible en *bande atténuée*, tout en tolérant une *bande de transition* déterminée dans le cahier des charges.

Approximation polynomiale : on recherche un polynôme $K(j.\omega)$ tel que :

$$|H(j.\omega)|^2 = H(j.\omega).H(-j.\omega) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 K(j.\omega)^2}$$

approxime au mieux le filtre recherché.

gabarit d'un filtre passe-bas :

$$\omega < \omega_p \Rightarrow 0\text{dB} > 20\log|H(j.\omega)| > -A_p$$

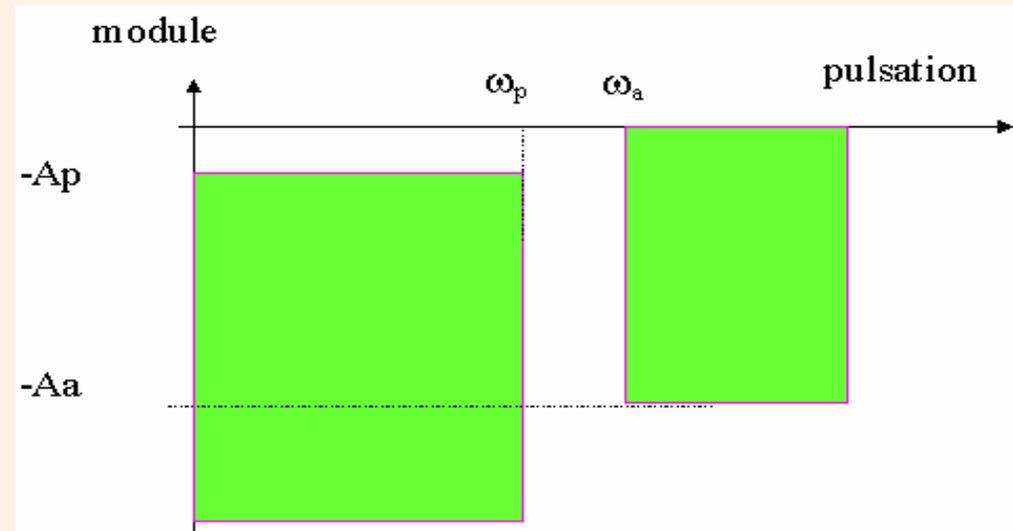
(bande passante)

$$\omega_a > \omega > \omega_p \Rightarrow 20\log|H(j.\omega)| < -A_p$$

(bande de transition)

$$\omega > \omega_a \Rightarrow 20\log|H(j.\omega)| < -A_a$$

(bande atténuée)



Fréquence de coupure

$\omega = \omega_p$ implique : $20 \log |H(j.\omega_p)| = -A_p$, soit : $|H(j.\omega_p)| = 10^{-A_p/20}$ avec $K(j.\omega_p) = 0$

donc : $\varepsilon^2 = 10^{A_p/10} - 1$

En particulier, $A_p = 3$ dB donne $\varepsilon \cong 0,997628345... \cong 1$

Dans ce qui suit, on considèrera les filtres passe-bas normalisés : $\omega_p = 1$

Approximation de Butterworth ("maximally flat")

On pose, n étant l'ordre du filtre :

$$|H(j.\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega^{2.n}}$$

Les pôles du filtre sont ainsi définis par :

$$1 + \varepsilon^2 (-1)^n . p^{2.n} = 0$$

On se limitera au cas $\varepsilon = 1$

n est pair : les pôles sont les racines $2.$ ^{nièmes} de -1 , réparties sur le cercle unité du plan complexe

$$p_k = e^{j \frac{(2k+1)}{2n}}$$

Filtrage Analogique (I)

Approximation de Butterworth ("maximally flat")

n est pair : les pôles sont les racines 2.^{nièmes} de -1 , réparties sur le cercle unité du plan complexe

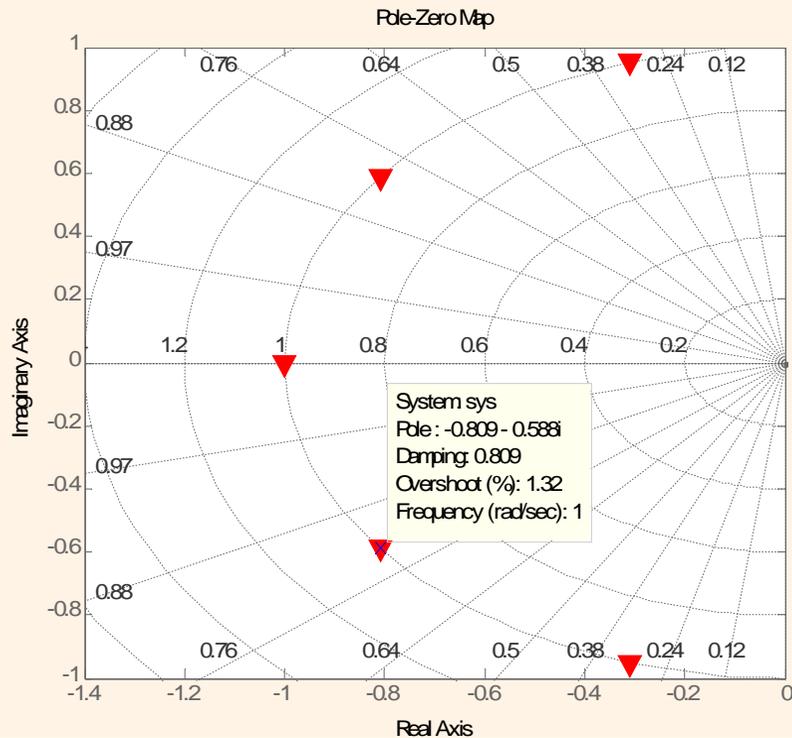
$$p_k = e^{j \frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

Garde uniquement pôles à partie réelle négative \Rightarrow filtre soit stable : $\frac{n-1}{2} < k < \frac{3n-1}{2} \quad k \in \mathbb{N}^+$

n est pair : les pôles sont les racines 2.^{nièmes} de 1 , réparties sur le cercle unité du plan complexe

$$p_k = e^{j \frac{2k\pi}{2n}}$$

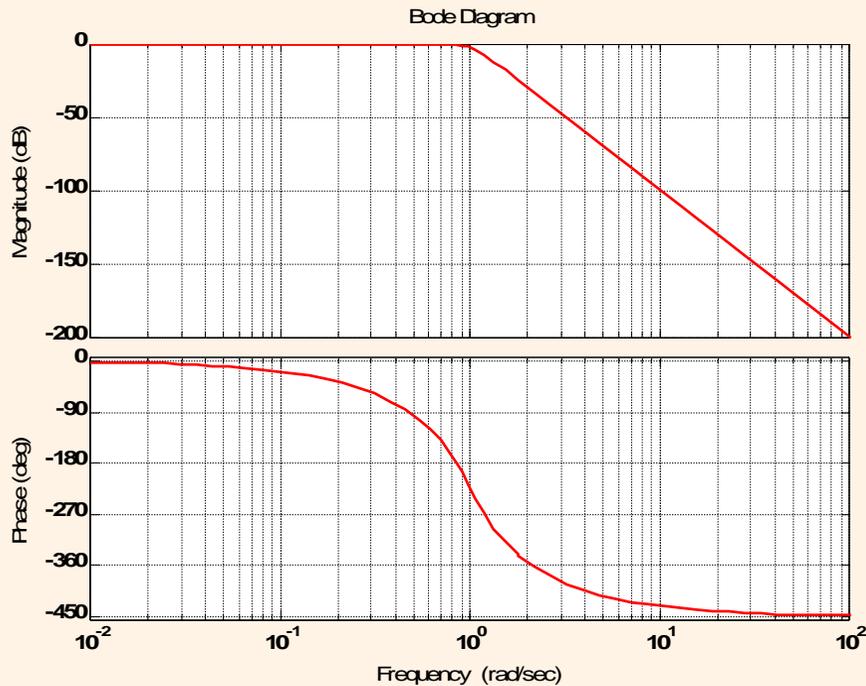
Garde uniquement pôles à partie réelle négative \Rightarrow filtre soit stable : $\frac{n}{2} < k < \frac{3n}{2} \quad k \in \mathbb{N}^+$



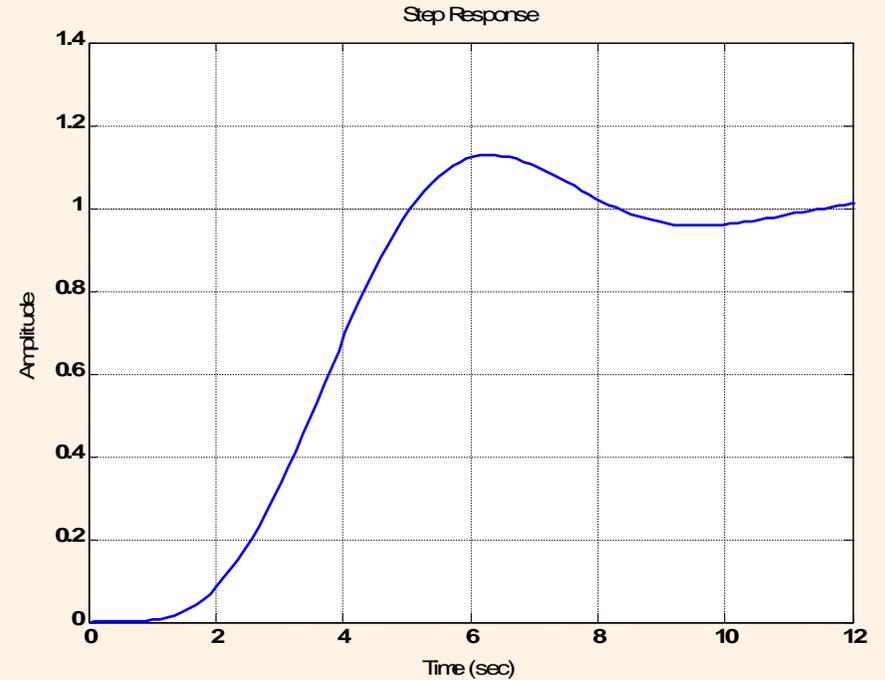
$$H(p) = \frac{1}{p^5 + 3,236 p^4 + 5,236 p^3 + 5,236 p^2 + 3,236 p + 1}$$

Approximation de Butterworth ("maximally flat")

Diagramme de Bode



Réponse temporelle



La réponse fréquentielle des filtres de Butterworth est "plate" en bande passante

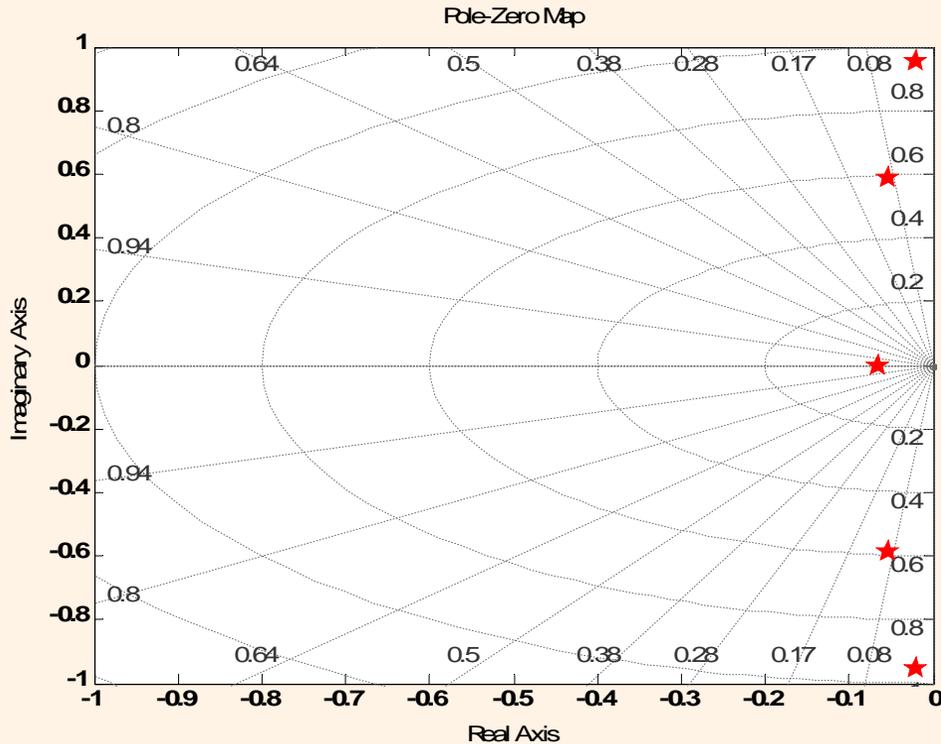
Approximation de Chebycheff ("equal ripple")

Les filtres de Tchebychev :

$$H(j\omega) = K \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(j\omega)}}$$

ε Facteur compris entre 0 et 1
 $T_n(j\omega)$ Polynôme de Tchebychev
 K gain

Avec les polynômes de Tchebychev $T_n(j\omega) = \cos(n \cdot \arccos(j\omega))$



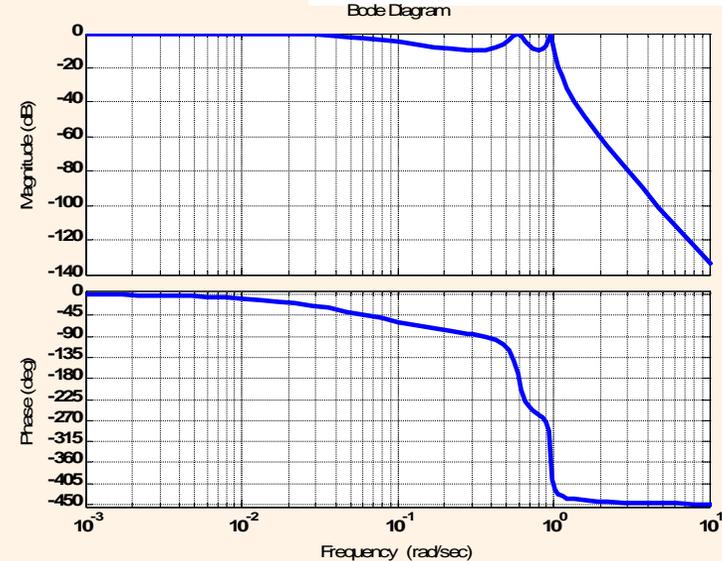
$$T_1(\Omega) = \Omega$$

$$T_2(\Omega) = 2 \cdot \Omega^2 - 1$$

$$T_3(\Omega) = 4 \cdot \Omega^3 - 3 \cdot \Omega$$

$$T_4(\Omega) = 8 \cdot \Omega^4 - 8 \cdot \Omega^2 + 1$$

etc.



Approximation de Bessel ("linear phase")

Dénominateur

$$B(p) = \sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)! \cdot p^k}{2^{n-k} \cdot k! \cdot (n-k)!}$$

Filtres elliptiques

$$K(j.\omega) = h.\omega \cdot \prod_{i=1}^n \frac{\omega^2 - 1/\omega_i^2}{\omega^2 - \omega_i^2}$$

Exigences d'un filtre :

- Bonne réponse indicielle (aussi carrée que possible)
- Peu de distorsion d'amplitude et de phase dans la bande passante
- Affaiblissement aussi brutal que possible après la fréquence de coupure

Type	Critère
Butterworth	Réponse en amplitude plate jusqu'à la fréquence de coupure.
Tchebychev	Meilleur affaiblissement après la coupure, léger 'rippel' dans la bande passante. La distorsion de phase est plus forte que pour les types précédents.
Bessel	Réponse indicielle optimale (petit dépassement, distorsion de phase minimale).
Elliptique	Affaiblissement maximal après la coupure, au prix d'une distorsion de phase plus forte.

Normalisation des gabarits / Dénormalisation des fonctions de transfert

Hypothèse \Rightarrow passe-bas et définis pour la pulsation normalisée $\omega = 1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$

Normalisation d'un **filtre passe-bas** de pulsation ω_c

$$\omega_n = \frac{\omega}{\omega_c}$$

Normalisation d'un **filtre passe-haut** de pulsation ω_c

$$\omega_n = \frac{\omega_c}{\omega}$$

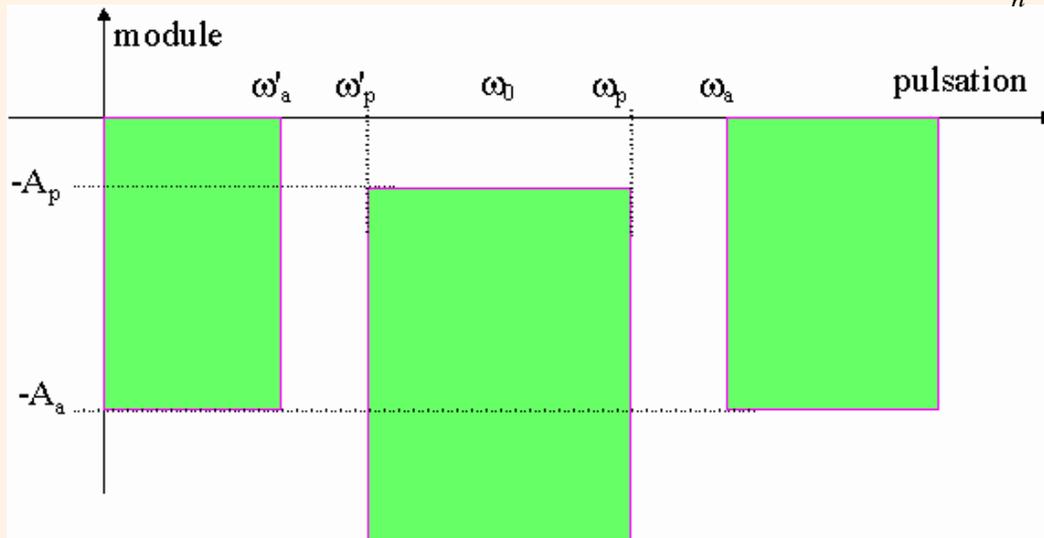
Normalisation d'un **filtre passe-bande**

$$\omega_n = \frac{\omega_c}{\Delta\omega} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_c} + \frac{\omega_c}{\omega} \right)$$

avec

$$\omega_c = \omega_p \cdot \omega'_p = \omega_a \cdot \omega'_a$$

$$\Delta\omega = \omega_p - \omega'_p$$



filtre coupe-bande

$$\frac{1}{\omega_n} = \frac{\omega_c}{\Delta\omega} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_c} + \frac{\omega_c}{\omega} \right)$$

Réalisation par mise en cascade de cellules élémentaires

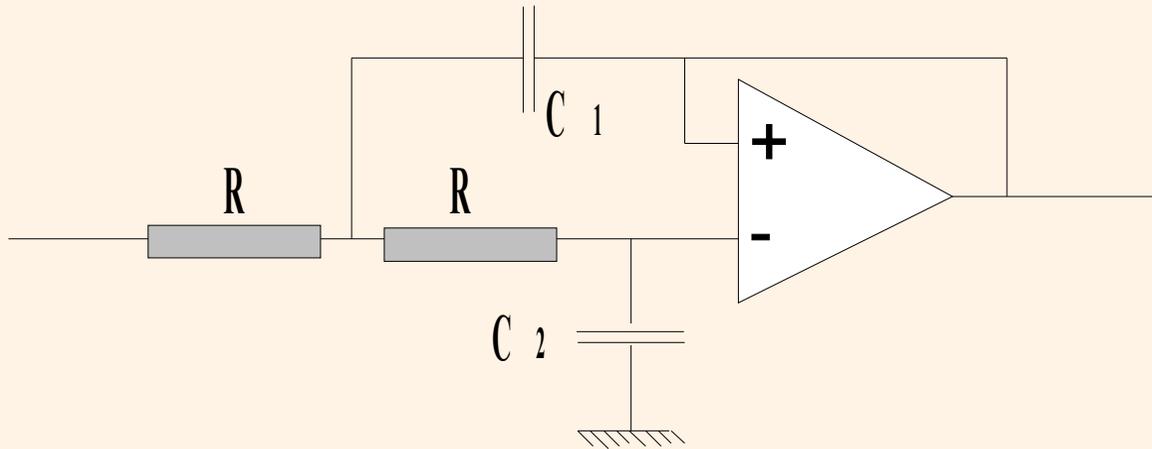
Le principe est d'utiliser les deux propriétés classiques (dûes à d'Alembert) :

- Tout polynôme de degré n sur le corps des nombres complexes possède n racines (pas forcément distinctes).
- Tout polynôme sur le corps des complexes, à coefficients réels, qui possède une racine r non-réelle, admet aussi pour racine le conjugué de r .

Tout polynôme de la variable complexe, à coefficients réels factorisable en

Un produit de  binômes du premier degré
trinômes du second degré (cellule de *Sallen-Key & Rauch*).

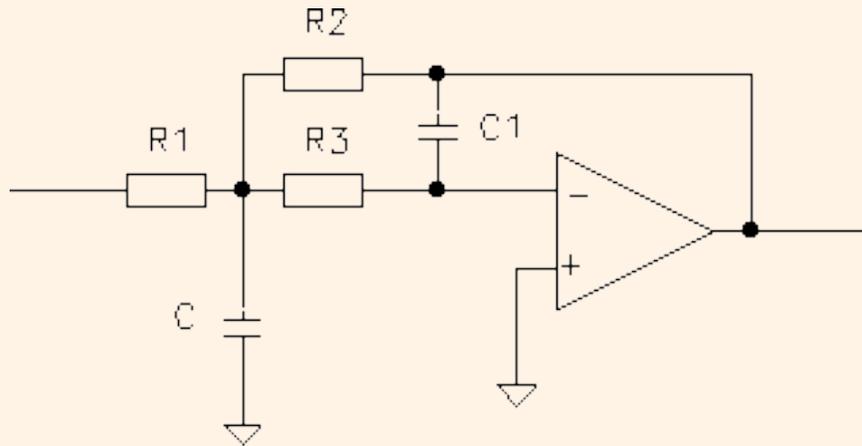
cellules 2^{ème} ordre de Sallen-Key



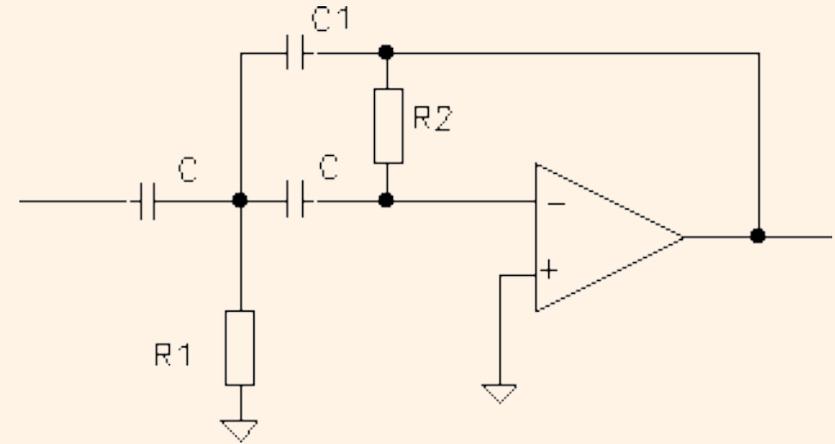
Filtre Passe-bas

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \text{ avec } \begin{cases} \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{R^2 C_1 C_2}} \\ m = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \end{cases}$$

cellules 2^{ème} ordre de Rauch



Filtre Passe-bas



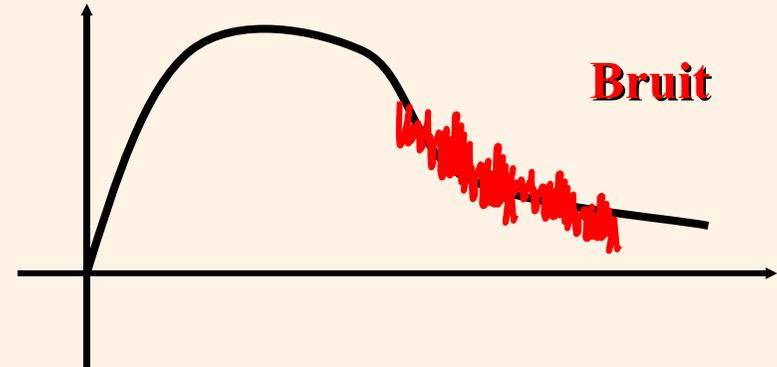
Filtre Passe-haut

Numérisation d'un signal Analogique

Signal Analogique ou Numérique

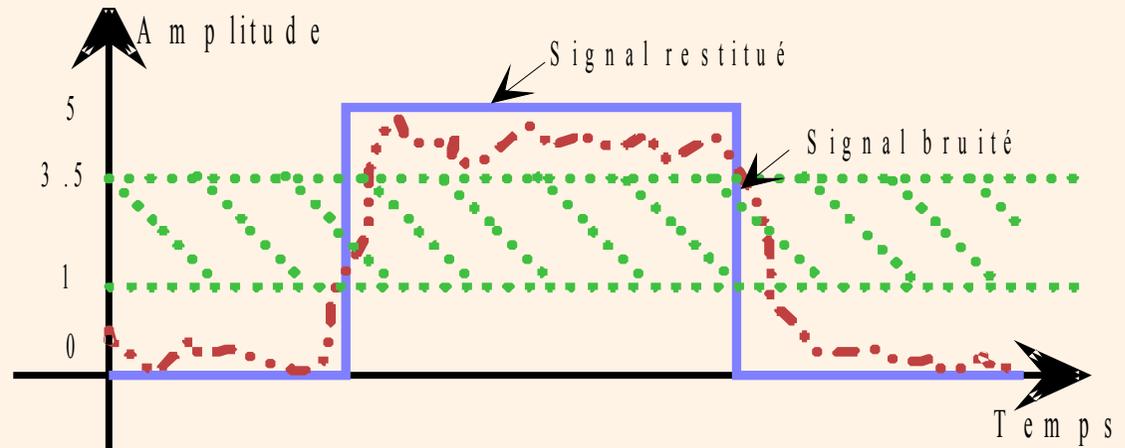
Signal Analogique

Pour traduire un signal quelconque, on associe à chaque instant l'amplitude du dit signal à l'amplitude d'un signal électrique image.



Signal numérique

Insensible au bruit



Codage binaire

2 niveaux électriques : un pour coder « 1 » ; l'autre pour coder « 0 »

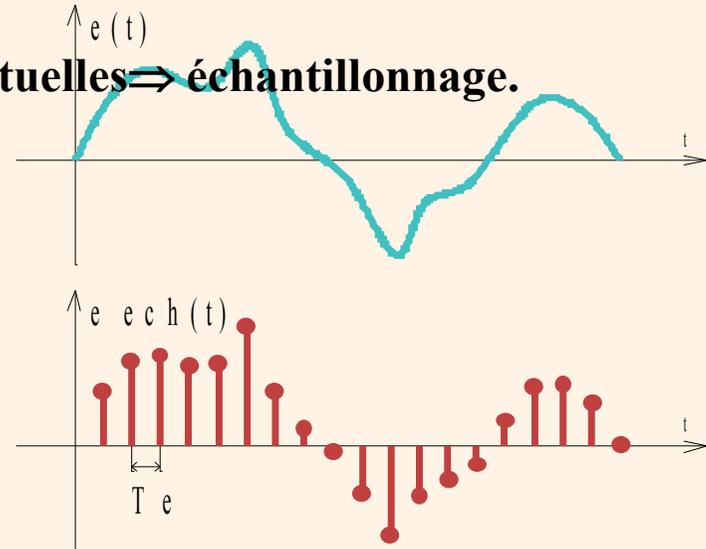
Échantillonnage des signaux

Définition

Systeme numérique \Rightarrow nombre fini de données.

Décomposer en une suite de valeurs ponctuelles \Rightarrow échantillonnage.

Période d'échantillonnage T_e .
Nombre fini de données



Échantillonneur idéal

$$e^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e(t) \cdot d(t - nT_e) = e(t) \cdot \text{pgn}_{T_e}(t)$$

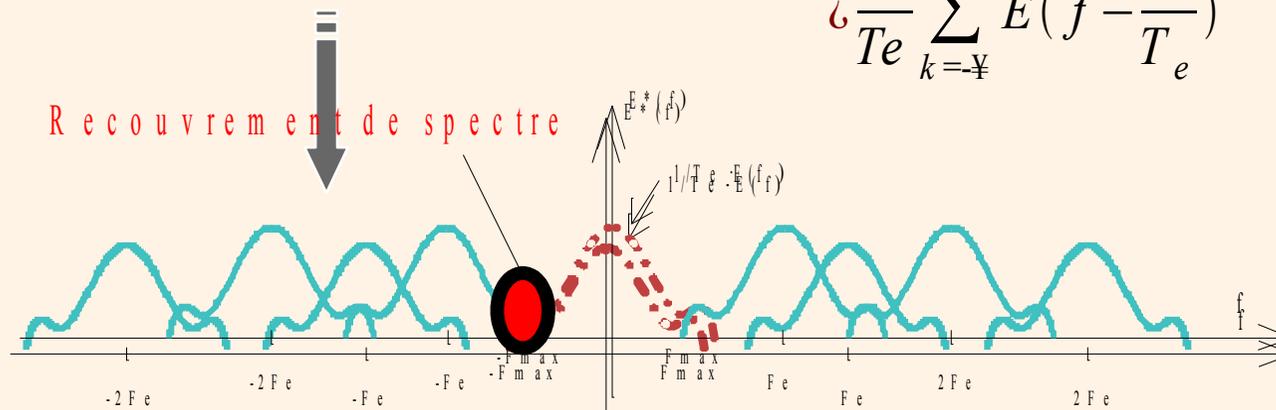
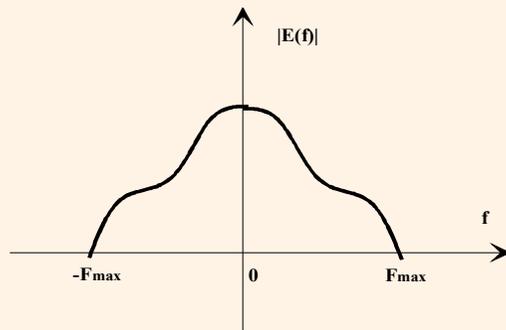


$e(t)$ un signal temporel analogique
 T_e la période d'échantillonnage

Réversibilité de l'échantillonnage

Comment choisir la fréquence d'échantillonnage, de façon à permettre la reconstruction de $e(t)$ à partir de $e^*(t)$?

Spectre du signal échantillonné



$$E^*(f) = F(e^*(t)) = F(e(t) \cdot p_{gn_{T_e}}(t))$$

$$\hat{=} E(f) * \frac{1}{T_e} \cdot P_{gn_{\frac{1}{T_e}}}(f)$$

$$\hat{=} \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(f) * d\left(f - \frac{n}{T_e}\right)$$

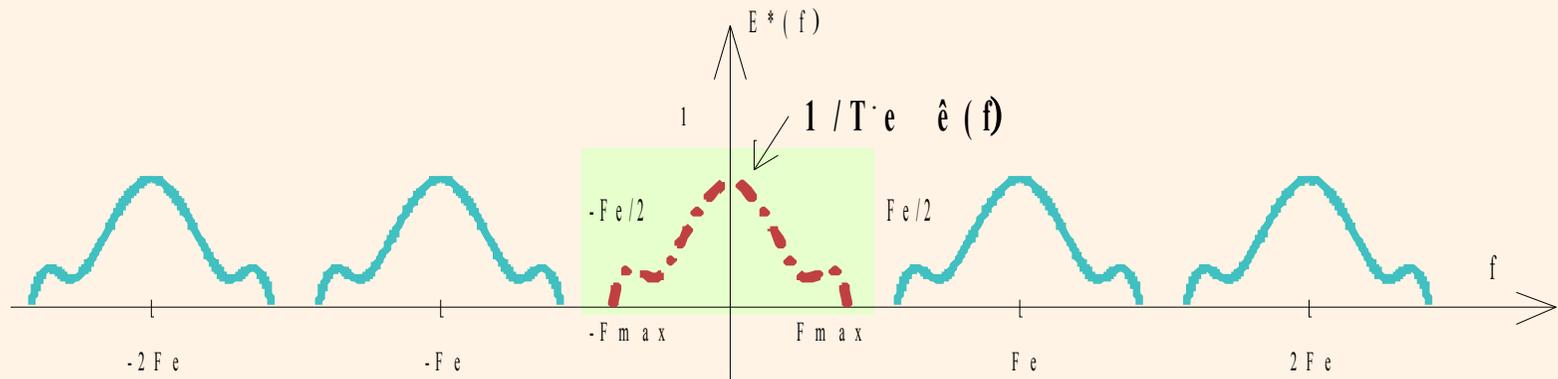
$$\hat{=} \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E\left(f - \frac{n}{T_e}\right)$$

Théorème de Shannon

Définition

Pour pouvoir envisager la reconstruction du signal $e(t)$ à partir du signal $e^*(t)$, il faut donc respecter l'inégalité suivante :

$$F_e > 2 \cdot F_{\max} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_{\max} & \text{borne supérieure de } E(f) \\ F_e & \text{fréquence d'échantillonnage} \end{cases}$$



Autre vision

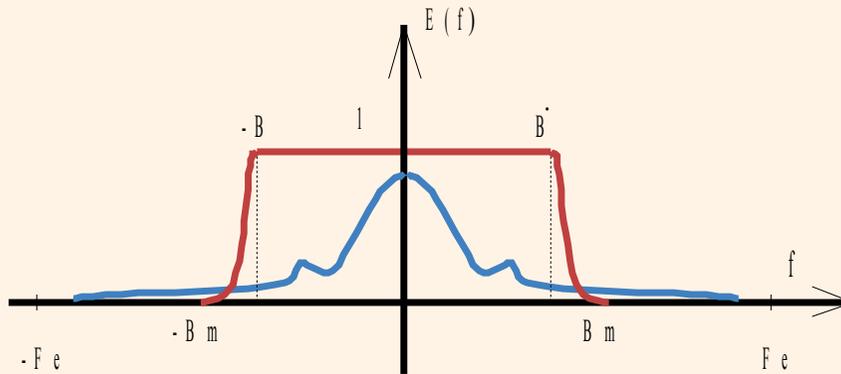
Minimum 2 échantillons par période pour définir une sinusoïde $e(t) = \sin(2\pi F_0 t)$.

Donc, si la fréquence de $e(t)$ est F_0 , on doit échantillonner à $F_0/2$

Filtre anti-repliement

atténuation du spectre du signal d'origine au delà de $F_e/2$

⇒ filtre anti-repliement.



Dans la réalité, tout filtre anti-repliement possède une bande de transition qui reporte la bande passante limite B_m bien au-delà de la bande passante B . Dans ce cas, le théorème de Shannon devient: **$F_e > 2.B_m > 2.B$** .

Exemples

le CD Audio

$F_e = 44.1$ KHz

Ligne MIC

$F_e = 8$ KHz

Échantillonneur bloqueur

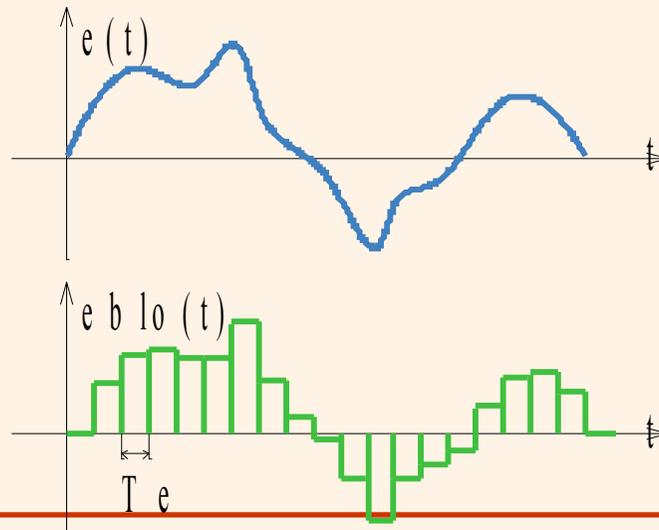
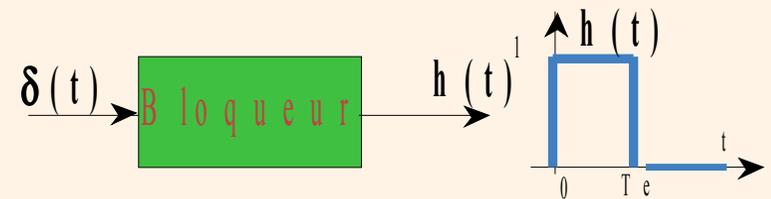
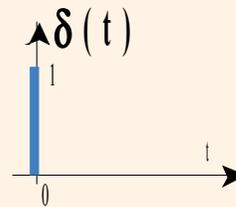
Nécessité d'un bloqueur

convertisseur analogique numérique à un temps de conversion non nul
Signaux échantillonnés bloqués.

Le blocage est d'une durée d'une période d'échantillonnage T_e .

Bloqueur d'ordre Zéro

Fonction de transfert

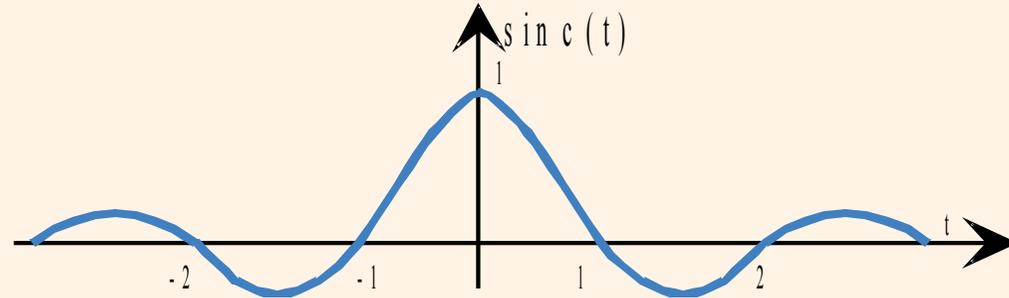


Forme temporelle d'un signal échantillonné bloqué

Échantillonneur bloqueur

TF d'un bloqueur

$$B_o(t) = T_e \frac{\sin(pT_e f)}{pT_e f}$$



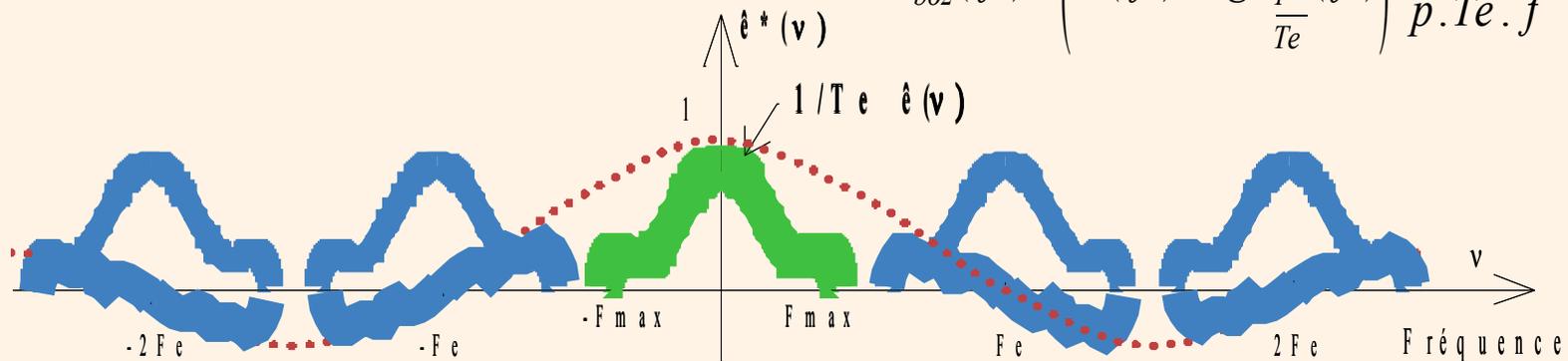
TF d'un Signal échantillonné bloqué

$$e_{BOZ}(t) = e*(t)*b_0(t) = (e(t) \cdot pgn_{T_e}(t)) * b_0(t)$$

$$E_{boz}(f) = \frac{1}{T_e} (E(f) * Pgn_{1/T_e}(f)) \cdot B_{boz}(f)$$

TF

$$E_{boz}(f) = \left(E(f) * Pgn_{\frac{1}{T_e}}(f) \right) \cdot \frac{\sin(p \cdot T_e \cdot f)}{p \cdot T_e \cdot f}$$



Perte de réversibilité mais modification limitée sur le 1^{er} lobe

Quantification du signal

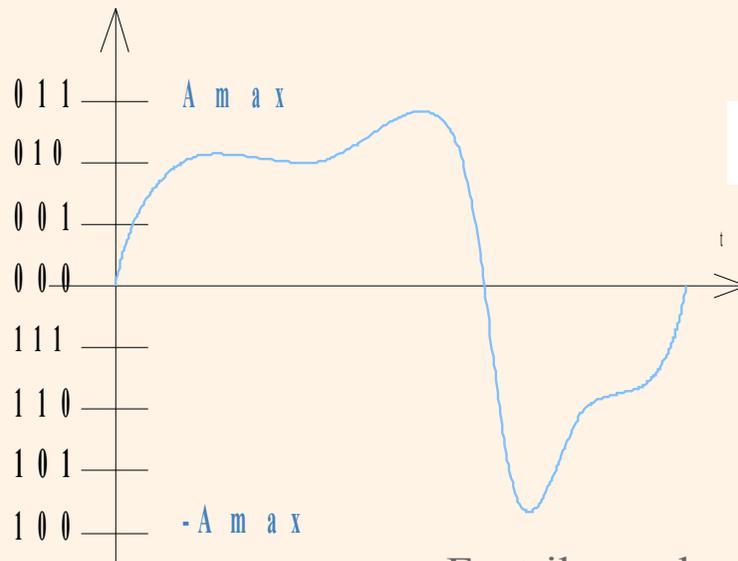
Définition

Impossible d'enregistrer toutes les valeurs des échantillons numériquement

⇒ codage avec des mots infinis.

N valeurs possible pour les échantillons

⇒ codage avec des mots de N bits



Notion de pas de quantification : “ q ”

Problèmes de la quantification

- Faut-il prendre un pas de quantification constant quelque soit le niveau ?
- Comment choisir le pas de quantification pour que l'erreur de codage correspondante soit acceptable ?

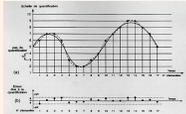
bruit de quantification

Pas de quantification linéaire

Le codage est effectué en binaire sur n bits, ceci autorise 2^n niveaux différents.

En téléphonie n=8 (256 niveaux) le Disque Compact 16 bits (65535 niveaux)

Comment définir le nombre de bits nécessaire ?



⇒ bruit de quantification.

Rapport S/B

$$S = \frac{q \cdot 2^N}{q} = 2^N$$

$$S_{dB} = 20 \cdot \log(S) = 6 \cdot N$$

Attention à la validité de ce critère

Filtrage Numérique

Filtres Numériques : Définition

Définition

Un filtre numérique F est un algorithme de calcul par lequel une séquence de nombres $\{x(n)\}$, dite séquence d'entrée, est transformée en une autre séquence de nombre $\{y(n)\}$, dite séquence de sortie.

$$\{y(n)\} = F[\{x(n)\}]$$

Les $x(n)$ sont les valeurs discrétisées tous les nT_e d'un signal analogique $x(t)$



Formule générale

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k \cdot x(n-k) - \sum_{j=1}^N b_j \cdot y(n-j)$$

Si b_j non nul, \Rightarrow **FILTRE RECURSIF**

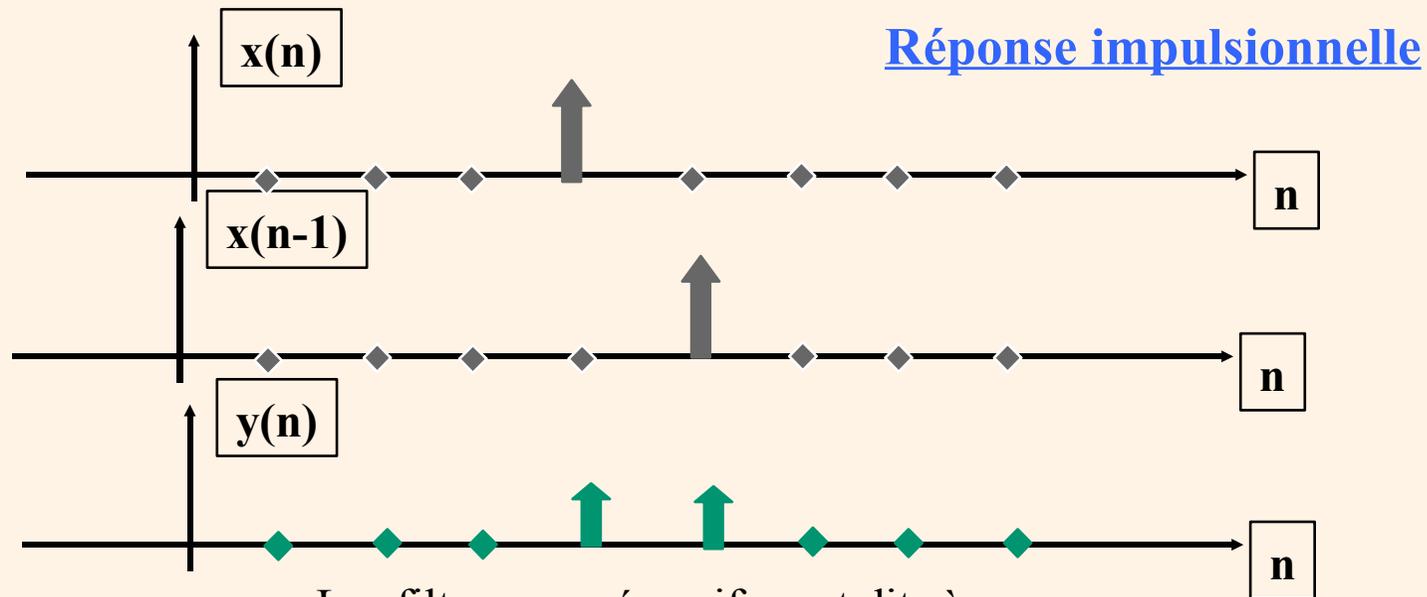
• Si b_j tous nuls, \Rightarrow **FILTRE NON RECURSIF.**

Filtre non Récursif : exemple

Algorithme

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1)}{2}$$

Filtre moyenneur



réponse impulsionnelle finie ou filtre **R.I.F.**

Ces filtres sont toujours stables

Filtre récursif : exemples

1^{er} exemple

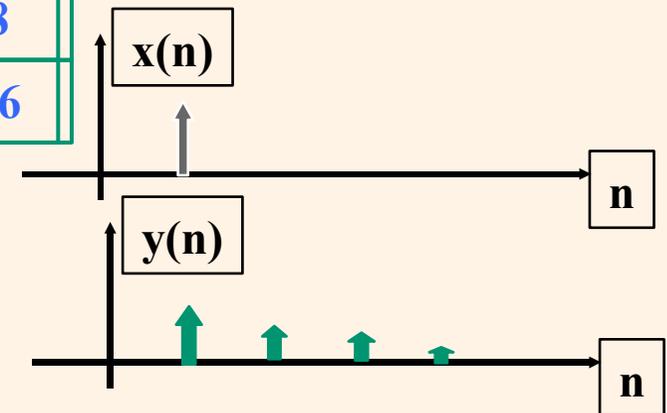
$$y(n) = \frac{x(n) + y(n-1)}{2}$$

n	0	1	2	3
$x(n)=\delta(n)$	1	0	0	0
$y(n-1)$	0	1/2	1/4	1/8
$y(n)=h(n)$	1/2	1/4	1/8	1/16

$$h(n) = \frac{1}{2} (0.5)^n$$

Ce filtre est stable

Réponse impulsionnelle



2^{ème} exemple

$$y(n) = x(n) + 2y(n-1)$$

Algorithme

$h(n)$ est ici une fonction croissante du temps

$$h(n) = 2^n$$

Ce filtre est instable

les filtres récursifs sont dits à

réponse impulsionnelle infinie ou filtre **R.I.I**

Rappel sur la transformée en « z »

Définition

Soit un signal numérique $x^*(t)$ causal

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT_e) \cdot d(t - nT_e)$$

$$X^*(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT_e) \cdot e^{-npT_e} \quad \text{Transformée de Laplace de } x^*(t)$$

Changement de variable $z = e^{pT_e} \quad \Rightarrow \quad z^{-1} = e^{-pT_e}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT_e) \cdot z^{-n} \quad \text{Transformée en } z \text{ de } x(t)$$

Propriété fondamentale

Si $\mathbf{Z}[x(n)] = \mathbf{X}(z)$
Alors $\mathbf{Z}[x(n-k)] = z^{-k} \cdot \mathbf{X}(z)$

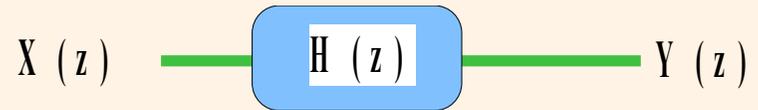
z^{-1} est l'opérateur retard (retard d'une période d'échantillonnage T_e .)

Fonction de transfert en « z »

Fonction de transfert et fonction de récurrence

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k \cdot x(n-k) - \sum_{j=1}^N b_j \cdot y(n-j)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \sum_{k=0}^M a_k \cdot X(z) \cdot z^{-k} - \sum_{j=1}^N b_j \cdot Y(z) \cdot z^{-j}$$



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{j=1}^N b_j \cdot z^{-j}}$$

Notion de stabilité des filtres

- Les filtres R.I.F. sont toujours stables: pas de pôles
- Les filtres R.I.I. sont stables, si les modules de leur pôles sont supérieurs à 1

Fonction de transfert et Réponse impulsionnelle

La fonction de transfert d'un filtre numérique est la transformée en Z de sa réponse impulsionnelle.

$$H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) \cdot z^{-k}$$

les $h(k)$ sont les valeurs de $h(t)$ aux instants d'échantillonnage kT_e

Propriété fréquentielle des filtres numériques

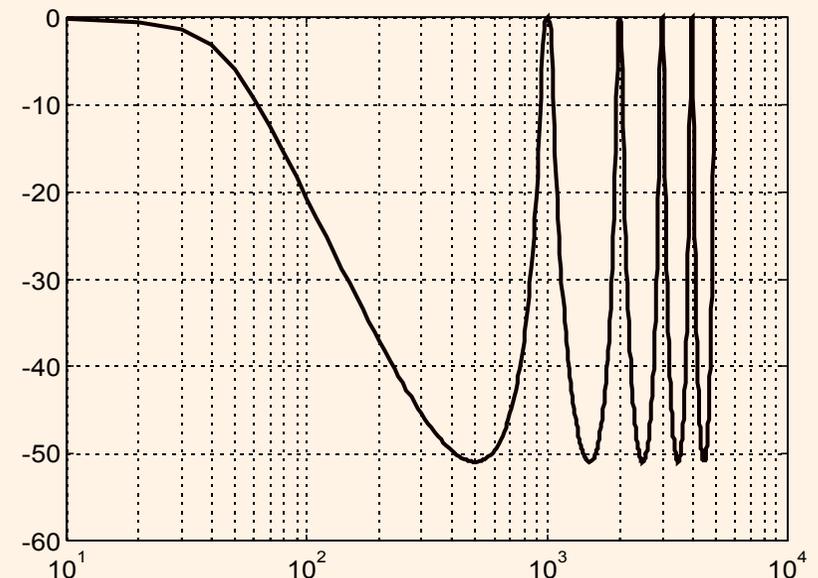
Réponse fréquentielle d'une transformée de Laplace

$$p \rightarrow j\omega = j2\pi f$$

Réponse fréquentielle d'une transformée en z

$$z^{-1} \rightarrow e^{-j\omega T_e} = e^{-j2\pi f T_e}$$

$$H(j\omega) = \sum_{n=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} h(n) \cdot e^{-j\omega n T_e}$$



La réponse fréquentielle est périodique de période F_e

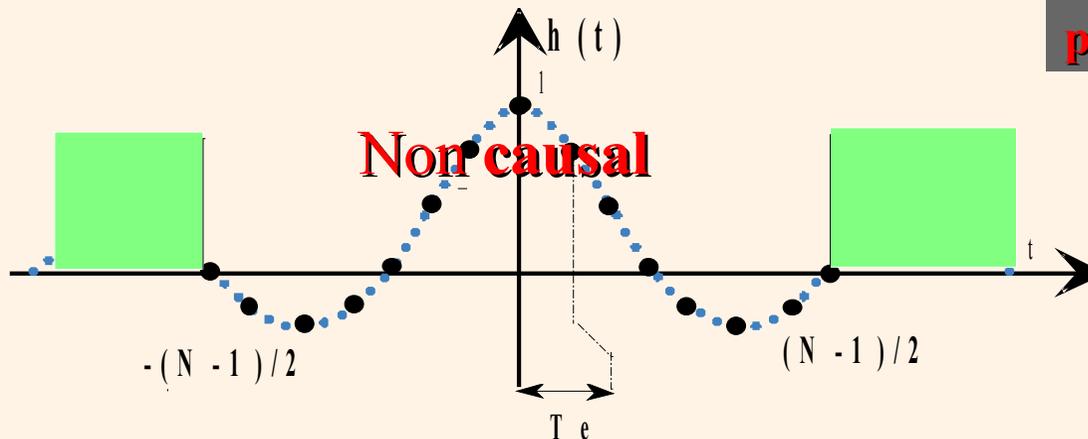
Phases des filtres F.I.R

On peut obtenir des filtres R.I.F avec une réponse fréquentielle à phase linéaire voire nulle.

$$H(j\omega) = \sum_{n=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} h(n) \cdot e^{-j\omega n T_e} \quad \Rightarrow \quad H(j\omega) = \sum_{n=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} h(n) \cdot \cos(\omega n T_e) - j \cdot \sum_{n=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} h(n) \cdot \sin(\omega n T_e)$$

$$\text{Re}[H(j\omega)] + j \cdot \text{Im}[H(j\omega)]$$

Phase nulle, il suffit donc d'avoir la partie imaginaire nulle, pour tout n



phase nulle \Rightarrow **$h(n)=h(-n)$**

Filtre Causal

$$H(z) = z^{-\frac{L}{2}} \sum_{n=0}^L h(n) \cdot z^{-n}$$

Ce qui donne une phase linéaire en pulsation (ou en fréquence)

$$j = -\omega \frac{L}{2} T_e$$

Synthèse des filtres récurrents

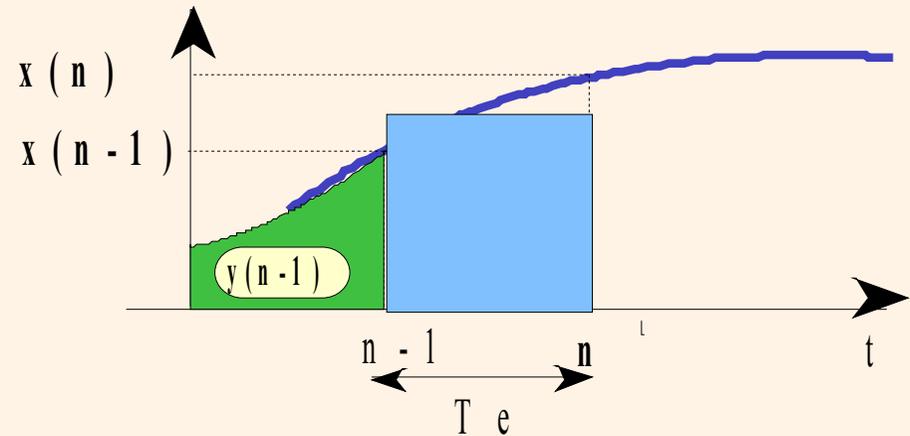
Principes

On part du gabarit du filtre désiré :

- Définition de la fonction de transfert en Laplace
- Équivalence « p » en « z »
- Vérification de la réponse fréquentielle discrète

Transformation bilinéaire

Équivalence par l'intégration



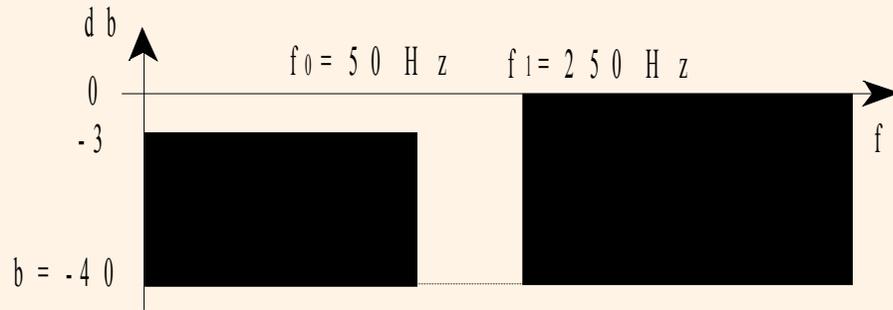
$$y(n) = y(n-1) + \frac{T_e}{2} [x(n) + x(n-1)] \quad \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Transformée bilinéaire

$$p \rightarrow \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Exemple de synthèse d'un IIR



La synthèse sera réalisée en utilisant un filtre de **Butterworth** et la période d'échantillonnage est fixée à $T_e=1$ ms.

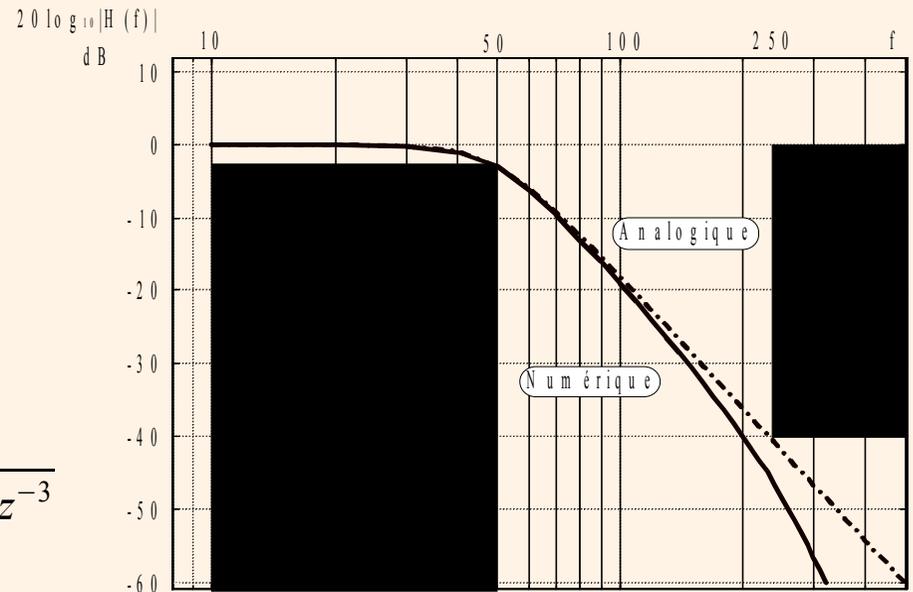
Transformée de Laplace

$$H(p) = \frac{w_0^3}{(p + w_0) \cdot (p^2 + w_0 p + w_0^2)}$$



Transformée en « z »

$$H(z) = \frac{0,0310}{1,8567 - 4,4540 z^{-1} + 3,6283 z^{-2} - z^{-3}}$$



Équation au récurrence

$$y(n) = 2,3989 \cdot y(n-1) - 1,9542 \cdot y(n-2) + 0,53886 \cdot y(n-3) + 0,0167 \cdot x(n)$$

Synthèse des filtres non récursif

Principes

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-k}$$

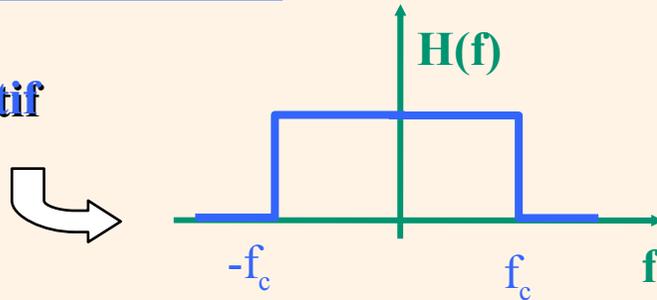
La réponse impulsionnelle $h(n)$ aux instants nT_e permet d'écrire $H(z)$

Remarques importantes

- Filtre R.I.F toujours à phase linéaire
- Filtre bien sur causal

Mise en oeuvre

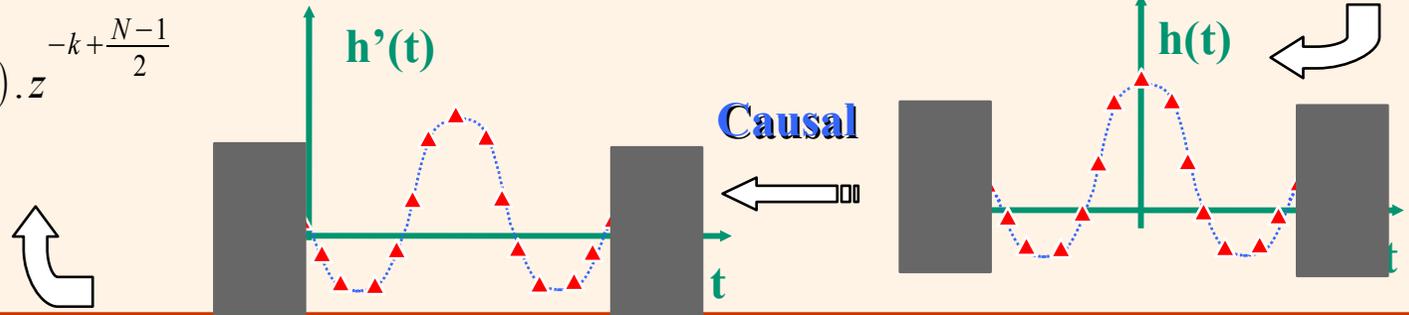
Objectif



TF⁻¹

$$h(t) = \frac{1}{F_e} \int_{-\frac{F_e}{2}}^{\frac{F_e}{2}} H(f) \cdot e^{-j2\pi k \frac{f}{F_e}} \cdot df$$

$$H(z) = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} h(k) \cdot z^{-k + \frac{N-1}{2}}$$



Synthèse des FIR & Conclusion sur les filtres

Phase du F.I.R

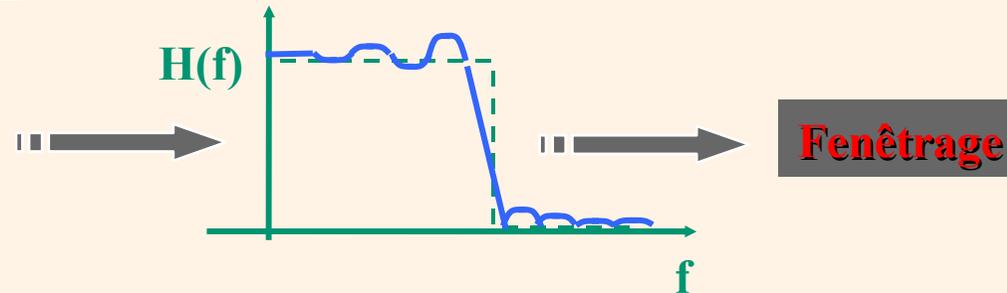
La phase n'est plus nulle, mais elle est la traduction directe d'un retard de

Phase donc proportionnelle à la fréquence

$$\text{Arg}[H(f)] = -\frac{N-1}{2} \cdot \omega \cdot T_e$$
$$\frac{N-1}{2} \cdot T_e$$

Phénomènes de Gibbs

Troncature de $h(nT_e)$



Conclusion sur les filtres numériques

- Ordre et complexité
- Fréquence d'échantillonnage
- Simplicité d'utilisation

Annexe :

Transformée de Laplace

Notion de stabilité

Transformée de Laplace

Plutôt que d'utiliser l'intégration pour résoudre, les automaticiens utilisent la transformée de Laplace. (Pierre Simon Laplace 1749-1829).

Définition

Si $f(t)$ est un signal temporel, alors la transformée s'obtient par :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad p \text{ opérateur de Laplace } p = \sigma + j\omega$$

Quelques propriétés

Produit de convolution

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(p) \cdot F_2(p)$$

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

Intégration

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{p} F(p)$$

Dérivation

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = pF(p)$$

Transformée de Laplace

Utilisation de la transformée de Laplace

Calcul de la réponse d'un système dynamique linéaire

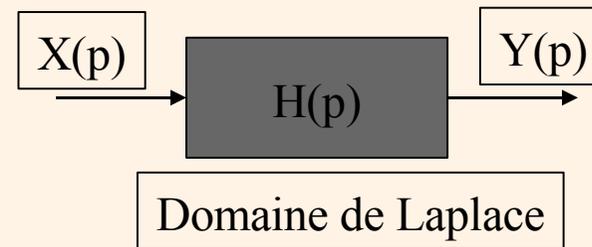
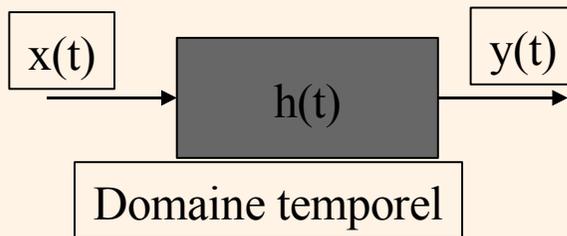
Dans le domaine temporel on résout l'intégrale de convolution

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau) \cdot x(\tau) d\tau \quad \text{Avec } h(t) \text{ réponse impulsionnelle}$$

Dans le domaine de la transformée de Laplace

$$Y(p) = H(p) \cdot X(p)$$

Avec $H(p) = \mathcal{L}[h(t)]$ fonction de transfert en « p »



Transformée de Laplace

Principe de calcul de la transformée de Laplace inverse

Décomposition en éléments simple de $H(p)$

Utilisation des tables de primitives

fonction	transformée
$u(t)$	$1/p$
$f(t) = 1/t$	$1/p^2$
$f(at)$	$L_f(p/a) / a$
$f(t) = \cos(at)$	$p/(p^2 + a^2)$
$f(t) = \sin(at)$	$a/(p^2 + a^2)$
$f(t) = e^{at}$	$1/(p - a)$
$\delta(t)$	1

Modélisation des systèmes

□ Principe

On cherche l'ensemble des équations mathématiques qui permet de calculer la sortie $y(t)$ d'un système en connaissant la valeur de l'entrée $u(t)$.

□ Représentation de modèles à l'aide du schéma fonctionnel.

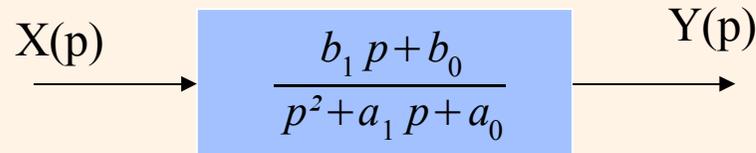
Principe

On prend la transformée de Laplace des équations différentielles.
que l'on représente sous forme de schémas blocs.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

Ce qui donne

$$p^2 Y(p) + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) = b_1 U(p) + b_0 U(p)$$



Modélisation des systèmes

Fonction de transfert (transmittance)

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0}$$

Polynôme caractéristique

$$P(p) = p^2 + a_1 p + a_0$$

Pole du système

Racines du polynôme caractéristique

Ordre du système

C'est le degré du polynôme caractéristique

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0}$$

Système d'ordre 2

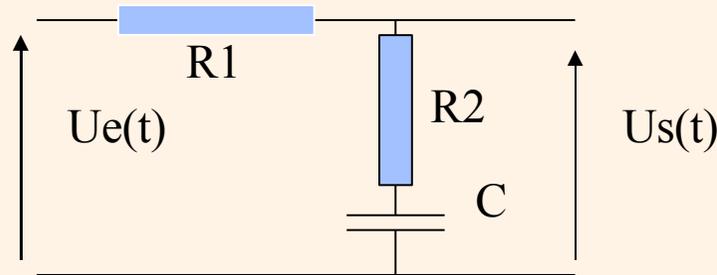
Gain statique

C'est la valeur de rapport $y(t)/x(t)$ en régime établi quand l'entrée est une constante

Modélisation des systèmes

Exemple

Circuit électrique passif



Equations

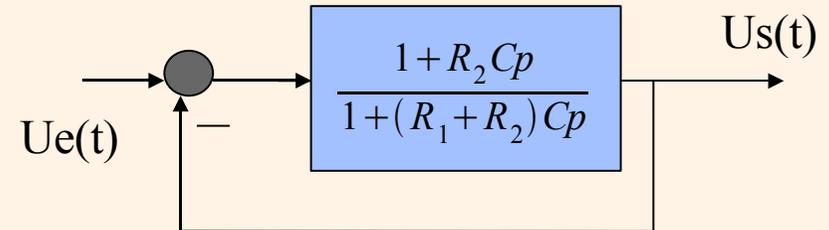
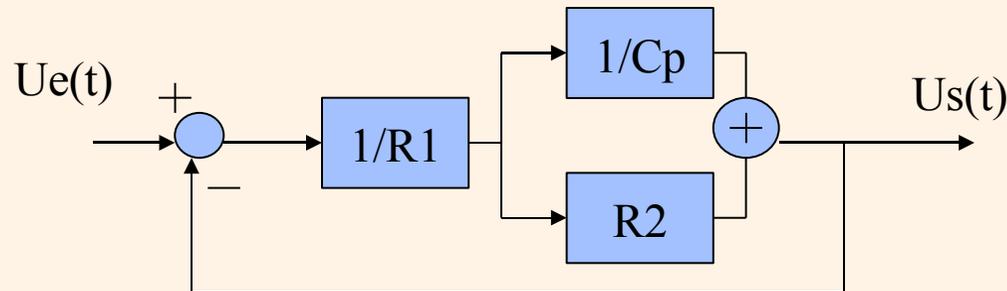
$$U_e(t) - U_s(t) = R_1 I(t)$$

$$U_{s_1}(t) = R_2 I(t)$$

$$U_s(t) = U_{s_1}(t) + U_{s_2}(t)$$

$$U_{s_2}(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

Schéma fonctionnel



Analyse temporelle des systèmes

□ Intérêt

La réponse temporelle d'un système dynamique excité par une entrée (signal test)

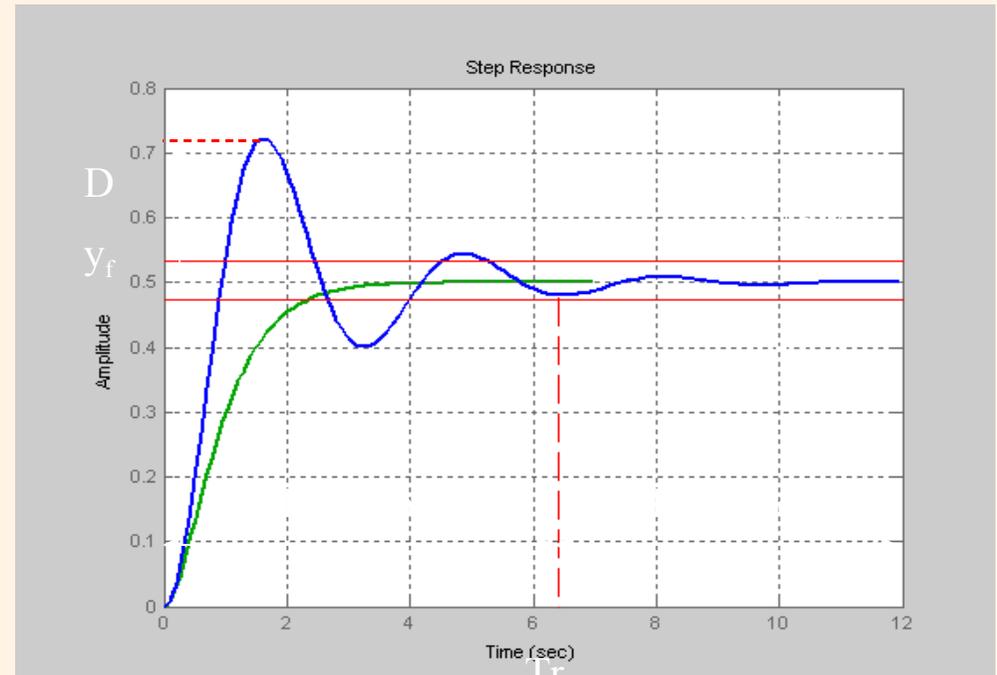
Est constituée de 2 parties :

- Réponse transitoire
- Régime permanent

Y_f : valeur finale

D dépassement

T_r temps de réponse à 5%

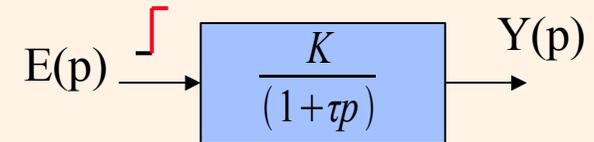


Analyse temporelle des systèmes

□ Système du 1^{er} ordre

Réponse à une entrée de type échelon appliqué à $t=0$, le système étant au repos

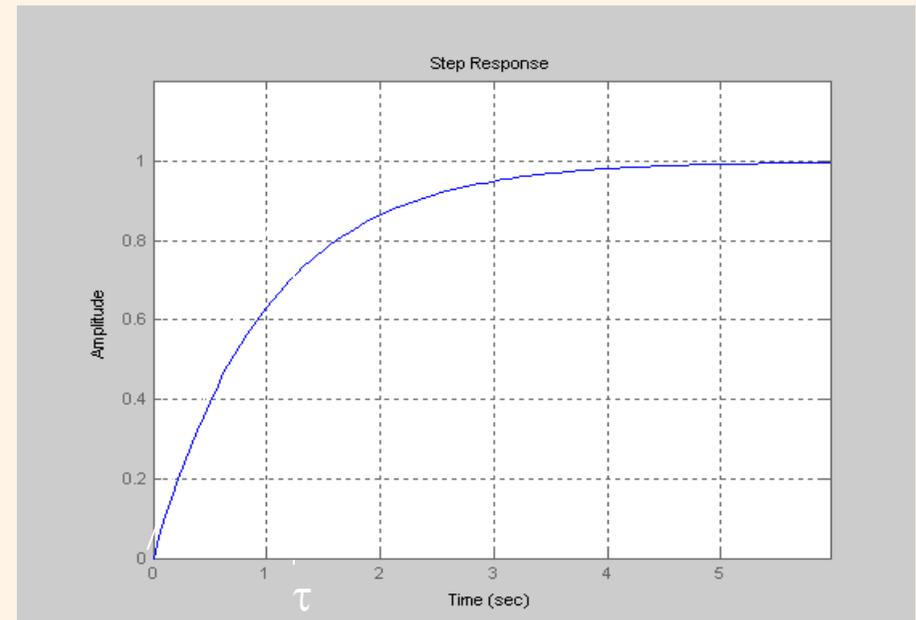
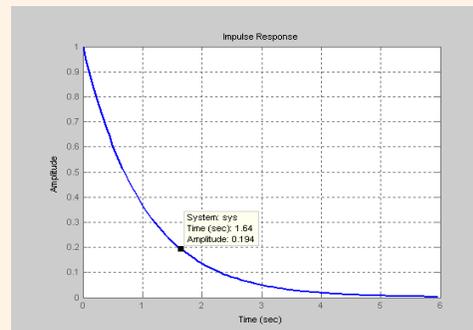
$$E(p)=1/p \qquad Y(p)=\frac{K}{p(1+\tau p)}$$



Dans le domaine temporel

$$y(t)=K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \begin{cases} y(0)=0 \\ y(\infty)=K \end{cases}$$

Pas de dépassement pour un
Système du 1^{er} ordre



Analyse temporelle des systèmes

□ Système du 2^{ème} ordre

Réponse à une entrée de type échelon appliqué à $t=0$, le système étant au repos

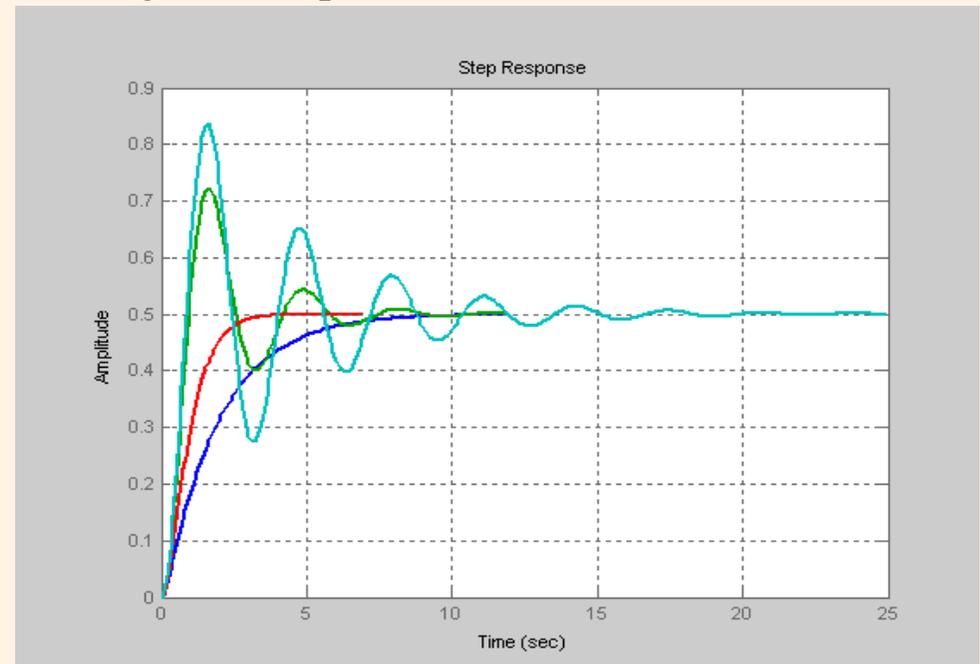
$$H(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + 1}$$

ω_0 pulsation propre du système non amorti

ξ facteur d'amortissement

K gain statique

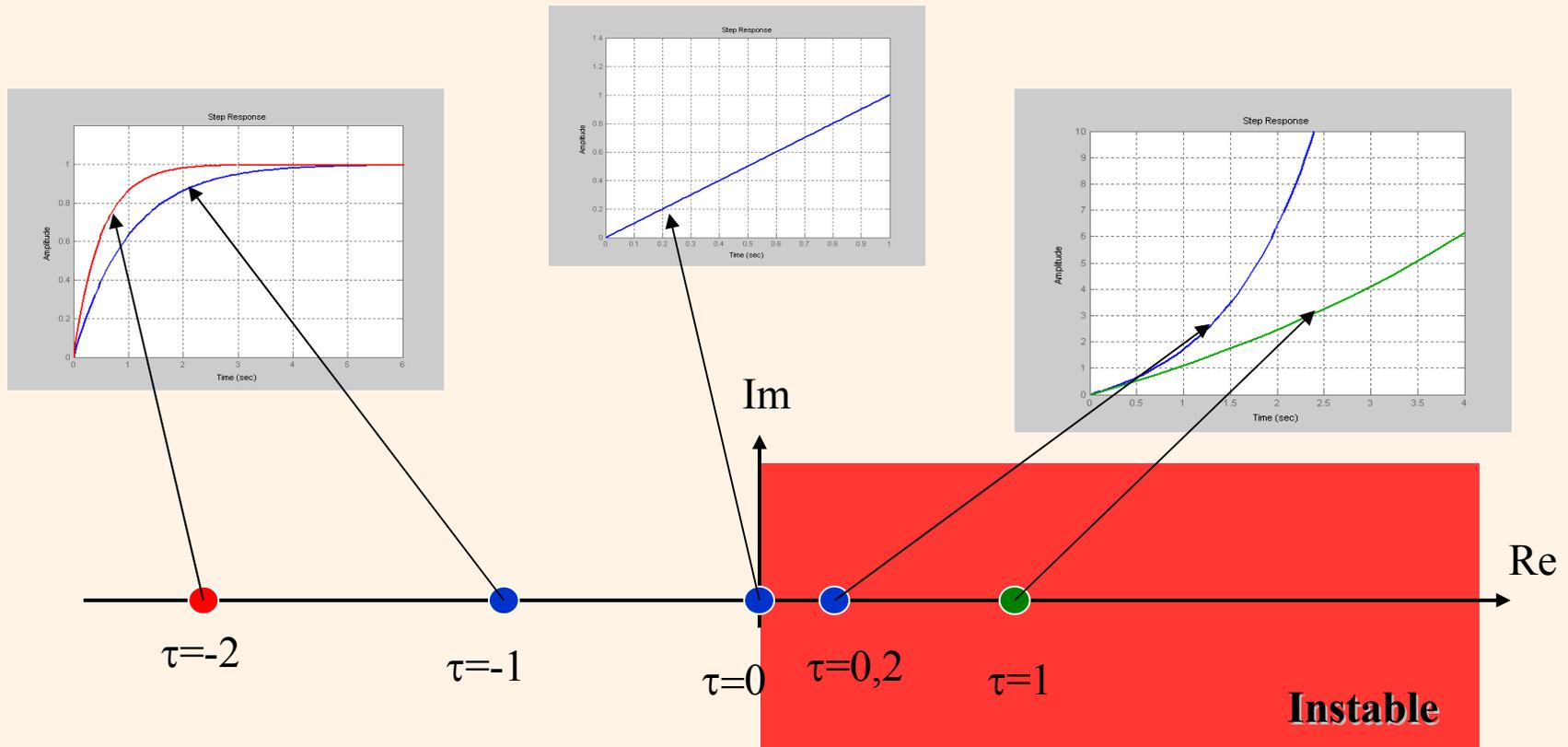
$\xi=0,2$	
$\xi=0,5$	sous amorti
$\xi=1$	régime critique
$\xi=2$	hyper amorti



Analyse temporelle des systèmes

□ Position des pôles et réponse indicielle

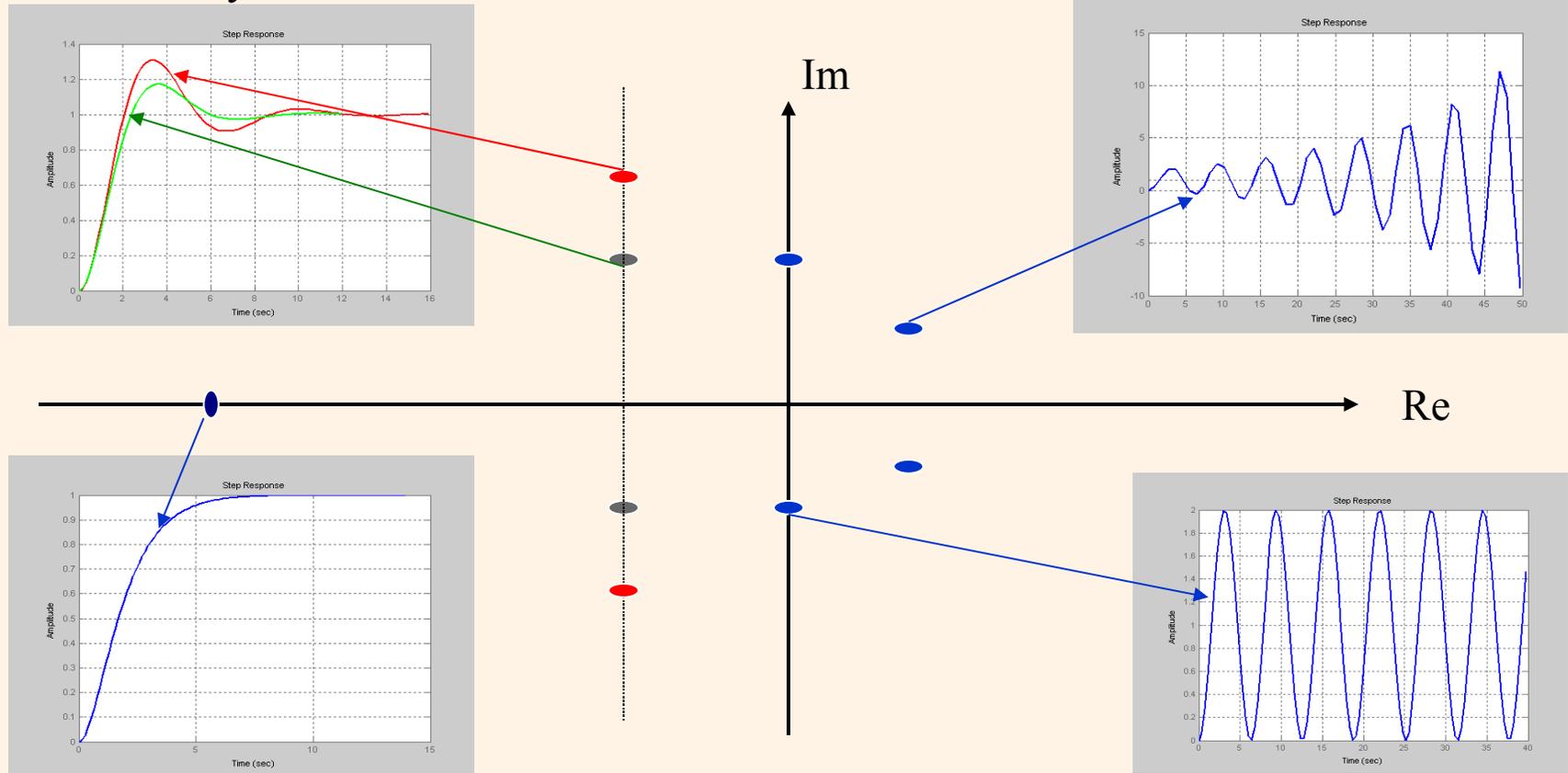
Cas du système du premier ordre



Analyse temporelle des systèmes

□ Position des pôles et réponse indicielle

Cas du système du second ordre



Analyse fréquentielle des systèmes

□ Principe

On applique à l'entrée du système une grandeur sinusoïdale $u(t)=X_0\sin(\omega t)$.



Analyse fréquentielle

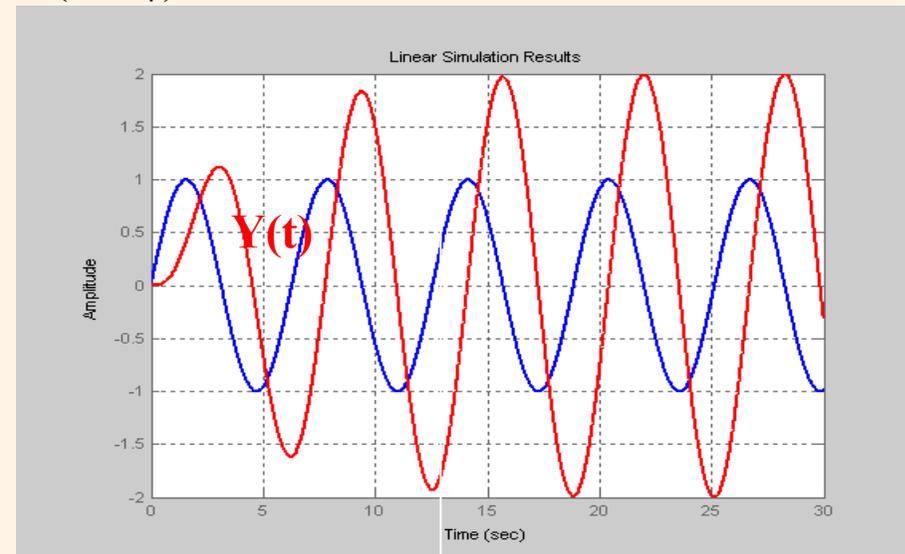
On travail dans le plan Fourier

On remplace dans $H(p)$ « p » par

$j\omega$.

On montre que :

$$\begin{cases} Y_0 = X_0 |H(j\omega)| \\ \varphi = \arg(H(j\omega)) \end{cases}$$



← Transitoire →

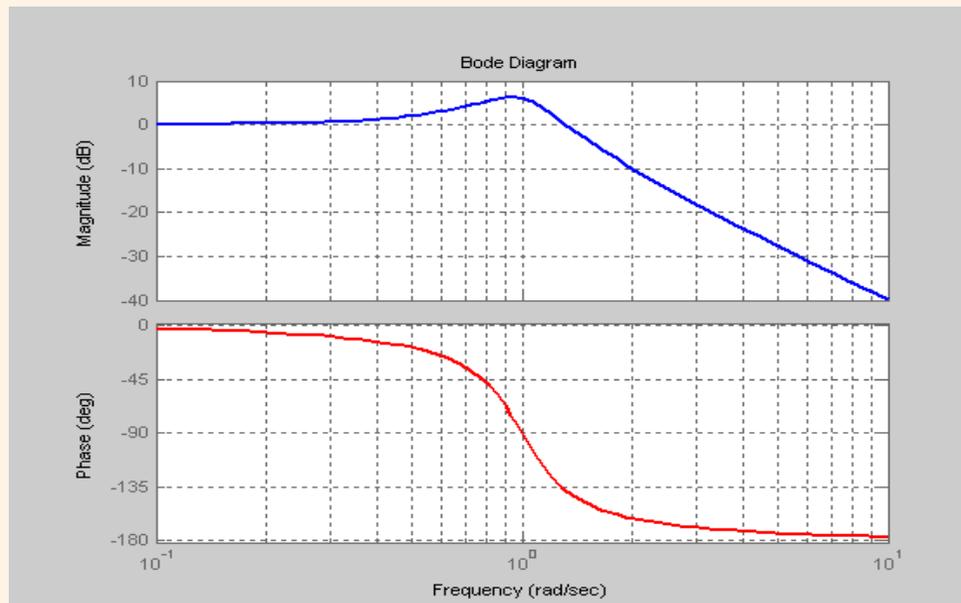
← Permanent →

Analyse fréquentielle des systèmes

Dans le plan de Bode

On Présente les deux courbes (module et phase) en fonction de ω
 Pour la courbe de gain elle est graduée en Décibels

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} (|H(j\omega)|)$$

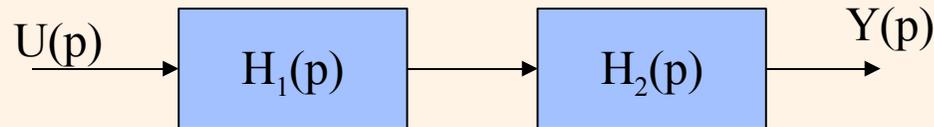


$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 0,5p + 1}$$

Analyse fréquentielle des systèmes

Intérêt du plan de Bode

Soit un système composé de 2 transmittances en série



Ce qui donne $H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$ soit dans le plan de Bode

- $|H(j\omega)|_{dB} = |H_1(j\omega)|_{dB} + |H_2(j\omega)|_{dB}$
- $\arg(H(j\omega)) = \arg(H_1(j\omega)) + \arg(H_2(j\omega))$

Approche asymptotique de Bode

On réalise une étude au limites

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 0,5p + 1}$$

$$\omega \rightarrow 0 \quad \left| \begin{array}{l} |H(j\omega)| = 1 \\ \arg(H(j\omega)) = 0 \end{array} \right.$$

$$\omega \rightarrow +\infty \quad \left| \begin{array}{l} |H(j\omega)| = -40 \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \\ \arg(H(j\omega)) = -\pi \end{array} \right.$$

