

UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE DE COMPIEGNE

Le Traitement du Signal aléatoire

SY06 partie II - Printemps 2009

P.Simard

12 mai 2009

Table des matières

1	Besoins de modèles aléatoires pour les signaux	5
2	Principaux résultats de la théorie des probabilités	7
2.1	Formalisation des résultats d'une expérience aléatoire	7
2.1.1	Définitions	7
2.1.2	Notion d'événement	8
2.1.3	Définitions de la mesure de probabilité	8
2.1.4	Quelques lois et concepts utiles	10
2.2	Variables Aléatoires : Généralités	12
2.2.1	Définition d'une Variable Aléatoire	12
2.2.2	Loi de probabilité d'une variable aléatoire	12
2.2.3	Moments d'une variable aléatoire	14
2.3	Etude conjointe de Variables Aléatoires :	16
2.3.1	Etude Conjointe de deux Variables Aléatoires	16
2.4	Etude conjointe de Variables Aléatoires :	17
2.4.1	Etude Conjointe de n Variables Aléatoires	17
3	Notions générales sur l'estimation ponctuelle :	21
3.1	Position du problème	21
3.1.1	Cadre général de l'estimation ponctuelle	21
4	Le signal Aléatoire	23
4.1	Le signal Aléatoire : définitions et propriétés :	23
4.1.1	Modèle du Signal aléatoire	23
4.1.2	Description d'un signal aléatoire : Stationnarité	23
4.1.3	Description d'un signal aléatoire : ergodisme	25
4.2	Exemple de signal aléatoire : le bruit blanc	26
4.2.1	définition	26
4.2.2	Comportement temporel	27
4.2.3	Comportement fréquentiel	27

5	Analyse spectrale des signaux aléatoires :	29
5.1	Eléments de théorie de l'analyse en fréquences	29
5.1.1	Théorème de Wiener-Khintchine	29
5.1.2	Compléments : Signaux à puissance moyenne finie	30
5.1.3	Spectre d'un signal aléatoire	31
5.2	Notions d'estimation spectrale :	31
5.2.1	Perpective historique	31
5.2.2	Théorie de l'analyse fréquentielle des signaux	34
5.2.3	Rappel : représentation de Fourier des signaux discrets de longueur finie	35
5.2.4	Eléments d'estimation spectrale	35
6	Le filtrage des signaux aléatoires :	39
6.1	Rappel : filtrage d'un signal déterministe	39
6.1.1	Signal à temps continu	39
6.1.2	Signal à temps discret	39
6.2	Filtrage d'un signal aléatoire stationnaire	39
6.2.1	Espérance mathématique du signal aléatoire filtré	39
6.2.2	Covariance du signal aléatoire filtré	40
6.3	Introduction aux processus ARMA	41
6.3.1	Définition des signaux autorégressifs (AR) :	41
6.3.2	Définition des signaux de moyenne mobile (MA)	44
6.3.3	Définition des signaux autorégressifs et de moyenne mobile (ARMA)	45
6.3.4	Exemple d'un signal AR(2) :	46
7	Quelques références bibliographiques pour aller plus loin :	49
8	Sujets des TD de la partie II	51
8.1	Variables aléatoires et Moments	51
8.2	Probabilité conditionnelle et Transmission d'un signal binaire	51
8.3	Stationnarité et Ergodisme	53
8.4	Bruit Blanc	54
9	Matlab : Tutorial pour débiter	57
9.1	Vecteurs	57
9.2	Fonctions	58
9.3	Les figures et les tracés	59
9.4	les M-files	59
10	UV SY06 - Les Règles d'Or du calcul	61
10.1	Règle n°1 : Le carré d'une somme n'est pas la somme des carrés	61
10.2	Outils du traitement du signal	61
10.3	Trigonométrie	62
10.4	Quelques définitions utiles	62

Chapitre 1

Besoins de modèles aléatoires pour les signaux

LE CADRE NATUREL DES SIGNAUX EST ALÉATOIRE

Dans la pratique du traitement du signal, il existe de nombreux cas où l'application d'un raisonnement utilisant la notion de signal aléatoire permet de définir des méthodes puissantes d'analyse. Il est même possible d'éviter de commettre des erreurs indécélables dans le cadre déterministe.

- Parmi les méthodes qui ont fortement marqué le traitement du signal au cours des 20 dernières années, il faut citer les modèles par filtrage de bruit blanc (autoregressif et moyenne mobile) qui ont permis de développer le traitement de la parole et de développer la téléphonie à bas débit.
- Parmi les erreurs indécélable dans le cadre déterministe, on peut citer les propriétés utilisant l'ergodicité, ou qualité d'une mesure à renseigner proprement du premier coup sur le processus qui lui a donné naissance.

Par ailleurs, le cadre aléatoire est assez naturel. En effet, il est rare que l'étude d'un signal n'ait pas pour objet d'estimer des paramètres caractéristiques dont on ignore à peu près tout avant l'étude. Ce peut être par exemple l'instant d'arrivée d'un signal dans le cas des transmissions, ou de la détection radar. Ce peut être l'amplitude d'un signal acoustique amorti par sa propagation dans un milieu particulier.

De plus, la généralisation des capteurs et moyen de mesure place de plus en plus souvent l'ingénieur ou le scientifique en face de signaux difficiles à décrire, présentant des fluctuations imprévisibles (au moins à première vue) et en général non répétables : dans ce cas, la recherche de paramètres communs dans les différentes mesures se fait plus facilement dans le cadre aléatoire (par exemple en calculant des moyennes).

Chapitre 2

Principaux résultats de la théorie des probabilités

Cette théorie se développe depuis plusieurs siècles en essayant de répondre à la question suivante : Comment formaliser une expérience où intervient le hasard ?

2.1 Formalisation des résultats d'une expérience aléatoire

2.1.1 Définitions

◇ *Définition 1 : Une expérience sera dite aléatoire si le résultat ne peut être prévu à l'avance ou si la répétition de la même expérience peut fournir des résultats différents.*

◇ *Définition 2 : On définit Ω l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire*

Dans les situations simples, Ω contient une collection dénombrable d'éléments $\omega_1, \omega_2, \dots$. Exemples :

– jeté de 1 dé.

$$\Omega = \{face1, face2, face3, face4, face5, face6\}$$

– jeu de pile ou face

$$\Omega = \{face, pile\}$$

Dans ces 2 exemples, le nombre de sorties possibles est fini (6 pour la première, 2 pour la seconde).

– Tirage de pile ou face jusqu'à ce que "face" apparaisse.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$$

Dans ce dernier cas, le nombre d'éléments est infini. ω_i correspond à la sortie de "face" au i ème tirage.

Dans la plupart des expériences aléatoires utilisées en ingénierie, Ω n'est pas une collection dénombrable. Les exemples précédents sont des exemples classiques utilisés pour l'enseignement des probabilités, mais ne correspondent pas aux problèmes auxquels doit faire face un ingénieur.

On peut parfois définir un ensemble Ω non dénombrable, mais conservant un sens physique intuitif. Par exemple, si on étudie le problème suivant : une lampe est mise en service à l'instant t_0 et on note sa durée de fonctionnement. On peut considérer que $\Omega = \{\omega : \omega > t_0\}$. ω est alors un instant particulier sur la demi droite réelle $]t_0, +\infty[$.

Dans certaines situations, ω symbolise la sortie de l'expérience aléatoire, mais n'a pas forcément une valeur précise ou un sens physique : on observe et surtout on décrit le résultat par l'intermédiaire d'une variable aléatoire (cette notion est définie plus loin).

2.1.2 Notion d'évènement

◇ *Définition 3* : On appelle "évènement" une proposition logique relative au résultat d'une expérience aléatoire.

Exemple : à propos de l'expérience "jeté de 1 dé"

- Proposition 1 "le résultat du jet de dé est un nombre supérieur à 4"
- Proposition 2 "le résultat du jet de dé est un nombre pair"

Chacune de ces propositions appelle une réponse positive ou négative dès que le tirage sera effectué.

Tout sous-ensemble de Ω peut être considéré comme un évènement. En effet, un évènement est une proposition correspondant à divers résultats possibles de l'expérience. On peut donc trouver une équivalence entre n'importe quelle proposition logique et le sous-ensemble des résultats possibles de l'expérience qui valide cette proposition.

Exemple :

• *Proposition 1* $\equiv E = \{5, 6\}$ Lorsque Ω n'est pas un ensemble dénombrable, la situation est en générale identique.

Exemple : si l'expérience consiste à attendre la panne d'un composant à partir d'un instant t_0 , alors on peut écrire $\Omega = \{\omega : \omega > t_0\}$. L'évènement "le composant tient plus d'un an" s'écrira bien sous la forme $E = \{\omega : \omega > t_0 + 1an\}$

◇ *Définition 4* : On appelle "sigma-algèbre" (notée \mathcal{C} par la suite) une collection particulière d'évènements vérifiant les 3 axiomes suivants :

- \mathcal{C} n'est pas vide.
- si $A \in \mathcal{C}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{C}$
(évènements complémentaires)
- $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$

On peut vérifier que ces 3 axiomes entraînent les résultats suivants :

- si $A, B \in \mathcal{C}$ alors $A \cup B \in \mathcal{C}$ et $A \cap B \in \mathcal{C}$
(évènement union ou intersection de 2 évènements)
- $\Omega \in \mathcal{C}$ (évènement certain)
- $\emptyset \in \mathcal{C}$ (évènement impossible)

◇ *Définition 5* : On appelle espace probabilisable le couple (Ω, \mathcal{C}) .

♣ Exemples :

- Jeu de pile ou face avec 1 pièce $\Omega = \{p, f\}$
 \mathcal{C} comprend des évènements comme "le résultat est p" ou "le résultat est f ou p"
- Jeu de pile ou face avec 2 pièces $\Omega = \{(p, p), (p, f), (f, p), (f, f)\}$
 \mathcal{C} comprend plus d'évènements possibles comme "au moins 1 p"
- Durée de vie d'un composant électronique $\Omega = \{t : 0 \leq t \leq \infty\}$
Ce cas est très différent des autres puisque cet ensemble n'est pas dénombrable, Ω contient un morceau de \mathbb{R} . \mathcal{C} peut contenir des évènements comme "la durée de vie du composant est inférieur à 5 ans" ou "la durée de vie du composant est infinie".

2.1.3 Définitions de la mesure de probabilité

On va maintenant se munir d'une mesure sur ces évènements. Ce besoin s'est fait sentir très tôt, et a donné 2 définitions devenues classiques, puis un formalisme général.

- **Approche par les dénombrements**

Si A est un évènement sur Ω , on attribue à A la mesure :

$$\Pr(A) = \frac{N_A}{N} \quad (2.1)$$

N_A : nombre de cas favorable à A , c'est à dire tels que A est vrai.

N : nombre de tous les résultats possibles de l'expérience ($\text{card}(\Omega)$).

Exemple du jeu de dé :

$$\Pr(\text{"le résultat est un nombre pair"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Note : Cette définition conduit évidemment à $0 \leq \Pr(A) \leq 1$. Par ailleurs, cette définition n'a de sens que si tous les évènements considérés sont équiprobables.

– **Approche par les fréquences relatives :**

En répétant l'expérience suffisamment de fois (n fois), on peut espérer mesurer $\Pr(A)$ en comptant le nombre de fois où on observe que A est vrai (n_A) par rapport au nombre total d'expériences réalisées. On écrit alors :

$$\Pr(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (2.2)$$

Cette approche permet d'expérimenter des évènements qui ne sont pas équiprobables.

Le résultat des approches précédentes est de fournir des règles pour associer un nombre compris entre 0 et 1 à un évènement, en relation avec ses chances d'être vrai. Ce choix sera maintenu d'une façon générale pour définir la notion de probabilité comme mesure d'un évènement.

– **définition axiomatique**

◇ *Définition 6 : On appelle probabilité sur (Ω, \mathcal{C}) une application*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: \mathcal{C} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \Pr(A) \end{aligned} \quad (2.3)$$

telle que :

– $\Pr(\Omega) = 1$

– Si $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ sont des évènements incompatibles alors

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \Pr(A_i)$$

Une loi de probabilité doit donc se comprendre comme une mesure des évènements. Du point de vue purement théorique, cette définition est satisfaisante, et toute fonction vérifiant ces axiomes est acceptable. Cependant, le choix de \mathcal{P} sera très important si on veut l'utiliser pour prédire des occurrences d'évènements dans un problème réel.

◇ *Définition 7 : On appelle espace probabilisé le triplet $(\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P})$*

Propriétés :

– La mesure de l'ensemble vide est nulle :

$$\Pr(\emptyset) = 0 \quad (2.4)$$

– Evénements complémentaires :

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(\bar{A}) \quad (2.5)$$

– Si $A \subset B$ alors

$$\Pr(A) \leq \Pr(B) \quad (2.6)$$

– Union de deux évènements :

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \quad (2.7)$$

– Si $\{B_i\}_{i=1, n}$ est une partition de \mathcal{C} , alors

$$\forall A \quad \Pr(A) = \sum_{i=1}^n \Pr(A \cap B_i) \quad (2.8)$$

Une façon de se convaincre de ces résultats consiste à représenter les ensembles concernés sous forme de bulles et d'associer, par exemple, la notion de mesure de probabilité avec la mesure de la surface représentée.

Exemple :

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \quad (2.9)$$

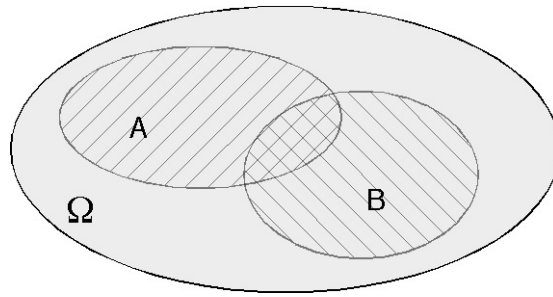


FIGURE 2.1 – Graphe ensembliste

2.1.4 Quelques lois et concepts utiles

1. Probabilités conditionnelles

Intuitivement, si dans un jeu de 2 dés, on s'intéresse à l'évènement "somme=8", il est assez facile par dénombrement de trouver une probabilité de $5/36$. Si on suppose que l'on observe d'abord le premier dé, et que celui-ci donne un 3, il ne reste plus alors qu'une possibilité pour vérifier l'évènement (le second dé doit fournir un 5), soit 1 cas favorable sur 6 cas possibles. On voit bien que la connaissance de la réalisation d'un évènement B qui a un rapport avec l'évènement A qui nous intéresse modifie la mesure de probabilité de cet évènement A .

Le problème consiste donc à définir la probabilité d'un évènement A sachant qu'un évènement B s'est réalisé. En général, la réalisation de B apporte une information de nature à modifier la mesure que l'on fera de A . Deux cas se présentent :

- $A \cap B = \emptyset$ Il n'y a pas de possibilité pour A et B d'être vrai simultanément. Par conséquent, si B est vérifié, A ne peut pas exister.
On notera $\Pr(A|B) = 0$
- $A \cap B \neq \emptyset$ Alors A peut exister avec B , mais sa mesure doit être celle de la probabilité de A à l'intérieur de B (B devient l'ensemble des possibles : une fois B réalisé, le reste est exclu). La probabilité de A sachant que B est réalisé est donc la mesure de l'évènement "A et B sont vrais ensemble" ramenée à la mesure du nouveau champs des possibles B .

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \quad (2.10)$$

notation : $\Pr(A|B)$ = probabilité que A soit vrai sachant que B est vrai.

2. Indépendance

◇ *Définition 8* : A est indépendant de B si $\Pr(A|B) = \Pr(A)$

Clairement la connaissance que B soit vrai ou faux n'influe pas sur la mesure de A . On en déduit immédiatement (avec (2.10)) que dans ce cas :

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B) \quad (2.11)$$

3. Formules de Bayes

Thomas Bayes (1701-1761), ministre Anglais de son époque, a utilisé dans un article intitulé "Essay towards solving a problem in the doctrine of chances", la formule suivante, connue désormais sous le nom de théorème de Bayes.

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)} \quad (2.12)$$

Ce résultat s'obtient très facilement en admettant que $\Pr(A \cap B) = \Pr(B \cap A)$ et en utilisant (2.10). Cette formule joue un rôle central actuellement dans l'art de l'ingénieur et notamment pour les problèmes de décision en traitement du signal.

Exemple :

Considérons la transmission d'un mot binaire $\{0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ \dots\}$ dans un système de télécommunication. Le mot émis doit être retrouvé dans un signal bruité. Une solution peut être d'évaluer la moyenne locale du signal, et on posera alors la question suivante :

Quelle est la probabilité pour que l'évènement

$\mathcal{A} = \text{"le morceau de signal que j'observe est un 0 (resp. un 1)"}$

soit vrai, sachant que la proposition

"la moyenne de mon morceau de signal est plus petite (resp. plus grande) que le seuil s fixé" est vérifiée?

En effet, l'idée sera ici d'attribuer naturellement la valeur 1 si la moyenne est assez grande, et la valeur 0 sinon. Cependant, les déformations du signal durant la transmission rendent la décision incertaine.

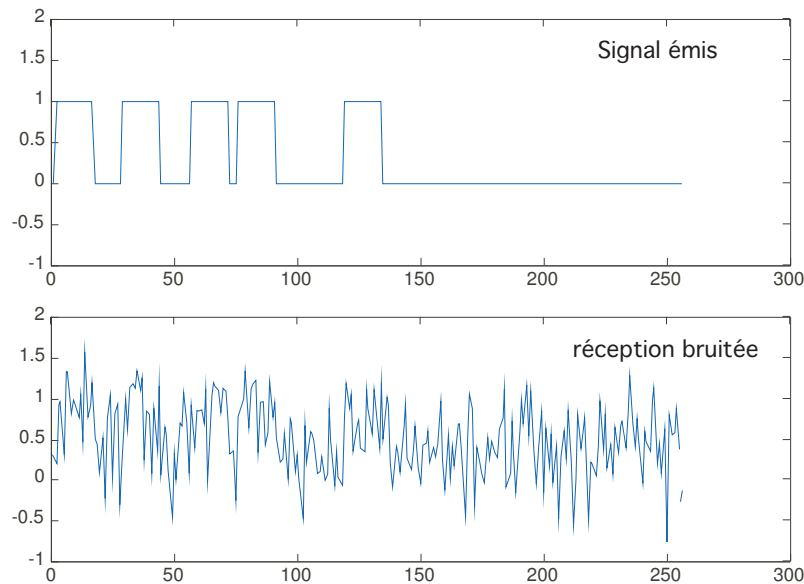


FIGURE 2.2 – Simulation de transmission

Ce type de questions va s'écrire à l'aide des probabilités conditionnelles :

$$\Pr(\mathcal{E} = 0 | m < s)?$$

$$\Pr(\mathcal{E} = 1 | m \geq s)?$$

" $\mathcal{E} = 0$ " (resp 1) signifie que le symbole émis est un 0 (resp. un 1), ce qui se lit :

Quelle est la probabilité d'avoir affaire à un 0 sachant qu'on observe $m \geq s$?

mais on peut aussi poser les questions suivantes :

$$\Pr(\mathcal{E} = 1 | m < s)?$$

$$\Pr(\mathcal{E} = 0 | m \geq s)?$$

Ces deux dernières questions vont permettre d'évaluer les erreurs commises.

◊Exercice : *Que signifient-elles?*

L'utilisation de la règle de Bayes permet de répondre en reliant ces questions de récepteur à des propriétés du système de transmission que l'on évaluera au préalable en calculant :

$$\Pr(m \geq s | \mathcal{E} = 1)?$$

C est à dire : quelle est la probabilité de trouver $m \geq s$ lorsqu'un symbole 1 est émis ($\mathcal{E} = 1$)?

Ces quantités peuvent être évaluées par une étude du système de transmission. Bayes nous suggère alors d'écrire :

$$\Pr(\mathcal{E} = 1 | m \geq s) = \frac{\Pr(m \geq s | \mathcal{E} = 1) \Pr(\mathcal{E} = 1)}{\Pr(m \geq s)}$$

La probabilité d'avoir des symboles 0 ou 1 qui apparaît dans la formule peut être évaluée selon le type de message envoyé. La probabilité $\Pr(m \geq s)$ peut être évaluée d'après les mesures. L'utilisation de la formules de Bayes permet donc de résoudre le problème.

2.2 Variables Aléatoires : Généralités

2.2.1 Définition d'une Variable Aléatoire

Objectif : Il s'agit cette fois de formaliser la notion de "grandeur variant selon le résultat d'une expérience aléatoire". Cette notion implique en particulier de décider de ce que l'on retient comme résultat.

•Exemple : Le jeu de fléchette

Un joueur jette une fléchette et celle-ci vient se ficher dans la cible. Même si le joueur est très habile, le point d'arrivée ne peut pas être prédit. Il s'agit donc bien d'une expérience aléatoire.

Les règles du jeu classique attribuent un nombre de points selon le secteur où la flèche s'est plantée. On pourrait imaginer beaucoup d'autres mesures de l'habileté comme :

- La distance euclidienne du point touché par rapport au centre de la cible $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
- L'une ou l'autre des coordonnées euclidiennes
- Le couple de coordonnées euclidiennes ou polaires (x, y) , (ρ, θ)
- N'importe quoi d'autre ... $e^{-\sqrt[3]{\rho^2 + \sin(\theta)}}$, ...

On voit bien que la valeur numérique est le résultat d'un choix arbitraire associé au résultat de l'expérience aléatoire. Il s'agit simplement de définir une application de l'ensemble fondamental dans un ensemble de valeurs numériques possibles E .

Définition Une variable aléatoire est une application de $(\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P})$ dans \mathbb{R} .

$$X : \begin{array}{ccc} (\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P}) & \longrightarrow & E \subset \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & x \end{array} \quad (2.13)$$

Note : Cette définition est suffisante dans le cadre de ce cours. Elle est cependant incomplète sous cette forme. En toute généralité, il faut encore définir une tribu \mathcal{B} . Retenez surtout que ce que l'on appelle une *variable aléatoire* est en fait une **fonction**. Cette appellation impropre est source de confusion et engendre de nombreuses difficultés pour les étudiants.

2.2.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

◇ **Définition 9** : On appelle **Loi de Probabilité** d'une variable X la mesure image de \mathcal{P} par X .

◇Exemple : Jeu de lancé de deux dés.

$X : \omega \longmapsto$ "somme des 2 dés"

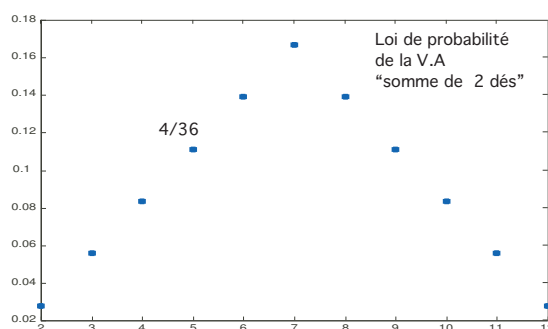
Ici, $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

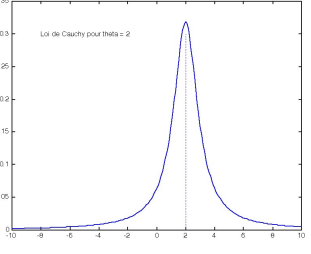
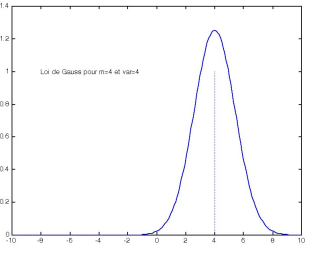
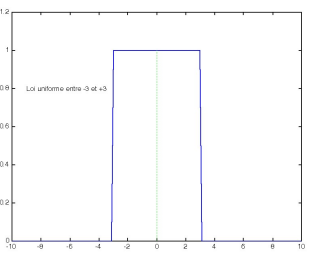
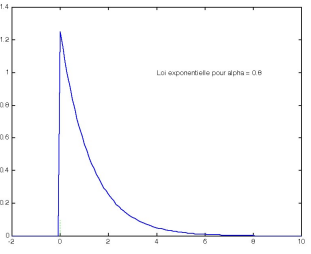
Considérons la probabilité d'obtenir la somme $S = 5$:

$\Pr(S = 5) = \Pr(\text{"obtenir (1, 4) ou (2, 3) ou (3, 2) ou (4, 1)"})$

Soit en utilisant l'approche par dénombrement, $\Pr(S = 5) = \frac{4}{36}$

On peut évaluer ce résultat pour chaque valeur de E . La loi de probabilité est alors :



Quelques lois classiques :		
Loi de Cauchy	$f_X(u) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{[1+(u-\theta)^2]}$	
Loi de Gauss	$f_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}$	
Loi Uniforme	$f_X(u) = \frac{1}{2\theta} \Pi_{[-\theta, +\theta]}(u)$	
Loi Exponentielle	$f_X(u) = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha u} \Pi_{[0, +\infty]}(u)$	

D'une façon générale, dans le cas de variables aléatoires discrètes, c'est à dire qui peuvent prendre leurs valeurs dans un ensemble (éventuellement infini) dénombrable, leurs lois de probabilité sont données par $P(\alpha) = \Pr(X = \alpha)$

Dans le cas de variables continues, c'est à dire qui prennent leurs valeurs sur un intervalle de \mathbb{R} , on peut souvent définir une **densité de probabilité**. Une variable aléatoire admet une densité de probabilité $f_X(u)$ si :

$$\forall \Theta \subset \mathbb{R} \quad \Pr(X \in \Theta) = \int_{\Theta} f_X(u) du \quad (2.14)$$

On en déduit que :

$$\Pr(x \leq X \leq x + dx) = f_X(x) dx$$

Pour mémoire, le cas de l'événement certain se traduit par :

$$\forall \Theta \subset \mathbb{R} \quad \Pr(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) du = 1 \quad (2.15)$$

♣ Exemple : La durée de vie d'un composant électronique est en général évaluée par une mesure de temps t qui peut prendre ses valeurs sur les réels positifs. Il est évident que la probabilité pour que le composant tombe

en panne après 1 siècle de fonctionnement ($I_0 = [100 \text{ ans}, +\infty]$) est plus faible que la probabilité d'observer sa défaillance après 10 ans ($I_1 = [10 \text{ ans}, +\infty]$). Si on admet l'existence d'une densité de probabilité exponentielle, et d'après 2.15 :

$$\Pr(t \geq 10) = \int_{I_1} f_X(u) du \quad \Pr(t \geq 100) = \int_{I_0} f_X(u) du$$

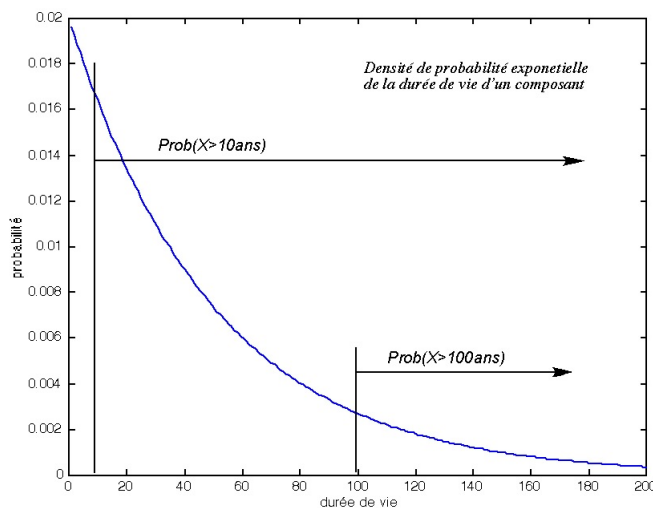


FIGURE 2.3 – default

En général, dans les problèmes de l'ingénieur, on peut toujours se munir d'une variable aléatoire commode dont la loi de probabilité admet une densité. Il n'est d'ailleurs pas rare que cette densité soit posée en hypothèse de travail plus ou moins réaliste.

♣ Très important : Dans tous les cas, on peut définir la loi de probabilité par *la fonction de répartition*

◇ *Définition 10* : On appelle **Fonction de Répartition** d'une variable aléatoire la quantité $F_X(u) = \Pr(X \leq u)$

Dans le cas de variables discrètes, $F_X(u)$ s'obtient en sommant les probabilités de tous les événements qui conduisent à une valeur de la variable aléatoire inférieure à u :

$$F_X(u) = \sum_{a \leq u} \Pr(X = a)$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue admettant une densité de probabilité :

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^u f_X(\theta) d\theta$$

2.2.3 Moments d'une variable aléatoire

Finalement, ce qui caractérise une variable aléatoire, c'est sa loi de probabilité. Or, la connaissance de cette loi est souvent impossible en pratique, et on est alors amené

- soit à poser cette loi en hypothèse
- soit à essayer de cerner cette loi de probabilité en étudiant ses *moments*

◇ *Définition 11* : On appelle (abusivement) **moment d'ordre n** d'une variable aléatoire le moment d'ordre n de sa loi de probabilité

- *Moments d'ordre n d'une variable discrète X*

$$m_n = \sum_{a \in E} a^n \Pr(X = a)$$

- Moments d'ordre n d'une variable continue X

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^n f_X(\theta) d\theta$$

L'étude des moments d'ordre faible (en pratique $n = 1$ à 4) s'avère extrêmement importante dans l'art de l'ingénieur et le traitement du signal en particulier.

1. Espérance Mathématique ($n=1$)

- Cas d'une variable discrète X

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in E} a \Pr(X = a)$$

- Cas d'une variable continue X

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta f_X(\theta) d\theta$$

Par sa définition, ce moment va nous renseigner sur la valeur moyenne des tirages que l'on pourra effectuer. Selon la forme de la loi de probabilité, l'espérance mathématique sera égale ou non à la médiane de l'ensemble E .

Remarque : Il n'est pas certain que cette intégrale ou cette somme converge. Cauchy a défini une densité de probabilité pour laquelle ce moment n'est pas défini. Il ne s'agit pas du tout d'une curiosité mathématique; cette distribution particulière correspond à des applications relativement simple.

2. Moment d'ordre 2 et Variance

Le moment d'ordre 2 va nous être donné par :

$$\sum_{a \in E} a^2 \Pr(X = a) \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^2 f_X(\theta) d\theta$$

On remarque tout de suite que ces formules correspondent à l'espérance mathématique¹ de la variable aléatoire $Y = X^2$. Lorsqu'il existe, le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire X sera donc noté $\mathbf{E}[X^2]$

Ce moment fournit le barycentre des valeurs que peut prendre la variable X^2 . Or le sens physique à attribuer à cette quantité n'est pas évident, et on préfère s'intéresser à la moyenne des fluctuations autour de la moyenne de la variable, c'est à dire à la variance.

◇ *Définition 12* : La variance d'une variable aléatoire X est le moment centré d'ordre 2 de X , soit

$$\mathbf{Var} X = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2]$$

Ce moment fournit une appréciation de la moyenne des écarts autour de la valeur moyenne des réalisations de la variable X .

- Cas d'une variable discrète X

$$\mathbf{Var} X = \sum_{a \in E} (a - m_1)^2 \Pr(X = a)$$

- Cas d'une variable continue X

$$\mathbf{Var} X = \int_{-\infty}^{+\infty} (\theta - m_1)^2 f_X(\theta) d\theta$$

3. Autres moments :

On pourra toujours s'intéresser à des moments d'ordre supérieur à 2.

$$m_k = \mathbf{E}[X^k] \quad \text{ou} \quad \mu_k = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^k]$$

Cependant, en Traitement du Signal, on ne dépasse pas l'ordre 4 actuellement. Les coefficients suivants sont particulièrement intéressants.

1. D'une façon générale, si $Y = g(X)$, on a : $\mathbf{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) f_X(\theta) d\theta$

- Coefficient d'assymétrie (skewness)

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

sensible à la dissymétrie de la loi de probabilité.

- Coefficient d'aplatissement (kurtosis)

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

sensible à la décroissance de la loi de probabilité.

4. Ouverture vers l'estimation

Le calcul des quantités précédemment décrites demande la connaissance de la loi de probabilité, ce qui n'est pas possible en général. Toutefois, si on effectue une infinité de tirages x_k de la variable étudiée X , on peut espérer que :

$$m_1 = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k$$

et

$$\sigma^2 = \mu_2 = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (x_k - m_1)^2$$

2.3 Etude conjointe de Variables Aléatoires :

2.3.1 Etude Conjointe de deux Variables Aléatoires

Considérons X et Y , 2 variables aléatoires sur le même espace probabilisé. (X, Y) est alors une application de $(\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P})$ dans \mathbb{R}^2 .

Exemple : Repérage du tir de fléchettes par 2 coordonnées.

Aux questions précédentes, concernant la façon dont chaque variable va se réaliser en "moyenne" ou en "variance"...etc, vont s'ajouter des questions du genre :

- Ces variables varient elles de façon indépendante
- Est-ce que si la réalisation de X est grande, alors celle de Y est plus souvent grande ? ou petite ?
- Est-ce que si la réalisation de X est positive, alors celle de Y est plus souvent positive ? ou négative ?

A l'étude de chaque variable séparément va donc s'ajouter **leur étude conjointe**.

1. Indépendance de deux variables aléatoires :

Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes (voir 2.11) si, pour tout choix de sous ensembles de \mathbb{R} , I_1 et I_2 , on a :

$$\Pr(X \in I_1 \text{ et } Y \in I_2) = \Pr(X \in I_1) \cdot \Pr(Y \in I_2)$$

Ce qui peut se dire également de la façon suivante : pour tout couple de réels (a, b) ,

$$\Pr(X \leq a \text{ et } Y \leq b) = \Pr(X \leq a) \cdot \Pr(Y \leq b)$$

Ce qui permet d'établir que l'indépendance est assurée si la loi de probabilité conjointe des 2 variables (c'est à dire la loi qui précise $\Pr(X \leq a \text{ et } Y \leq b)$) est égale simplement au produit des lois de chacune des variables.

- Variables discrètes

$$P_{XY}(u, v) = \Pr(X = u \text{ et } Y = v) = \Pr(X = u) \cdot \Pr(Y = v)$$

- Variables continues

$$f_{XY}(u, v) = f_X(u) \cdot f_Y(v)$$

Cette propriété n'est pas toujours passionnante en fait, et en traitement du signal on tire souvent parti du fait que, précisément, les variables observées ne sont pas indépendantes. Ceci permet par exemple de prédire la valeur que va prendre un signal avant de l'avoir observé (bien évidemment au sens d'une moyenne).

2. Espérance d'un produit et Covariance :

La façon la plus simple d'observer le comportement conjoint de deux variables consiste à étudier l'espérance de leur produit $\mathbf{E}[XY]$. Par définition :

$$\mathbf{E}[XY] = \sum_{k \in E_X} k.l.P_{XY}(X = k \text{ et } Y = l)$$

ou

$$\mathbf{E}[XY] = \iint_{\mathbb{R}^2} uv f_{XY}(uv) dudv$$

selon que X et Y sont des variables discrètes ou continues.

Remarque 1 : Si X et Y sont indépendantes $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$ mais la réciproque n'est pas vraie.

Remarque 2 : Si $Y = X$ on retrouve le moment d'ordre 2

On peut évidemment travailler avec les variables centrées. Soit :

$$C_{XY} = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])]$$

C_{XY} est appelée Covariance de X et de Y .

Remarque : Si $Y = X$ $C_{XY} = \mathbf{Var}[X]$

Propriétés :

Soit $Z = X + Y$

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}[Z] &= \mathbf{Var}[X + Y] = \mathbf{E}[(X + Y - \mathbf{E}[X + Y])^2] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X] + Y - \mathbf{E}[Y])^2] \\ \Rightarrow \mathbf{Var}[Z] &= \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] + \mathbf{E}[(Y - \mathbf{E}[Y])^2] + 2\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])] \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbf{Var}[Z] = \mathbf{Var}[X] + \mathbf{Var}[Y] + 2\mathbf{Cov}[X, Y]$$

La covariance est donc une mesure de la dépendance statistique de 2 variables (définies sur le même espace).

On définit encore :

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

ρ_{XY} est le coefficient de corrélation, et on montre que :

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

$$\begin{aligned} \text{avec } |\rho_{XY}| &= 1 & \text{si } Y &= aX + b & \text{(relation linéaire)} \\ \text{et } \rho_{XY} &= 0 & \text{si } \mathbf{Cov}[X, Y] &= 0 & \text{(indépendance)} \end{aligned}$$

2.4 Etude conjointe de Variables Aléatoires :

2.4.1 Etude Conjointe de n Variables Aléatoires

Soit X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P})$. Pour manipuler facilement toutes ces variables, nous allons adopter une notation vectorielle. Soit :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

\mathbf{X} est un vecteur aléatoire. Il s'en suit que :

$$\mathbf{E}[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \mathbf{E}[X_1] \\ \mathbf{E}[X_2] \\ \vdots \\ \mathbf{E}[X_n] \end{pmatrix}$$

est également un vecteur dont les composantes sont les espérances mathématiques de chaque variable aléatoires X_i .

Si on note :

$$\begin{aligned}\forall i \quad \sigma_i^2 &= \mathbf{Var}[X_i] \\ \forall i, j \quad \sigma_{ij} &= \mathbf{Cov}[X_i, X_j]\end{aligned}$$

et en remarquant que $\sigma_i^2 = \mathbf{Cov}[X_i, X_i]$, il est d'usage de réunir toute ces composantes dans un tableau symétrique de la forme suivante :

$$\mathbf{C}_X = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}^2 & \cdots & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

En posant $\mathbf{X}^\circ = \mathbf{X} - \mathbf{E}[\mathbf{X}]$ (vecteur centré), on peut écrire que :

$$\mathbf{C}_X = \mathbf{E} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^\circ \mathbf{X}_1^\circ & \mathbf{X}_1^\circ \mathbf{X}_2^\circ & \cdots & \mathbf{X}_1^\circ \mathbf{X}_n^\circ \\ \mathbf{X}_2^\circ \mathbf{X}_1^\circ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{X}_n^\circ \mathbf{X}_1^\circ & \cdots & \cdots & \mathbf{X}_n^\circ \mathbf{X}_n^\circ \end{bmatrix} \right) = \mathbf{E}[\mathbf{X}^\circ \mathbf{X}^{\circ \dagger}]$$

Dans cette expression et par la suite le symbole \dagger désigne la transposition du vecteur.

◇ Propriétés Utiles

Si on considère un vecteur $Y = AX + B$ de dimension m avec ici :

A : matrice ($m \times n$)

B : vecteur ($m \times 1$)

alors $\mathbf{E}[Y] = A\mathbf{E}[X] + B$

et si on pose : $\mathbf{Y}^\circ = Y - \mathbf{E}[Y] = A\mathbf{X}^\circ$ (vecteurs centrés)

on peut alors déduire \mathbf{C}_Y de \mathbf{C}_X par la relation suivante :

$$\mathbf{C}_Y = \mathbf{E}[\mathbf{Y}^\circ \mathbf{Y}^{\circ \dagger}] \implies \mathbf{C}_Y = \mathbf{E}[A\mathbf{X}^\circ \mathbf{X}^{\circ \dagger} A^\dagger] = A\mathbf{C}_X A^\dagger$$

Un cas courant est obtenu en utilisant une matrice A de dimension ($1 \times n$). Y est alors une variable de dimension 1, combinaison linéaire des composantes de \mathbf{X} . Exemple :

1. La TFD d'une N -séquence \mathbf{X} peut s'écrire sous forme matricielle avec

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{W}_N \mathbf{X}$$

\mathbf{W}_N est une matrice contenant les racines Nième de l'unité (c'est à dire les puissance de $W = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$)

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} W^{0.0} & W^{-0.1} & \cdots & W^{-0.(N-1)} \\ W^{-1.0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ W^{-(N-1).0} & \cdots & \cdots & W^{-(N-1).(N-1)} \end{bmatrix}$$

Si \mathbf{X} est une séquence aléatoire, on pourra écrire :

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{W}_N \mathbf{X}$$

et on en déduit que :

- $\hat{\mathbf{X}}$ est un vecteur aléatoire caractérisé à l'ordre 2 par sa moyenne et sa matrice de variance-covariance.
 - $\mathbf{E}[\hat{\mathbf{X}}]$ La moyenne de la TFD du vecteur \mathbf{X} est la TFD du vecteur moyenne de \mathbf{X}
 - $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}} = \mathbf{W}\mathbf{C}_X\mathbf{W}^H$
- (H : transposée+conjuguée)

2. Si on veut prédire la $(k+1)$ ème valeur d'une séquence observée jusqu'à l'instant k par une combinaison linéaire des $(p+1)$ instants précédents, on construit la quantité y par :

$$y = a_0x_k + a_1x_{k-1} + \dots + a_px_{k-p}$$

Si \mathbf{X} est une séquence aléatoire, on peut écrire cette équation sous forme matricielle :

$$\mathbf{Y} = \sum_{\ell=0}^p a_\ell x_{k-\ell} = A^\dagger \mathbf{X}_k$$

avec les vecteurs définis de la manière suivante :

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-p} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}$$

\mathbf{Y} est donc une variable aléatoire caractérisée à l'ordre 2 par sa moyenne et sa variance.

- $\mathbf{E}[\mathbf{Y}] = A^\dagger \mathbf{E}[\mathbf{X}]$
- $\mathbf{Var}[\mathbf{Y}] = A^\dagger \mathbf{C}_\mathbf{X} A$

Chapitre 3

Notions générales sur l'estimation ponctuelle :

3.1 Position du problème

Lorsqu'un enseignant veut se faire une idée du niveau d'un élève, il lui fait passer plusieurs examens, attribue une note à chacun d'eux, et calcule la moyenne arithmétique de ces notes. Le cadre théorique de l'estimation ponctuelle permet de généraliser cette approche, de préciser dans quels cas ce genre d'approche est licite, et de renseigner sur la qualité du résultat obtenu.

Cette partie constitue une brève introduction au domaine. Son objectif est de définir les concepts qui seront utilisés en analyse spectrale. Pour une analyse plus précise de ces outils, on se reportera avec profit au cours correspondant de l'UV SY02.

3.1.1 Cadre général de l'estimation ponctuelle

1. Définitions :

Soit $X(\omega)$ une variable aléatoire de loi $F_X(u; \theta)$. θ désigne ici un paramètre dont dépend la loi de X .

Par exemple :

- Une loi gaussienne $N(\mu, \sigma^2)$ dépend de deux paramètres μ et σ . On peut les regrouper dans un vecteur de paramètres $\theta = (\mu, \sigma)$
- Une loi de Poisson ne dépend que d'un seul paramètre, souvent noté λ . ($\theta = (\lambda)$)

Soit $\{x_i\}_{i \in I}$ un ensemble de réalisations de la variable $X(\omega)$. Le problème, en estimation ponctuelle, est d'estimer le mieux possible la valeur de θ à l'aide des x_i

Pour cela il faut trouver une règle d'estimation, c'est à dire une opération sur les nombres x_i dont le résultat soit proche de la vraie valeur de θ . On la notera :

$$\tilde{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Par ailleurs, il est équivalent de dire que : $\forall i$ x_i est une réalisation de la variable aléatoire X ou de dire

$\forall i$ x_i est une réalisation de la variable aléatoire $X_i = X$

A partir de ce constat, on appelle **estimateur du paramètre** θ la variable aléatoire :

$$\tilde{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

A chaque tirage des variables X_i , le résultat obtenu $\tilde{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ est une **estimation**.

Il est très important de ne pas confondre l'estimateur (V.A.) et l'estimation (nombre réel).

2. Qualité d'un estimateur

La qualité de l'estimateur s'évalue en étudiant l'erreur d'estimation :

$$e(\omega) = \tilde{\theta}(\underline{\mathbf{X}}) - \theta = \tilde{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_N) - \theta$$

$e(\omega)$ est évidemment une variable aléatoire, et donc, s'étudie par sa loi de probabilité. Si θ est un paramètre déterministe, la loi de $e(\omega)$ dépend seulement de celle de $\tilde{\theta}$:

$$\begin{aligned} F_e(u) &= \Pr(e(\omega) \leq u) \\ &= \Pr(\tilde{\theta}(\underline{\mathbf{X}}) - \theta \leq u) \\ &= \Pr(\tilde{\theta}(\underline{\mathbf{X}}) \leq \theta + u) = F_{\tilde{\theta}}(\theta + u) \end{aligned}$$

Remarque : θ peut être aussi aléatoire, auquel cas il faudra considérer la loi conjointe de $\tilde{\theta}$ et θ . Il y a plusieurs méthodes pour mesurer la qualité d'un estimateur. La plus classique consiste à étudier ses deux premiers moments :

$$\mathbf{E}[\tilde{\theta}(\underline{\mathbf{X}})] \text{ et } \mathbf{Var}[\tilde{\theta}(\underline{\mathbf{X}})]$$

– Biais d'un estimateur :

On appelle **biais** d'un estimateur la quantité $\mathbf{b} = \mathbf{E}[\tilde{\theta}(\underline{\mathbf{X}}) - \theta]$

Si θ est déterministe, ou considéré comme tel, $\mathbf{b} = \mathbf{E}[\tilde{\theta}(\underline{\mathbf{X}})] - \theta$

Il s'agit du premier moment, de la "moyenne" de l'erreur d'estimation.

On souhaite souvent que cette espérance soit nulle :

$$\mathbf{b} = 0 \implies \mathbf{E}[\tilde{\theta}(\underline{\mathbf{X}})] = \theta$$

– Variance d'un estimateur :

Toujours avec θ déterministe, la variance de l'estimateur est égale à la variance de l'erreur d'estimation :

$$\mathbf{Var}[e(w)] = [\tilde{\theta}(\underline{\mathbf{X}}) - \theta] = \mathbf{Var}[\tilde{\theta}(\underline{\mathbf{X}})]$$

On a toujours intérêt à avoir une variance de l'estimateur la plus petite possible pour être assuré de ne pas commettre une trop grande erreur d'estimation.

3. Exemple

Reprenons rapidement l'exemple de la moyenne arithmétique des tirages pour estimer l'espérance mathématique d'une variable Y .

Soit $\eta_Y = \mathbf{E}[Y]$.

Pour estimer η_Y à partir d'un N -vecteur de tirages de Y , on utilise l'estimateur :

$$\tilde{\eta}_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \quad (\forall i Y_i = Y)$$

– Biais :

$$\mathbf{E}[\tilde{\eta}_Y] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}[Y_i] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}[Y] = \frac{1}{N} \cdot N \cdot \eta_Y = \eta_Y$$

– Variance

$$\mathbf{Var}[\tilde{\eta}_Y] = \mathbf{Var}\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i\right] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \mathbf{Var}[Y_i] = \frac{\text{var}[Y]}{N}$$

On doit ici supposer que les tirages de Y sont indépendants les uns des autres.

Chapitre 4

Le signal Aléatoire

4.1 Le signal Aléatoire : définitions et propriétés :

4.1.1 Modèle du Signal aléatoire

- ◇ *Définition 13* : Un signal aléatoire $x(t, \omega)$ est une fonction de deux variables dont
- l'une, t , représente en général le temps
 - l'autre, ω , est une épreuve dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P})$

Remarque : t peut parfois être une variable géométrique représentant une longueur, une distance, un déplacement,...

1. Trajectoire du signal

Pour une valeur déterminée de ω , c'est à dire, pour une réalisation de l'expérience aléatoire, $\omega = \omega_0$ $x(t, \omega_0)$ est une trajectoire du signal (on dit aussi parfois un "échantillon")

Dans ce cas, la trajectoire obtenue est déterministe. C'est une fonction du temps.

Si on envisage l'expérience aléatoire de jeter un dé, l'expérience garde son caractère aléatoire tant que le dé ne s'est pas immobilisé. Après quoi, le résultat est parfaitement déterminé. Dans le cas que nous étudions, le "jeté" ne produit pas un chiffre unique ou un nombre unique, mais toute une fonction du temps (ou de l'espace).

2. Variable aléatoire du signal

Si on fixe maintenant l'instant d'observation $t = t_0$ (quel que soit t_0), alors : $x(t_0, \omega)$ est une variable aléatoire qui se caractérisera par sa loi de probabilité (ou au moins ses premiers moments).

Evidemment, si la trajectoire est également fixée ($\omega = \omega_0$) alors :

$x(t_0, \omega_0)$ est une réalisation de la variable aléatoire : $x(t_0, \omega) \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

4.1.2 Description d'un signal aléatoire : Stationnarité

Un signal aléatoire est donc constitué d'une infinité de variables aléatoires, qui seront décrites à l'aide de leurs lois de probabilité propres :

exemple :

$x(t_0, \omega)$ est décrit par sa loi $F_x(u; t_0)$.

On se rappelle que $F_x(u, t_0) = \Pr(x(t_0, \omega) \leq u)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire x .

Mais la connaissance de ces lois ne suffit pas, car elle ne dit rien des relations statistiques entre les variables.

Exemple :

Considérons les instants t_0 et t_1 . Est-ce que si $x(t_0)$ est grand, la probabilité d'avoir $x(t_1, \omega)$ grand est grande ou petite ? ou bien est ce que la valeur de $x(t_0)$ n'a aucune influence sur celle de $x(t_1)$?

Pour appréhender ces propriétés du signal aléatoire, on aura besoin des lois conjointes d'ordre 2 :

Exemple :

$$F_x(u, v; t_0, t_1) \triangleq \Pr(x(t_0, \omega) \leq u \cap x(t_1, \omega) \leq v)$$

D'une façon générale, on s'intéressera aux lois conjointes d'ordre n :

$$F_x(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

1. Stationnarité au sens strict

◇ *Définition 14* : Un signal aléatoire est dit stationnaire au sens strict si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes dans tout changement de l'origine des temps

Considérons n instants du signal : t_1, t_2, \dots, t_n .

A chaque instant est associée une variable aléatoire $x(t_j, \omega)$. Si le signal est stationnaire, la loi conjointe de ces n variables sera telle que :

$$F_x(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F_x(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_{n-1} + \tau) \quad (4.1)$$

La translation de l'origine des temps d'une durée τ n'affecte pas la loi conjointe. Il en résulte que la densité de probabilité, (ou la loi de probabilité) d'une variable $x(t_i, \omega)$ ne dépendra pas de t_i puisque :

$$F_x(u, t_i) = F_x(u, t_i + \tau) \quad \forall \tau$$

En particulier l'espérance mathématique de $x(t_i, \omega)$ sera la même à chaque instant. Il en sera de même de tous les autres moments.

Dans le cas $n=2$, la stationnarité s'écrit :

$$F_x(u, v; t_0, t_1) = F_x(u, v; t_0 + \tau, t_1 + \tau) \quad \forall \tau$$

Cette propriété ne peut être vérifiée que si F_x ne dépend de t_0 et de t_1 que par leur différence :

$$F_x(u, v; t_0, t_1) = F_x(u, v; t_0 - t_1)$$

Or la covariance des 2 variables aléatoires que sont $x(t_0, \omega)$ et $x(t_1, \omega)$ est le moment d'ordre 2 de leur loi de probabilité conjointe :

$$\begin{aligned} \gamma_x(t_0, t_1) &= \mathbf{Cov}(x(t_0, \omega), x(t_1, \omega)) \\ &= \iint u.v \, dF_x(u, v, t_0 - t_1) \\ &= \gamma_x(t_0 - t_1) \end{aligned}$$

La covariance des variables du signal ne dépend alors que de la durée qui les sépare. C'est-à-dire que :

$$\forall \tau \quad \gamma_x(t_0, t_0 + \tau) = \gamma_x(\tau) \quad (4.2)$$

Dans ce cas, $\gamma_x(\tau)$ est appelée : *Fonction d'autocorrélation* du signal aléatoire $x(t, \omega)$

Remarque (1) La différence entre fonction d'autocorrélation et covariance telle qu'elle a été introduite ci-dessus est conforme à l'école Française du traitement du signal. Dans la littérature anglo-saxonne en revanche, le terme *autocorrelation fonction* désigne le moment d'ordre 2 non centré.

Remarque (2) La propriété de stationnarité est conservée dans toutes les propriétés stationnaires, et en particulier dans le cas du filtrage linéaire

Remarque (3) Cette propriété est très exigeante et dans la plupart des problèmes, on se contente d'admettre la stationnarité à l'ordre 2, 3, ou 4. C'est à dire que la propriété d'indépendance vis-à-vis de l'origine des temps de la loi conjointe n'est vérifiée que pour $n=2, 3$, ou 4 (et 1 bien sûr).

2. Stationnarité au sens large

◇ *Définition 15* : Un processus stationnaire à l'ordre 1 et 2 est dit stationnaire au sens large

4.1.3 Description d'un signal aléatoire : ergodisme

1. Introduction du concept :

Le modèle du signal aléatoire permet une prise en compte complète du *hasard* qui intervient dans la génération des trajectoires. Toutefois, l'ingénieur dans sa pratique va être confronté à plusieurs problèmes :

– 1er problème :

Les lois de probabilité simples ou conjointes sont en général inconnues.

Il n'est pas réaliste en effet de supposer connue, à priori, les lois de probabilité de chaque instants d'un message téléphonique ou de la vibration d'une machine. La première raison à cela est que cette connaissance enlèverait tout intérêt à l'étude du signal : Si vous êtes certain de recevoir le message *bonjour* tous les matin à 9h00, il est inutile de passer beaucoup de temps à le déchiffrer.

Très modestement, l'ingénieur essaiera d'inférer à partir des mesures les propriétés statistiques d'ordre 1 et 2 (parfois 3 et même 4).

Exemple :

Pour inférer l'espérance mathématique de toutes les variables $x(t_i, \omega)$, on pourra par exemple recueillir plusieurs trajectoires du signal aléatoire et en faire la moyenne arithmétique :

$$\forall t_i \quad \tilde{\eta}(t_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x(t_i, \omega_j)$$

On retrouve alors le cadre naturel de la statistique et des estimations ponctuelles (ou autres).

La difficulté en traitement du signal provient du fait que, dans la plupart des situations, on ne dispose que d'une seule trajectoire, et de plus sur une durée limitée.

Si le modèle du signal aléatoire doit être appliqué (c'est à dire si la mesure d'une seconde trajectoire fournit une fonction du temps différente de la première), le problème consiste à savoir comment on peut extraire des informations sur le signal aléatoire à partir d'une seule trajectoire et dans quelle mesure on a le droit de le faire.

Exemple :

Un processus aléatoire a délivré le signal discret suivant

$$[\quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad]$$

Si on considère l'aspect déterministe de ce résultat, il s'agit d'un vecteur de dimension 1x4 sur lequel on peut effectuer par exemple une transformée de Fourier discrète.

Si on considère l'aspect aléatoire, on souhaitera connaître les lois de probabilité, ou au moins les moments du signal aléatoire qui se présente sous la forme suivante :

$$[\quad x(1, \omega) \quad x(2, \omega) \quad x(3, \omega) \quad x(4, \omega) \quad]$$

On cherchera à connaître par exemple : $\mathbf{E}[x(2, \omega)]$ ou $\mathbf{E}[x(1, \omega).x(3, \omega)]$.

Il est bien entendu impossible de calculer correctement ces quantités parce que les lois ne sont pas connues. Toutefois si :

$$\forall k \quad \mathbf{E}[x(k, \omega)] = \eta$$

(stationnarité d'ordre 1), on dispose finalement de 4 tirages de variables aléatoires possédant la même espérance mathématique. On peut alors espérer que leur moyenne arithmétique donnera une estimation correcte de l'espérance η :

$$\frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 x(k) = \frac{1}{4}(1 - 1 + 0 + 1) = \frac{1}{4}$$

Malheureusement, ceci n'est pas toujours le cas. La stationnarité du processus est insuffisante pour garantir que la moyenne temporelle de la trajectoire va fournir une information correcte sur l'espérance du signal. Il faut une condition supplémentaire.

– 2nd problème :

Supposons un signal aléatoire très simple, défini de la manière suivante :

$$\forall t \quad x(t, \omega) = X(\omega) = x(0, \omega)$$

$X(\omega)$ est une variable aléatoire quelconque. Dès que le tirage est effectué, $X(\omega)$ fournit un réel α , et le signal génère une trajectoire en forme de droite horizontale (signal constant) :

$$x(t) = \alpha$$

- vérifier que ce signal est stationnaire d'ordre 1, c'est à dire que la loi de la variable aléatoire $x(t, \omega)$ est indépendante de l'origine des temps, et donc de t .
- vérifier que ce signal est simplement stationnaire au sens strict : A chaque instant que vaut la loi de $x(t)$, et que pourra-t-on dire des lois conjointes ?
- Supposons que vous observez la trajectoire $x(t) = \alpha$, que vaut la moyenne temporelle de ce signal ?

Pour fixer les idées, supposons que $X(\omega)$ soit une variable gaussienne de moyenne 0 et de variance 1. La probabilité pour que le tirage de cette variable donne exactement 0 est nulle. On obtiendra très probablement un nombre quelconque compris entre -3 et 3, peut-être même au delà de ces limites¹. Il est évident par ailleurs que la moyenne de la trajectoire vaut α . En observant une trajectoire particulière, on n'a aucune chance de retrouver les moments, ou les lois de probabilités qui définissent le processus.

On voit sur cet exemple simple que l'étude d'un signal aléatoire à partir d'une seule trajectoire demande une autre hypothèse : Il faut que l'ensemble des tirages que réalise la trajectoire sur les instants t_i soit représentatif des tirages qu'aurait pu réaliser chaque variable $x(t_i, \omega)$. Cette propriété du signal s'appelle **ergodisme**.

2. Etude de l'ergodisme en moyenne :

Soit $x(t)$ un signal aléatoire stationnaire réel. La quantité :

$$m_T(\omega) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t, \omega) dt$$

est une variable aléatoire qui représente la moyenne temporelle des trajectoires sur $[-T, +T]$.

$$\mathbf{E}[m_T(\omega)] = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \mathbf{E}[x(t, \omega)] dt$$

Remarque : d'une certaine façon, on peut considérer que $\mathbf{E}[x(t, \omega)]$ est une intégrale sur la variable ω . Le signal considéré est stationnaire. Soit η_x son espérance, on a :

$$\forall t \quad \mathbf{E}[x(t, \omega)] = \eta_x$$

On obtient donc :

$$\mathbf{E}[m_T(\omega)] = \eta_x$$

et la moyenne temporelle est donc un estimateur non biaisé de l'espérance mathématique du signal aléatoire.

Si la variance de $m_T(\omega)$ tend vers 0 lorsque T tend vers l'infini, alors $m_T(\omega_0)$ (pour une trajectoire particulière donc) tend vers η_x en probabilité. C'est-à-dire que la valeur calculée à partir d'une seule trajectoire suffisamment longue sera proche de η_x avec une probabilité voisine de 1.

le processus est alors ergodique en moyenne

En revanche, si la variance de $m_T(\omega)$ ne tend pas vers 0 lorsque T tend vers l'infini, il n'y a aucune raison pour la valeur calculée sur une trajectoire converge d'une façon ou d'une autre vers η_x .

Pour mémoire, la variance de $m_T(\omega)$ est donnée ici par $\mathbf{E}[(m_T(\omega) - \eta_x)^2]$

4.2 Exemple de signal aléatoire : le bruit blanc

4.2.1 définition

Un bruit blanc est un processus stationnaire au second ordre constitué d'une suite de variables aléatoires centrées et décorréllées.

Remarque : On indique parfois l'indépendance, mais dans la plupart des situations, l'indépendance à l'ordre 2, c'est à dire la décorrélation, suffit.

Soit $b(t, \omega)$ un tel processus.

1. Le calcul de probabilité montre que la probabilité de tomber en dehors d'un intervalle de 3 écart type autour de la moyenne est très faible

$$\mathbf{E}[b(t, \omega)] = 0$$

$$\mathbf{Var}[b(t, \omega)] = \sigma_b^2$$

La décorrélation entraîne pour la fonction d'autocorrélation :

$$\gamma_b(\tau) = \mathbf{E}[b(t, \omega)b(t + \tau, \omega)] = \begin{cases} \sigma_b^2 & \text{si } \tau = 0 \\ 0 & \text{si } \tau \neq 0 \end{cases}$$

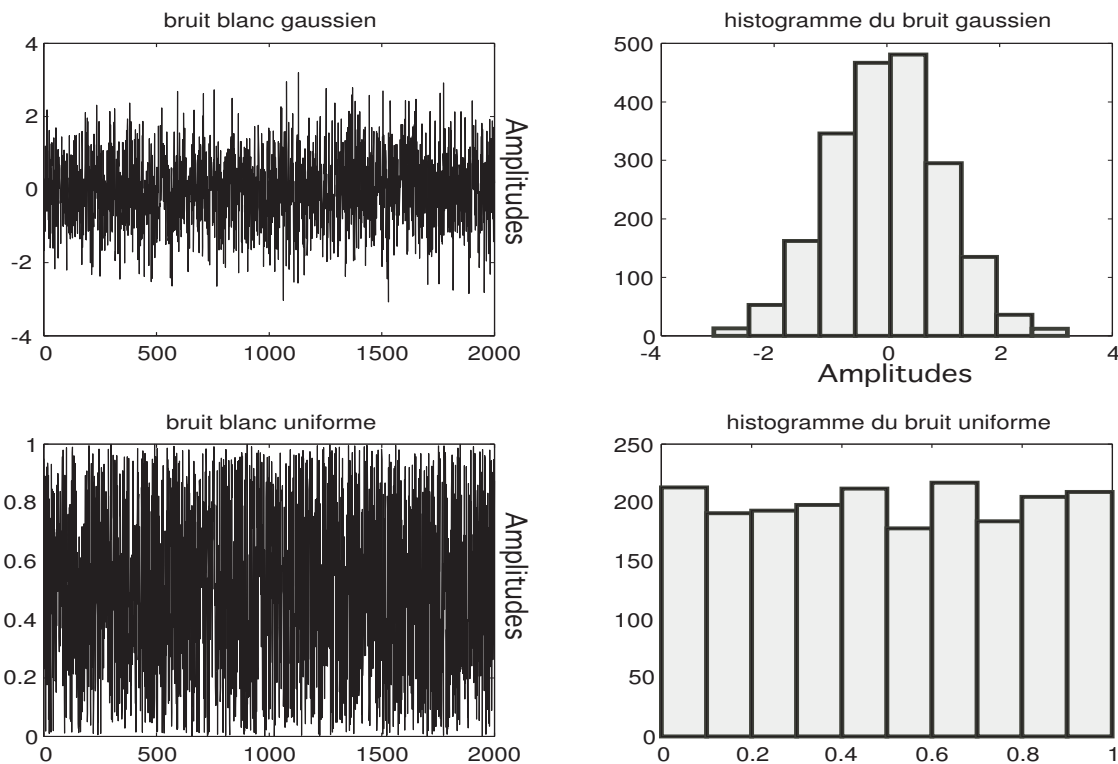
Ce qui peut s'écrire de façon résumée en utilisant l'impulsion de Dirac :

$$\gamma_b(\tau) = \sigma_b^2 \cdot \delta(\tau)$$

4.2.2 Comportement temporel

L'allure des trajectoires obtenues avec ce type de processus est bien évidemment très peu régulière, puisqu'il est équiprobable de placer l'amplitude du signal n'importe où à chaque instant selon une probabilité réglée par la fonction de répartition.

La distribution des amplitudes fait partie des caractéristiques principales du bruit blanc. Les figures ci-dessous montre une trajectoire de bruit blanc gaussien et une trajectoire de bruit blanc uniforme avec les histogrammes des amplitudes obtenues.



4.2.3 Comportement fréquentiel

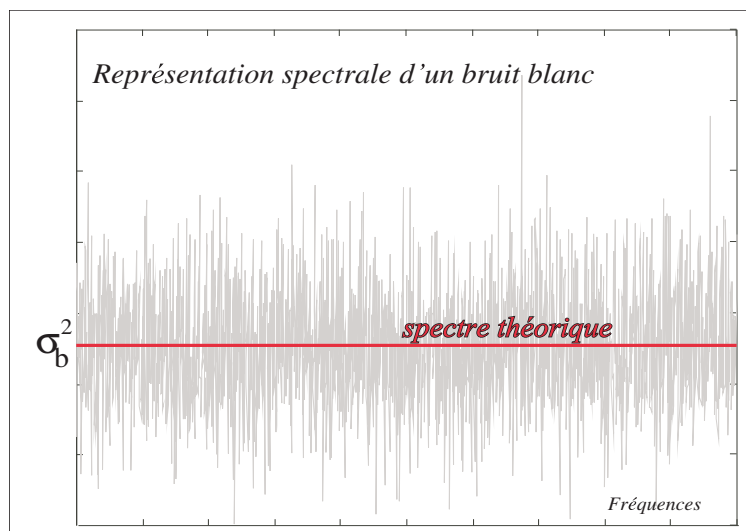
Par définition, le spectre d'un signal aléatoire est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation (ceci sera étudié dans le chapitre suivant).

En appliquant cela, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma_b(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_b(\tau) e^{-i \cdot \nu \cdot \tau} d\tau \\ &= \sigma_b^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-i \cdot \nu \cdot \tau} d\tau \\ &= \sigma_b^2 \end{aligned}$$

Ce qui signifie que toutes les fréquences sont représentées dans ce signal avec la même puissance. il n'y a pas de fréquences privilégiées.

Le modèle du bruit blanc est bien sûr théorique. Cependant il approche assez bien certains phénomènes physiques, comme les bruits thermiques en électronique par exemple.



Chapitre 5

Analyse spectrale des signaux aléatoires :

5.1 Éléments de théorie de l'analyse en fréquences

5.1.1 Théorème de Wiener-Khintchine

Nous exposons d'abord ce résultat dans la cadre des signaux déterministe à énergie finie. La densité spectrale d'énergie (ou spectre) dans ce cas est définie par le module de la transformée de Fourier.

Ce théorème montre que ce "spectre" est lié à la fonction d'autocorrélation par une transformée de Fourier.

Théorème de Wiener-Khintchine

La densité spectrale d'énergie d'un signal est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation

♣ Démonstration : On suppose donc $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Son autocorrélation [cas déterministe] est définie par :

$$\gamma_s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)s(t+\tau)dt$$

Si on en prend la transformée de Fourier :

$$\mathcal{TF}[\gamma_s](\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_s(\tau)e^{-i\zeta\tau}d\tau$$

On obtient, en remplaçant γ_s par son expression :

$$\begin{aligned} &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)s(t+\tau)e^{-i\zeta\tau}d\tau dt \\ &= \int s^*(t) \int s(t+\tau)e^{-i\zeta\tau}d\tau dt \\ &= \int s^*(t)(\hat{s}(\zeta)e^{i\zeta t})dt \end{aligned}$$

Ce qui permet de trouver le résultat attendu :

$$= \hat{s}^*(\zeta)\hat{s}(\zeta) = \|\hat{s}(\zeta)\|^2$$

5.1.2 Compléments : Signaux à puissance moyenne finie

1. Définitions

La puissance moyenne d'un signal $s(t)$ quelconque est définie par :

$$W_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt \quad (5.1)$$

Remarquons que : Si $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$, $W_s = 0$.

En partant de cette remarque, on distingue alors 3 classes de signaux :

- Classe 1 : Signaux à énergie finie $W_s = 0$
- Classe 2 : Signaux à puissance moyenne finie, $W_s < \infty$
- Classe 3 : $W_s \rightarrow \infty$

On s'intéresse dans ce qui suit à la classe 2. Ces signaux ont une énergie infinie, mais la puissance moyenne est finie. Un exemple de ces signaux est l'activité d'un réseau informatique : lorsqu'on l'observe, il ne semble y avoir ni début, ni fin, le nombre de bits par seconde qui passent dans le réseau est variable, mais pas infini.

2. Autocorrélation des signaux à puissance moyenne finie.

La fonction d'autocorrélation des signaux déterministes à puissance moyenne finie est définie par :

$$\gamma(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t)s(t+\tau)dt \quad (5.2)$$

On vérifie facilement que : $\gamma(0) \geq \gamma(\tau) \quad \forall \tau$ (inégalité de Schwarz), et que $\forall \tau \quad \gamma(\tau) = \gamma(-\tau)$

3. Densité spectrale de puissance des signaux à puissance moyenne finie :

Le spectre de puissance des signaux à puissance moyenne finie (PMF) est défini par la transformée de Fourier de leur fonction d'autocorrélation :

$$\Gamma(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) e^{-i\zeta\tau} d\tau \quad (5.3)$$

Il s'agit d'une extension naturelle du théorème de Wiener-Khintchine à cette classe de signaux.

Preuve :

Soit $f(t)$ un signal de la classe 2. On construit :

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } -T \leq t \leq +T \\ 0 & \text{si } |t| > T \end{cases}$$

f_T est à énergie finie. On peut donc calculer sa transformée de Fourier.

$$\mathcal{TF}[f_T](\zeta) = \hat{f}_T(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) e^{-i\zeta t} dt = \int_{-T}^{+T} f(t) e^{-i\zeta t} dt$$

La puissance moyenne de cette fonction peut s'écrire :

$$\frac{1}{2T} |\hat{f}_T(\zeta)|^2 = S_T(\zeta) = \frac{1}{2T} [\hat{f}_T \cdot \overline{\hat{f}_T}](\zeta)$$

Définissons maintenant $\gamma_T(u)$ comme la transformée de Fourier inverse de $S_T(\zeta)$:

$$\begin{aligned}
\gamma_T(u) &= \mathcal{TF}^{-1}[S_T(\zeta)](u) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_T(\zeta) e^{i \cdot u \cdot \zeta} d\zeta \\
&= \frac{1}{2T} f_T(t) * \overline{f_T(-t)}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Il s'en suit que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \gamma_T(u) = \gamma(u)$$

et encore que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_T(\zeta) = \Gamma(\zeta)$$

Comme $\Gamma(\zeta)$ est une quantité positive, alors $\gamma(u)$ est définie positive.

5.1.3 Spectre d'un signal aléatoire

On définit le spectre d'un signal aléatoire par la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation.

Dans le cas d'un signal aléatoire stationnaire d'ordre 2 :

$$\gamma_x(\tau) = \mathbf{E}[x(t, \omega) \cdot \overline{x(t + \tau, \omega)}]$$

Par extension du cas des signaux déterministes, on pose :

$$\Gamma_x(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_x(\tau) e^{-i \cdot \nu \cdot \tau} d\tau \tag{5.5}$$

◇ Remarque 1 : *Pour pouvoir effectuer ce calcul, il faut que le signal admette une fonction d'autocorrélation, donc : Un **signal aléatoire** admet un **spectre** s'il est stationnaire au moins au sens large. (ordre 2)*

◇ Remarque 2 : *Les trajectoires des signaux aléatoires stationnaires sont des signaux déterministes à puissance moyenne finie. En effet la contrainte de maintien des distributions avec un décalage de l'origine des temps impose que moyenne et énergie ne varient pas au cours du temps. Il s'en suit que les trajectoires sont infinies.*

◇ Remarque 3 : *La **densité spectrale de puissance** d'un signal aléatoire est donc reliée aux moments d'ordre 2 du processus par transformée de Fourier. Une analyse spectrale est donc une étude du signal à l'ordre 2. L'information est la même que celle des covariances, vue sous l'angle des fréquences.*

5.2 Notions d'estimation spectrale :

5.2.1 Perspective historique

Le problème de l'estimation du contenu spectral d'un signal a fait l'objet de nombreuses recherches, a connu de nombreux développements, sans pourtant que l'on puisse considérer ce champ comme achevé.

Le problème est le suivant :

- Connaissant un nombre relativement limité d'échantillons sur un signal,
- et ce signal étant composé d'une partie intéressante et d'un bruit quelconque,
- **Comment peut-on avoir accès à la répartition d'énergie spectrale, ou à la densité spectrale de puissance de la partie qui nous intéresse sans que le résultat du calcul ne fasse apparaître des artefacts, ou des déformations liées à la taille de l'observation ou au bruit ?**

En fait, l'expérience montre que le choix d'une méthode n'est pertinente qu'à la condition d'avoir une connaissance a priori convenable sur le signal. Par exemple, si on recherche la fréquence d'une sinusoïde noyée dans un bruit blanc, on peut utiliser une méthode de Capon ou de Pisarenko. Ces méthodes considérées comme "hautes

résolutions” sont très efficaces, mais ces mêmes méthodes appliquées à n’importe quel signal peuvent se révéler catastrophiques.

L’objet de cette partie du cours est de restituer les méthodes dans leur contexte, et de présenter les fondements des méthodes dites ”classiques”.

♣ Perspective historique :

L’estimation spectrale a pour objet de quantifier les périodicités, d’en déterminer les fréquences et d’en évaluer la puissance ou l’énergie. L’étude de la longueur des jours, des mois, des phases de la lune peut être considéré comme les premiers problèmes d’estimation spectrale, et remontent très loin dans le temps. On attribue à Pythagore (600av. J.C.) les premiers développements mathématiques sur ce type de périodicité. On lui doit aussi des lois sur l’harmonie en musique et les relations entre les sinusoides et les notes produites par une corde vibrante.

Un pas important sera franchi bien plus tard par Sir Isaak Newton avec la décomposition de la lumière par un prisme. C’est alors qu’apparaît le mot *spectre*, du latin *specter* signifiant *image*. C’est donc une image du phénomène observé que l’on cherche à définir.

En 1738, le mathématicien et physicien Bernoulli développera la solution générale de l’équation des ondes appliquées aux cordes vibrantes :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) [A_k \cos(kct) + B_k \sin(kct)]$$

où :

- $u(x, t)$ déplacement de la corde
- x position d’observation ($x = 0$ et $x = \pi$ aux extrémités)
- t temps
- c constante caractérisant le matériel

Peu de temps après, Euler calculera la valeur des coefficients A_k et B_k (1755) :

$$\begin{cases} A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x, 0) \sin(kx) dx \\ B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x, 0) \cos(kx) dx \end{cases}$$

En 1795, le Français Marie Riche, Baron de Prony (1755-1839) développe une approximation qui s’avérera très utile... deux siècles plus tard ! En cherchant à modéliser des problèmes de détentes de gaz, il montre que l’on peut approcher un signal $x(n)$ par :

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=1}^p A_k e^{\alpha_k n T}$$

qui a été généralisée sous la forme :

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=1}^p A_k e^{(\alpha_k + i2\pi\nu_k)nT + i\theta_k}$$

Mais à cette époque, un pas décisif va être franchi par un autre Français : **Jean-Baptiste Joseph Fourier**. Le 21 décembre 1807, il présente une thèse à l’académie des sciences où il affirme que n’importe quelle fonction $u(t)$, même avec un nombre fini de discontinuités, peut être représentée exactement par une somme de la forme :

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\alpha t) + B_k \sin(k\alpha t)]$$

Il s’agit d’une avancée importante dans l’histoire de ces développements. Cependant on objecta, avec raison d’ailleurs, à Fourier, qu’une somme, fut-elle infinie, de sinusoides ne saurait représenter correctement une discontinuité. Néanmoins, cette somme, avec les formules qui permettent le calcul des coefficients reste très importante.



FIGURE 5.1 – Jean-Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830

A partir de cette période, et en conjonction avec le développement de la société industrielle, de nombreux travaux seront réalisés dans ce champ d'application. On notera, en particulier, le développement des analyseurs harmoniques mécaniques :

Kelvin 1876-1878

Henrier 1894

Sharp 1894

Yule 1895

Michelson-Stratton 1898

Il faudra attendre le début du XXème siècle pour franchir une autre étape importante : Les travaux de Schuster vont avoir un impact très profond en analyse spectrale classique. Ce qu'il propose est très simple : Il s'agit de l'estimateur spectral appelé désormais *périodogramme* exprimé par la fonction :

$$S(k) = A_k^2 + B_k^2$$

dans laquelle les coefficients A_k et B_k sont les coefficients du développement de Fourier.

Il s'en suivra l'invention du périodogramme moyenné par Welch, qui reste d'un usage courant (avec un nombre impressionnant de fenêtres de troncature) et possède des propriétés statistiques plus satisfaisantes que celui de Schuster. C'est à Yule que l'on doit, en 1927, l'utilisation de modèles autorégressifs pour rechercher des (1 ou 2) périodicités dans un signal. (Il faut noter que la notion de développement autoregressif se trouve déjà dans les travaux de Prony). A ces travaux s'ajouteront ceux de Walker en 1931 pour aboutir aux équations de Yule-Walker que l'on connaît.

Les relations entre spectre, ou densité spectrale de puissance, et autocorrélation sont découvertes à la même époque par Wiener (Etats Unis) et Kolmogorov (URSS) entre 1920 et 1948. De ces travaux nous viennent le théorème de Wiener-Khintchine, et les travaux de Wiener sur la prédiction linéaire (Weld 1938, Slutsky 1934, Bartlett 1948).

En 1949, Norman Levinson fait paraître un article dans lequel il montre non seulement que l'on peut approcher très simplement le problème de la prédiction linéaire en moyenne quadratique par une discrétisation, mais propose de surcroît une technique récursive permettant de résoudre rapidement les équations de Yule-Walker.

A peu près au même moment, J. Tuckey introduit en traitement du signal les concepts de repliement de spectre, fenêtrage, blanchiment, décimation, lissage et cepstre, . . . etc. Les bases du traitement moderne des signaux sont alors clairement définies.

Mais la reconnaissance du Traitement du Signal comme discipline a part entière commence en 1965 avec la publication de l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide (FFT) dû à J. Cowley et J. Tuckey. Pour la première fois, on adapte les équations aux possibilités de calcul informatique dont on dispose. C'est à cette position carrefour, entre les mathématiques, la physique, et l'informatique que le Traitement du Signal doit son originalité.

Des résultats importants furent ensuite développés par :

- Burg 1967 et 1972 Maximum d'entropie

- Capon 1969 Maximum de vraisemblance

et aussi, Parzen, Akaike, Bartlett, Box et Jenkins, ...

5.2.2 Théorie de l'analyse fréquentielle des signaux

La théorie imaginée par Fourier et développée depuis plus d'un siècle stipule l'existence d'un espace dual de représentation d'une fonction, et d'une transformation permettant de passer d'un espace à l'autre. Si $f(t)$ est une fonction d'un espace convenable, alors, on définit sa transformée de Fourier par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i.\xi.t} dt$$

et $f(t)$ s'obtient réciproquement par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i.t.\xi} d\xi$$

Dans ce contexte, on appelle spectre de f la quantité :

$$S_f(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2$$

♣ Remarques sur la convention de Fourier :

D'une façon générale, la Transformation de Fourier peut être définie par n'importe quelle paire de transformation utilisant 2 constantes arbitraires A et B telle que :

$$\hat{f}(\xi) = A \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i.B\xi.t} dt$$

et

$$f(t) = \frac{B}{A} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i.Bt.\xi} d\xi$$

Dans ce cours, nous avons choisi $A = 1$ et $B = 1$, ce qui correspond physiquement à une décomposition sur les "pulsations" exprimées en rad/s. Une autre forme très usuelle consiste à choisir $B = 2\pi$ et $A = 1$:

$$\hat{f}(\nu) = 1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i.2\pi\nu.t} dt$$

et

$$f(t) = \frac{2\pi}{1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{i.2\pi t.\nu} d\nu$$

Dans ce cas, $\xi = 2\pi\nu$ et ν correspond aux fréquences exprimées en Hz (c'est à dire en s^{-1})

Toutefois, cette théorie ne correspond pas en général aux problèmes rencontrés en réalité, et la théorie du signal a développé (et continue de développer) de nombreuses méthodes pour approcher cette notion de spectre dans un cadre réaliste.

Le problème consiste à poser que le signal mesuré \tilde{x} pour lequel on souhaite des informations spectrales est en fait une réalisation particulière d'un processus stochastique, ou plus simplement d'un signal aléatoire $x(t, \omega)$. En effet, sur un processus industriel, il est rare que deux acquisitions successives d'un signal fournissent rigoureusement la même chose.

Le spectre est alors défini par la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. (Comme cela a été défini par [5.5])

La connaissance exacte de la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$ nous est en général refusée, puisque le calcul de l'espérance mathématique demande la connaissance de la distribution de probabilité du processus, ce qui, sauf cas particulier, est exclu. Par conséquent, le calcul de la DSP pour un signal réel n'est donc pas possible, et il faut en définir des **estimateurs**.

Pour cela, nous disposons habituellement d'un vecteur de N échantillons d'une (et d'une seule) réalisation de x . Nous écrirons ce vecteur sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}(t_0, \omega_0), \tilde{x}(t_0 + T_e, \omega_0), \dots, \tilde{x}(t_0 + (N-1) \cdot T_e, \omega_0)]$$

Remarque : Dans ce vecteur, T_e représente la période d'échantillonnage. Par la suite, nous omettrons de spécifier par ω_0 la trajectoire particulière du processus réalisé.

Il est bien évidemment possible d'analyser cette séquence à l'aide de la transformation de Fourier discrète appliquée aux séquences de longueur finie. Il conviendra alors de se demander dans quelle mesure les informations ainsi obtenues sont représentatives du processus.

5.2.3 Rappel : représentation de Fourier des signaux discrets de longueur finie

L'application de la transformée de Fourier discrète des signaux de longueurs finies n'a rien d'évident en fait, puisque les sinus et cosinus qui servent de base ne sont pas eux de longueurs finies. Il existe cependant un cas où une fonction peut être représentée à partir de son observation sur un intervalle, c'est le cas des séquences périodiques. On définit alors le développement en série de Fourier d'une séquence discrète périodique de période N par :

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{i \frac{2\pi}{N} nk}$$

Il est bien évidemment possible d'utiliser cette formule pour des séquences de longueurs N quelconques, mais à conditions de ne pas oublier qu'en hypothèse sous-jacente, on considère une période d'une séquence N -périodique.

On note : $W_N = e^{i \frac{2\pi}{N}}$

et on appelle Transformée de Fourier discrète les relations :

$$\begin{cases} \hat{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \\ x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}(n) W_N^{nk} \end{cases} \quad (5.6)$$

Par ailleurs, il existe un algorithme bien connu permettant un calcul rapide de ces relations : l'algorithme de la Transformée de Fourier Rapide (acronyme anglais FFT pour Fast Fourier Transform).

5.2.4 Éléments d'estimation spectrale

1. Périodogramme de Schuster

Disposant d'une séquence de N points, $\tilde{\mathbf{x}}$, et d'un algorithme rapide de transformation, il est assez tentant de poser comme premier estimateur du spectre la quantité :

$$\tilde{S}_x^{(1)}(\xi) = \frac{1}{N} |\hat{x}(\xi)|^2 \quad (5.7)$$

Ce qui en pratique revient à effectuer la FFT de la séquence acquise, et à en prendre le module au carré. Il y a cependant plusieurs objections à cela :

- Tout d'abord, il faut ajouter une hypothèse d'ergodicité au problème car rien ne prouve que l'observation d'une seule trajectoire d'un processus ne comporte tous les renseignements sur le processus. Cette hypothèse est sous-jacente à la plupart des techniques de traitement du signal.

- Cette trajectoire particulière est observée sur un intervalle limité de temps, ce qui d'un point de vue théorique, revient à observer une trajectoire infinie tronquée par une fenêtre rectangulaire. On sait alors que le spectre estimé va faire apparaître un effet de convolution avec un sinus cardinal, détériorant la résolution spectrale.
- Enfin, on peut démontrer que cet estimateur est non consistant. On peut en effet démontrer que la variance de cet estimateur ne tend pas vers 0 lorsque la durée de l'observation augmente, même infiniment. Moyennant quelques hypothèses, on peut montrer que :

$$\mathbf{Var} \left(\bar{S}_x^{(1)}(\xi) \right) \geq \left[\mathbf{E}[\bar{S}_x^{(1)}(\xi)] \right]^2$$

Cette propriété rend inutilisable cet estimateur, puisque l'erreur commise a une probabilité importante d'être plus grande que la valeur à estimer.

2. Périodogramme de Welch

Pour pallier au grave défaut du périodogramme de Schuster, on peut procéder de la façon suivante :

- Acquisition des N échantillons de la séquence (avec une période T_e)
- Découpage de la séquence en K segments de longueurs M , avec un éventuel recouvrement.
- Pondération des segments par une fenêtre plus douce que la troncature rectangulaire. Cette étape permet de limiter la production de lobes secondaires, mais se fait au détriment de la résolution.
- Calcul du périodogramme de chaque segment pondéré, puis calcul du périodogramme moyen.

Cet estimateur va donc s'écrire :

$$\tilde{S}_x^{(2)}(\xi) = \frac{1}{K} \sum_{\ell=1}^K J_{x,\ell}^{(1)}(\xi) \quad (5.8)$$

avec :

$$J_{x,\ell}^{(1)}(\xi) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_\ell(n) \cdot f(n) \cdot e^{i\frac{2\pi}{M}n\xi} \right|^2$$

Il s'agit du périodogramme de la k ème séquence, et U est l'énergie de la fenêtre $f(n)$ utilisée.

Welch a montré que la variance de cet estimateur, lorsque les segments ne se recouvrent pas est de l'ordre de $\frac{1}{K} \left[\tilde{S}_x^{(2)}(\xi) \right]^2$, ce qui est bien meilleur.

Cependant, on montre également que cet estimateur est biaisé :

$$\mathbf{E} \left[\tilde{S}_x^{(2)}(\xi) \right] = \int_{-\pi}^{+\pi} S_x(\theta) S_f(\xi - \theta) d\theta$$

Dans cette expression, S_f est le spectre de la fenêtre. Si cette fenêtre était infinie, son spectre se réduirait à une impulsion de Dirac, et cette convolution n'aurait aucun effet. Ce n'est bien sûr pas le cas.

Il est donc clair que :

- si les segments sont nombreux (et donc courts), la variance va diminuer, ...mais au détriment du biais qui est d'autant plus important que la taille des segments est faible.
- une façon de tricher consiste à admettre des recouvrements, mais alors, les séquences ne sont plus indépendantes, et on perd la justification théorique.

Cette méthode est toutefois largement utilisée, mais n'est vraiment valable que si l'on dispose d'un nombre important d'échantillons.

3. Corrélogramme

Il existe une autre piste, qui consiste à revenir à la définition choisie pour la densité spectrale.[5.5]

$$\Gamma_x(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_x(\tau) e^{-i\nu\tau} d\tau$$

On peut en effet imaginer de calculer la séquence d'autocorrélation du processus, et d'en calculer ensuite la Transformée de Fourier Discrète. Cette démarche conduit à une classe d'estimateur appelé correlogrammes.

Le problème à résoudre ici consiste à estimer l'autocorrélation du processus sur un nombre fini de valeurs, à partir de la séquence acquise.

On peut montrer que la fonction d'autocorrélation d'un processus discret, stationnaire et ergodique :¹

$$\gamma_x(\ell) = \mathbf{E} [x(n, \omega) \cdot x(n + \ell, \omega)]$$

peut s'écrire comme la limite d'une moyenne temporelle :

$$\gamma_x(\ell) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{+N} x(n)x(n+\ell)$$

L'estimation de $\gamma_x(\ell)$ revient donc à calculer la moyenne d'une séquence, sachant qu'on ne dispose que de N échantillons, et non d'une infinité.

On dispose de deux estimateurs :

- Estimateur non biaisé de l'autocorrélation

Il est assez simple d'établir que l'estimateur suivant est raisonnable :

$$\tilde{\gamma}_x^{(1)}(\ell) = \frac{1}{N-|\ell|} \sum_{n=0}^{N-|\ell|-1} x(n)x(n+|\ell|) \quad (5.9)$$

Cet estimateur est non biaisé. Mais sa variance est proportionnelle à $\frac{1}{N-|\ell|}$, ce qui a pour conséquence :

- Si N augmente, la variance diminue
- Lorsque ℓ grandit et se rapproche de N , le résultat va devenir incertain (d'autant que le nombre de terme dans la somme a tendance à diminuer en même temps).

En conclusion, nous disposons d'un estimateur intéressant pour les faibles valeurs du décalage. Il sera raisonnable de limiter le calcul pour un ℓ maximum de l'ordre de $N/10$, ainsi qu'il a été suggéré par Blackman et Tuckey (1958).

- Estimateur biaisé de l'autocorrélation. Il existe une alternative à cet estimateur. Soit :

$$\tilde{\gamma}_x^{(2)}(\ell) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|\ell|-1} x(n)x(n+|\ell|) \quad (5.10)$$

Cet estimateur est évidemment biaisé puisque le premier ne l'était pas et que :

$$\tilde{\gamma}_x^{(2)}(\ell) = \frac{N-|\ell|}{N} \tilde{\gamma}_x^{(1)}(\ell)$$

Il est cependant intéressant, car moins dangereux à utiliser : En effet, notre démarche consiste ici à calculer un spectre, c'est à dire une fonction positive (c'est un module au carré). Or il est facile de générer des séquences pour lesquelles l'estimation non biaisée de l'autocorrélation conduit à des valeurs négatives de la Transformée de Fourier Discrète. Ce problème ne se pose jamais avec l'estimation biaisée.

- Calcul du corrélogramme

On appelle corrélogramme l'estimateur :

$$\tilde{S}_x^{(3)}(\xi) = T_e \sum_{n=-L}^{+L} \tilde{\gamma}_x^{(j)}(n) \cdot e^{-im\xi T_e} \quad (5.11)$$

Quel que soit l'estimateur de R ($j = 1$ ou 2), et avec L voisin de $N/10$; On aura cependant alors le problème lié au fenêtrage, car la troncature au retard L introduit une multiplication temporelle qui se traduit dans l'espace dual par une convolution :

$$\mathbf{E} [\tilde{S}_x^{(3)}(\xi)] = [S_x * S_f](\xi)$$

Et on aura là encore le loisir de choisir une fenêtre plus douce en pondérant les échantillons calculés avant d'en effectuer la TFD. Il faudra toutefois éviter de choisir une fenêtre présentant des valeurs négatives de la transformée de Fourier, puisqu'on souhaite obtenir une fonction positive. Une bonne solution consiste à utiliser une simple fenêtre triangulaire.

1. sauf à imaginer de réaliser directement l'acquisition en sortie d'un corrélateur analogique.

Les figures qui suivent permettent de vérifier le comportement des estimateurs de Schuster et de Welch. A partir d'un ensemble de 10000 fichiers de bruit blanc de moyenne nulle et de variance 1, on estime la densité spectrale de puissance par les deux méthodes. Le périodogramme de Welch est obtenu en moyennant 10 fenêtres. On rappelle que la théorie prévoit une valeur constante de la DSP égale à la variance. En s'intéressant à une seule valeur (la 8ème), on observe une grande dispersion avec l'estimateur de Schuster (variance de l'estimateur voisine de sa moyenne), tandis que la variance de l'estimateur de Welch est divisée par 10 environ, conformément à la théorie.

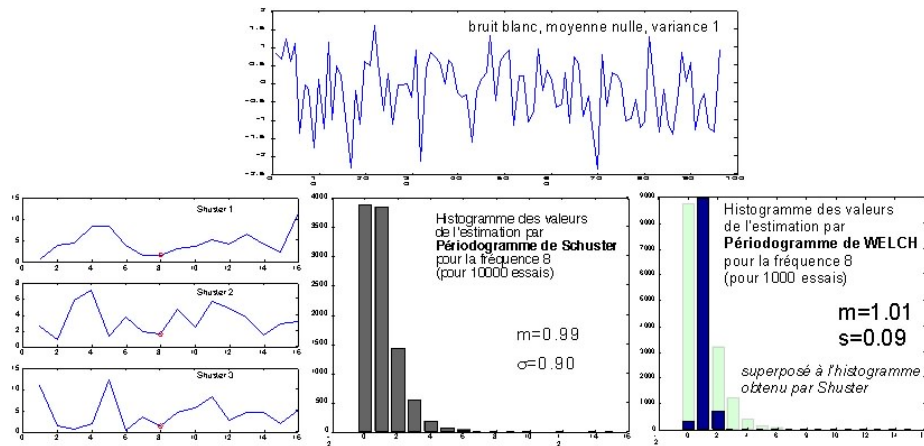


FIGURE 5.2 – Comparaison des performances des périodogrammes

Exercice : prendre le temps de bien comprendre ce que représente chacune de ces figures.

Chapitre 6

Le filtrage des signaux aléatoires :

6.1 Rappel : filtrage d'un signal déterministe

6.1.1 Signal à temps continu

Un filtre est un système linéaire, invariant par translation de l'axe des temps. Il est entièrement défini par la fonction de sa réponse impulsionnelle $h(t)$, qui permet de calculer le signal de sortie de ce filtre à une entrée x quelconque par convolution :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u).x(t-u)du$$

6.1.2 Signal à temps discret

de façon similaire, la sortie numérique $y(n)$ d'un filtre défini par sa réponse $h(n)$ soumis à une entrée x vaudra :

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} h(m)x(n-m)$$

6.2 Filtrage d'un signal aléatoire stationnaire

On considère un signal aléatoire stationnaire au second ordre $x(t, \omega)$. Un signal filtré de x suppose qu'à chaque trajectoire de x , on fasse correspondre une trajectoire filtrée en accord avec la définition du filtrage des signaux déterministes.

Si on pose donc :

$$y(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u).x(t-u, \omega)du$$

On définit y , signal aléatoire lié à x par une relation linéaire.

Que peut-on dire de y ?

6.2.1 Espérance mathématique du signal aléatoire filtré

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[y(t, \omega)] &= \mathbf{E} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u).x(t-u, \omega)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u).\mathbf{E}[x(t-u, \omega)] du \end{aligned}$$

Puisque l'on s'est placé dans le cadre des signaux stationnaire, on a en particulier une espérance constante pour x , soit par exemple μ_x . Cette valeur est indépendante du paramètre d'intégration, et peut être sortie de l'intégrale.

$$\mathbf{E}[y(t, \omega)] = \mu_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) du$$

Le terme restant correspond à la transformée de Fourier de h prise à la fréquence 0. Il reste donc :

$$\mathbf{E}[y(t, \omega)] = \mu_x \cdot \hat{h}(0) = \mu_y \quad (6.1)$$

On trouve donc que y est également stationnaire du premier ordre lorsque x l'est.

6.2.2 Covariance du signal aléatoire filtré

Plaçons nous pour simplifier dans le cas où $\mu_x = 0$, et par voie de conséquence $\mu_y = 0$ également. A l'ordre 2, il nous faut calculer :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(y(t, \omega) \overline{y(t + \tau, \omega)}\right) &= \mathbf{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cdot x(t - u, \omega) du \cdot \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} h(v) \cdot x(t + \tau - v, \omega) dv}\right] \\ &= \int_u \int_v h(u) \overline{h(v)} \mathbf{E}\left[x(t - u) \overline{x(t + \tau - v)}\right] du dv \\ &= \int_u \int_v h(u) \overline{h(v)} \gamma_x(\tau + u - v) du dv \end{aligned}$$

On voit tout d'abord apparaître la fonction d'autocorrelation de x . Cette intégrale ne dépend plus de t , mais uniquement de l'intervalle τ , ce qui signifie que y est stationnaire à l'ordre 2.

Résultat : le filtrage linéaire d'un signal aléatoire stationnaire d'ordre 2 est un signal aléatoire stationnaire d'ordre 2.

De plus, la fonction d'autocorrelation de x peut être obtenue par transformée de Fourier inverse (de par la définition même) du spectre de x .

$$\gamma_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(\nu) e^{i \cdot \tau \cdot \nu} d\nu$$

On a donc :

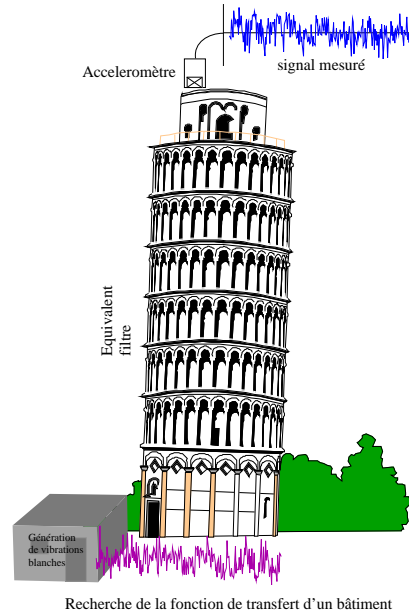
$$\begin{aligned} \gamma_y(\tau) &= \int_u \int_v h(u) \overline{h(v)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(\nu) e^{i \cdot (\tau + u - v) \cdot \nu} d\nu du dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\nu} \Gamma_x(\nu) \left(\int_u h(u) e^{i u \nu} du \int_v \overline{h(v)} e^{-i v \nu} dv \right) e^{i \tau \nu} d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\nu} \Gamma_x(\nu) \left| \hat{h}(\nu) \right|^2 e^{i \tau \nu} d\nu \end{aligned}$$

On peut déduire de cette formulation que le spectre du signal filtré, qui est la transformée de Fourier de γ_y est égal à : $\Gamma_x(\nu) \left| \hat{h}(\nu) \right|^2$.

De ce point de vue, les signaux aléatoires se comportent d'une façon semblable aux signaux déterministes :

ce qui sort (en fréquence) = ce qui entre (en fréquence) \times ce qui peut passer (filtre)

Remarque : Si le signal injecté dans le filtre est un bruit blanc, alors $\Gamma_x(\nu) = \sigma_b^2$ est constant. Dans ce cas, le spectre du signal de sortie est directement proportionnel à la fonction de transfert du filtre. Cette méthode est utilisée en pratique pour déterminer les fonctions de transfert des structures.



6.3 Introduction aux processus ARMA

Ces structures de filtres ont été vues à différentes reprises dans la première partie de ce cours. Mais ces filtres prennent toute leur puissance dans le cadre des processus ou signaux aléatoires. Cela va d'ailleurs permettre de faire le lien entre les deux parties.

6.3.1 Définition des signaux autorégressifs (AR) :

Définition et fonction de transfert

Considérons le filtre récursif qui, à une série u_n fait correspondre une série x_n définie par :

$$x_n = a_1.x_{n-1} + a_2.x_{n-2} + a_3.x_{n-3} + \dots + a_p.x_{n-p} + u_n$$

que l'on pourra encore écrire :

$$x_n = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{X}_n + u_n \quad (6.2)$$

avec $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_p)$ et $\mathbf{X}_n = (x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_{n-p})^T$

On sait (voir première partie) que l'on peut ainsi définir un filtre. La fonction de transfert de ce filtre s'obtient en construisant la *transformée en z* des séries, soit :

$$\begin{aligned} x_n &= a_1.x_{n-1} + a_2.x_{n-2} + a_3.x_{n-3} + \dots + a_p.x_{n-p} + u_n \\ \Rightarrow x_n.z^{-n} &= a_1.x_{n-1}.z^{-n} + a_2.x_{n-2}.z^{-n} + a_3.x_{n-3}.z^{-n} + \dots + a_p.x_{n-p}.z^{-n} + u_n.z^{-n} \\ \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_n.z^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_1.x_{n-1}.z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_2.x_{n-2}.z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_3.x_{n-3}.z^{-n} + \dots \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_p.x_{n-p}.z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n.z^{-n} \end{aligned}$$

On voit apparaître les transformées en z et de façon naturelle, les opérateurs de décalage z^{-k} . Par regroupement des termes, on obtient donc :

$$X(z) = X(z) \left(\sum_{i=1}^{i=p} a_i z^{-i} \right) + U(z) \Rightarrow X(z) \left(1 - \sum_{i=1}^{i=p} a_i z^{-i} \right) = U(z)$$

La fonction de transfert se déduit rapidement de cette formulation, en écrivant le rapport de la sortie sur l'entrée du système :

$$H(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{i=p} a_i z^{-i}}$$

La théorie des signaux ARMA devient particulièrement intéressante pour modéliser les signaux aléatoire lorsque u est un signal aléatoire.

On choisira pour u_n un bruit blanc (à temps discret), c'est à dire une séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On sait que dans ce cas u est un signal aléatoire stationnaire centré.

Il s'en suit que x est aussi un signal aléatoire, stationnaire au second ordre, c'est à dire que $\mathbf{E}[x_n^2] < \infty$ si le filtre est causal et stable.

Etude du signal à l'ordre 2

Un signal AR est donc un signal aléatoire qui est obtenu en filtrant un bruit blanc discret. On écrira avec nos conventions :

$$x(n, \omega) = \sum_{i=1}^{i=p} a_i . x(n - i, \omega) + u(n, \omega) \quad (6.3)$$

La fonction d'autocorrélation de ce signal aléatoire et stationnaire se calcule facilement :

$$\gamma_x(\ell) = \mathbf{E} [x(n, \omega) . x(n + \ell, \omega)]$$

En remplaçant $x(n)$ par son expression (équation 6.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma_x(\ell) &= \mathbf{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{i=p} a_i . x(n - i, \omega) + u(n, \omega) \right) . x(n + \ell, \omega) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{i=p} a_i . x(n - i, \omega) \right) . x(n + \ell, \omega) \right] + \mathbf{E} [u(n, \omega) . x(n + \ell, \omega)] \\ &= \sum_{i=1}^{i=p} a_i \mathbf{E} [x(n - i, \omega) . x(n + \ell, \omega)] + \mathbf{E} [u(n, \omega) . x(n + \ell, \omega)] \\ &= \sum_{i=1}^{i=p} a_i \gamma_x(\ell - i) + \gamma_{xu}(\ell) \end{aligned} \quad (6.4)$$

La formulation fait apparaître un lien entre la fonction d'autocorrélation du signal de sortie et l'intercorrélacion entrée-sortie. On remarquera également que l'on retrouve la structure récursive du signal dans l'autocorrélation.

Que dire maintenant de $\gamma_{xu}(\ell)$?

Pour tout ℓ négatif, $u(n)$ est une variable qui n'intervient pas dans la composition de $x(n + \ell)$. La covariance est alors nulle. A partir de $\ell = 0$, la variable $u(n)$ entre dans l'expression de x , mais comme u est un bruit blanc, $u(n)$ n'est corrélé qu'avec lui-même. Or par hypothèse, u est un bruit *iid*

$$\begin{aligned}
\gamma_{xu}(\ell) &= \mathbf{E} [x(n, \omega) \cdot u(n + \ell, \omega)] \\
&= \mathbf{E} \left[\left(\sum_{i=1}^p a_i x(n-i) + u_n \right) \cdot u(n + \ell, \omega) \right] \\
&= \gamma_u(\ell) \\
&= \sigma_u^2 \delta(\ell)
\end{aligned}$$

Pour $\ell = 0$, on obtiendra $\gamma_x(0) = \sum_{i=1}^p a_i \gamma_x(-i) + \gamma_{uu}(0) = \sum_{i=1}^p a_i \gamma_x(i) + \sigma_u^2$ avec σ_u^2 variance du bruit blanc. Cette propriété va permettre de construire des algorithmes efficaces d'identification.

Equation de Yule-Walker et Algorithme de Levinson :

Développons les équations décrites par 6.4.

$$\begin{aligned}
\ell = 0 &\rightarrow \gamma_x(0) - \sum_{k=1}^{k=p} a_k \gamma_x(k) = \sigma_u^2 \\
\ell = 1 &\rightarrow \gamma_x(1) - \sum_{k=1}^{k=p} a_k \gamma_x(k-1) = 0 \\
\ell = 2 &\rightarrow \gamma_x(2) - \sum_{k=1}^{k=p} a_k \gamma_x(k-2) = 0 \\
&\vdots \\
\ell = p &\rightarrow \gamma_x(p) - \sum_{k=1}^{k=p} a_k \gamma_x(k-p) = 0
\end{aligned}$$

On peut mettre ces équations sous formes matricielles de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \gamma_x(0) & \gamma_x(1) & \gamma_x(2) & \cdots & \gamma_x(p) \\ \gamma_x(1) & \gamma_x(0) & \gamma_x(1) & \cdots & \gamma_x(p-1) \\ \gamma_x(2) & \gamma_x(1) & \gamma_x(0) & \cdots & \gamma_x(p-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \gamma_x(p) & \gamma_x(p-1) & \cdots & & \gamma_x(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Ce système forme ce qu'on appelle les équations de Yule-Walker.

On aurait aussi pu écrire, en isolant juste les sommes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{k=p} a_k \gamma_x(k) &= \sigma_u^2 - \gamma_x(0) \\
\sum_{k=1}^{k=p} a_k \gamma_x(k-1) &= -\gamma_x(1) \\
\sum_{k=1}^{k=p} a_k \gamma_x(k-2) &= -\gamma_x(2) \\
&\vdots \\
\sum_{k=1}^{k=p} a_k \gamma_x(k-p) &= -\gamma_x(p)
\end{aligned}$$

les p dernières équations forment un système classique également, qui peut se mettre sous une forme $\Gamma \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}$, les équations dites normales.

Dans tous les cas, on observe une matrice de Toeplitz (Γ). Cette structure particulière permet de construire des algorithmes efficaces de calcul. C'est le cas de l'algorithme de Levinson, qui permet, connaissant les valeurs de la fonction d'autocorrelation de x , de calculer les paramètres du filtre AR.

L'algorithme de Levinson propose une itération sur l'ordre du modèle. On fixe au départ $p = 0$, puis on incrémente jusqu'à une valeur prédéfinie, ou bien jusqu'à la réalisation d'un critère.

6.3.2 Définition des signaux de moyenne mobile (MA)

Définition et fonction de transfert

Considérons cette fois un système réglé par l'équation :

$$x(n) = u(n) + b_1 u(n-1) + b_2 u(n-2) + \dots + b_q u(n-q) \quad (6.6)$$

En raisonnant de la même façon que pour 6.3, on peut écrire en posant $b_0 = 1$, la transformée en z de cette expression :

$$X(z) = \left(\sum_{k=0}^q b_k z^{-k} \right) U(z) \quad (6.7)$$

D'où la fonction de transfert associée au filtre :

$$H(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \left(\sum_{k=0}^q b_k z^{-k} \right) \quad (6.8)$$

Dans ce cas, on peut remarquer que les coefficients b_k ne sont rien d'autre que les valeurs de la réponse impulsionnelle du filtre H , puisqu'on a par définition pour un filtre causal :

$$H(z) = \sum_{k=0}^q h_k z^{-k}$$

Conclusions :

- H est un filtre causal.
- H est un filtre à réponse impulsionnelle finie
- les coefficients du modèle représentent la réponse impulsionnelle du filtre

Là encore, tout l'intérêt consiste à considérer une entrée u sous la forme d'un bruit blanc (centré de variance σ_u^2). On observera alors en sortie du filtre un signal aléatoire dont les propriétés vont dépendre des coefficients du filtre.

Etude du signal à l'ordre 2

Calculons la covariance :

$$\begin{aligned} \gamma_x(\ell) &= \mathbf{E}[x(k, \omega) \cdot x(k + \ell, \omega)] \\ &= \mathbf{E} \left[\left(\sum_{n=1}^{i=q} h_n \cdot u(k-n) \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{i=q} h_m \cdot u(k + \ell - m) \right) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\sum_{n=1}^{i=q} \sum_{m=1}^{i=q} h_n \cdot h_m \cdot u(k-n) \cdot u(k + \ell - m) \right] \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\gamma_x(\ell) = \sum_{n=1}^{i=q} \sum_{m=1}^{i=q} h_n \cdot h_m \mathbf{E}[u(k-n) \cdot u(k + \ell - m)]$$

Or, comme u est un bruit blanc, la covariance est connue et vaut 0 sauf lorsque $k - n = k + \ell - m$. Il en résulte que, de tout les termes de la double somme, il ne reste que ceux pour lesquels $n = m - \ell$, soit :

$$\gamma_x(\ell) = \sigma_u^2 \cdot \sum_{n=0}^{i=q} h_n \cdot h_{n+\ell}$$

Il faut encore tenir compte du fait que $h_{n+\ell} = 0$ dès que $n + \ell > q$, ce qui s'écrit :

$$\gamma_x(\ell) = \sigma_u^2 \cdot \sum_{n=0}^{i=q-\ell} h_n \cdot h_{n+\ell} \quad (6.9)$$

Si on développe ces équations, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \ell = 0 & \rightarrow \gamma_x(0) &= \sigma_u^2 (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_q^2) && \text{(puissance du signal)} \\ \ell = 1 & \rightarrow \gamma_x(1) &= \sigma_u^2 (h_0 h_1 + h_1 h_2 + \dots + h_{q-1} h_q) \\ \ell = 2 & \rightarrow \gamma_x(2) &= \sigma_u^2 (h_0 h_2 + h_1 h_3 + \dots + h_{q-2} h_q) \\ & \vdots & \vdots & \\ \ell = q-1 & \rightarrow \gamma_x(q-1) &= \sigma_u^2 (h_0 h_{q-1} + h_1 h_q) \\ \ell = q & \rightarrow \gamma_x(q) &= \sigma_u^2 (h_0 h_q) \\ \ell = q+1 & \rightarrow \gamma_x(q+1) &= 0 \end{aligned}$$

La détermination des coefficient du système à partir de l'autocorrélation de x conduit donc à un système de q équations non linéaires, dont on montre de plus que la solution n'est pas unique. (remarque : une solution linéaire peut être fournie en considérant l'équivalence avec un AR(∞))

6.3.3 Définition des signaux autorégressifs et de moyenne mobile (ARMA)

Définition et fonction de transfert

Ces signaux combinent les deux caractéristiques AR(p) et MA(q), par :

$$\begin{aligned} x(n) &= a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + a_3 \cdot x_{n-3} + \dots + a_p \cdot x_{n-p} + b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + b_2 u(n-2) + \dots + b_q u(n-q) \\ &= \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{k=1}^q b_k u(n-k) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Un raisonnement analogue aux précédent permet d'obtenir une expression de la fonction de transfert des filtres concernés :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \quad (6.11)$$

On observe qu'on peut considérer que ce filtre est équivalent à deux filtre en cascades : $H(z) = H_{MA}(z) \cdot H_{AR}(z)$, un MA(q) et un AR(p).

L'identification est rendue possible grâce au fait que l'autocorrélation des signaux MA est nulle à partir d'un certain rang. On peut donc ensuite être assuré de ne plus traité que la partie AR.

6.3.4 Exemple d'un signal AR(2) :

Dans cette partie, nous allons traiter le cas d'un signal autorégressif d'ordre 2. Ce signal est donc la sortie d'un filtre décrit par :

$$x(n, \omega) = a_1 x(n-1, \omega) + a_2 x(n-2, \omega) + u(n, \omega)$$

Avec $u(n, \omega)$ bruit blanc.

On obtient donc la variable décrivant x à l'instant n à partir d'une combinaison linéaire des variables décrivant x aux deux instants précédents, plus une *innovation* qui est une variable aléatoire **iid**, c'est à dire indépendante et identiquement distribuée à tous les instants.

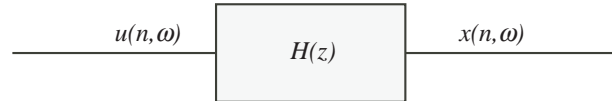


FIGURE 6.1 – Filtrage d'un bruit blanc

Le passage en transformée en z nous fournit :

$$H(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{i=2} a_i z^{-i}}$$

$x(n, \omega)$ est donc une variable aléatoire représentant l'amplitude du signal x à l'instant n . Cette variable est centrée parce que u est toujours une variable centrée (par définition du bruit blanc).

La covariance nous fournit donc l'autocorrélation :

$$\begin{aligned} \gamma_x(\ell) &= \mathbf{E}[x(n, \omega) \cdot x(n + \ell, \omega)] \\ &= \mathbf{E}[(a_1 x(n-1, \omega) + a_2 x(n-2, \omega) + u(n, \omega)) \cdot x(n + \ell, \omega)] \\ &= a_1 \mathbf{E}[x(n-1, \omega) \cdot x(n + \ell, \omega)] + a_2 \mathbf{E}[x(n-2, \omega) \cdot x(n + \ell, \omega)] + \mathbf{E}[u(n, \omega) \cdot x(n + \ell, \omega)] \\ &= a_1 \gamma_x(\ell-1) + a_2 \gamma_x(\ell-2) + \gamma_{ux}(\ell) \end{aligned}$$

Avec : $\gamma_{ux}(\ell)$ qui s'écrit, (en remplaçant $x(n)$), $\mathbf{E}[(a_1 x(n-1, \omega) + a_2 x(n-2, \omega) + u(n, \omega)) \cdot u(n + \ell, \omega)]$.

Les deux premiers termes sont indépendants de $u(n)$ puisque cet instant n arrive après.

$\gamma_{ux}(\ell)$ vaut donc :

$$\begin{aligned} \text{si } \ell > 0 & \quad \gamma_{ux}(\ell) = 0 \quad (\text{aucune corrélation}) \\ \text{si } \ell = 0 & \quad \gamma_{ux}(0) = \sigma_u^2 \quad (\text{variance du bruit}) \end{aligned}$$

On a donc les équations :

$$\begin{aligned} \gamma_x(0) &= a_1 \gamma_x(1) + a_2 \gamma_x(2) + \sigma_u^2 \\ \gamma_x(1) &= a_1 \gamma_x(0) + a_2 \gamma_x(1) \\ \gamma_x(2) &= a_1 \gamma_x(1) + a_2 \gamma_x(0) \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\begin{pmatrix} \gamma_x(0) & \gamma_x(1) & \gamma_x(2) \\ \gamma_x(1) & \gamma_x(0) & \gamma_x(1) \\ \gamma_x(2) & \gamma_x(1) & \gamma_x(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

il est donc assez facile de trouver les valeurs de a_1 et a_2 en estimant l'autocorrélation de x puis en résolvant ce système.

Exemple :

Supposons que l'on dispose d'un enregistrement d'une trajectoire d'un signal pouvant se modéliser par un AR d'ordre 2 (figure 6.2). Cette trajectoire permet de calculer une estimation de la fonction d'autocorrélation de x par les estimateurs 5.9 ou 5.10 vu en analyse spectrale. (figure 6.3)

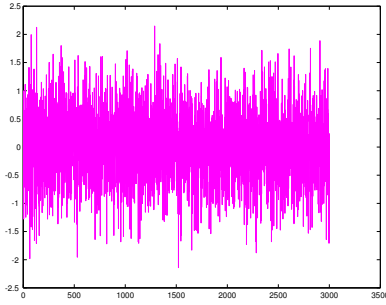


FIGURE 6.2 – trajectoire d'un signal AR(2) bruité

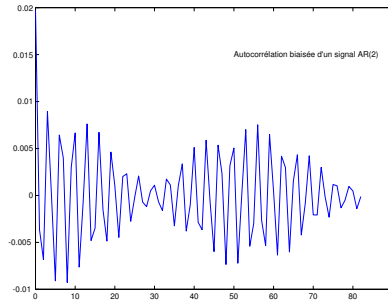


FIGURE 6.3 – auto-corrélation du signal

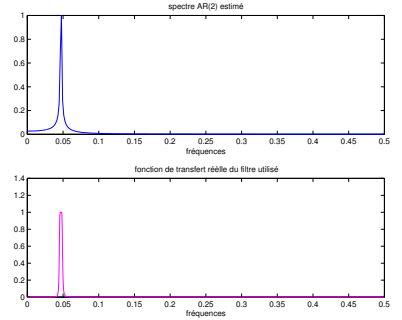


FIGURE 6.4 – Estimation spectrale paramétrique

Le système 6.12 devient ici :

$$\begin{pmatrix} 0.0198 & -0.0036 & -0.0068 \\ -0.0036 & 0.0198 & -0.0036 \\ -0.0068 & -0.0036 & 0.0198 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

On notera tout de même que pour pouvoir développer cette approche, il faut avoir une idée de l'ordre du modèle et disposer d'une estimation sur la puissance du bruit d'entrée. Ces points sont développés dans la littérature signaliste.

Ce système nous fournit ici les coefficients du modèle : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0.2572 \\ 0.3927 \end{pmatrix}$

On peut se servir de cela pour obtenir une estimation spectrale particulièrement propre et précise...à condition que l'utilisation soit justifiée.

En effet on sait que le signal est obtenu par filtrage d'un bruit blanc dans un filtre dont la fonction de transfert est paramétrée par les coefficients que nous venons de trouver.

$$H(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{k=2} a_k z^{-k}}$$

La transformée de Fourier s'obtient pour $z = e^{i\xi}$, et on tire facilement :

$$X(e^{i\xi}) = \frac{U(e^{i\xi})}{1 - \sum_{k=1}^{k=2} a_k e^{-ik\xi}}$$

Ce qui permet d'obtenir le spectre théorique de x :

$$S_x(\xi) = \frac{S_u(\xi)}{|1 - \sum_{k=1}^{k=2} a_k e^{-ik\xi}|^2}$$

Mais comme le spectre du bruit blanc est simplement sa puissance : $S_u(\xi) = \sigma_u^2$, on a donc tout ce qu'il faut pour calculer pour chaque fréquence ξ la valeur du spectre de x :

$$S_x(\xi) = \frac{\sigma_u^2}{|1 - \sum_{k=1}^{k=2} a_k e^{-ik\xi}|^2}$$

Ce qui nous fournit le spectre de la figure 6.4.

Cet exemple montre le fonctionnement de l'estimation spectrale paramétrique. A partir d'un modèle, *qui doit être adapté (!)*, la première étape consiste à identifier les paramètres du modèle, et la seconde étape à les injecter dans la formule du spectre théorique associé à ce modèle. Ces méthodes sont extrêmement puissantes, mais aussi assez dangereuses à utiliser puisqu'elles supposent que le modèle est pertinent *a priori*.

Chapitre 7

Quelques références bibliographiques pour aller plus loin :

- Bernard PICINBONO ; *Signaux Aléatoires vol 1,2,3*.Dunod, 1995
- Jean-Louis LACOUME ; *Théorie du Signal*, ed.Que sais-je ? 1983
- Jacques MAX ; *Méthodes et Techniques de Traitement du Signal*.Masson 1977
- PAPOULIS ; *Probability, Random variables and Stochastic Processes*, MacGraw Hill, 1991
- Charles W. THERRIEN, *Discrete Random Signals ans Statistical Signal Processing*, (Prentice Hall, 1992)
- S.Lawrence MARPLE ; *Digital Spectral Analysis*. Prentice hall 1987
- Alan V. OPPENHEIM ; *Digital Signal Analysis*. Prentice hall 1975
- G.BLANCHET - J.PRADO ; *Méthodes numériques pour le traitement du signal*.Masson, 1990
- Maurice CHARBIT ; *Element de théorie du signal : les signaux aléatoires*. Ellipses 1990
- A.W.M Van Den Enden ; *Traitement numérique du signal*. Masson 1992

Chapitre 8

Sujets des TD de la partie II

8.1 Variables aléatoires et Moments

Ex. 1 Calculer l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire X dans le cas suivants :

1. X est une variable aléatoire continue qui suit :

- (a) une loi uniforme sur $[a, b]$, puis $[-a, a]$
- (b) une loi de Laplace de paramètre λ

2. X est une variable aléatoire discrète qui suit

- (a) une loi de Bernoulli
 - (b) une loi Binomiale
 - (c) une loi de Poisson
-

Ex. 2 Calculer la dérivée de la transformée de Fourier de la densité de probabilité d'une variable continue et établir la relation entre cette dérivée et l'espérance mathématique de la variable aléatoire.

Généraliser aux moments d'ordre n .

Qu'en est il dans le cas discret ?

Ex. 3 Vérifier que si X et Y sont 2 variables aléatoires quelconques, le coefficient de corrélation

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

est tel que :

$$-1 < \rho < 1$$

Vérifier que $\rho = \pm 1$ si $Y = aX + b$, $\forall a$ et b constante.

8.2 Probabilité conditionnelle et Transmission d'un signal binaire

Ex. 4 Dans un jeu avec 5 dés, quelle est la probabilité d'obtenir :

- 5 résultats différents
- 4 résultats différents

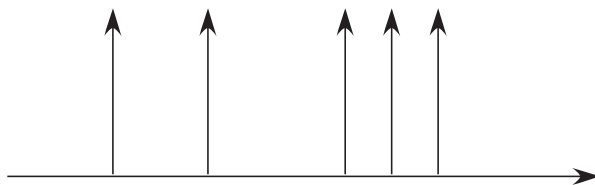
Ex. 5 Démontrer que :

$$\text{Prob}(A \cap B \cap C) = \text{Prob}(A) \cdot \text{Prob}(B|A) \cdot \text{Prob}(C|A \cap B)$$

Ex. 6 On observe à la sortie d'un photomultiplicateur une suite d'impulsion (voir figure). Soit $p_T[k]$ la probabilité d'observer k événements dans un intervalle de temps T . Si le processus est Poissonnien, cette probabilité vaut :

$$p_T[k] = e^{-\Delta} \frac{\Delta^k}{k!}$$

avec $\Delta = \lambda.T$.



- Montrer que $\sum p_T[k] = 1$.
- Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair de points.

Ex. 7 Probabilité de panne Un mécanisme fonctionne à partir de l'instant $t = 0$. Une panne peut survenir à tout instant $T \geq 0$. Cet instant est aléatoire.

- Que représente la valeur de la fonction de répartition $F(\theta) = \text{Prob}(T \leq \theta)$?
- Comment évaluer la probabilité pour que le mécanisme ne tombe pas en panne avant un instant t_0 particulier ?

Ex. 8 Variables aléatoires et moments

Partant d'une variable aléatoire continue $X(\omega)$, on construit la nouvelle variable : $Z(\omega) = X(\omega)^2$. Soit $f_X(\theta)$ la densité de probabilité de X .

Exprimer la densité de probabilité de Z en fonction de celle de X .

Ex. 9 Somme de 2 Variables aléatoires discrètes. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes discrètes de lois respectives p_X et p_Y . Ce qui signifie que l'on connaît $\text{Prob}(X = k) = p_X(k)$, idem pour Y

- Exprimer la loi de probabilité de la variable $Z = X + Y$ en fonction de p_X et p_Y .
- Quelle est le type de relation qui apparaît entre ces lois ?

Ex. 10 Transmission de signal binaire

On souhaite envoyer un signal s pouvant prendre 2 valeurs (0 ou 1), par un canal de transmission (cable, fibre,...) qui va affecter la transmission.

- Si $s = 1$ on émet un signal $S = 2$
- Si $s = 0$ on émet un signal $S = -2$

Soit S la valeur émise

Soit R la valeur enregistrée à la réception

$$R = S + N$$

N représente l'erreur due au bruit de transmission.

La règle de décision à la réception est la suivante :

- Si $R > \frac{1}{2}$ on interprète le symbole comme $S = 2$
- Si $R < \frac{1}{2}$ On interprète le symbole comme $S = -2$

On suppose que le bruit dans le canal de transmission est modélisé par une variable aléatoire de Laplace de paramètre $\alpha = 1$

1. Calculer $Pr(\text{erreur}/s = 1)$ et $Pr(\text{erreur}/s = 0)$
2. On cherche ensuite à optimiser le seuil λ de décision et la règle devient :
 - Si $R > \lambda$ on interprète le symbole comme $S = 2$ ($s = 1$)
 - Si $R < \lambda$ On interprète le symbole comme $S = -2$ ($s = 0$)

Etudier le comportement de la probabilité d'une détection correcte d'un symbole "1" et d'une fausse alarme (décision $s = 1$ alors que l'émission concernait $s = 0$) selon la valeur de λ .

8.3 Stationnarité et Ergodisme

Ex. 11 Soit le signal suivant :

$$f(t, \omega) = f(0, \omega) = X(\omega)$$

1. tracer le graphe de plusieurs réalisations possibles de f .
 2. ce signal est-il stationnaire ?
 3. ce signal est-il ergodique ?
 4. Quelle différence y a-t-il avec un bruit blanc ?
-

Ex. 12 Cosinus à phase aléatoire

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, et le signal :

$$f(t, \omega) = \cos(kt + X(\omega))$$

- (a) Montrer que $E(f(t, \omega)) = 0$
- (b) Montrer que ce signal est stationnaire au second ordre. On vérifiera que :

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{2} \cos(k\tau)$$

en montrant que :

$$X(t)X(t + \tau) = \frac{1}{2} \cos(k\tau + 2X(\omega)) + \frac{1}{2} \cos(k\tau)$$

2. Soit deux signaux suivant la même distribution :

$$\begin{cases} f_1(t, \omega) = \cos(k_1 t + X(\omega)) \\ f_2(t, \omega) = \cos(k_2 t + X(\omega)) \end{cases}$$

montrer que ces deux signaux ne sont pas conjointement stationnaires. On pourra montrer que :

$$\gamma_{1,2}(t_i, t_j) = \frac{1}{2} \cos(k_1 t_1 - k_2 t_2)$$

Ex. 13 On considère le signal suivant :

$$f(t, \omega) = X(\omega) \cdot e^{ikt}$$

avec X variable aléatoire centrée de variance finie (c'est à dire $E[X] = 0$ et $Var[X] = \sigma^2 < \infty$)

1. Montrer que $E[f(t, \omega)] = 0$

2. Montrer que $\gamma(\tau) = \sigma^2 \cdot e^{ik\tau}$
3. ce signal est-il stationnaire ?

Ex. 14 Soit le signal suivant :

$$f(t, \omega) = e^{i \cdot X(\omega) \cdot t + Y(\omega)}$$

Montrer que $E[f(t, \omega)] = E[e^{i \cdot X(\omega) \cdot t}] E[e^{i \cdot Y(\omega)}]$ et que $\gamma(\tau) = E[e^{i \cdot X(\omega) \cdot \tau}]$

Ex. 15 Etude des signaux de la forme :

$$f(t; \omega) = e^{X(\omega)t}$$

où $X(\omega)$ est une variable aléatoire de densité $p(x)$. On notera $P(s)$ la transformée de laplace de $p(x)$.

1. Montrer que f est un signal stationnaire au second ordre sur l'intervalle $[T_1, T_2]$.
2. Exprimer $m(t)$ et $\sigma^2(t)$, espérance et variance de f , en fonction de $P(s)$.
3. Faire de même pour la covariance $\gamma(t_1, t_2)$.
4. Finir le calcul pour une loi uniforme sur $[0, 1]$.
5. et pour une loi normale centrée réduite.

Ex. 16 Le bruit blanc :

Soit $f(t, \omega) = X(t, \omega)$, un bruit blanc. C'est-à-dire qu'à chaque instant t , la valeur de la fonction est tirée suivant la loi de X .

1. Tracer le graphe de quelques réalisations possibles de X
2. Que dire de sa stationnarité ?
3. Calculer sa fonction de covariance et conclure.

8.4 Bruit Blanc

Définition : Un signal discret est un bruit blanc au sens strict si $\forall k$, $X(k, \omega)$ est une variable aléatoire i.i.d.

On note m_x sa moyenne et $\sigma_x^2 < \infty$ sa variance.

Ex. 17

1. Vérifier qu'un bruit blanc est un processus stationnaire au sens strict.
2. Calculer la fonction de covariance du bruit blanc

Ex. 18

Soit le système

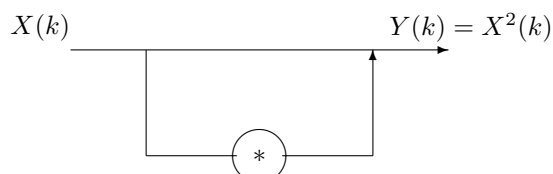


Figure 1 : $Y = X^2$

1. Vérifier que le signal $Y(t)$ est un bruit blanc au sens strict.
2. Calculer sa moyenne.
3. Essayer d'exprimer sa fonction d'autocovariance en fonction des moments de X (on aura besoin des moments supérieurs de X).

Ex. 19

Soit $U(k, \omega)$ la sortie d'un système linéaire discret de réponse impulsionnelle $\{h(\ell)\}_{\ell \in \mathbb{Z}}$ avec en entrée un bruit blanc discret $X(k, \omega)$.

1. Calculer l'espérance de $U(k, \omega)$.
2. Calculer sa fonction d'autocorrélation.

Ex. 20

Bruit faiblement blanc. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. On définit le signal discret suivant :

$$f(k, \omega) = e^{i(3k+1)X(\omega)}$$

1. Calculer l'espérance de $f(k, \omega)$.
2. Calculer sa fonction d'autocorrélation.
3. Montrer que ce signal définit pas un bruit blanc strict.

Ex. 21

Un bruit blanc $f(t)$ de densité spectrale $\frac{\sigma}{2}$ est filtré par un filtre passe bande idéal, dont le gain de la réponse fréquentielle est

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in [-B, B] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la fonction d'autocorrélation du bruit blanc f .
2. Calculer la puissance du signal g de sortie du filtre.
3. Calculer sa fonction d'autocorrélation du signal g de sortie du filtre.

Chapitre 9

Matlab : Tutorial pour débuter

Matlab est un programme interactif pour effectuer facilement des calculs numérique et visualiser les résultats. Au cours des années, de nombreuses boites à outils spécifiques ont été développées, et Matlab est devenu un des outils favoris pour les ingénieurs, en signal , en image, en contrôle, automatique, mathématiques appliquées, ...

Il existe des concurrents très voisins comme Scilab, qui est moins cher (il est même gratuit !). Mais pour des raisons historiques, l'usage de Matlab est très répandu à l'UTC.

La philosophie du produit consiste à travailler avec des matrices et des vecteurs. Tout ce que vous développerez sera d'autant plus efficace que vous serez fidèle à cette philosophie. Avec un peu d'habitude et surtout de réflexion, il est possible d'éviter beaucoup de boucles.

9.1 Vecteurs

Commençons par créer un vecteur, par exemple, si vous tapez dans votre fenêtre de commande :

```
> a = [123456987]
```

Matlab vous retournera :

```
a = 1 2 3 4 5 6 9 8 7
```

Si vous ne souhaitez pas que matlab vous affiche cette réponse, placez un ";" après votre ligne de commande. Vous aurez toujours créé le vecteur " a ", vous évitez juste le réaffichage.

Une autre façon de créer des vecteurs utiles consiste à indiquer une valeur de départ, une valeur d'incrément et une valeur d'arrivée ; par exemple, si vous voulez créer un vecteur d'élément entre 0 et 18 séparés d'un incrément de 2, vous pouvez taper :

```
> t = 0 : 2 : 18
```

```
t = 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18
```

La manipulation de ces vecteurs est intuitive. Par exemple si vous voulez ajouter une constante à toutes les valeurs d'un vecteur, vous ajoutez simplement cette valeur en tapant par exemple :

```
> b = a + 2
```

```
b = 3 4 5 6 7 8 11 10 9
```

Vous avez ainsi créé un vecteur b dont les composantes sont celles de a plus 2.

Si vous voulez maintenant additionner ces deux vecteurs dans un troisième, faites simplement :

```
> c = a + b
```

```
c = 4 6 8 10 12 14 20 18 16
```

Idem pour la soustraction évidemment.

En revanche il faut faire un peu attention pour la multiplication : que signifie " multiplier des vecteurs " ? s'agit-il de multiplier les composantes deux à deux ? ou d'obtenir un produit scalaire ?

Composons deux vecteurs a et b :

```
»a = 1 :2 :10
```

```
a =
```

```
1 3 5 7 9
```

```
»b=2 :2 :11
```

```
b =
```

```
2 4 6 8 10
```

La multiplication n'a pas de sens, ce qui se traduit par :

```
»a*b
```

```
??? Error using ==: *
```

```
Inner matrix dimensions must agree.
```

Par contre, la multiplication d'un vecteur ligne avec un vecteur colonne a un sens. On obtient alors le produit scalaire :

```
»a*b'
```

```
ans =
```

```
190
```

Notez au passage comment obtenir la transposition d'un vecteur ou d'une matrice avec le quote '

La multiplication d'un vecteur colonne avec un vecteur ligne produit une matrice, ce qu'on obtient par :

```
»a'*b
```

```
ans =
```

```
2 4 6 8 10
6 12 18 24 30
10 20 30 40 50
14 28 42 56 70
18 36 54 72 90
```

Enfin, si on souhaite multiplier terme à terme les composantes de ces deux vecteurs, on le précise en plaçant un point avant l'opérateur de multiplication, ce qui donne :

```
»a.*b
```

```
ans =
```

```
2 12 30 56 90
```

9.2 Fonctions

Il existe un grand nombre de fonctions prêtes à l'emploi dans matlab, et un plus grand nombre encore dans des boîtes à outils (toolbox). Dès qu'on en connaît le nom, leur fonctionnement est souvent complètement expliqué par la commande

```
> help nom - de - la - fonction
```

Par exemple

```
»help PSD
```

```
PSD Power Spectral Density estimate.
```

```
Pxx = PSD(X,NFFT,Fs,WINDOW) estimates the Power Spectral Density of
signal vector X using Welch's averaged periodogram method. X is
divided into overlapping sections, each of which is detrended, then
windowed by...etc.
```

La plupart des constantes très utilisées, comme π sont également connues par matlab :

```
»pi
```

```
ans =
```

```
3.1416
```

Ce qui permettra d'écrire :

```
sin(pi/4)ans = 0.7071
```

Le nombre complexe correspondant à la racine de -1 est aussi connu :

```
»i
```

```
ans =
```

```
0 + 1.0000i
```

On trouve ici la forme complexe $Re(z) + i Im(z)$.

Rien ne vous empêche pour autant d'avoir une variable nommée i ou pi , mais il faut savoir qu'alors, vos valeurs remplaceront celles de Matlab durant votre session de travail.

La forme exponentielle fonctionne également en complexe :

```
»exp(i*pi/4)
```

```
ans =
```

```
0.7071 + 0.7071i
```

Matlab fournit un environnement pour créer vos propres fonctions, qui peuvent alors faire appel à celles de Matlab. Il s'agit d'un outil extrêmement efficace pour tester des idées.

9.3 Les figures et les tracés

Matlab fournit aussi des fonctions pour tracer les figures. La plus simple est la fonction *plot*

Prenons l'exemple suivant :

`t=0 :0.25 :7`; `y = sin(t)`; t est un vecteur qui contient nos indices de temps, et y va donc fournir la valeur du sinus pour tout ces instants; pour voir le résultat, il suffit de demander le tracé de y en fonction de t par :

```
plot(t, y)
```

9.4 les M-files

Ce sont des fichiers contenant des commandes que Matlab interprètera ; On les nomme en principe *nom_du_fichier.m* avec une extension *.m* Il y a quelques différences selon les plateformes sur lesquelles vous travaillez.

- Macintosh Choisir "New M-file" dans le menu Fichier. Comme il s'agit simplement de texte, vous pouvez du reste utiliser l'éditeur que vous voulez.
- Windows Presque identique, mais les fichiers sont sauvegardé dans le clipboard. Attention à sauvegarder sous le nom qui vous convient.
- Unix En principe, on utilise un éditeur séparé de Matlab.

Regardez la m-file suivante. Elle contient une fonction qui permet de générer des signaux aléatoires très simples :

```
function [s]=randline(n,k);
t=1 :k;
for j=1 :n a=randn(1,1);b=randn(1,1);
x=a*t+b;
s(j, :)=x;
end
whitebg('w')
plot(s')
```

On observe qu'il s'agit d'une fonction dont le nom est *randline*, paramétrable avec les variables n et k , qui écrira le résultat dans s . Elle fait appel à la fonction de matlab : *randn*. tapez *help randn* pour en savoir plus sur cette fonction.

Vous pouvez maintenant créer vos propres routines et fonctions pour explorer les concepts de SY06.

Chapitre 10

UV SY06 - Les Règles d'Or du calcul

10.1 Règle n°1 : Le carré d'une somme n'est pas la somme des carrés

En général tout le monde sait que : $(a + b + c)^2 \neq a^2 + b^2 + c^2$

Mais il est parfois moins clair que cette vérité s'applique aussi aux intégrales qui sont aussi des sommes (à la façon de Riemann) : $(\int f(x)dx)^2 \neq \int f(x)^2 dx$

Pour trouver sans souffrir un résultat correct il suffit de revenir aux sources et d'écrire simplement que $A^2 = A.A$, ce qui donne :

$$\left(\int f(x)dx\right)^2 = \int f(u)du \cdot \int f(v)dv = \int_u \int_v f(u) \cdot f(v)du \cdot dv$$

De la même façon que pour une somme discrète :

$$\left(\sum x_n\right)^2 = \left(\sum_m x_m\right) \cdot \left(\sum_n x_n\right)$$

10.2 Outils du traitement du signal

Dans ce tableau, on suppose les signaux centrés si besoin.

Type de signaux	<i>déterministes</i>		<i>Aléatoires stationnaires</i>	
signaux à temps discrets	Tr. de Fourier	$\hat{x}(\xi) = \sum x(k) \cdot e^{-i\xi k}$	Covariance	$\Gamma_x(\ell) = E[x(k) \cdot x^*(k + \ell)]$
	Convolution	$x \star y[m] = \sum_\ell x(\ell) y(m - \ell)$		
	Autocorrélation	$C_x[\ell] = \sum x(k) x^*(k + \ell)$	Spectre	$S_x(\xi) = \sum \Gamma_x(\ell) \cdot e^{-i\xi \ell}$
	Intercorrélation	$C_{xy}[\ell] = \sum x(k) y^*(k + \ell)$		
signaux à temps continu	Tr. de Fourier	$\hat{x}(\xi) = \int x(k) \cdot e^{-i\xi k}$	Covariance	$\Gamma_x(\tau) = E[x(t) \cdot x^*(k + \tau)]$
	Convolution	$x \star y[t] = \int x(\theta) y(t - \theta) \delta\theta$		
	Autocorrélation	$C_x[t] = \int x(\theta) x^*(\theta + t) \delta\theta$	Spectre	$S_x(\xi) = \int \Gamma_x(\tau) \cdot e^{-i\xi \tau} \partial\tau$
	Intercorrélation	$C_{xy}[t] = \int x(\theta) y^*(\theta + t) \delta\theta$		

TABLE 10.1 – Tableau des principaux outils d'analyse du signal

10.3 Trigonométrie

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \cos(a) \sin(b) + \cos(b) \sin(a)$$

$$\sin(a - b) = \cos(a) \sin(b) - \cos(b) \sin(a)$$

10.4 Quelques définitions utiles

Soit X une variable aléatoire de densité $p(x)$, et ϕ une fonction continue

$$\mathbf{E}(\phi(X)) = \int \phi(x)p(x) dx$$

Valeur moyenne : $\mathbf{E}(f(t)) = m_t$

Covariance : $cov(t, t') = \mathbf{E}(f(t) - m_t)(f(t') - m_{t'})^*$

Autocorrélation ou Corrélacion ($m_t = 0$) : $\gamma(\tau) = cov(t, t + \tau) = \mathbf{E}(f(t)f^*(t + \tau))$

Spectre de puissance : $\Gamma(\xi) = \hat{\gamma}$

Processus stationnaire : toutes les propriétés statistiques sont invariantes par changement de l'origine des temps.