



Nicolas Loménie

Traitement d'Images

Concepts et Algorithmes

Traitement d'Images

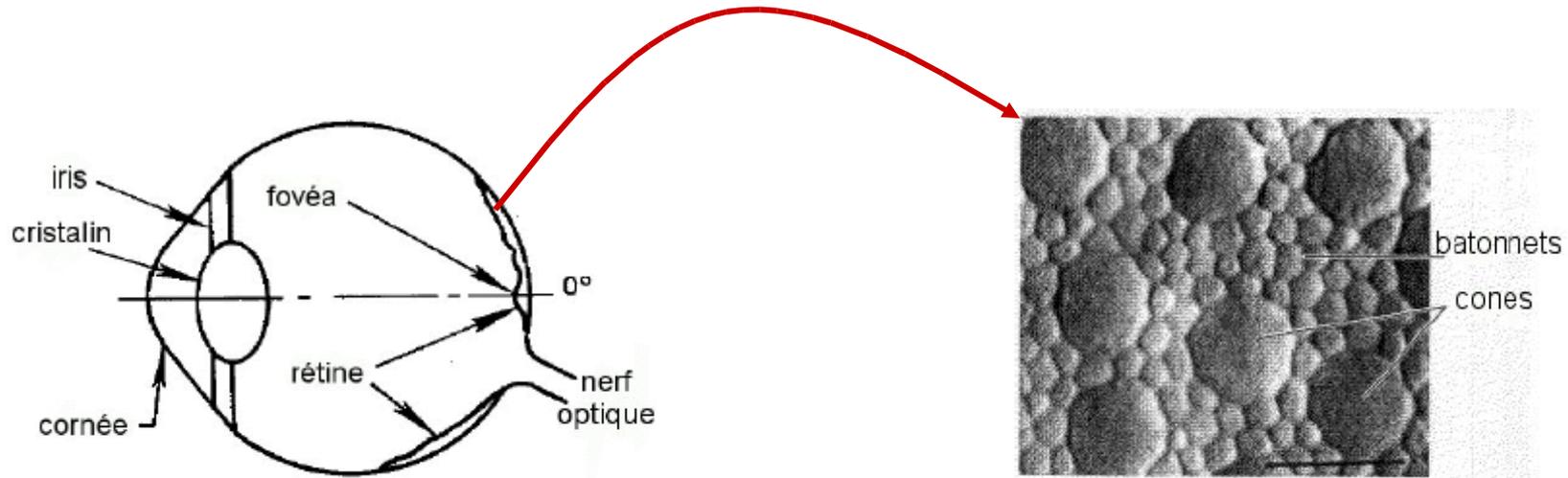
Ouvrages de références :

- *“Analyse d'images : Filtrage et Segmentation”*, Cocquerez and al., Ed. Dunod, 1995
(ouvrage de base : exposé des différentes techniques de traitement d'images appliquées à la segmentation)
- *“Le traitement des images”*, H. Maître, Hermes Science Publications , 2003
(ouvrage de référence écrit par un maître national du sujet : beaucoup d'explications approfondies du phénomène image à tous les niveaux et notamment traitement du signal)
- *“Computer Vision : a modern approach”*, Forsyth and Ponce, International Edition, Prentice Hall, 2003

Auteurs de références et remerciements :

- Antoine Manzanera pour la morphologie mathématique
- Francis Schmitt pour la vision active et passive humaine

Partie 1 : Vision et Images



- Cristallin : lentille de focale et d'ouverture variable
- Rétine : couche photosensible, transducteur optique -> électrique
- Rétine : hétérogène en nature et densité des photorécepteurs
- Dans la fovéa, zone d'hyperacuité visuelle, 6 à 7 Millions de cônes exclusivement, à branchement synaptique simple : caméra CCD
- Champ visuel asymétrique + **point aveugle**

Vision et Images



[Home](#) | [Site Map](#) | [Contact](#)

[Products](#) | [Sales](#) | [Support](#) | [News](#) | [Corporate](#)

NEW 1.3MP DRAGONFLY2



Sony 1/3" CCD · 1296x864 at 20 FPS

[view all](#)

Point Grey Research® Inc. is a worldwide leader in the development of advanced digital camera technology products. With a number of local distributors throughout the world, Point Grey designs, manufactures and distributes IEEE-1394 (FireWire) cameras, stereo vision cameras and spherical digital video cameras to a broad spectrum of industries.



IMAGING

Single-lens IEEE-1394 (FireWire) and 1394b CMOS cameras.



STEREO VISION

Two- and three-camera IEEE-1394 (FireWire) stereo systems for 3D imaging.



SPHERICAL VISION

IEEE-1394 spherical imaging hardware and software.

[Products](#) • [Sales](#) • [Support](#) • [News](#) • [Corporate](#) • [Contact](#)

Recent News

8/15/2007

Point Grey Research Announces Remote Head Addition to the Dragonfly2 Family [\[more\]](#)

6/12/2007

Point Grey Research Launches the Grasshopper™ Series of IEEE-1394b Cameras [\[more\]](#)

Insights Newsletter

Stay updated with the latest Point Grey news by subscribing to our Insights mailing list.



www.ptgrey.com



10 Years of Innovation in Imaging

Vision et Images

Pour ce cours d'introduction, nous allons illustrer les concepts et techniques du Traitement d'Images à partir d'images optiques obtenues en lumière incohérente (image optique classique des appareils photos ou du système visuel humain).

Nous allons en décortiquer les propriétés physiques et mathématiques pour expliquer les algorithmes de traitement automatique.

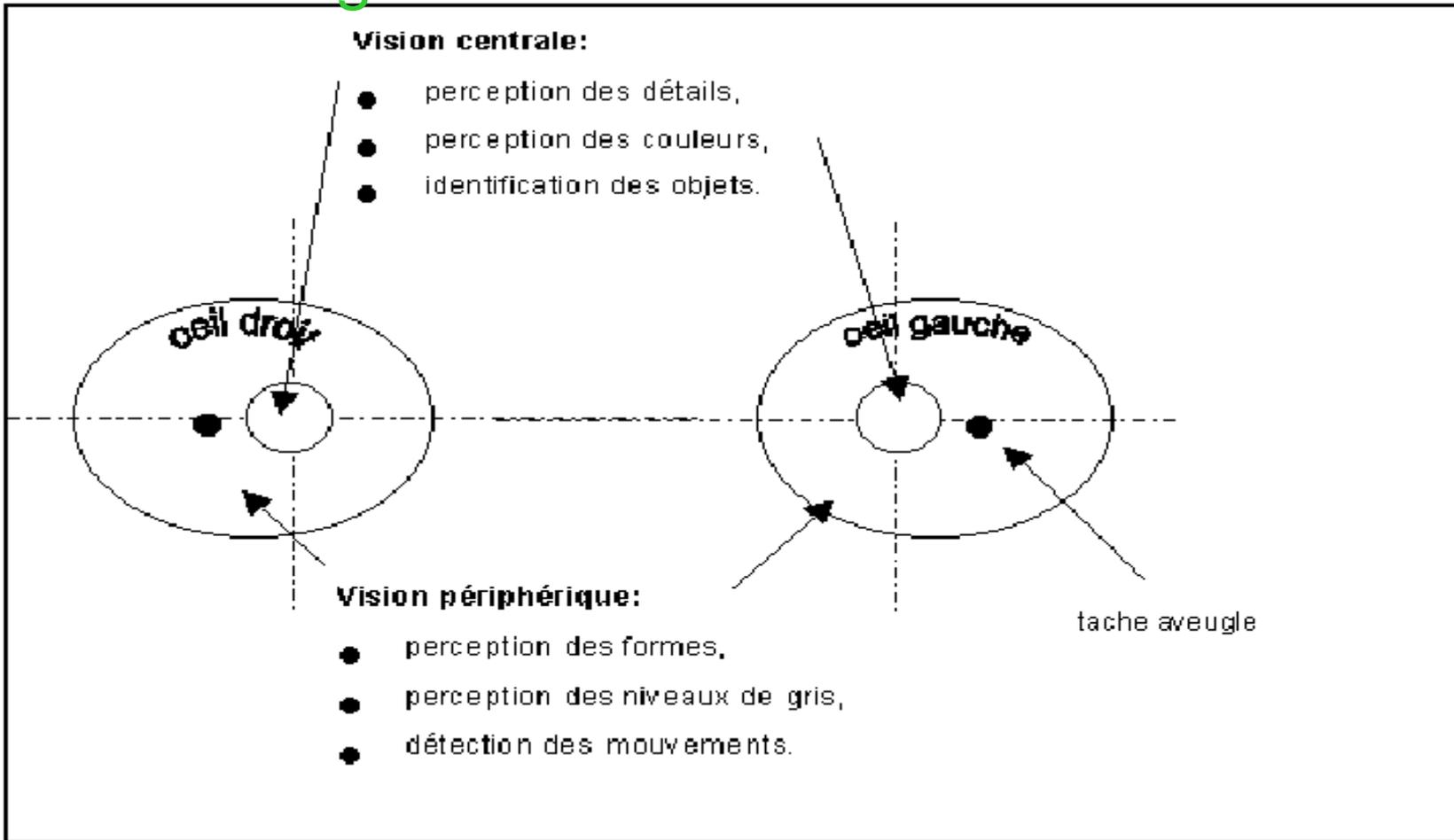
Une adaptation est nécessaire dans le cas des images obtenues en lumière cohérente par exemple (radar) mais les concepts et techniques restent les mêmes.

Vision et Images

Les algorithmes de traitements incluent les problématiques de :

- Codage et transmission
- Filtrage et amélioration
- Interprétation (vision active)

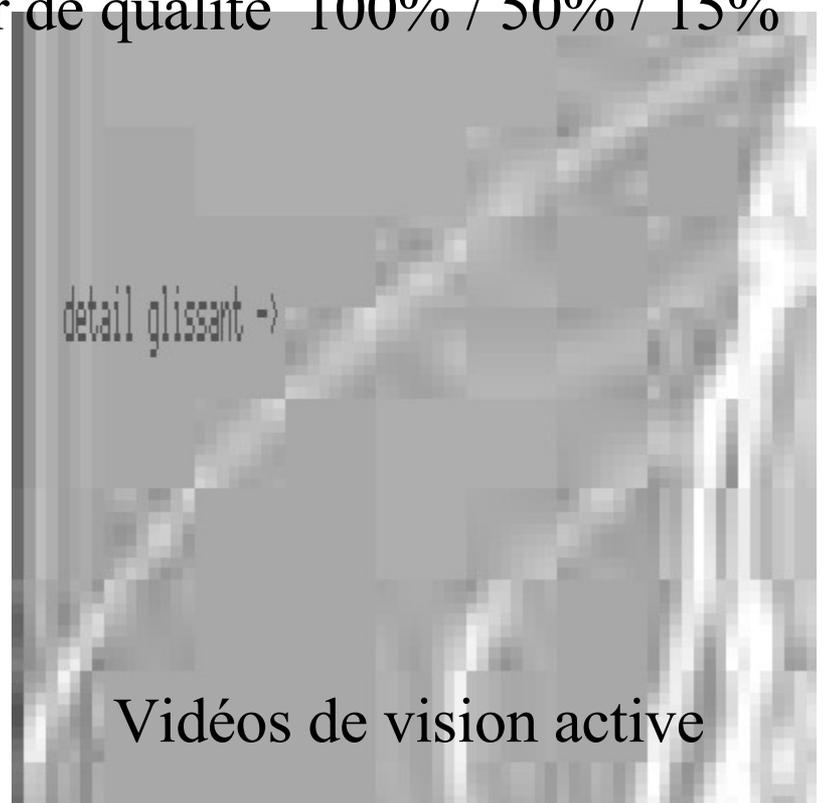
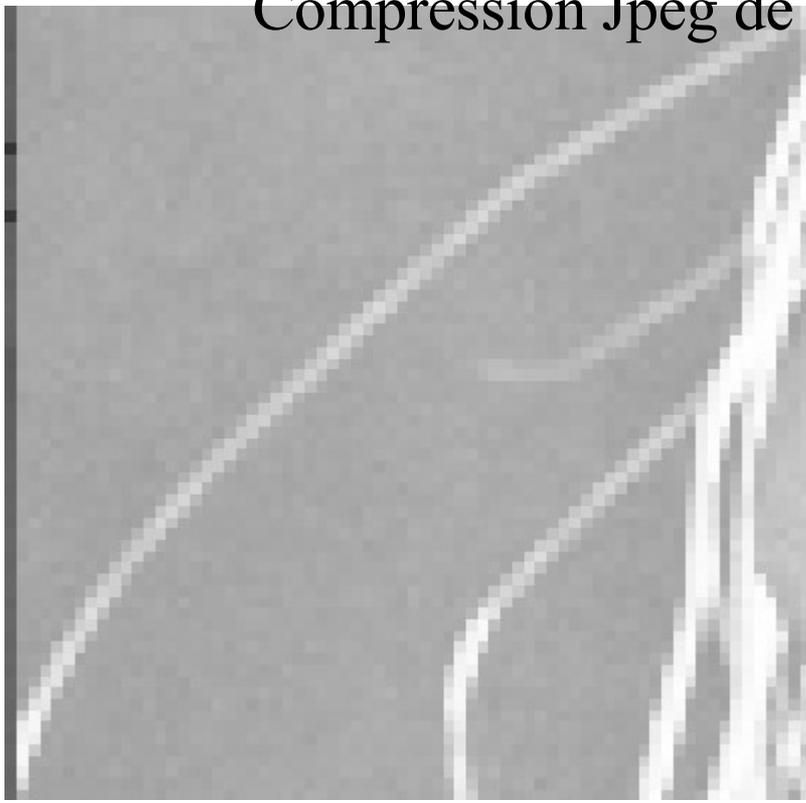
Vision et Images



vision périphérique des vertébrés



Compression Jpeg de facteur de qualité 100% / 50% / 15%



Vidéos de vision active

Vision et Images

Vision Passive

Physiologistes et ingénieurs : expériences psychophysiques :

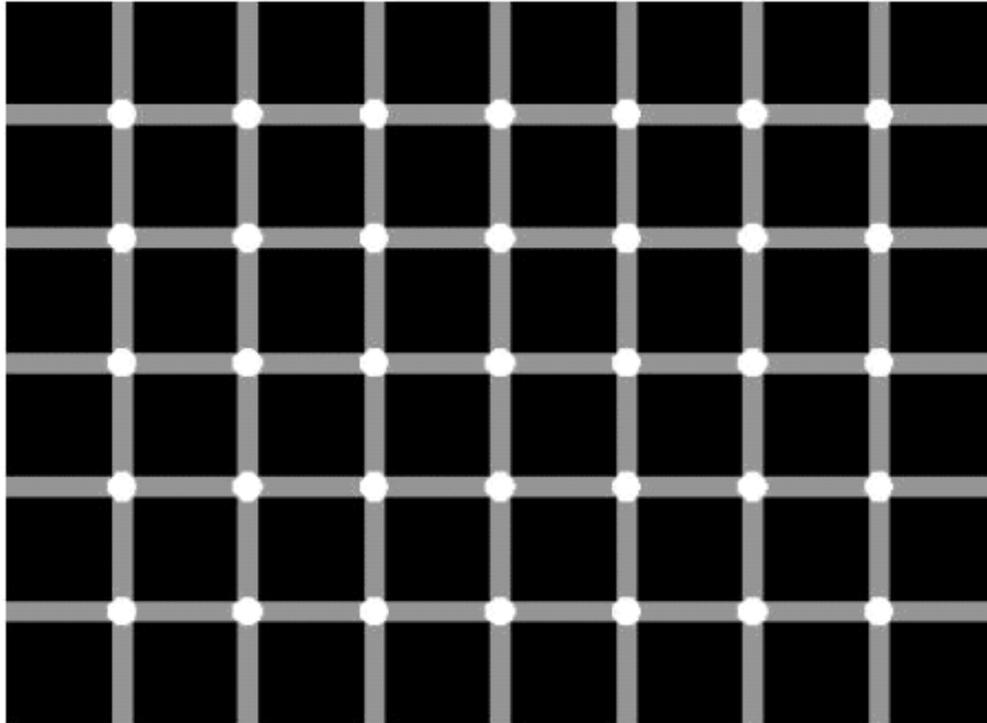
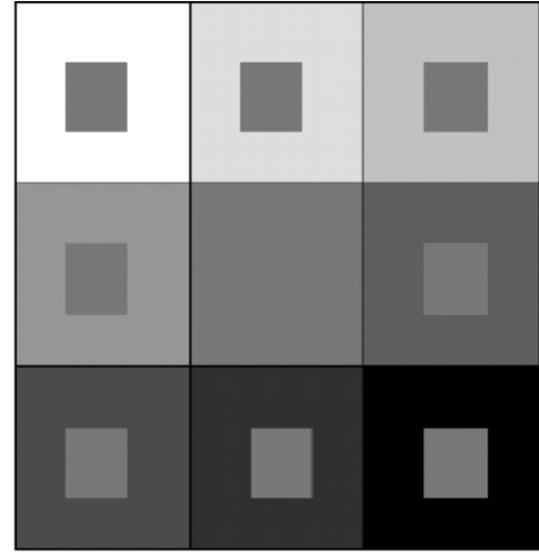
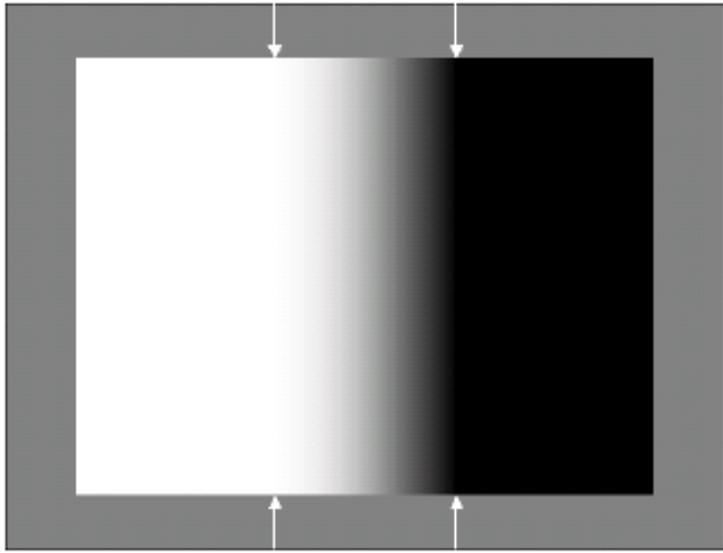
- En détection : petites variations vu / pas vu
- En perception : grandes variations : comment relier les grandeurs physiques du stimulus visuel aux grandeurs perceptives de la réponse engendrée chez l'observateur

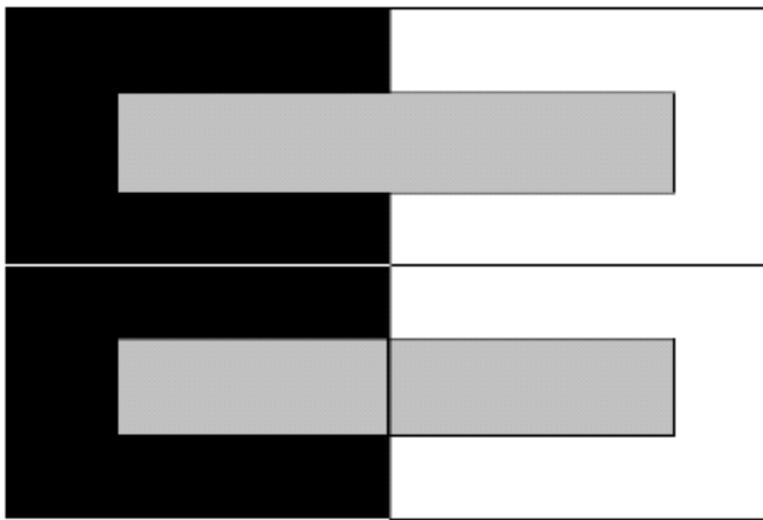


La perception des différentes gradations d'une échelle de gris dépend du niveau lumineux du fond.

La différence entre la réalité du signal et le codage effectué se joue au niveau du filtrage linéaire effectué par les connexions nerveuses

Applet





Filtrage non linéaire au niveau des connexions nerveuses en présence de contours

FIG. 1.4 – Phénomènes dus aux interactions spatiales dans l’image. À gauche, la seule adjonction d’un contour au milieu de la barre grise au motif du haut permet d’obtenir un net contraste simultané (motif du bas).

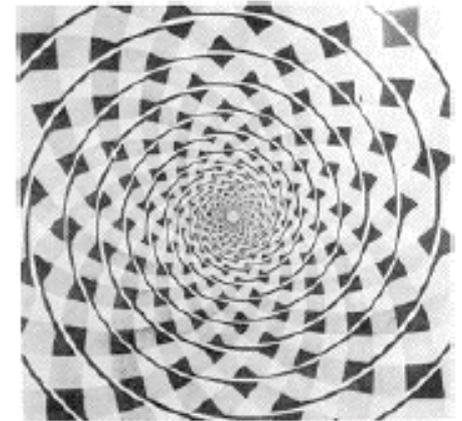
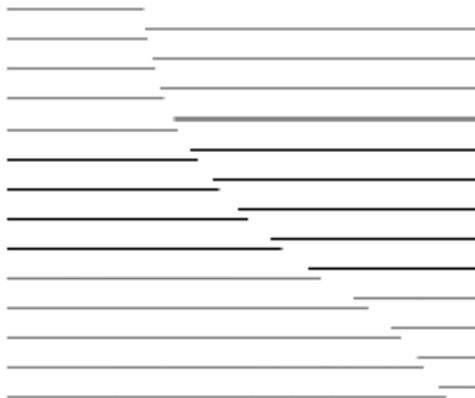
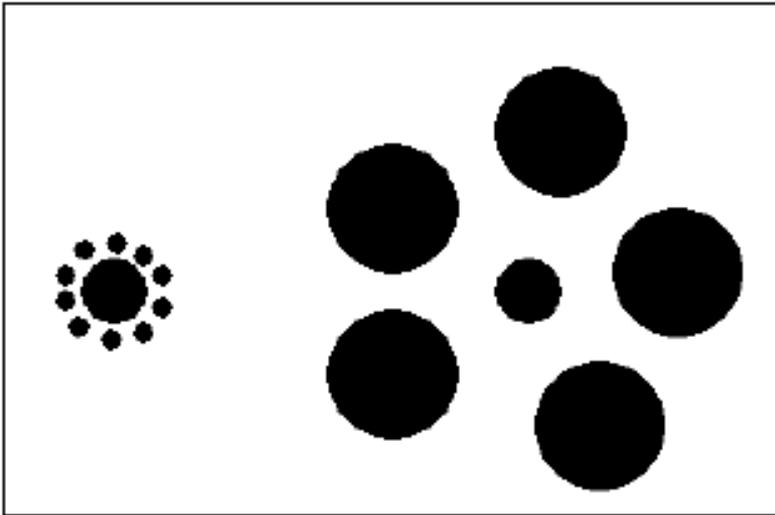


FIG. 1.5 – Phénomènes dus aux interactions spatiales dans l’image. Les contours vrais ou faux (à gauche) jouent par leur orientation un rôle primordial dans certains effets : les diagonales dans l’illusion de Zöllner (au centre) sont parallèles et la spirale de Snarl (à droite) n’est formée... que de cercles concentriques.

Ici, l'explication neurobiologique est difficile : on est à la limite de la vision passive



Illusion de Tichener : les deux gâteaux centraux sont de même taille !

Vision active

A lieu dans les aires supérieures du cerveau, après transformations et codages effectués par le système passif : *Reconnaissance des Formes, IA*

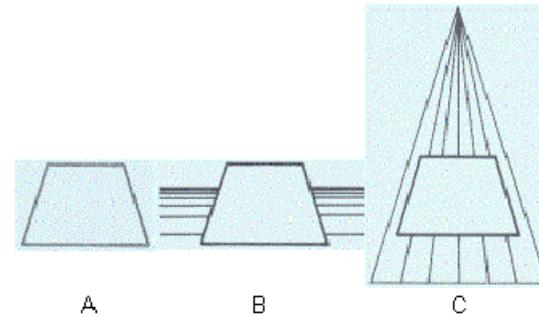


FIG. 1.7 – La perception des formes est modifiée selon le contexte spatial où elle est située.

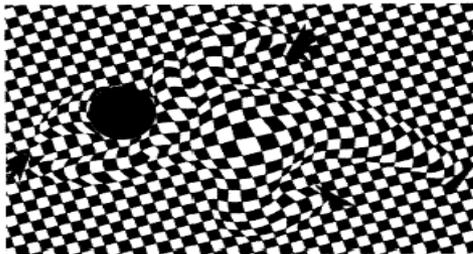


FIG. 1.8 – Rôle des gradients de texture dans l'« Arlequin » de Vasarely (cf. texte).

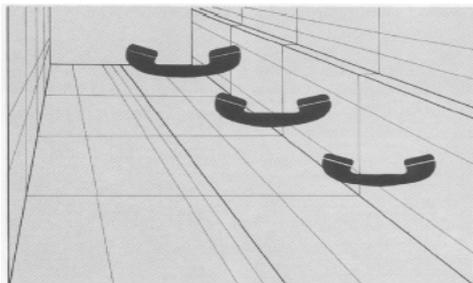


FIG. 1.9 – Illusion géométrique sur la taille provoquée par la perspective.



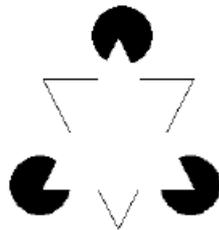
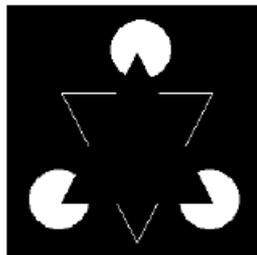
Or même quantité d'info. Du point de vue entropique ... donc plus complexe qu'une approche statistique ...¹³

Ecole Gestaltiste :

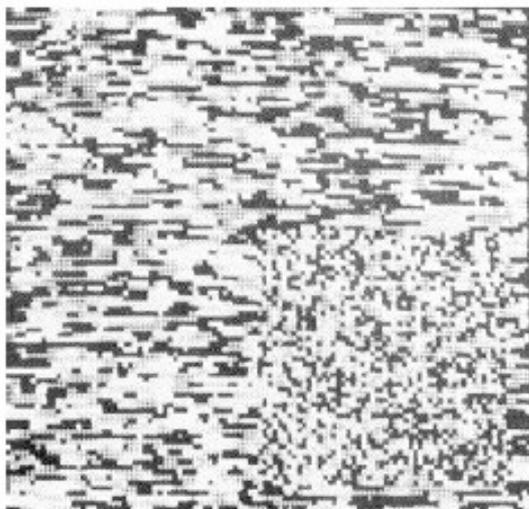
- Théorie de la forme et de la perception visuelle
- Principe de simplification symbolique dans le cerveau



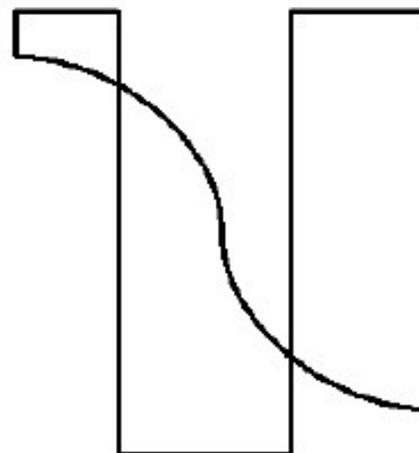
FIG. 1.11 – Le triangle est perçu comme une unité graphique en soi.



La figure se simplifie par ajout mental d'un triangle plus blanc que blanc posé sur les autres figures



Loi de similarité



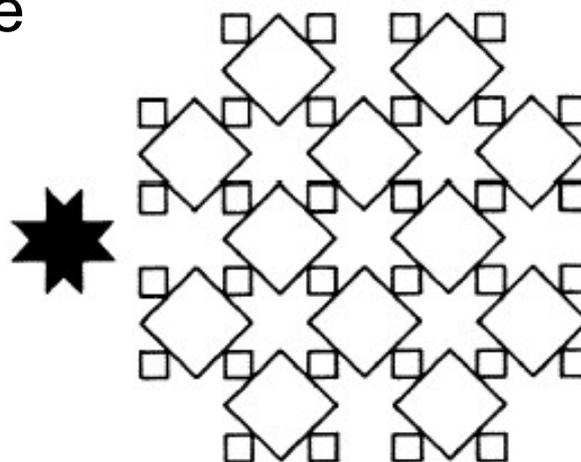
Loi de continuité



Loi de proximité



Loi de fermeture



Le cerveau complète l'**analyse** du signal par une **synthèse** visuelle utilisant mémoire et connaissance (exemple de la lecture)



« Jeune fille ou vieille femme ? » figure ambiguë de R. Leeper.

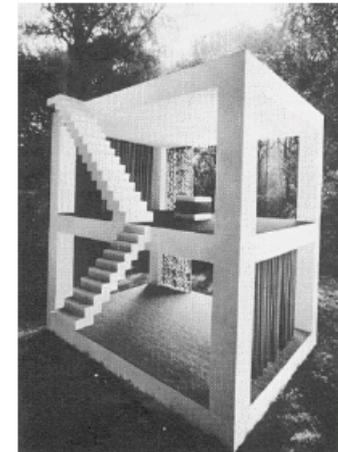
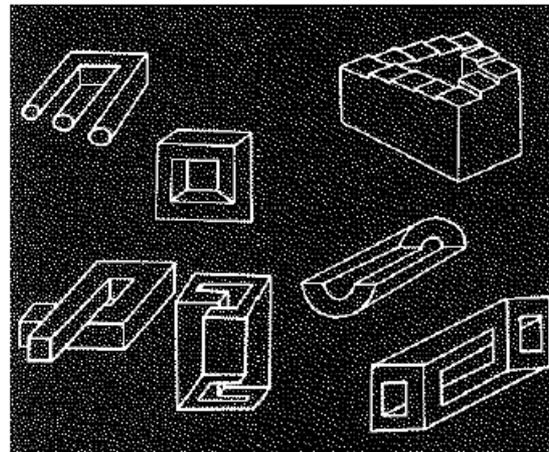
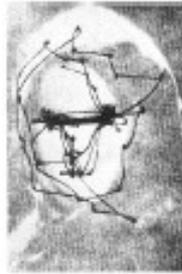
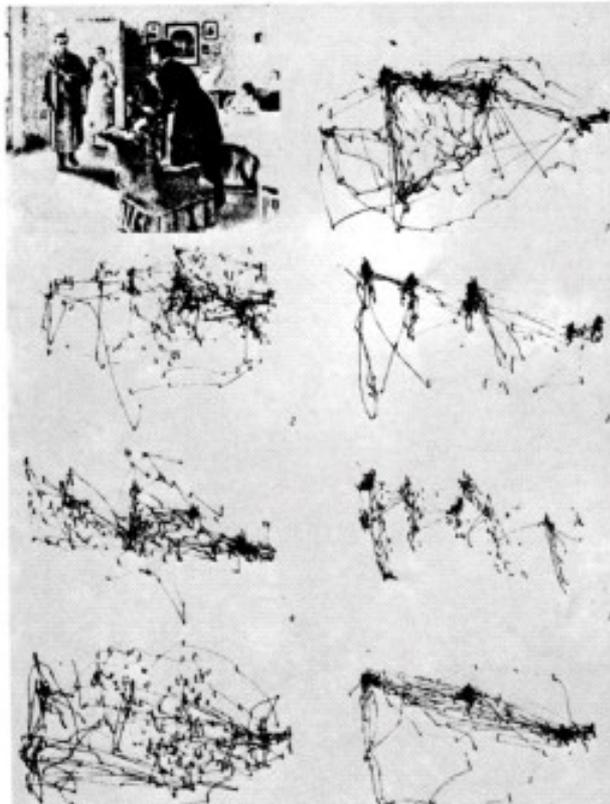


FIG. 1.15 – Quelques constructions impossibles (à gauche), ... qui n'ont pas arrêté cet architecte (photographie A.P. Lamoth), à droite.



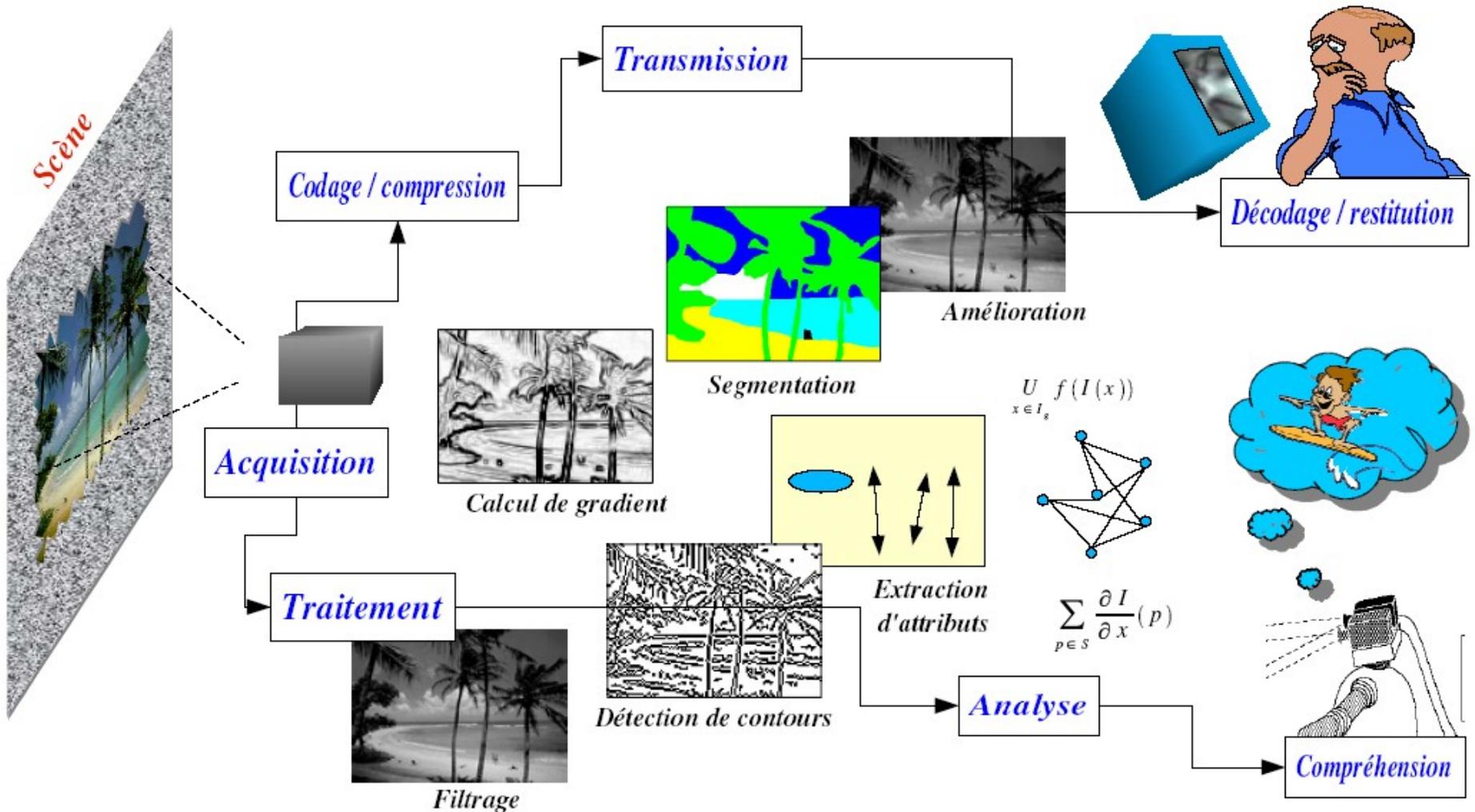
<http://perso.ifsic.univ-rennes1.fr/aleroy/ModuleImage/contenu/BanqueModuleImage/Logiciels/Applets/>



Vision mécaniquement active

FIG. 1.16 – Chemin que suit l'axe du regard (d'après Yarbuss et Kolars [Kolars, 1972]) : en haut, lorsqu'on observe une image ; en bas lorsqu'on demande à l'observateur de se souvenir de diverses choses concernant l'image.

Système Informatique global à base de Traitements d'Images d'ordre passif (traitement du signal 2D) et actif (interprétation de scènes)



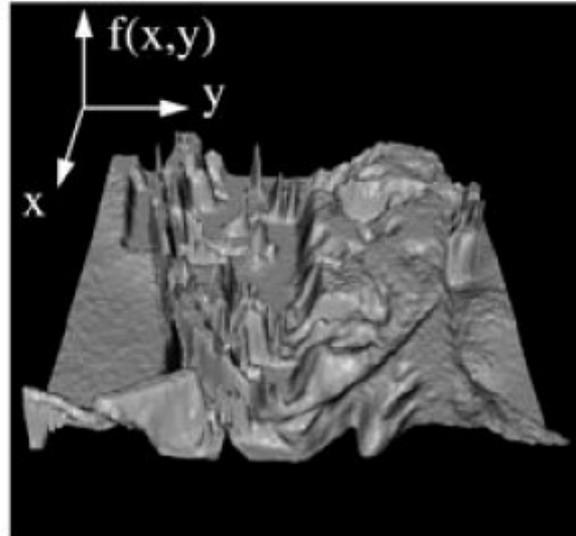
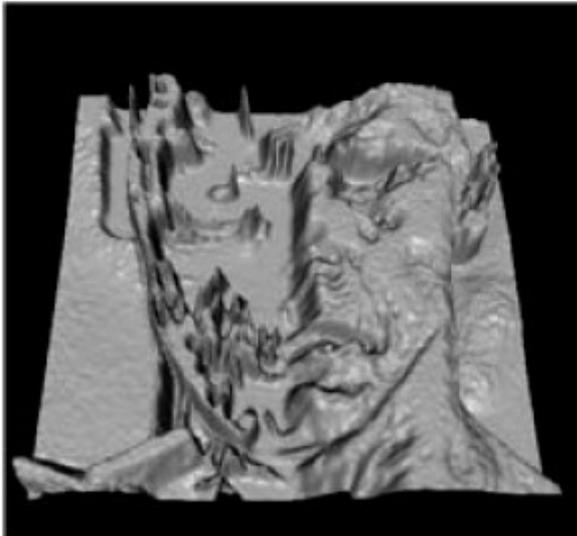
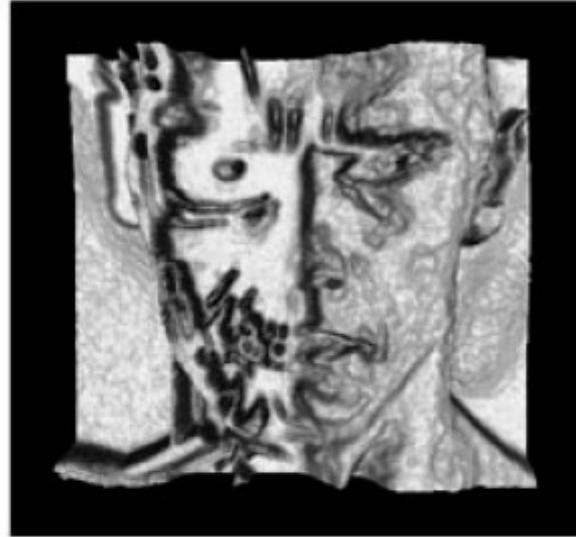
Le domaine de la vision par ordinateur est à la croisée de plusieurs disciplines. Il constitue un pôle de recherche à part entière mais rassemble des mathématiciens, informaticiens, physiciens, biologistes dans les équipes de recherche. Que ce soit pour définir de nouveaux modèles numériques de traitement ou de nouvelles applications.

Partant de là, les techniques et les cadres théoriques utilisés pour faire parler une image sont de natures très diverses. On pourra voir l'image ou un élément d'image comme :

- une fonction continue de deux variables
- une matrice discrète
- la réalisation d'une variable aléatoire
- une plaque-mince déformable
- etc...

Dans cette longue introduction, on présente quelques aspects de ces modèles d'image avant de parler plus précisément des modèles de traitement : aspect fréquentiel et aspect statistique par exemple.

Comment manipuler l'image ? Comme une fonction continue
 $f : [a,b] \times [c,d] \rightarrow [0,1]$



Partie 2 : Description Fréquentielle des images

Utiles pour expliquer les opérations typique du Traitement de Signaux :

- Filtrage
- Echantillonnage
- Prétraitements

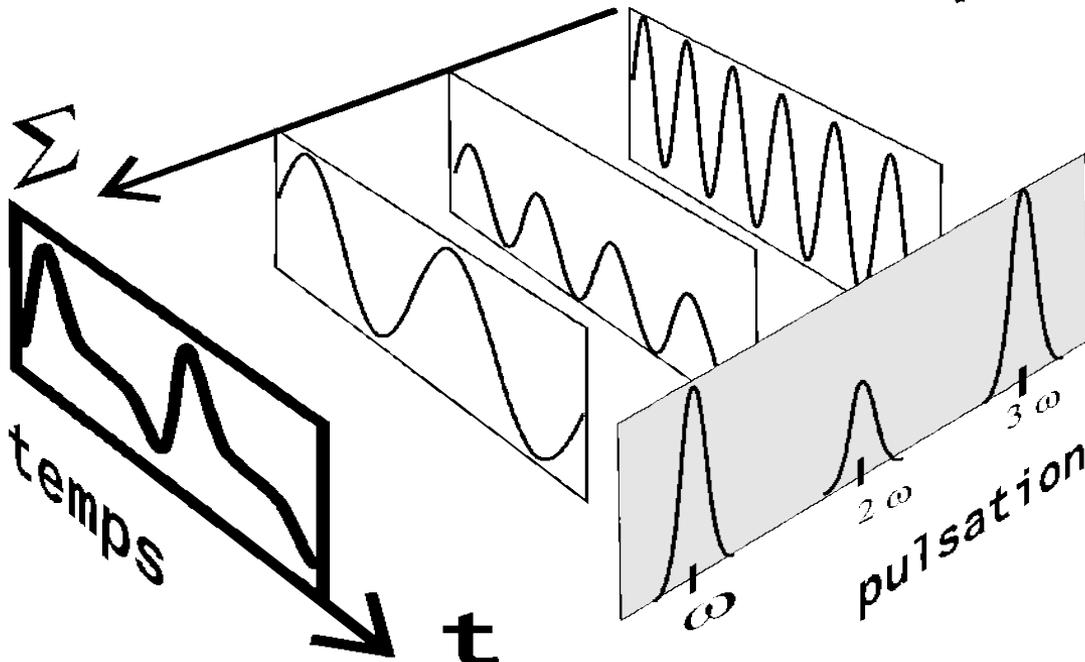
Extensions des techniques monodimensionnelles comme l'Analyse de Fourier et le Filtrage Linéaire.

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot (ux + vy)} dx dy$$

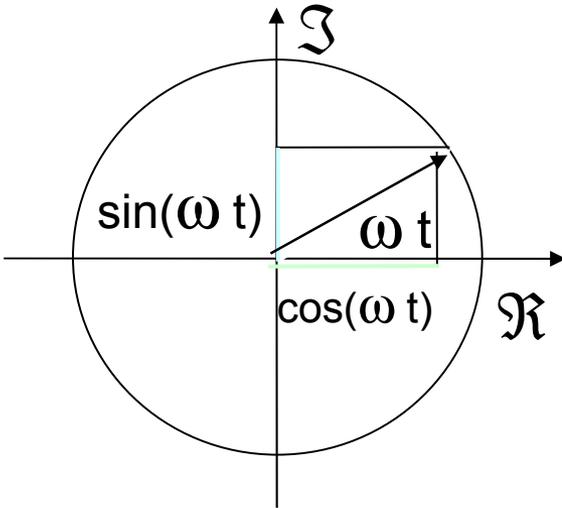
Mais revenons au cas 1D

Transformée de Fourier de $f(t)$ où $\omega=2\pi.v$ est la pulsation et v la fréquence de rotation d'un vecteur tournant dans le plan complexe

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

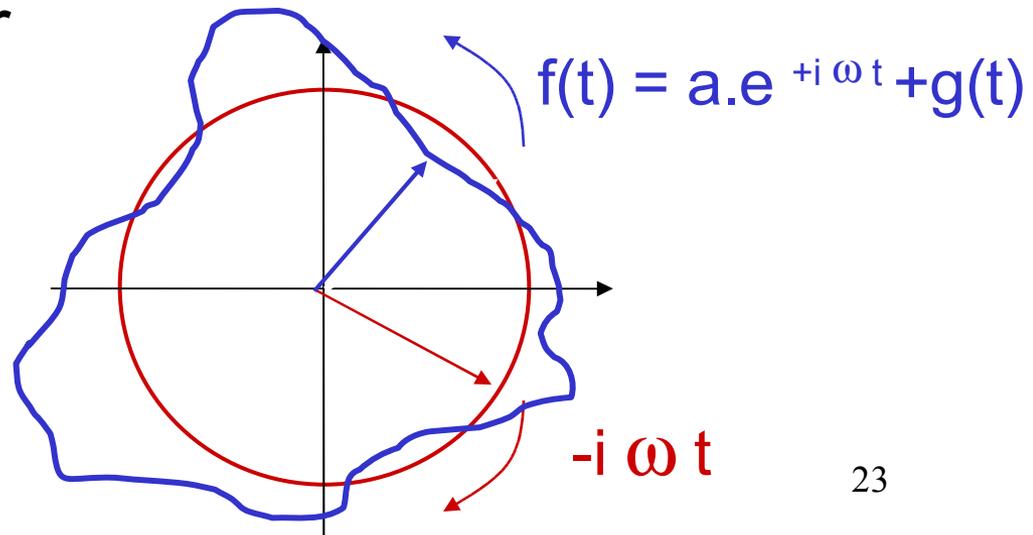


Exponentielle imaginaire $e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$



$\Rightarrow e^{+i\omega t}$ est un vecteur de longueur ou module 1 en rotation à la fréquence $\omega / 2\pi$, de phase ωt

Transformée de Fourier



A propos des unités

Les unités des espaces réciproques ne sont pas prises au hasard !!

→ Doivent être « **dimensionnellement correctes** »

$$e^{-i\omega t} = [e^{-i2\pi}]$$

temps (t) TF $\omega = 2\pi / T = \text{rad.s}^{-1}$ et $\nu = \text{Hz}$

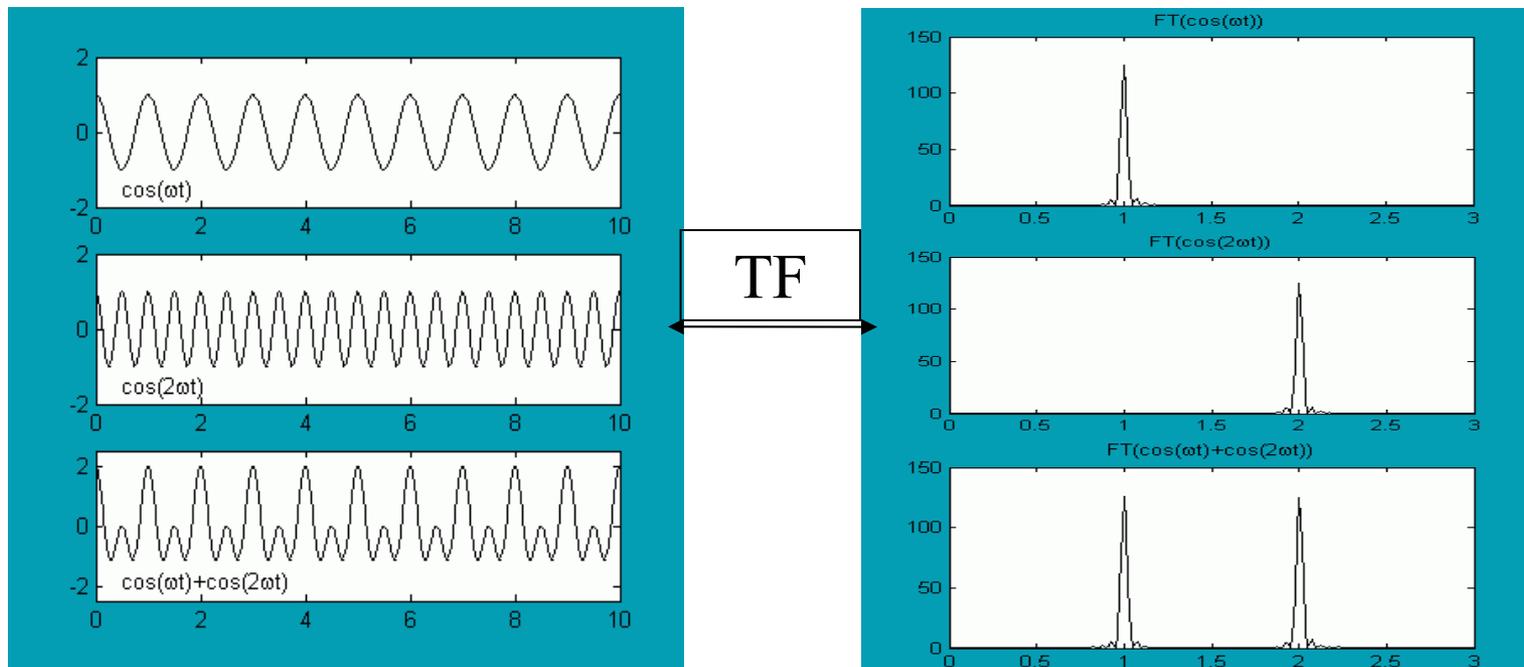
$$e^{-ikx} = [e^{-i2\pi}]$$

distances (x) TF $k = 2\pi / \lambda = \text{rad.m}^{-1}$ et $\nu = \text{m}^{-1}$

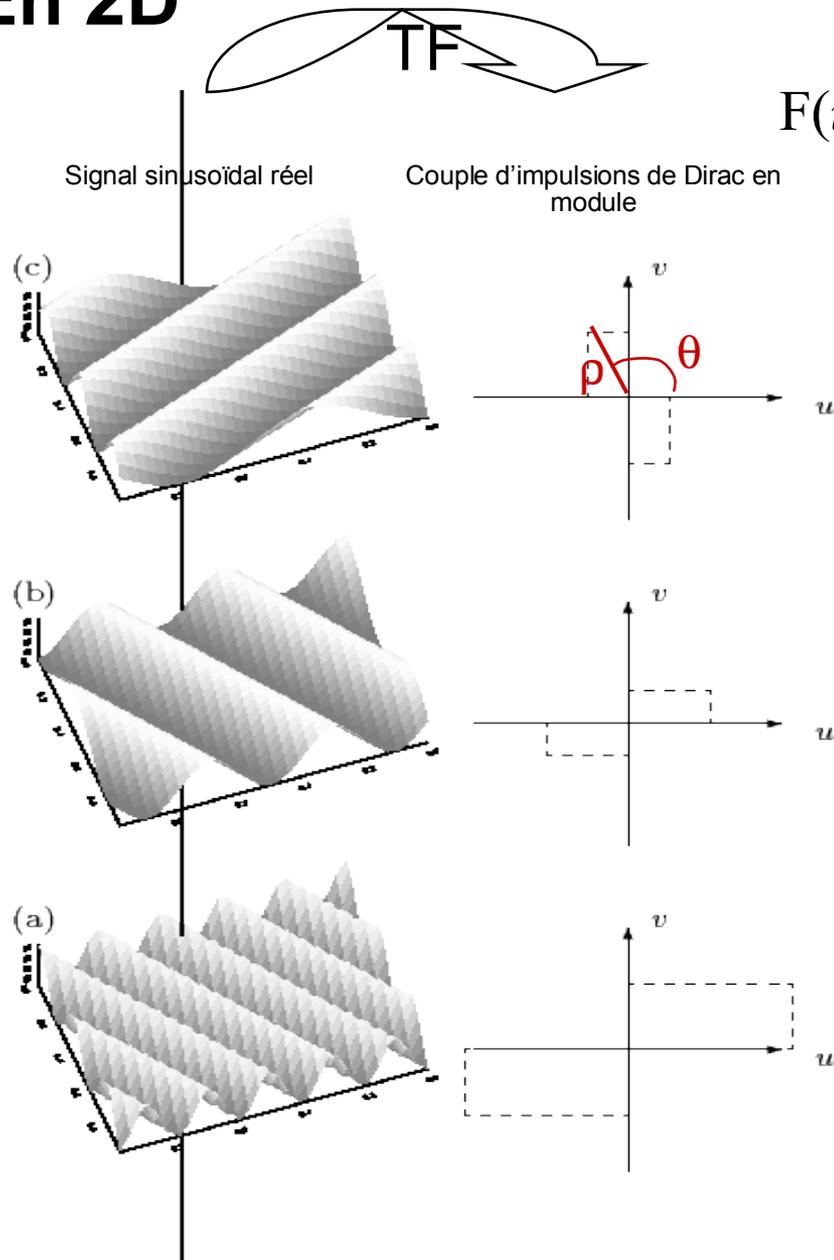
L'unité de longueur peut être liée à la résolution pixellique d'une image plutôt qu'à la mesure physique métrique.

Définition intuitive

- Tout signal peut être décomposé en une **somme de sinus et de cosinus**
- La transformée de Fourier $F(\omega)$ permet de déterminer l'**amplitude** et la **fréquence** de ces composantes



En 2D



$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot (ux + vy)} dx dy$$

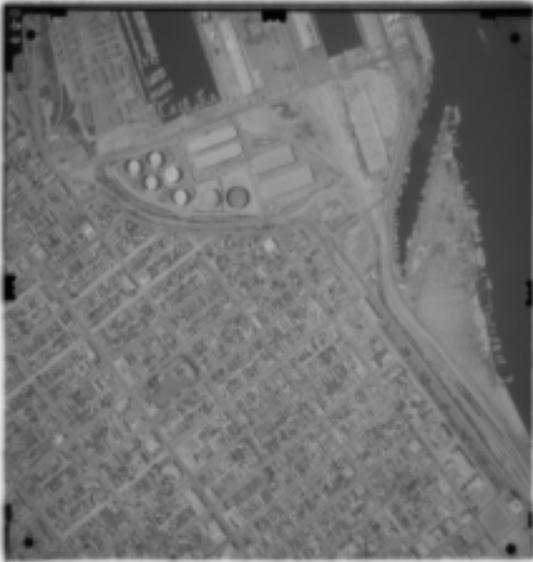
$f(x, y)$ est une combinaison linéaire d'exponentielles complexes qui représentent des plans ondulés (“tôles”).
 $F(u, v)$ décrit la pondération accordée à chaque onde.

The wave $e^{+i \cdot 2\pi \cdot (ux + vy)}$

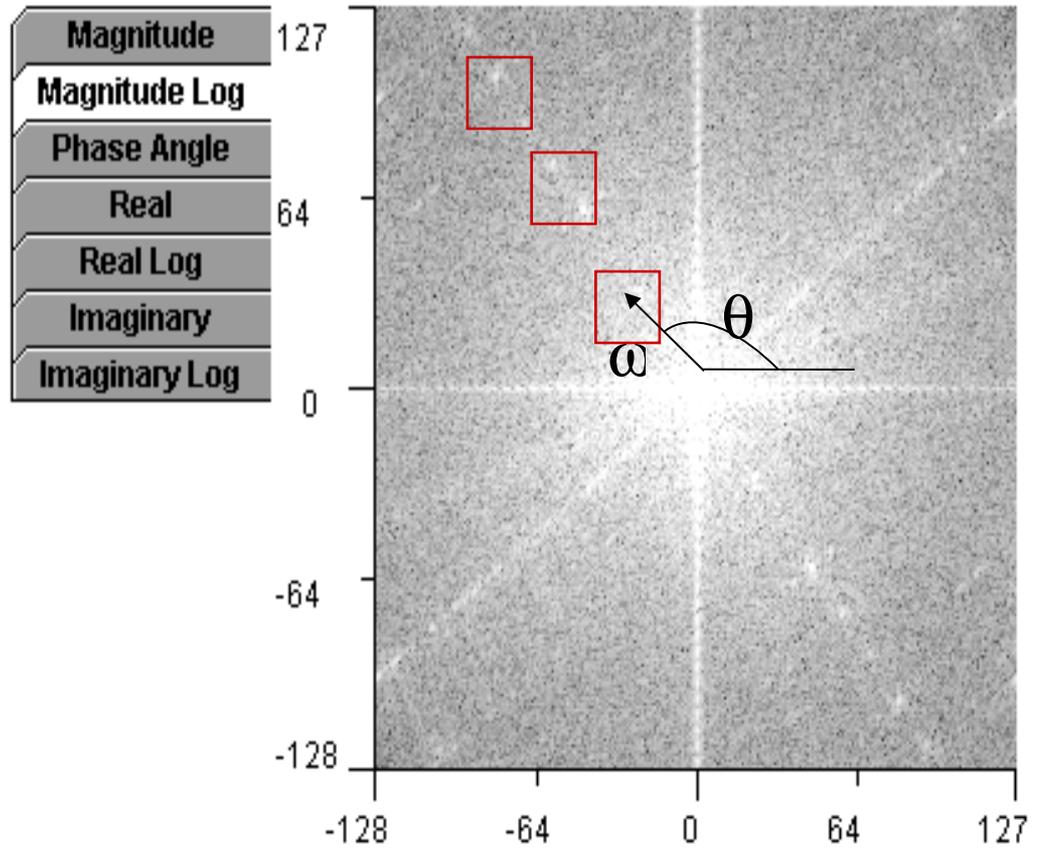
has a frequency $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$

and a direction $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v}{u} \right)$

Input Image

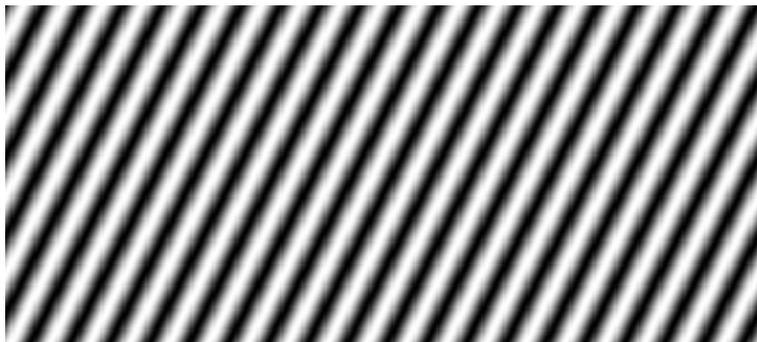
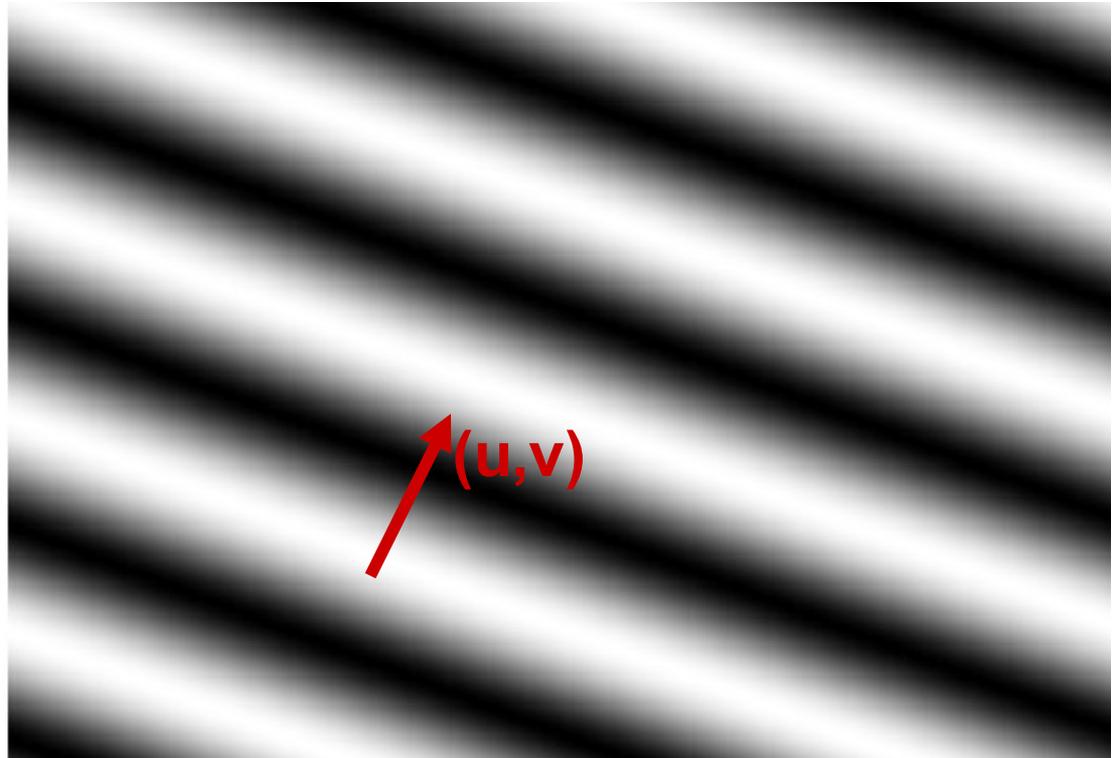


256 x 256
X Y Value

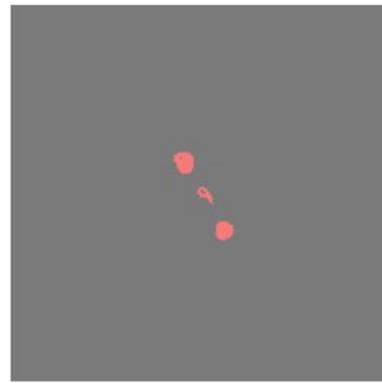
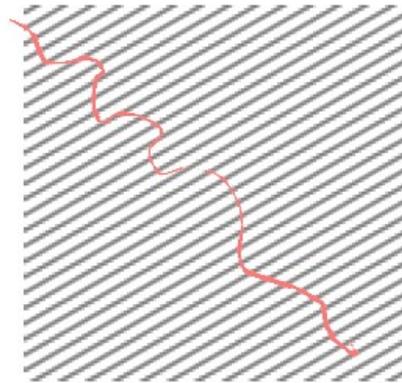
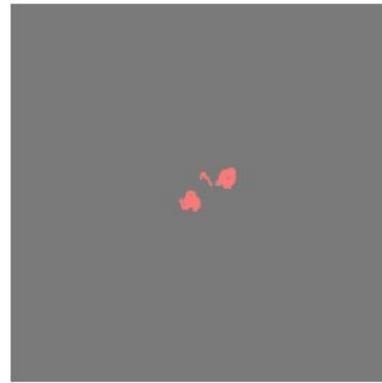
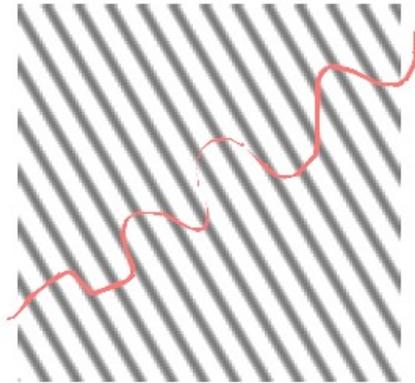


$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \cdot e^{+i \cdot 2\pi \cdot (ux + vy)} du dv$$

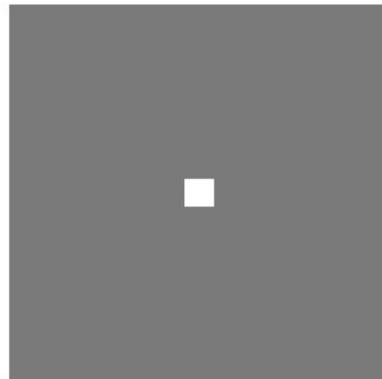
To get some sense of what basis elements look like, we plot a basis element --- or rather, its real part --- as a function of x, y for some fixed u, v . We get a function that is constant when $(ux + vy)$ is constant. The magnitude of the vector (u, v) gives a frequency, and its direction gives an orientation. The function is a sinusoid with this frequency along the direction, and constant perpendicular to the direction.



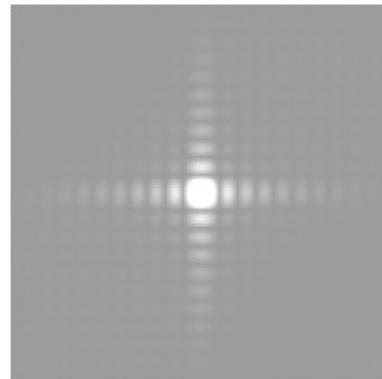
2D Fourier examples



Spatial
domain
 $f(x, y)$



Frequency
domain
 $|F(s_x, s_y)|$



On peut visualiser $F(u,v)$ sous la forme de 2 images :

- Images des Parties réelle et imaginaire

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \cos(2\pi \cdot (ux + vy)) dx dy$$

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \sin(2\pi \cdot (ux + vy)) dx dy$$

- Ou Images du Module et de la Phase.

$$|F(u,v)| = \sqrt{(\operatorname{Re}(F(u, v)))^2 + (\operatorname{Im}(F(u, v)))^2}$$

$$\operatorname{Phase}(F(u,v)) = \arctan(\operatorname{Im}(F(u,v))/\operatorname{Re}(F(u,v)))$$

Interprétation globale des Images

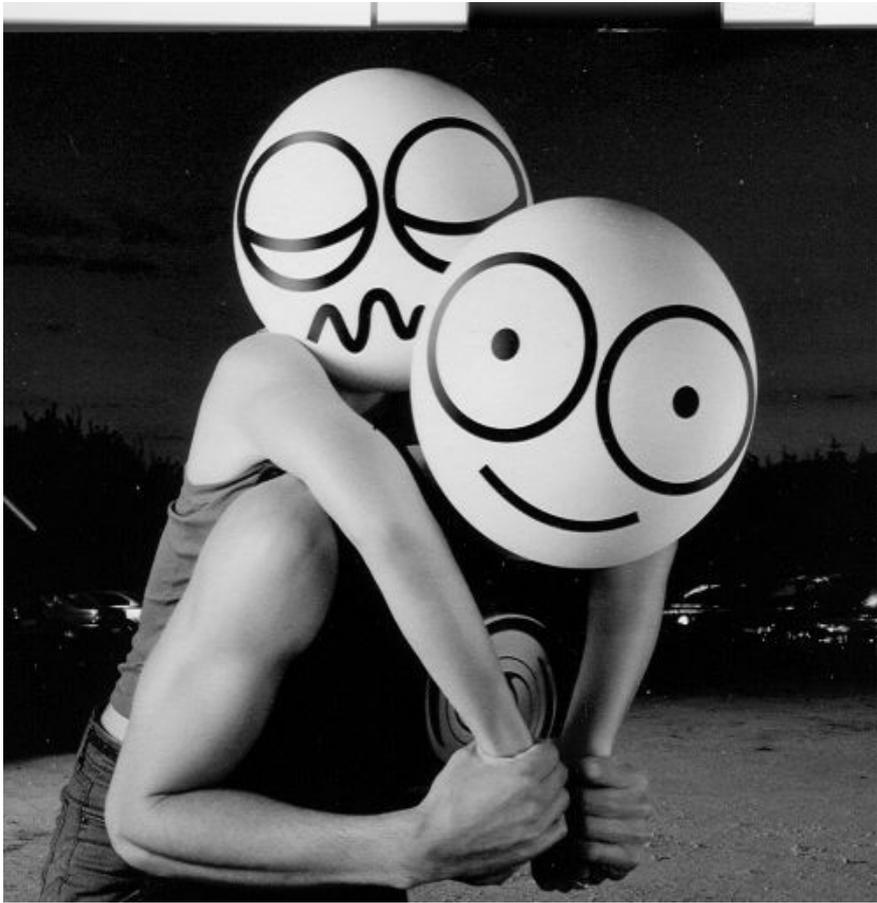
$|F(u,v)|$ donne la répartition énergétique en fonction de la fréquence, visible quand on passe en coordonnées polaires

$$(u,v) \rightarrow (\omega, \theta)$$

La valeur de $|F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)|$ pour un couple (ω, θ) donne l'amplitude d'une sinusoïde complexe de pulsation ω dans la direction θ .

Pour de nombreuses images, la moyenne (au sens des probas) de l'amplitude est indépendante de la direction θ et décroît régulièrement en fonction de ω en $1/\omega$

$$F(\omega, \theta) \propto \frac{1}{\omega}$$



En conséquence, $|F(u,v)|$ ne contient que peu d'information locale.

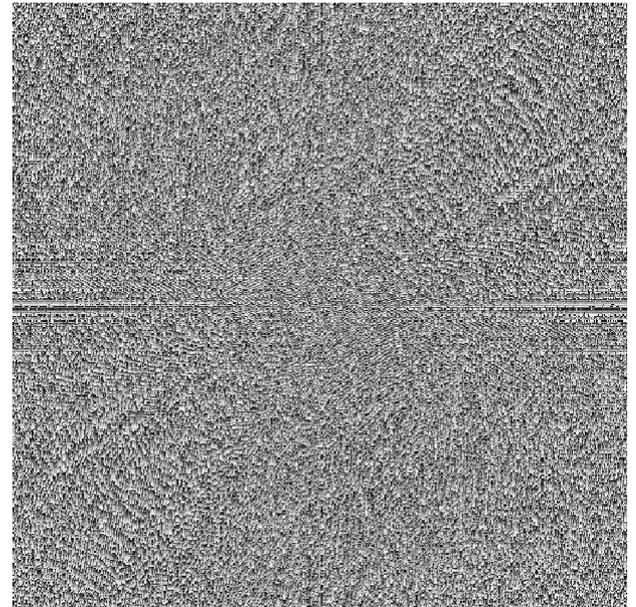
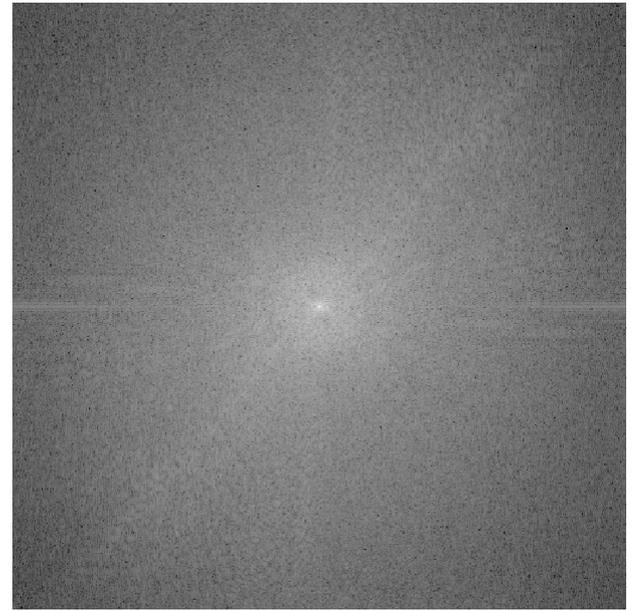
Une translation du signal $f(x-a,y)$ ne modifie pas $|F(u,v)|$ mais introduit juste un déphasage $F(u,v)e^{-i\phi}$

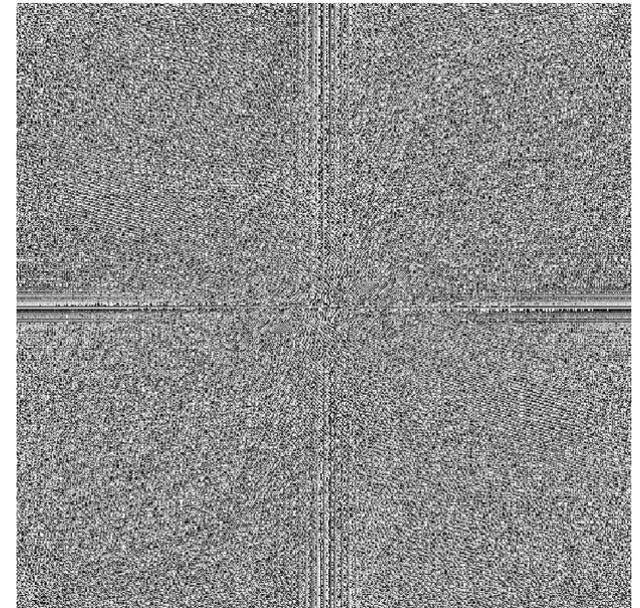
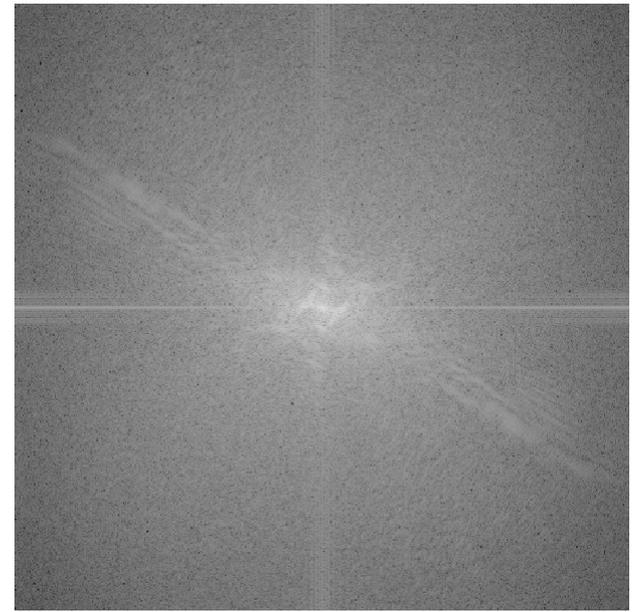
L'information locale utile à l'interprétation d'une image se loge dans les contours, et celle-ci se cache plus particulièrement dans la phase $\text{Arg}(F(u,v))$: création d'interférences créant les "franges de contour"

Nous allons en faire l'expérience en échangeant par exemple les modules des TF de deux images réelles



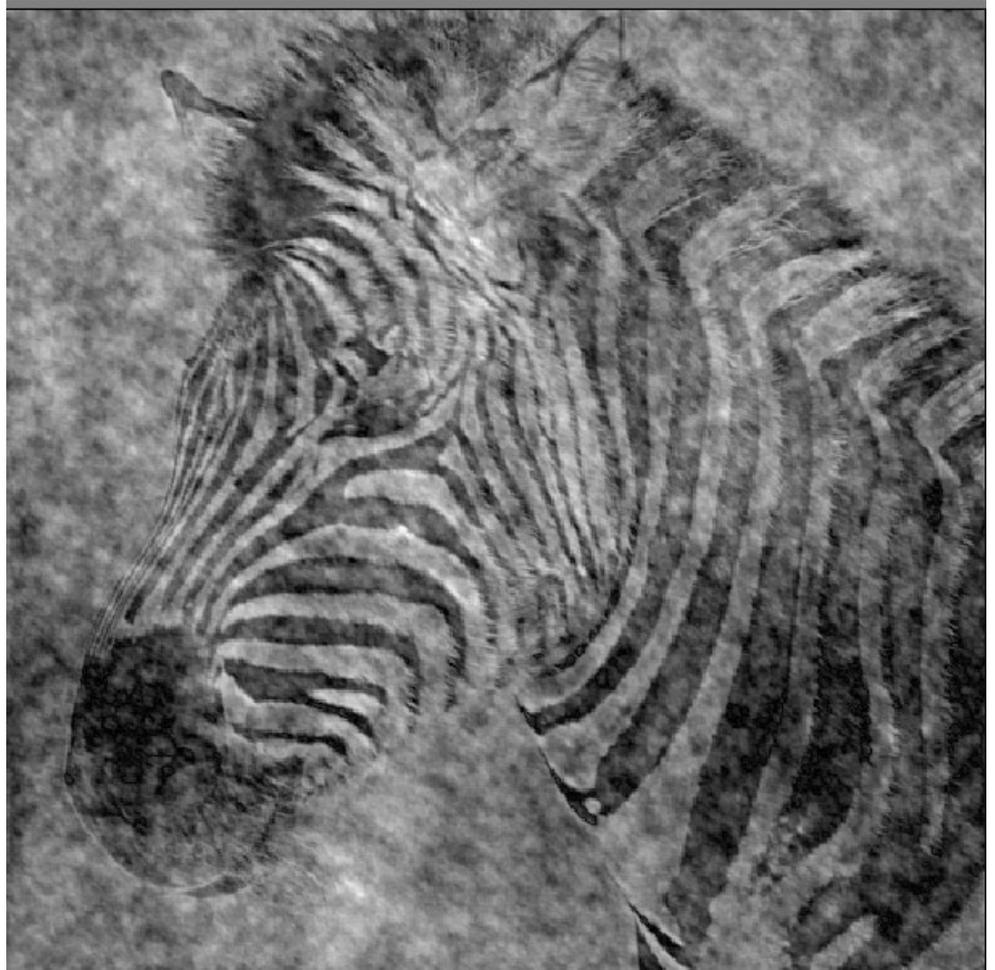
Cheetah Image
Fourier Magnitude (above)
Fourier Phase (below)



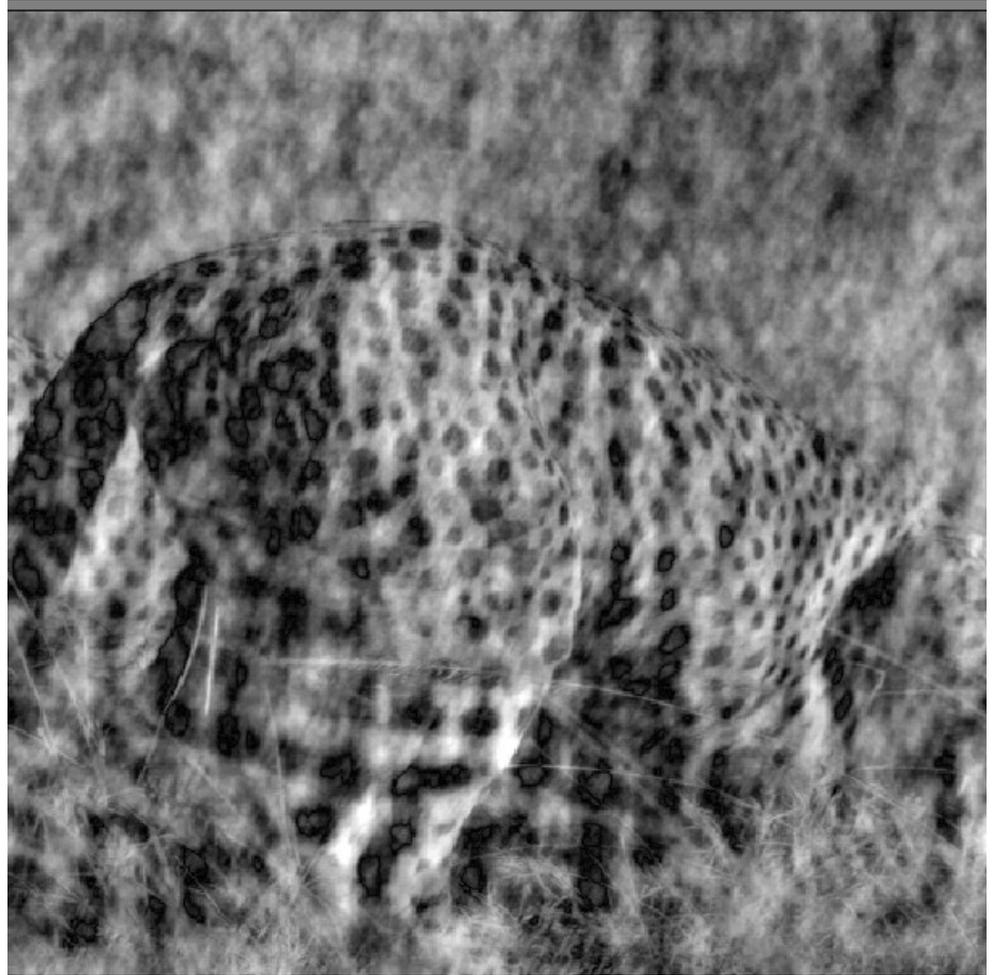


Zebra Image
Fourier Magnitude (above)
Fourier Phase (below)

Reconstruction with
Zebra phase,
Cheetah Magnitude



Reconstruction with
Cheetah phase,
Zebra Magnitude



Si je translate le signal précédent, la répartition énergétique, et donc le module de la TF, n'est pas modifiée :

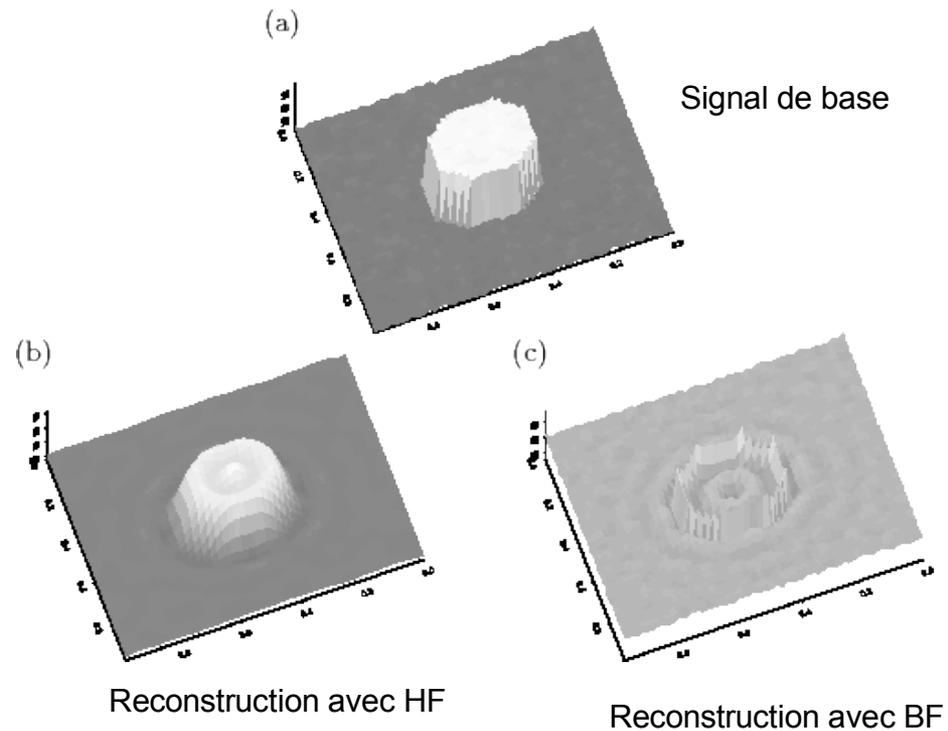
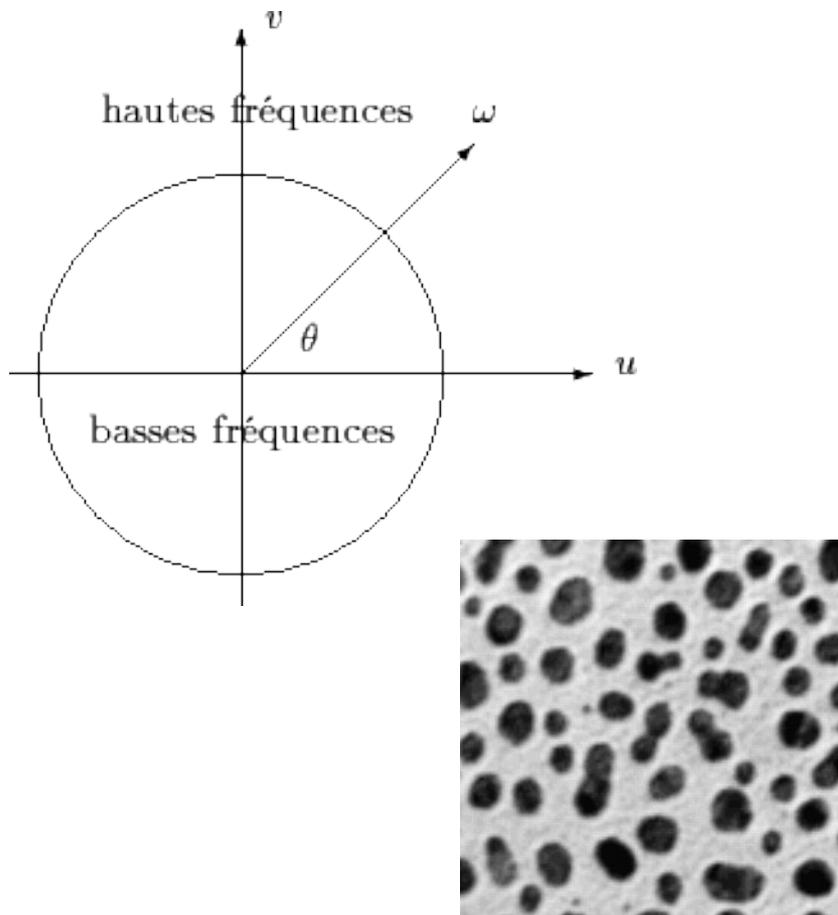
1. Les basses fréquences codent la quantité et la forme de régions uniformes de l'image
2. Les hautes fréquences codent la quantité et la forme des contours et du bruit dans l'image

Par contre, la localisation et donc la forme des frontières inter-régions et donc des contours est contenue dans l'information de phase de la TF

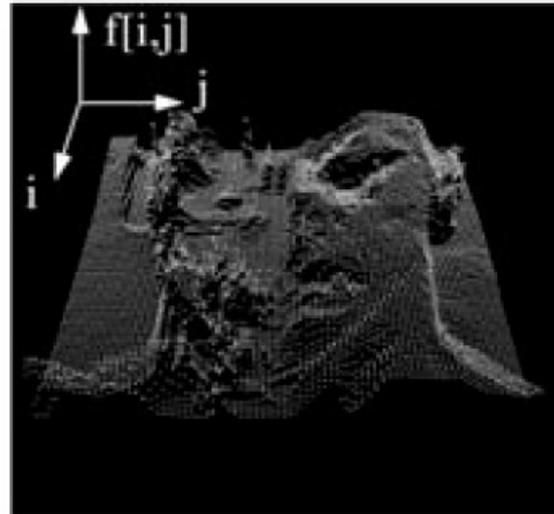
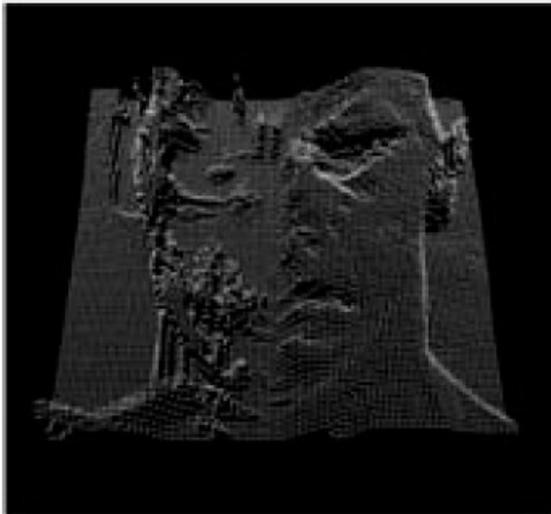
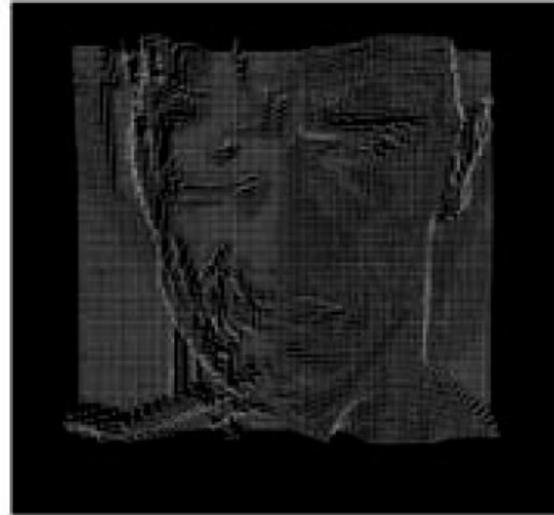
On reviendra à ces notions pour filtrer les images par la suite.

-> image vue comme une fonction continue dans des domaines séparés par des frontières où elle présente des discontinuités :

Chaque morceau continu constitue une brique de module spectral équivalent que je déphase au niveau spectral pour synthétiser l'image finale



Comment manipuler l'image ? Comme une fonction discrète
 $f : \{1..N\} \times \{1..M\} \rightarrow \{0 \dots 255\}$



Cette partie n'est pas essentielle en première lecture. Néanmoins, elle explique que la réalité du signal numérisée est très éloignée du cadre théorique précédent. Il ne faut donc jamais oublier que une fois le modèle théorique décrit, le passage au discret va créer de nouveaux problèmes soit théorique d'inférence mathématique soit technique d'implémentation algorithmique.

En l'occurrence, on va essayer dans cette partie de répondre à deux questions :

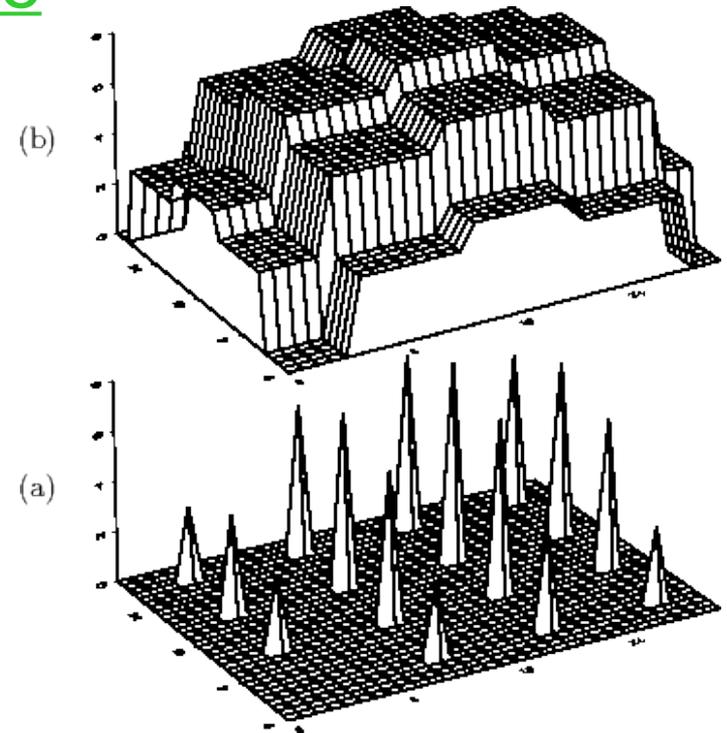
- comment acquérir une image numérique en respectant les détails analogiques de l'image d'intérêt pour l'application ? Pour adapter la conception physique du capteur à la théorie de l'échantillonnage discret.
- comment zoomer sur un détail d'une image le plus proprement possible ? Pour éviter les effets de moiré ou d'aliasing par exemple.

Tous ces exemples qui montrent le fossé entre continu et discret, s'appuient ici sur la modélisation fréquentielle de l'image.

Partie 3 : TF et Echantillonnage

L'une des toutes premières étapes du TNI : réduction de l'ensemble continu du monde observable en une série de valeurs discrètes (acquisition par caméra CCD, conversion de format et ré-échantillonnage)

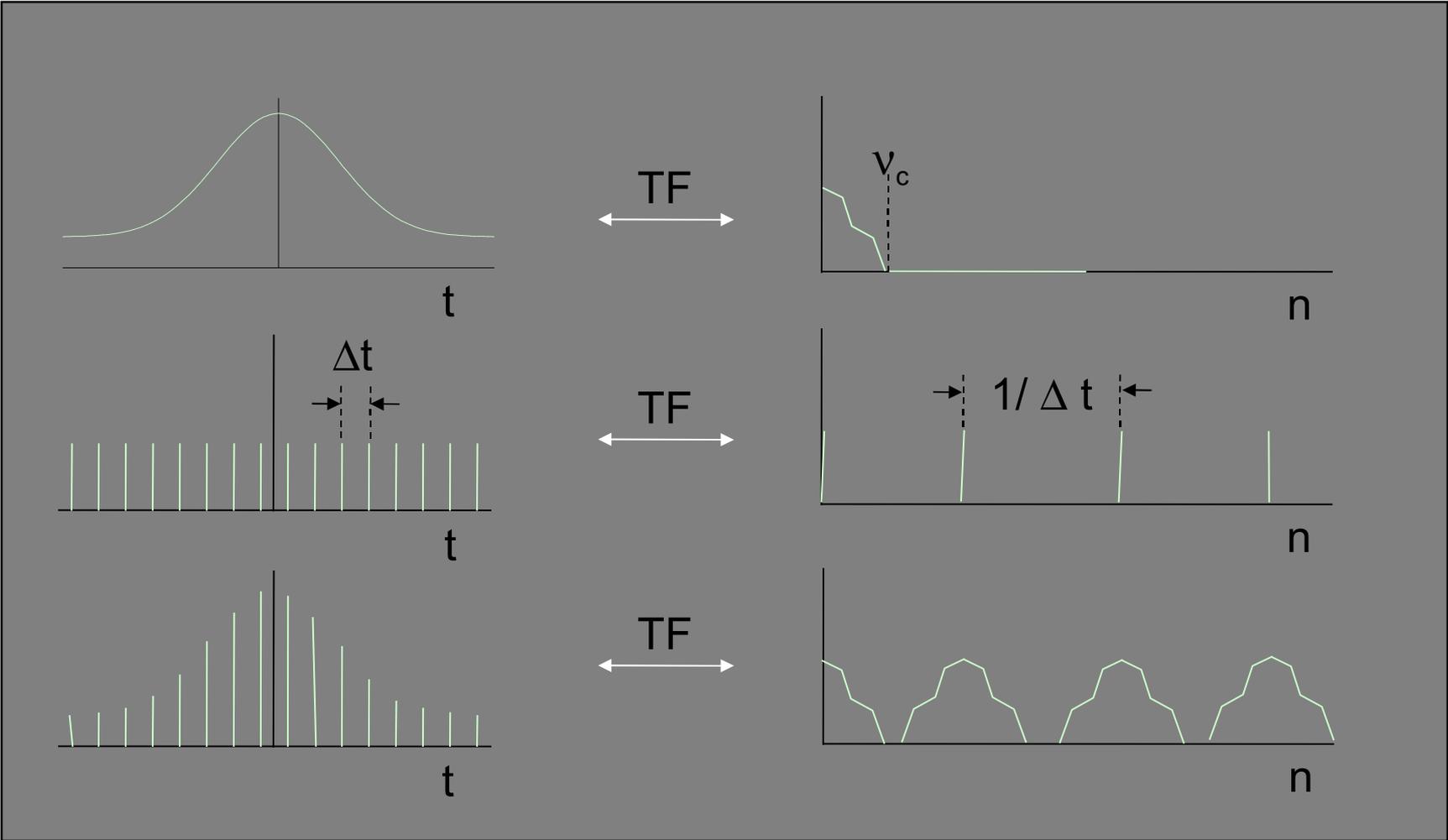
Elle contrôle la finesse des détails enregistrés et donc la nature de l'information contenue dans l'image numérique (théorie de l'Information : C. Shanon, quantification de la dynamique, compression jpeg).



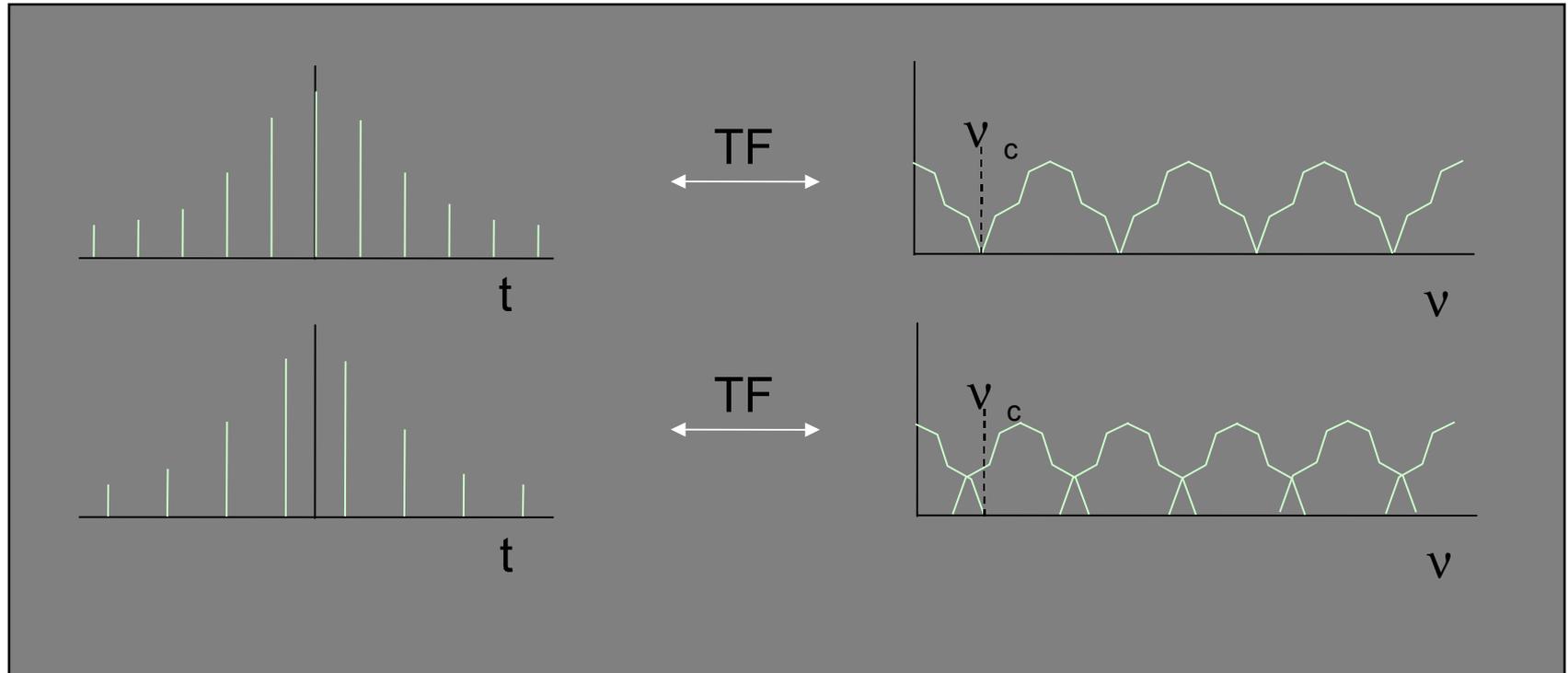
Les représentations spatiales d'une image échantillonnée : (a) sous forme d'impulsions en cohérence avec l'interprétation du théorème d'échantillonnage; (b) sous forme de pixels de niveau constant en adéquation avec la représentation habituelle

Survol 1D

Le problème de la discrétisation



Le problème de l'échantillonnage



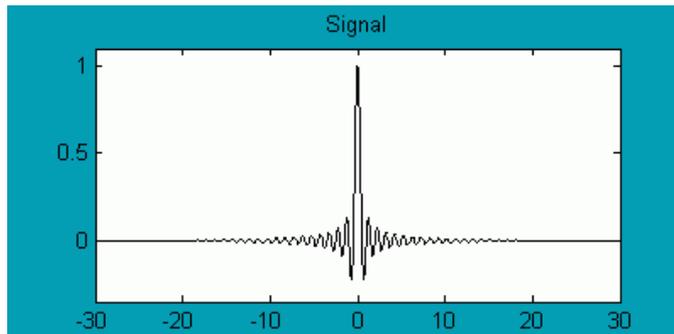
→ « Repli » des $v > v_c$ sur les $v < v_c$!!

→ Théorème de l'échantillonnage : $v_{\text{éch}} > 2 v_c$

Le problème de la fenêtre temporelle d'échantillonnage

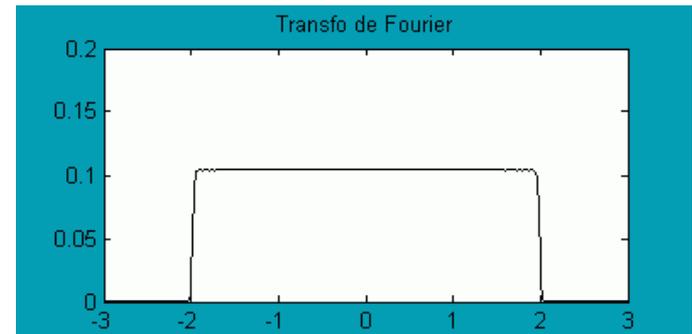
- Longueur du signal échantillonné $\neq \infty$
- Signal tronqué !!
- **Oscillations de Gibbs** dans la TF

Exemple :

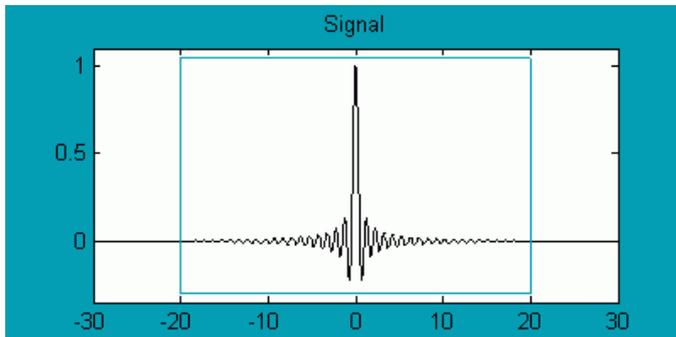


$$\frac{\sin(t)}{t}$$

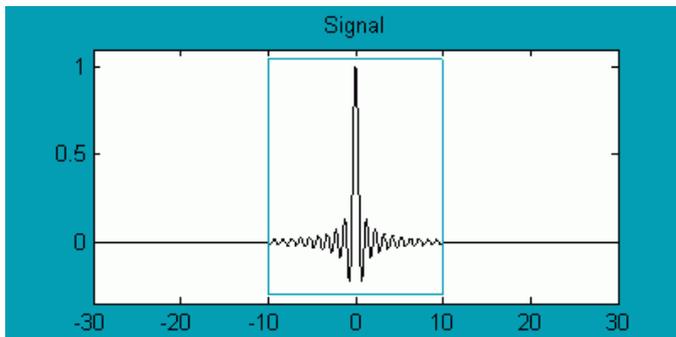
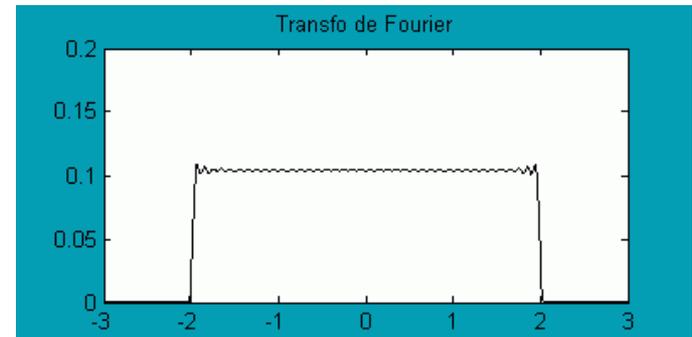
TF



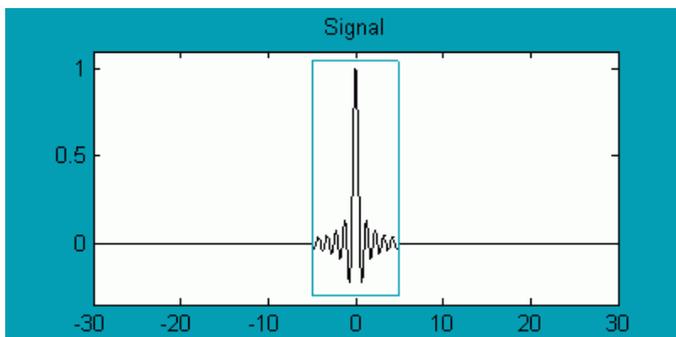
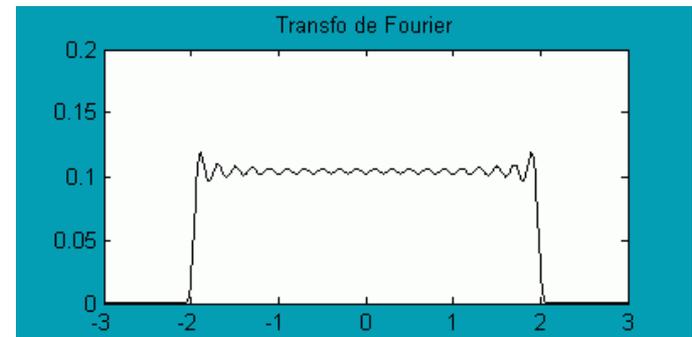
rectangle



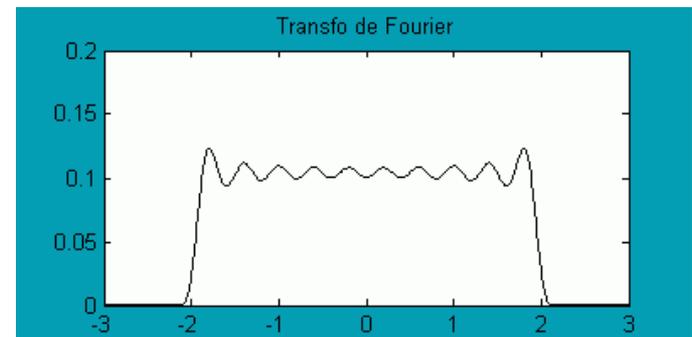
TF



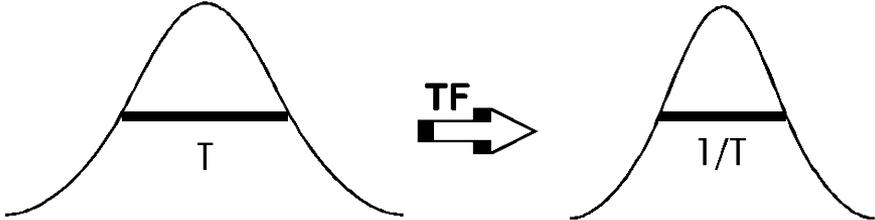
TF



TF

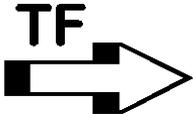
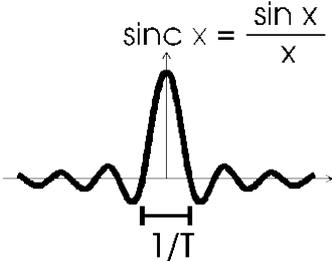
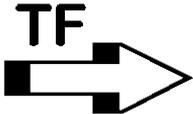
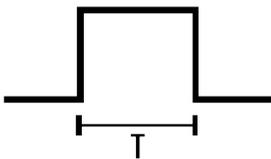


Transformées de base (+ dirac ?)



PORTE

SINUS CARDINAL



Propriétés essentielles

Soit

$$f(x, y) \leftrightarrow F(u, v)$$

$$g(x, y) \leftrightarrow G(u, v)$$

alors,

1. Linéarité $af + bg \leftrightarrow aF + bG$

2. Scaling or Magnification $g(ax, by) \leftrightarrow \frac{1}{|ab|} G\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$

3. Shift $g(x - a, y - b) \leftrightarrow G(u, v) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot (au + bv)}$

Soit également $h(x, y) \leftrightarrow H(u, v)$ alors,

4. Convolution \leftrightarrow Multiplication

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\varepsilon, \eta) \cdot h(x - \varepsilon, y - \eta) d\varepsilon d\eta \Leftrightarrow G(u, v) H(u, v)$$

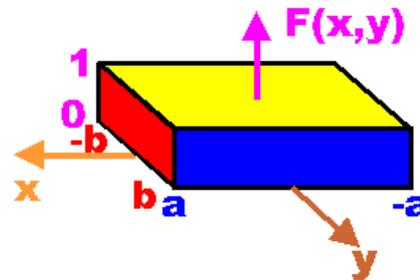
Propriétés essentielles en 2D

If $g(x,y)$ can be expressed as $g_x(x)g_y(y)$, then the $\mathcal{F}\{g(x,y)\} =$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x', y') \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot (ux' + vy')} dx' dy' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_x(x') \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot ux'} dx' \int_{-\infty}^{\infty} g_y(y') \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot vy'} dy' \\ &= G_x(u)G_y(v) \end{aligned}$$

$$\Pi(x, y) = \Pi(x)\Pi(y) \quad \leftrightarrow \quad \text{sinc}(u)\text{sinc}(v)$$

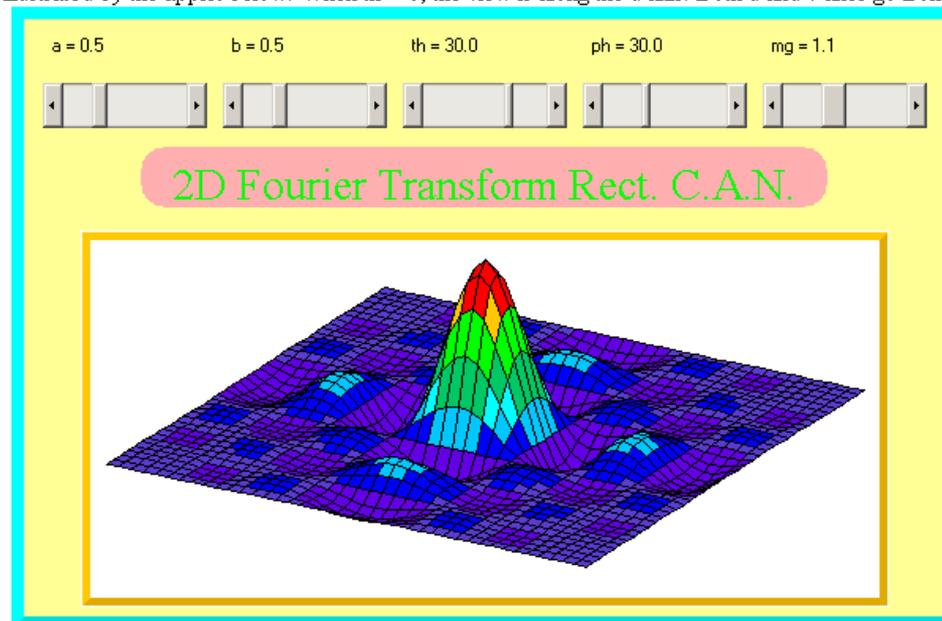
$$\text{comb}(x)\text{comb}(y) \quad \leftrightarrow \quad \text{comb}(u)\text{comb}(v)$$



The 2D function in the x-y plane above has a 2D Fourier transform in the u-v plane given below.

$$F(u,v) = (4ab) \frac{\sin(2\pi ua)}{2\pi ua} \frac{\sin(2\pi vb)}{2\pi vb}$$

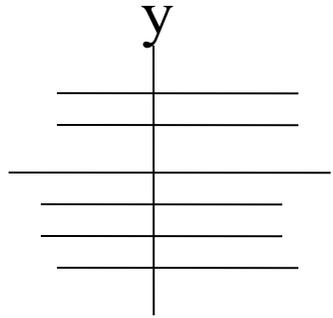
The 2D transform in the uv plane is illustrated by the applet below. When $th = 0$, the view is along the u axis. Both u and v axes go from -4 to +4.



Relation entre TF 1-D et 2-D, de façon générale

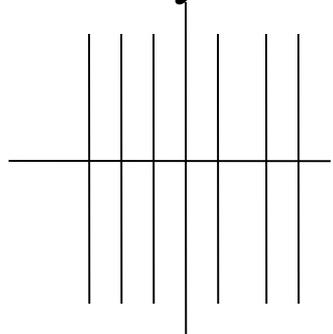
$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot 2\pi \cdot v y} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot u x} dx \right] dy$$

Rearranging the Fourier Integral,



Taking the integrals along x gives, $\hat{F}(u, y)$

Taking the integrals of $\hat{F}(u, y)$ along y gives $F(u, v)$



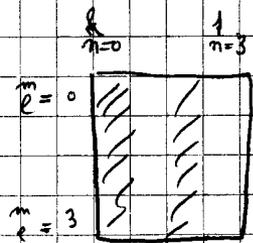
$F(u)$

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(u, y) e^{-i \cdot 2\pi \cdot v y} dy$$

On définit la TFD comme

$$X(n, m) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x(k, l) e^{-j2\pi \left(\frac{nk}{N} + \frac{ml}{N} \right)}$$

$k \rightarrow 1 \Rightarrow$



$$N = N = 4$$

Pour simplifier $N = N = 4$

d'où

$$X(n, m) = \sum_k \sum_l x(k, l) e^{-j\frac{\pi}{2} (kn + lm)}$$

On montre que cela peut s'écrire matriciellement

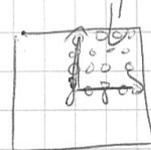
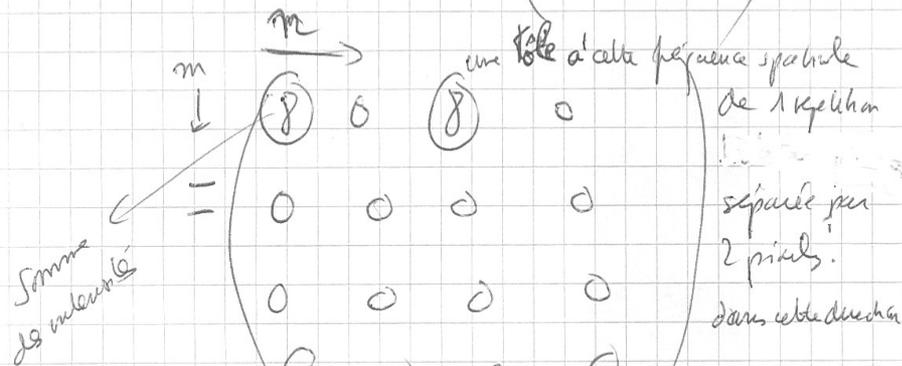
$$[X(n, m)] = A [x(k, l)] A$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -j \end{pmatrix}$

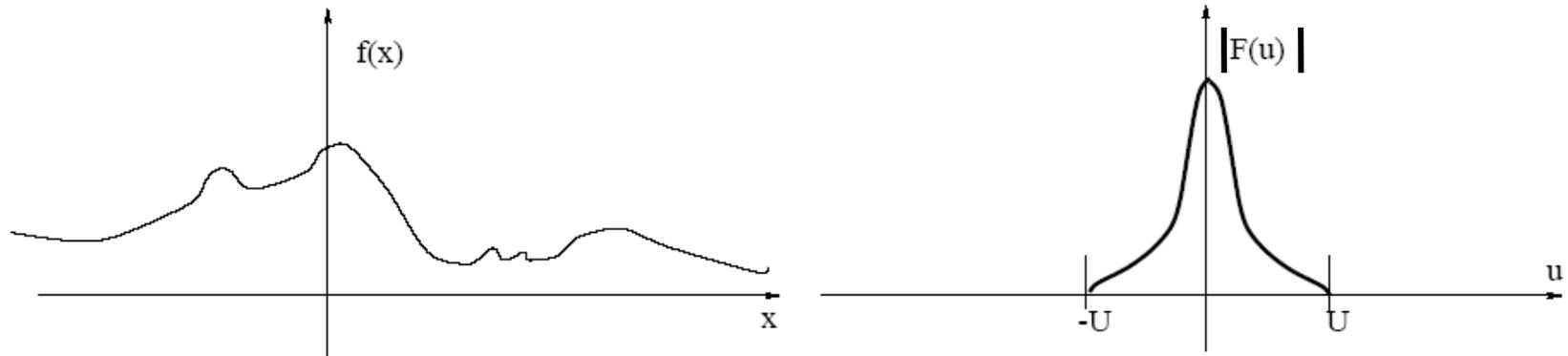
d'où

$$[X(n, m)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



La théorie de l'échantillonnage s'applique à des signaux f , fonctions d'une variable continue x , dont la bande passante est limitée



Remarque : A la variable x spatiale correspond une fréquence spatiale u exprimée en m^{-1}

Théorème d'échantillonnage

Il y a équivalence entre un signal continu $f(x)$ de support spectral $[0, U]$ et connu pour tout x et un ensemble d'échantillons discrets f_i de ce signal, ssi

- Les f_i sont les valeurs du signal $f(x)$ prises à des positions régulières
- Ces positions sont séparées par un intervalle p au plus égal à la valeur $1/2U$, appelée fréquence de Nyquist.

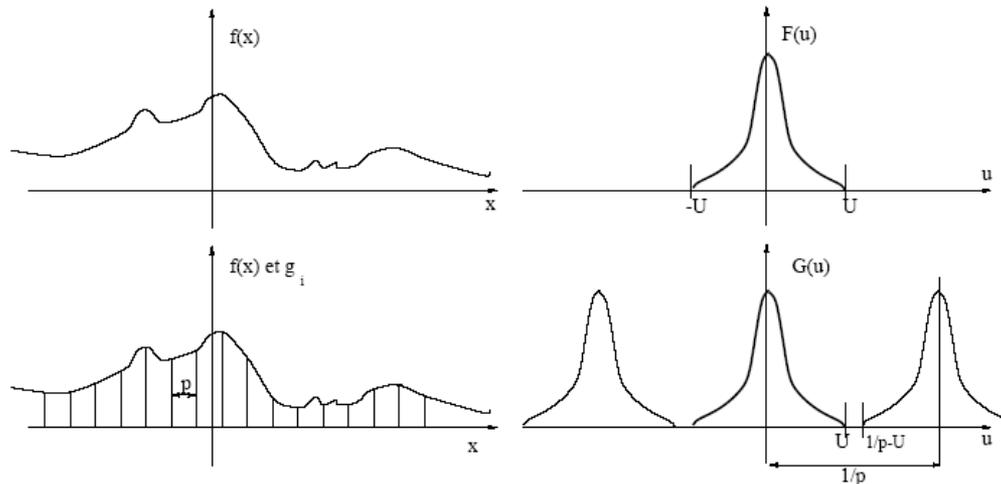
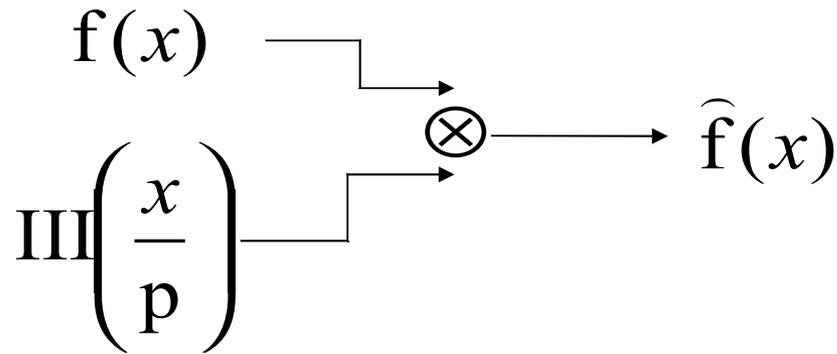
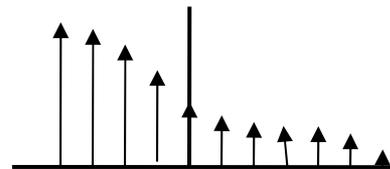
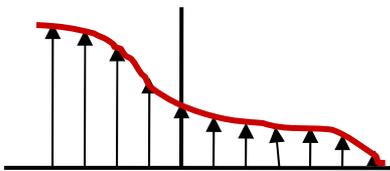


FIG. 3.1 – Echantillonnage d'un signal continu $f(x)$, à spectre $F(u)$ à support borné, avec un pas d'échantillonnage p . Le signal résultant discret a un spectre $|G(u)|^2$.



On utilise un peigne de Dirac de période d'échantillonnage p .

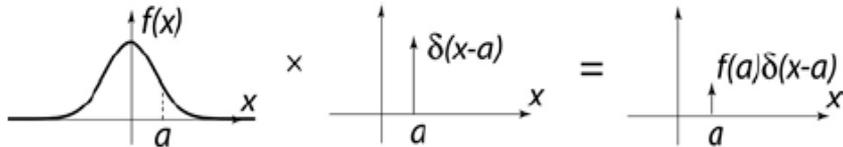
$$\begin{aligned} \text{III}\left(\frac{x}{p}\right) &= \sum \delta\left(\frac{x}{p} - n\right) & \hat{f}(x) &= f(x) \cdot \text{III}\left(\frac{x}{p}\right) \\ &= \sum \delta\left(\frac{1}{p}(x - np)\right) & &= p \sum f(np) \delta(x - np) \\ &= p \sum \delta(x - np) & & \end{aligned}$$



Rappels

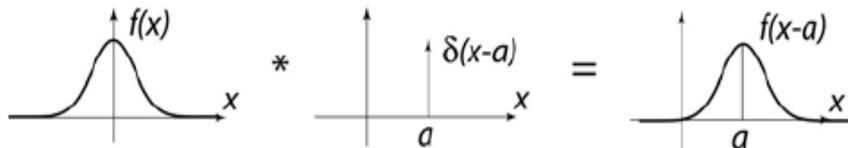
Sifting:

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$$



Shifting:

$$f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)$$

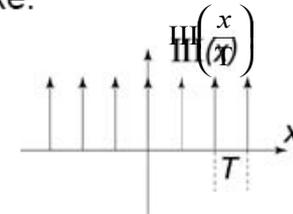


The shah/comb function

A string of delta functions is the key to sampling. The resulting function is called the **shah** or **comb** function:

$$\text{III}\left(\frac{x}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT)$$

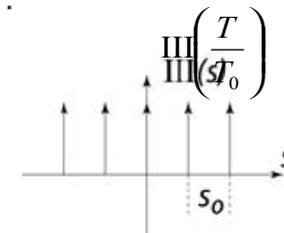
which looks like:



Amazingly, the Fourier transform of the shah function takes the same form:

$$\text{III}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(s - \frac{n}{T}\right)$$

where $s_0 = 1/T$.



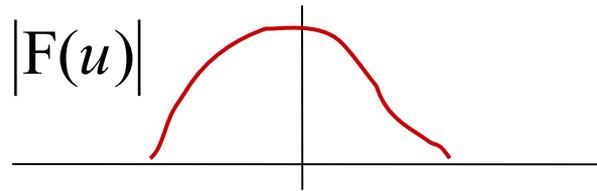
Spectre du signal échantillonné

$$\hat{F}(u) = \mathcal{F} \left\{ \hat{f}(x) \right\} = \mathcal{F} \left\{ \text{III}\left(\frac{x}{p}\right) \cdot f(x) \right\}$$

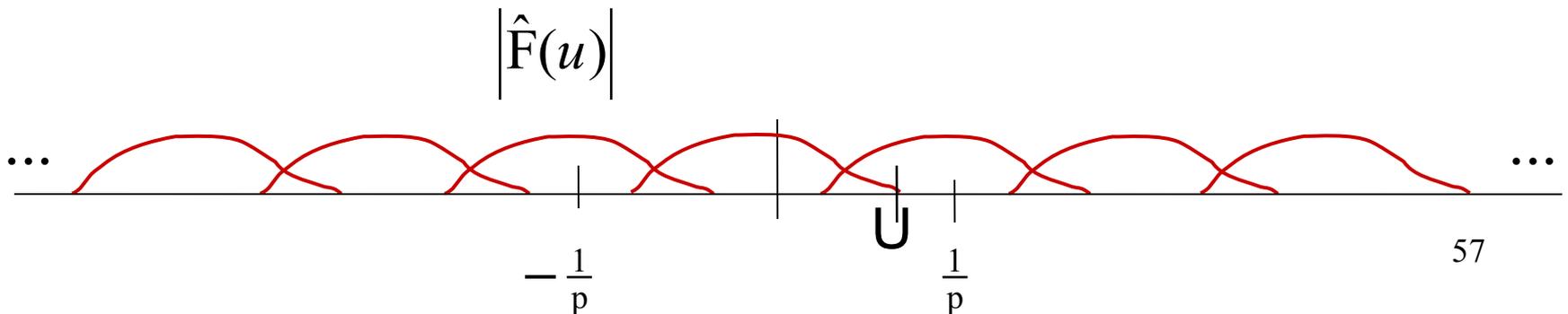
Soit

$$\text{III}(pu) * F(u) = \frac{1}{p} \sum \delta\left(u - \frac{n}{p}\right) \cdot F(u) = \frac{1}{p} \sum F\left(u - \frac{n}{p}\right)$$

Avant l'échantillonnage,



Après l'échantillonnage,

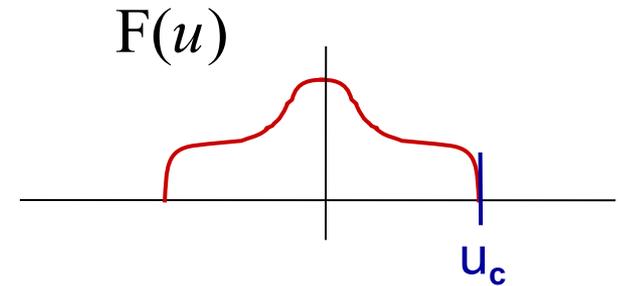


Spectre du signal échantillonné : bande limitée et aliasing

Si $F(u)$ est à bande limitée par u_c ,

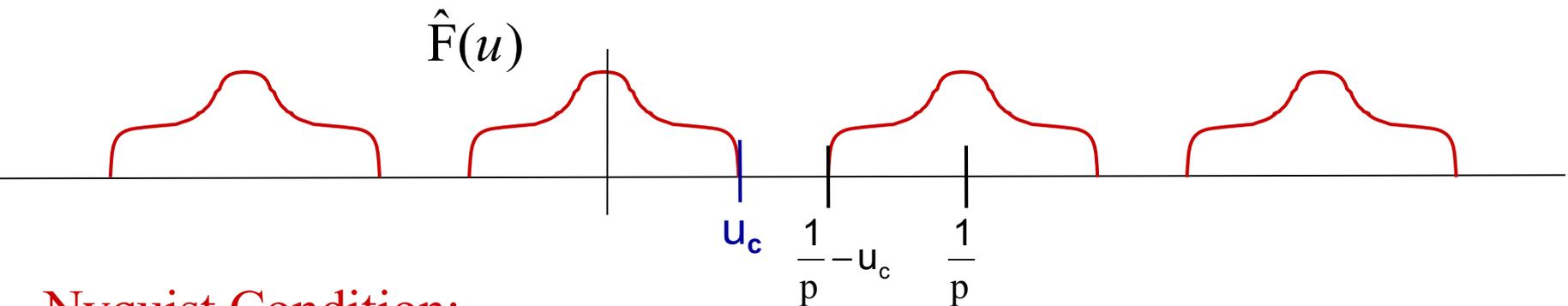
(fréquence de coupure)

$F(u) = 0$ pour $|u| > u_c$.



Pour éviter le chevauchement (**aliasing**), et donc pouvoir reconstruire le signal à partir de la TF, il faut que

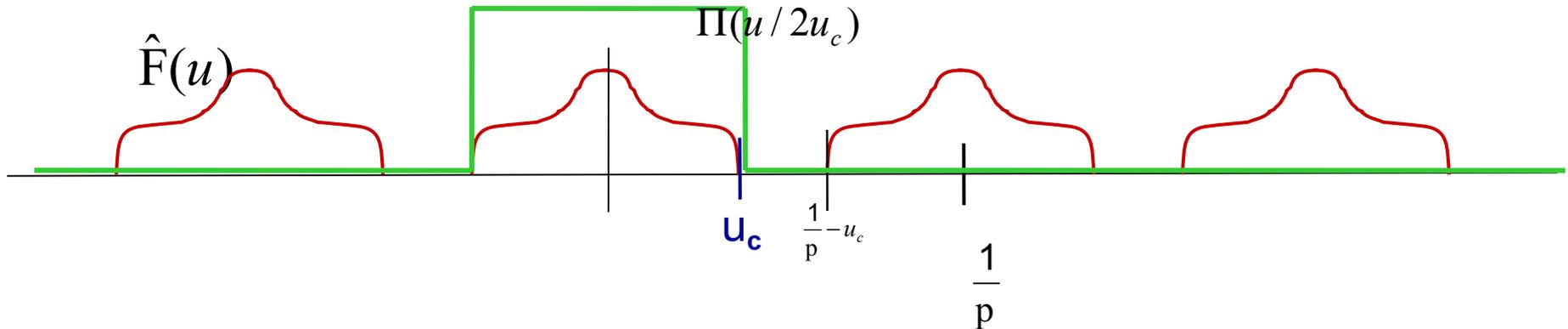
$$\frac{1}{p} - u_c > u_c \quad \tau = \frac{1}{p} > 2 \cdot u_c$$



Nyquist Condition:

τ =Sampling rate must be greater than twice the highest frequency component.

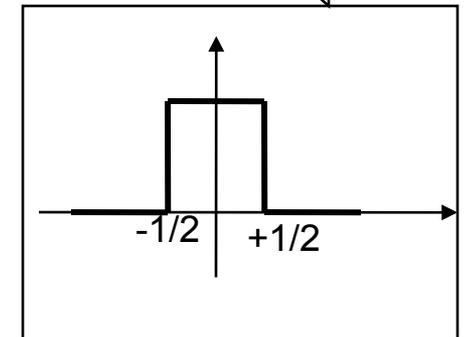
Spectre du signal échantillonné : reconstituer le signal original



Au vu du signal dans le domaine fréquentiel, peut-on reconstituer $f(x)$ à partir d'un signal échantillonné ?

Oui, en utilisant le filtre d'**Interpolation Filter** $H(u) = \Pi\left(\frac{u}{2u_c}\right)$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \hat{f}(x) * h(x) \\
 &= \hat{f}(x) * 2u_c \cdot \text{sinc}(2u_c x) \\
 &= p \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(np) \cdot \delta(x - np) * 2u_c \cdot \text{sinc}(2u_c x) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2p \cdot u_c \cdot f(np) \cdot \text{sinc}(2u_c (x - np))
 \end{aligned}$$



Reconstituer le signal original dans le cas de suréchantillonnage

Exploitation de la redondance : corriger les distorsions, atténuer l'effet d'un bruit, combler les pertes

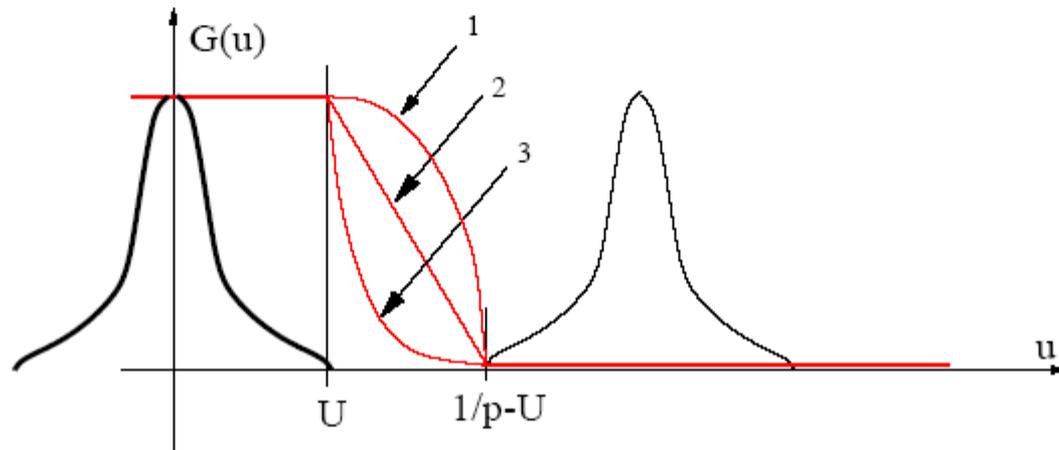
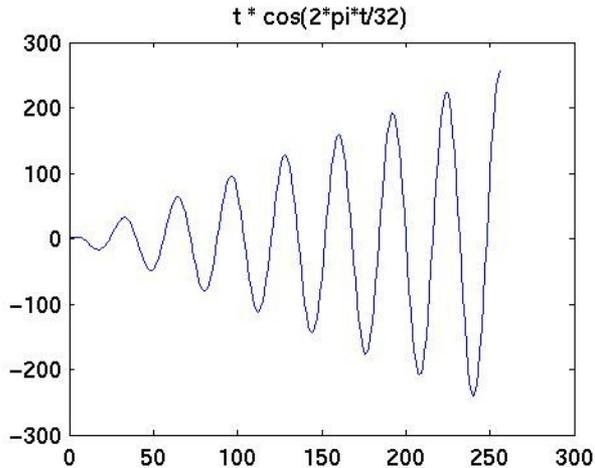


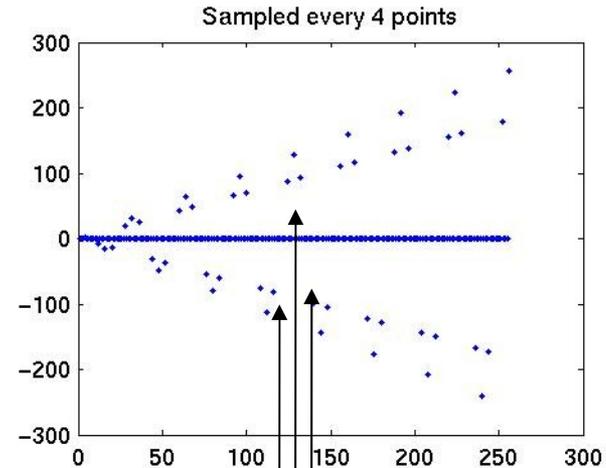
FIG. 3.3 – Trois filtres possibles pour reconstruire exactement un signal suréchantillonné (les filtres sont symétriques pour les u négatifs). Ils diffèrent par leurs valeurs dans l'intervalle compris entre U et $1/p - U$.

Visualisation de l'interpolation par des sinc

Original function

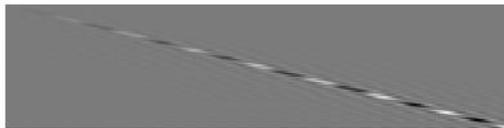


Sampled function

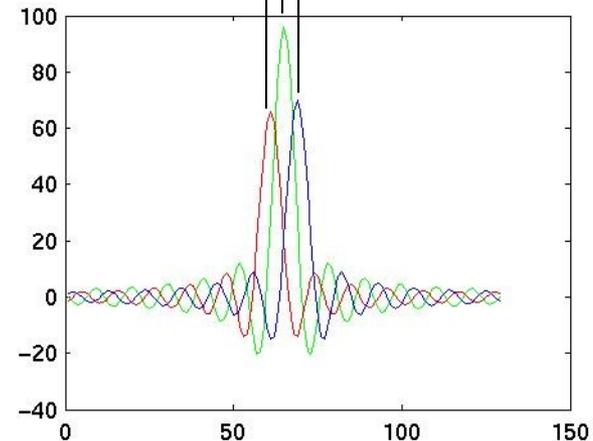


$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2p \cdot u_c \cdot f(np) \cdot \text{sinc}(2u_c(t - np))$$

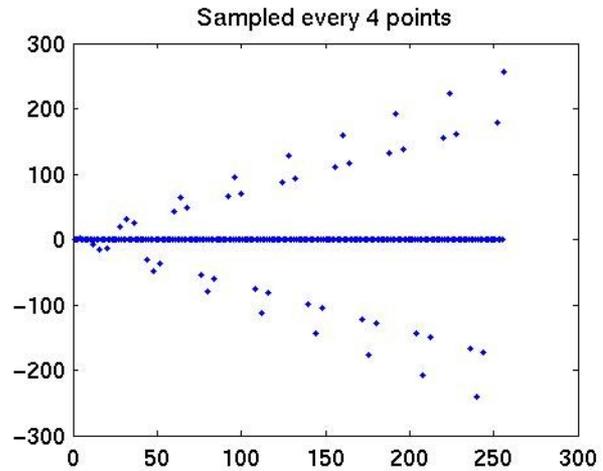
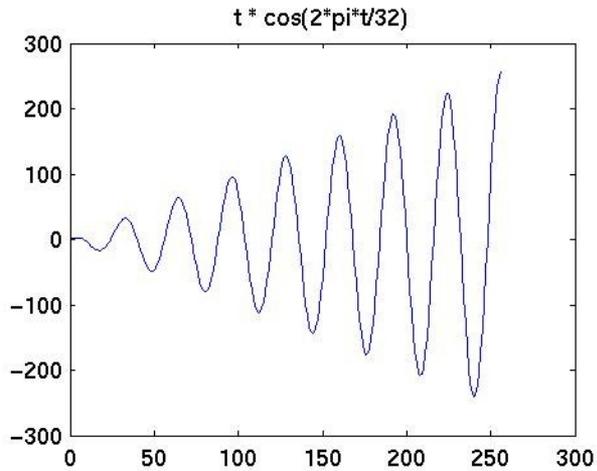
Convolution intermediate step



Each row shows convolution of shifted sinc with a sampled point. Sum lines along vertical direction to get output.

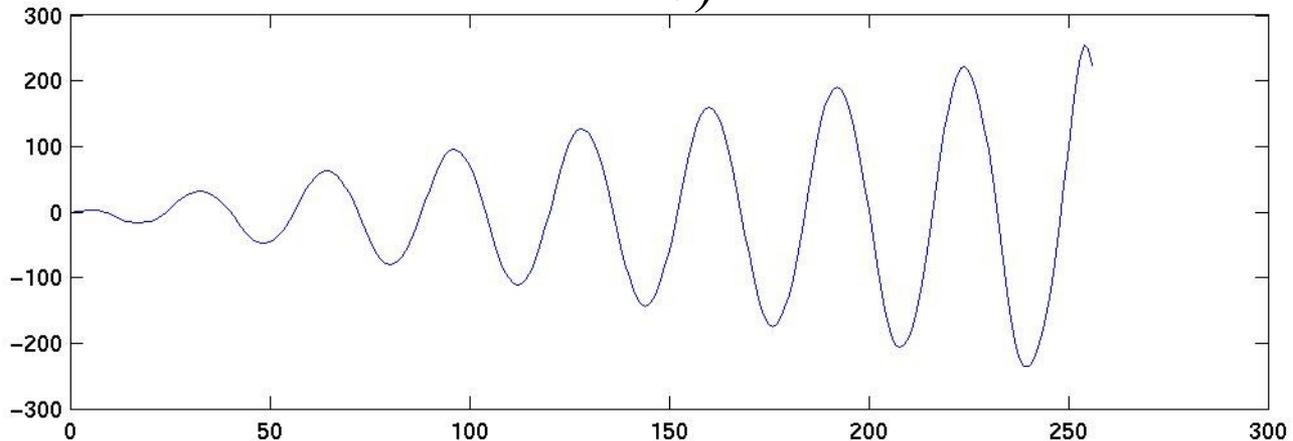


Weighted and shifted sines for 3 sample points shown by black arrows



a)

b)



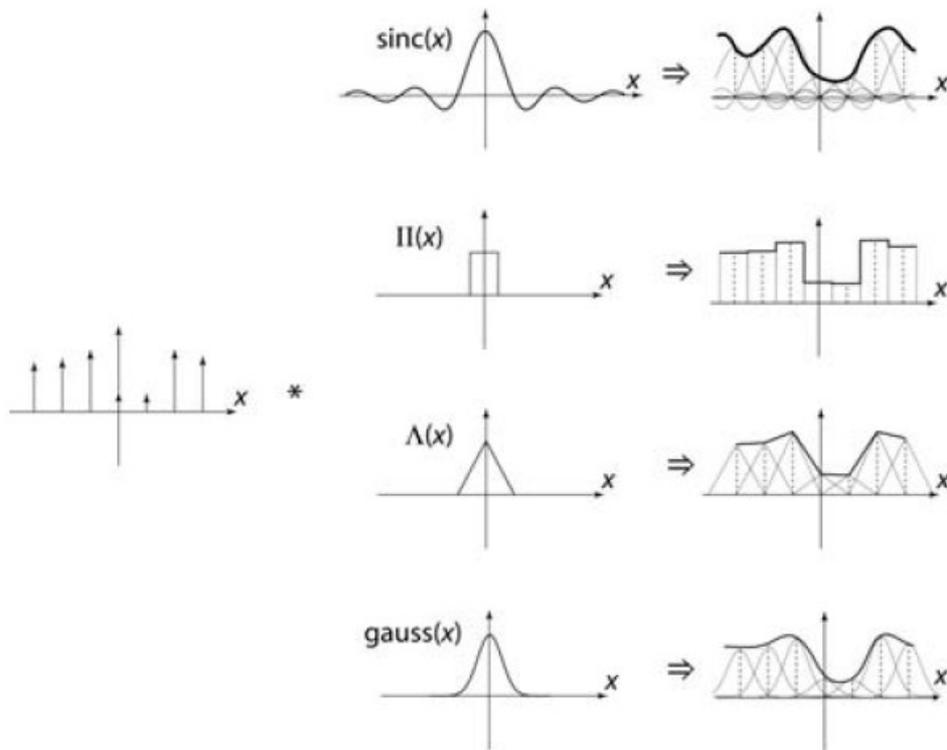
a) Continuous waveform b) Sampled waveform c) Sinc interpolation of sampled waveform (sum of vertical lines in lower left plot from previous slide.

Reconstruction filters

The sinc filter, while “ideal”, has two drawbacks:

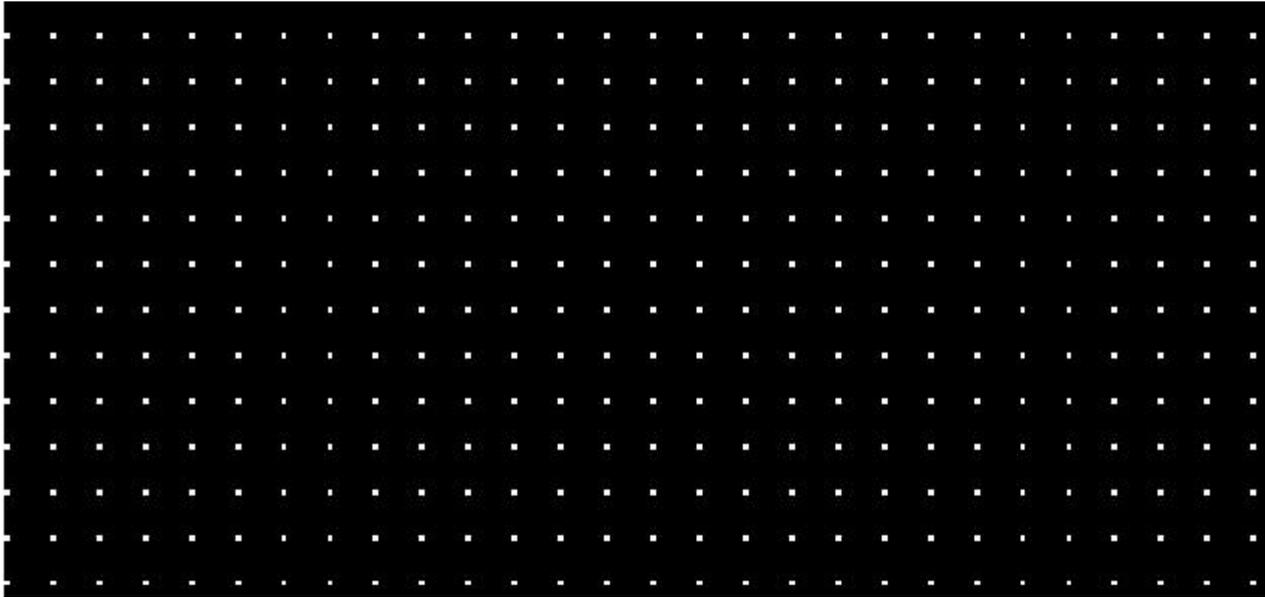
- ◆ It has large support (slow to compute)
- ◆ It introduces ringing in practice

We can choose from many other filters...



Echantillonnage 2D

$$\begin{aligned}\hat{g}(x, y) &= \text{III}\left(\frac{x}{X}\right) \text{III}\left(\frac{y}{Y}\right) g(x, y) \\ &= XY \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - nX, y - mY) \cdot g(x, y)\end{aligned}$$

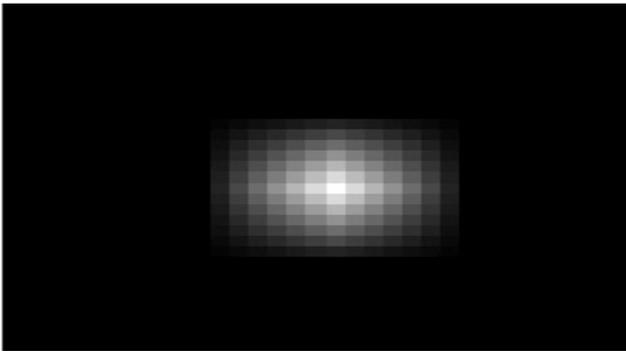


$$\hat{G}(u, v) = \mathcal{F} \{ \hat{g}(x, y) \}$$

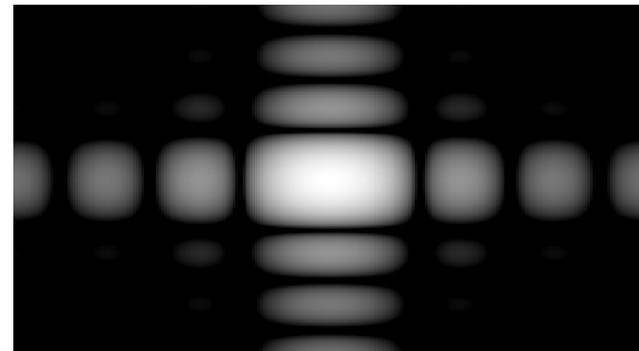
$$= \text{III}(uX) \cdot \text{III}(vY) ** G(u, v)$$

$$\hat{G}(u, v) = \frac{1}{XY} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G\left(u - \frac{n}{X}, v - \frac{m}{Y}\right)$$

La transformée de Fourier d'un signal échantillonné 2D produit une réplification de la transformée continue $G(u, v)$, ou "îles", chaque $1/X$ en u , et $1/Y$ en v .

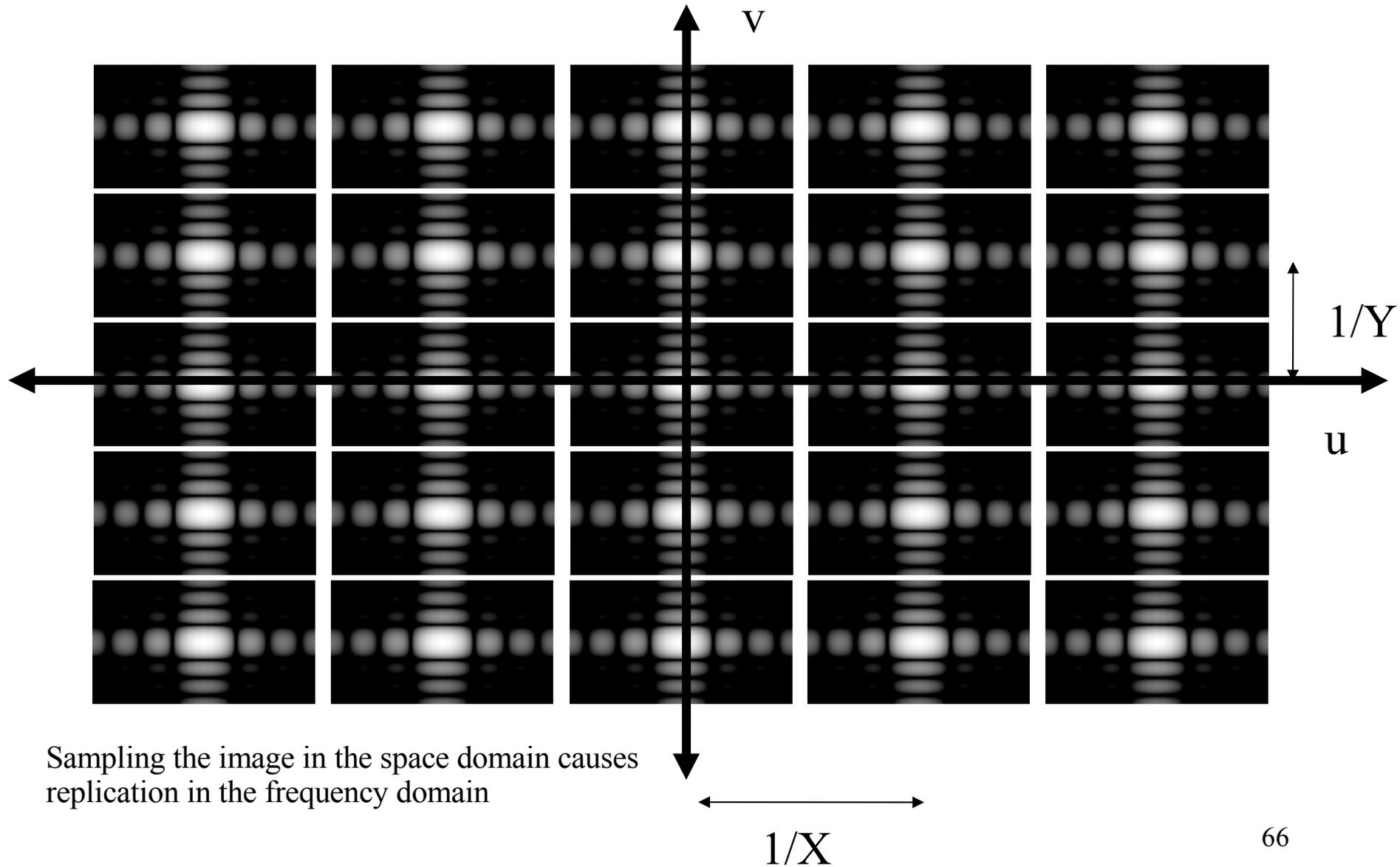


Let $g(x,y) = \Lambda(x/16)\Lambda(y/16)$
be a continuous function



Here we show its continuous
transform $G(u,v)$

Représentation de Fourier d'une image échantillonnée



Spectre du signal échantillonné : reconstituer le signal original

On supprime les îlots fréquentiels non voulus.

$$H(u, v) = \Pi(uX) \cdot \Pi(vY)$$

Ce qui revient dans le domaine image,

$$\hat{g}(x, y) ** h(x, y)$$

$$= \left[\text{III}\left(\frac{x}{X}\right) \text{III}\left(\frac{y}{Y}\right) g(x, y) \right] ** h(x, y)$$

$$= XY \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(nX, mY) \cdot \delta(x - nX, y - mY)$$

$$** \frac{1}{XY} \text{sinc}\left(\frac{x}{X}\right) \text{sinc}\left(\frac{y}{Y}\right)$$

$$\hat{g}(x, y) ** h(x, y)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(nX, mY) \cdot \text{sinc}\left[\frac{1}{X}(x - nX)\right] \cdot \text{sinc}\left[\frac{1}{Y}(y - mY)\right]$$

Chaque échantillon sert comme coefficient de pondération d'une fonction sinc 2D

Nyquist/Shannon Theory:

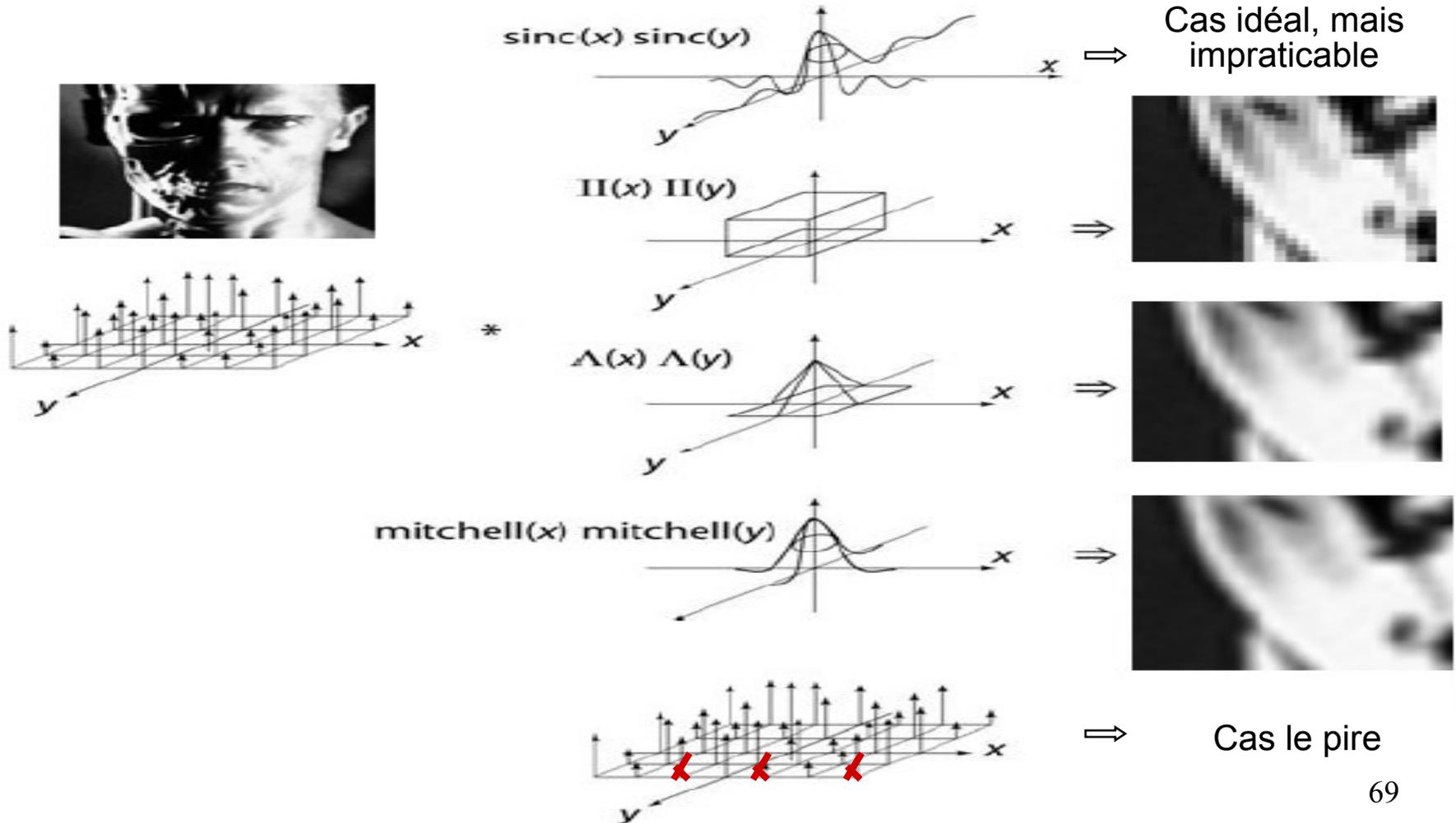
We must sample at twice the highest frequency in x and in y to reconstruct the original signal.

(No frequency components in original signal can be $> 1/2(\text{Max}(X, Y))$)

Reconstruction filters in 2D

We can also perform reconstruction in 2D...

(useful for resampling, interpolation)



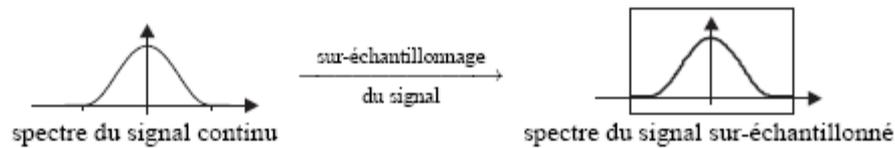
Sur-échantillonner ou sous-échantillonner intelligemment pour rétrécir ou faire un zoom sur une image.

Soit un signal correctement échantillonné avec $f_m = f_e^{\text{old}}/2$ selon le critère de Nyquist

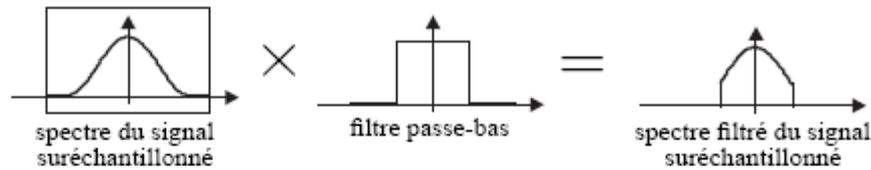
On veut rétrécir cette image d'un facteur 2, donc rééchantillonner à $f_e = f_e^{\text{old}}/2$.

On peut reconstruire au préalable le signal, filtrer au-delà des fréquences parasites comprises entre $-f_e/2$ et $f_e/2$, ce qui revient à convoluer avec un sinc. Le plus simple est de convoluer avec un signal porte, c'est-à-dire à moyennner sur une plage de pixels voisins.

1. **suréchantillonner**⁵ : échantillonner le signal avec une fréquence $2.f_m$.



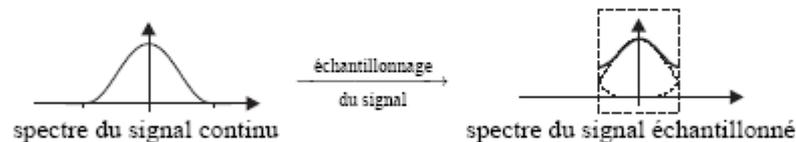
2. **filtrer** : appliquer un filtre passe-bas pour la bande de fréquence $(-f_e/2, +f_e/2)$.



3. **rééchantillonner** : échantillonner⁶ le signal filtré avec une fréquence f_e .



⁶Si les deux étapes précédentes n'étaient pas présentes, on obtiendrait un repliement de spectre :



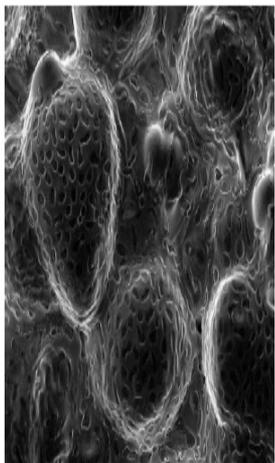
Signaux réels

Rappelons que les variations à petite échelle du signal sont capturées par les hautes fréquences (les “tôles” capables de coller à des détails très petits)

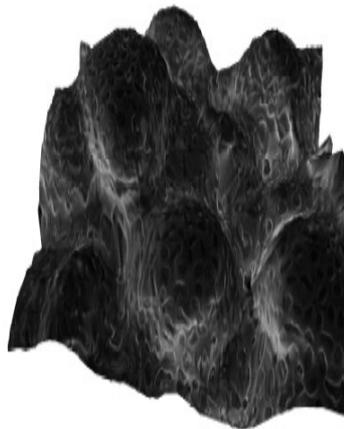
Ainsi un détail infiniment petit exige une fréquence infiniment grande pour le capturer.

L'univers ne se présente pas comme une fonction à spectre borné comme on le souhaiterait, mais comme une fonction à spectre à support quasi-infini

-> les images sont dotées de détails aussi fins que voulus



40 μm

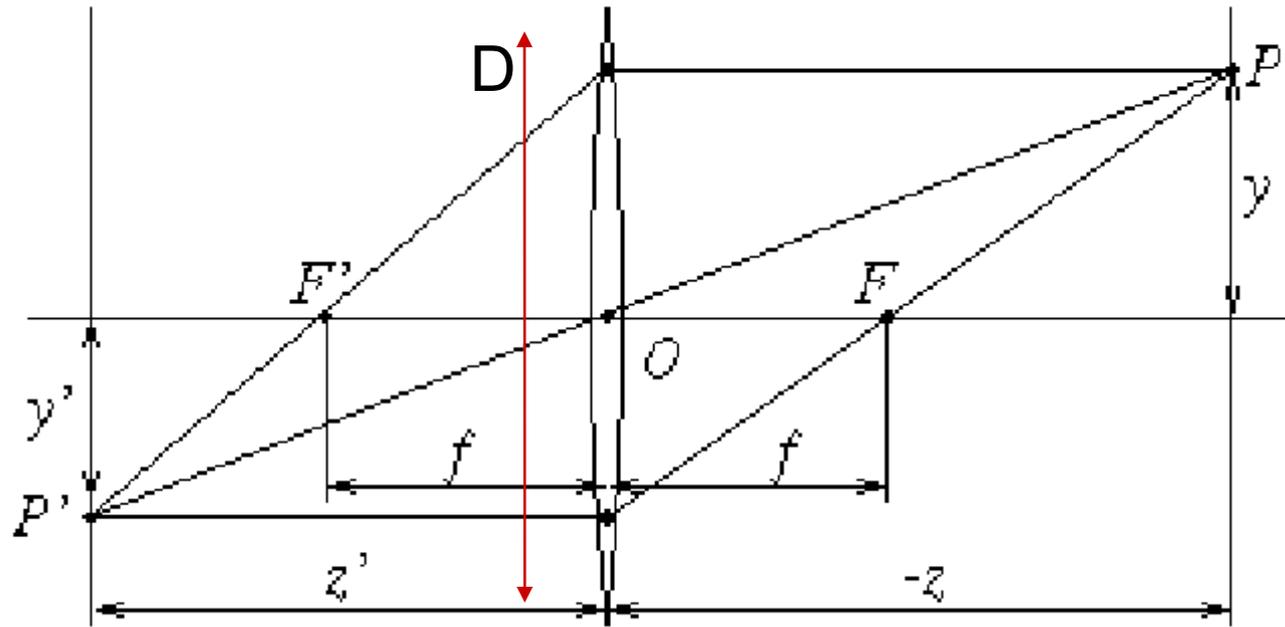


Par contre, les instruments de mesure type lentilles ou cristallin introduisent physiquement la limitation en bande passante exigée par l'échantillonnage

Au lieu de mesurer l'image exacte $f(x)$ de l'univers, on en mesure une image dégradée f' par la réponse impulsionnelle $h(x)$ du système d'observation : $f'(x)=f(x)*h(x)$. La limite fréquentielle U est imposée par le support de H , fonction de transfert du signal.

C'est ce signal f' filtré qui sera par la suite échantillonné par les capteurs numériques type caméra CCD ou rétine.

Limitation optique



$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2} \quad \text{et} \quad H(\rho) = \frac{J_1^2(\pi\rho D / f)}{(\pi\rho D / f)^2}$$

C'est la tâche d'Airy, considérée comme approximativement nulle (et donc un filtre passe-bas approximatif) au delà d'une certaine fréquence $\rho(D, f)$

En général, le pas d'échantillonnage est fixé par les paramètres physiques des capteurs ou par le canal de transmission à débit réduit.

Dans ce cas, on sait qu'on évitera le phénomène d'aliasing si on limite la bande passante du signal à $u_c = 1/2p$. Ce filtrage peut se faire optiquement ou électroniquement. La plupart du temps, on n'a pas accès à la TF du signal $f(x)$ au moment de l'acquisition. On ne peut donc filtrer directement dans l'espace de Fourier grâce à la fonction porte $\Pi(2pu)$.

Par contre, on peut convoluer le signal $f(x)$ par une réponse impulsionnelle dont la TF est le signal porte attendue. Mais convoluer par un sinc, à support infini, n'est pas envisageable pratiquement.

On convoluera donc le signal par un signal de TF approximative le signal porte attendue, par exemple un signal porte dans le domaine spatial.

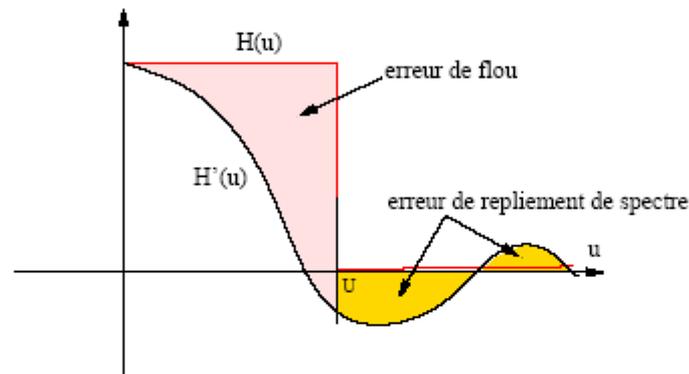
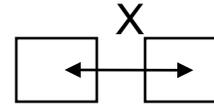
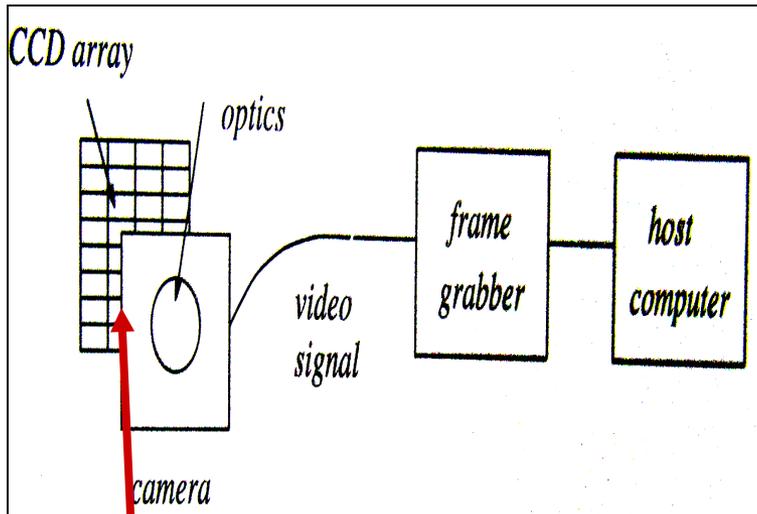
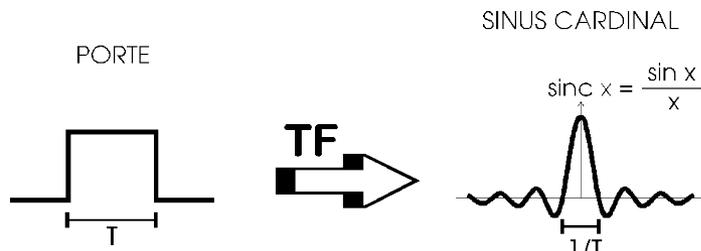


FIG. 3.4 – Les deux types d'erreurs introduites par le filtrage d'un signal par un filtre $h'(x)$ différent du passe-bas idéal $h(x)$ lors de son échantillonnage. Ils sont présentés ici dans l'espace de Fourier. À l'intérieur de la bande, l'erreur est une distorsion des fréquences appelée flou en traitement d'images, à l'extérieur de la bande, l'énergie non annulée viendra se replier lors de l'échantillonnage et créera le défaut de repliement de spectre.

Limitation des détecteurs solides (matrice de photodétecteurs)



Mesure d'un échantillon : intégration de l'énergie sur la surface du capteur donc filtrage de réponse impulsionnelle :



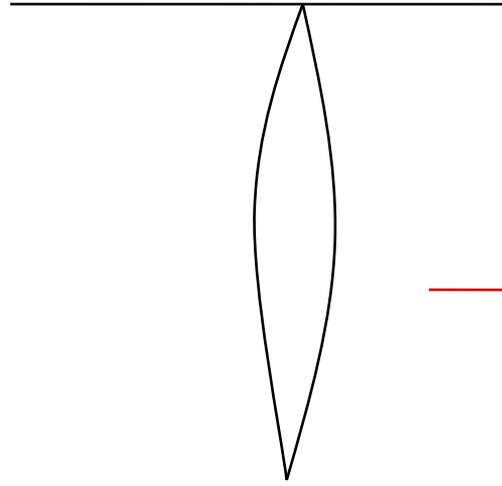
-> Mauvais filtre passe-bas (qui crée des fréquences au-delà de la fréquence de coupure)

$T < \text{pas d'échantillonnage} = \text{distance inter-capteurs} = X$

Passé-bas optique

Multiplication par

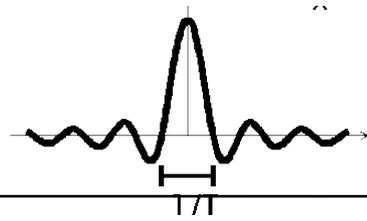
$$H(\rho) = \frac{J_1^2(\pi\rho D / f)}{(\pi\rho D / f)^2}$$



Passé-bas capteur solide

Multiplication par

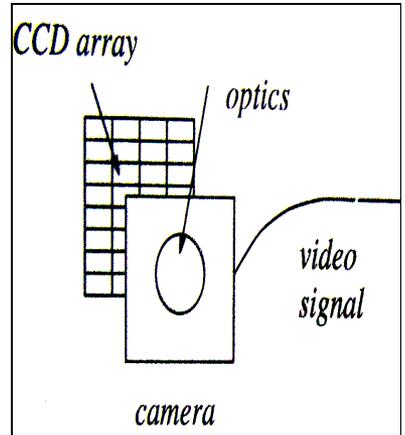
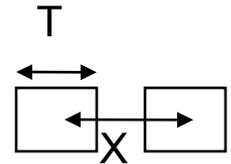
$$H(\rho) = \text{sinc}(T\rho)$$



Réplicateur

Convolution par

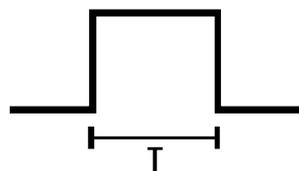
$$H(u) = \text{III}(Xu)$$



On supprime des détails, ce qui fait qu'on ne voit pas les détails microscopiques des surfaces observées

Intégrateur

Convolution par



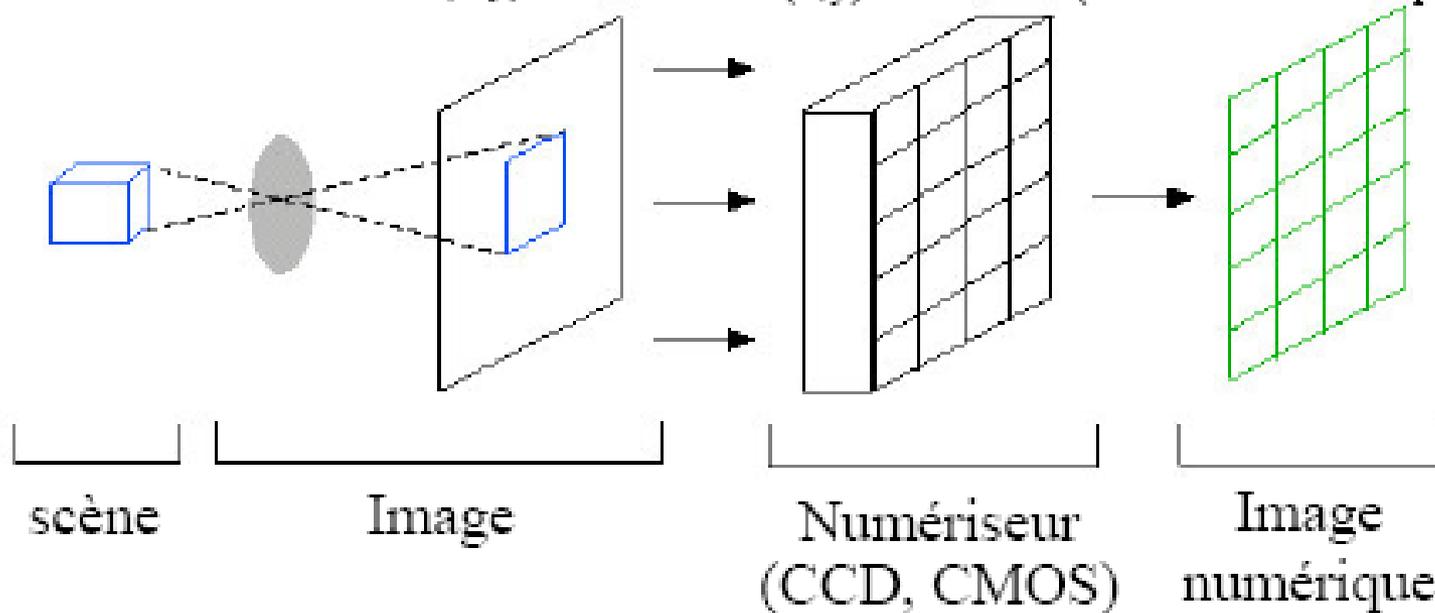
Echantillonneur

Multiplication par

$$h(x) = \text{III}\left(\frac{x}{X}\right)$$

ACQUISITION D'UNE IMAGE NUMÉRIQUE (RASTER ou MATRICIELLE)

1. $I(x,y)$ continue 2. $I(x,y)$ numérisée (échantillonnée et quantifiée)



- Projection 2D d'une scène 3D
- $I(x,y)$ représente l'intensité de la lumière au point (x,y)
- Discretisation de l'espace et de l'intensité

0	10	10	15	50	70	80
0	0	100	120	125	130	130
0	35	100	150	150	80	50
0	15	70	100	10	20	20
0	15	70	0	0	0	15
5	15	50	120	110	130	110
5	10	20	50	50	20	250

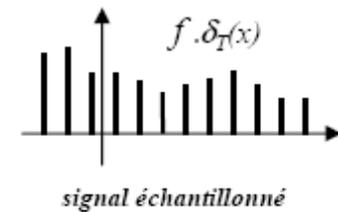
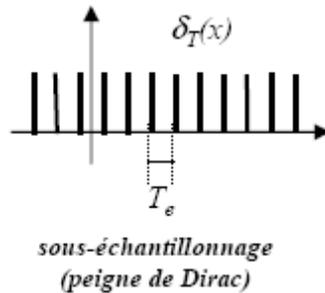
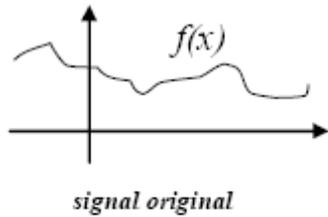
Pixel
(picture element)
0: noir
255: blanc (8 bits)

CCD ou CMOS?

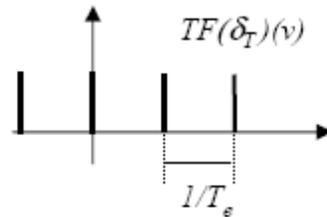
Les deux technologies sont sous forme d'une grille ou matrice de capteurs photosensibles convertissant la lumière en signal électrique

- CCD (Charge-Coupled Device)
 - Senseur de haute qualité: bruit faible, sensibilité à la lumière, haute résolution
 - Plus cher car procédure de construction particulière
 - Forte consommation d'énergie (~ 100 x CMOS)
 - Pour les caméras de haute qualité
- CMOS (Complementary Metal Oxide Semiconductor)
 - Senseur de bonne qualité mais plus sujet au bruit
 - Moins sensible à la lumière en partie interceptée par le réseau de transistors du CMOS
 - Moins cher car utilise une procédure de construction plus classique comme pour manufacturer des microprocesseurs.
 - Faible consommation d'énergie
 - Pour la plupart des caméras et webcams bon marché

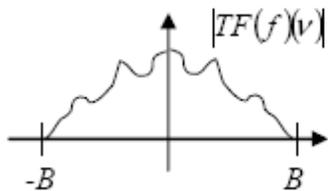
Spectre du signal échantillonné : bande limitée et aliasing



Transformée
de Fourier

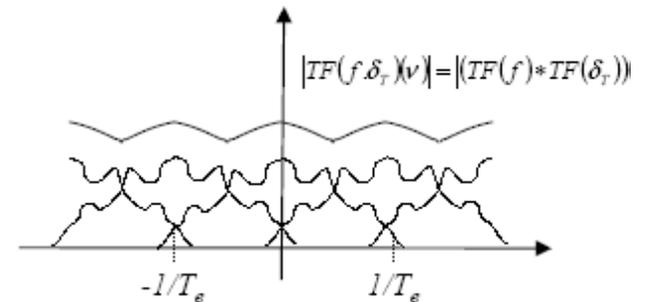


Transformée
de Fourier

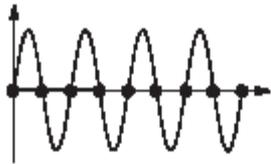


non-respect du critère de Nyquist

$$T_e > \frac{1}{2B}$$



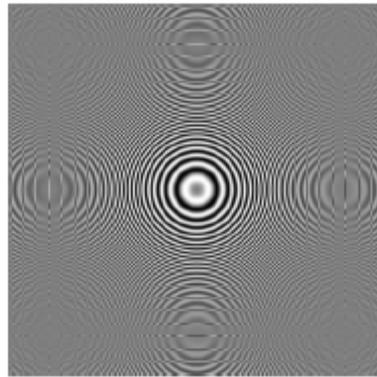
repliement de spectre : aliasing spatial



(a) Le signal échantillonné paraît constant.



(b) Le signal échantillonné semble d'une fréquence plus faible que le signal original.



(c) La fonction $f(\rho(x,y))$ où $\rho(x,y)$ est la distance à l'origine et $f(t) = \frac{1}{2}(1 + \sin(t^2))$. Cette fonction oscille de plus en plus vite lorsque l'on s'écarte du centre. L'échantillonnage de cette fonction présente à la fois de l'aliasing et du moiré (apparition de régions circulaires).

FIG. 1.2 – Exemples simples d'aliasing provoqué par un mauvais choix du pas d'échantillonnage sur un signal continu échantillonné.

Sur certains intervalles le signal reconstruit peut être très différent du signal réel. On peut distinguer deux catégories d'aliasing :

- Le signal reconstruit s'apparente à un bruit : trop peu d'échantillons sont utilisés pour reconstruire le signal d'origine;
- Le signal reconstruit fait apparaître des structures très différentes de celles contenues dans le signal original. Ce phénomène est connu en image sous le nom de moiré.

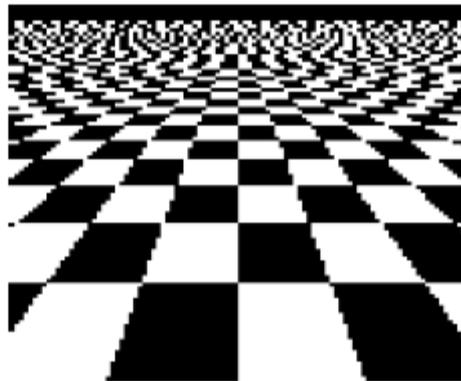


FIG. 1.3 – Exemple classique d'une image de synthèse présentant de l'aliasing : un damier qui se prolonge à l'infini. Les contours paraissent discontinus, et la texture du damier forme à l'infini des structures incohérentes.

Spectre du signal échantillonné : bande limitée et aliasing



Suite d'images
obtenues par sous-
échantillonnage
spatial brute



+ Quantification radiométrique couleur

Partie 4 : Descriptions Statistiques des images

Utiles pour justifier les traitements ultérieurs du signal image !

- Filtrage
- Restauration
- Codage
- Reconnaissance des Formes

Utiles pour expliquer une image par rapport aux descriptions structurelles ou syntaxiques ? Voir codeurs JPEG, MPEG

Dans cette partie nous illustrerons l'utilisation de descripteurs statistiques des images pour faire de :

- l'amélioration de la visualisation
- la classification automatique d'images

Liées aux 2 types d'image :

- Images **incohérentes** obtenues par les sources de lumière naturelle ou de rayonnements incohérents (images vidéo, photos satellitaires ou médicales)
 - > sommation **en énergie** des radiations émises
- Images **cohérentes** obtenues par holographie, imagerie radar ou ultrasonore
 - > sommation **en amplitude complexe** associée à un bruit important appelé chatoisement (en radar), ou tavelure (en astronomie), ou granularité (en optique) et *speckle* en anglais.



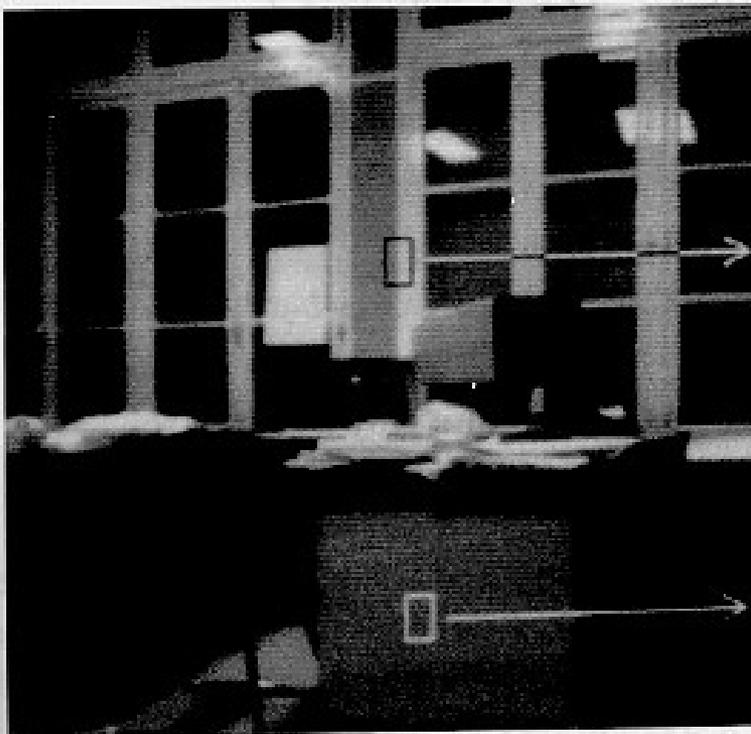
Île de la Réunion



Rappel : Une image peut être modélisée de plusieurs façons :

- une fonction continue de deux variables $f(x,y)$
- une matrice 2D $f[i,j]$, discrétisant la fonction $f(x,y)$
- la réalisation d'un champ de Variables Aléatoires discrètes dont la densité de probabilité est lié à l'histogramme de l'image

-> modèle de traitement mathématique, algorithmique, physique



```

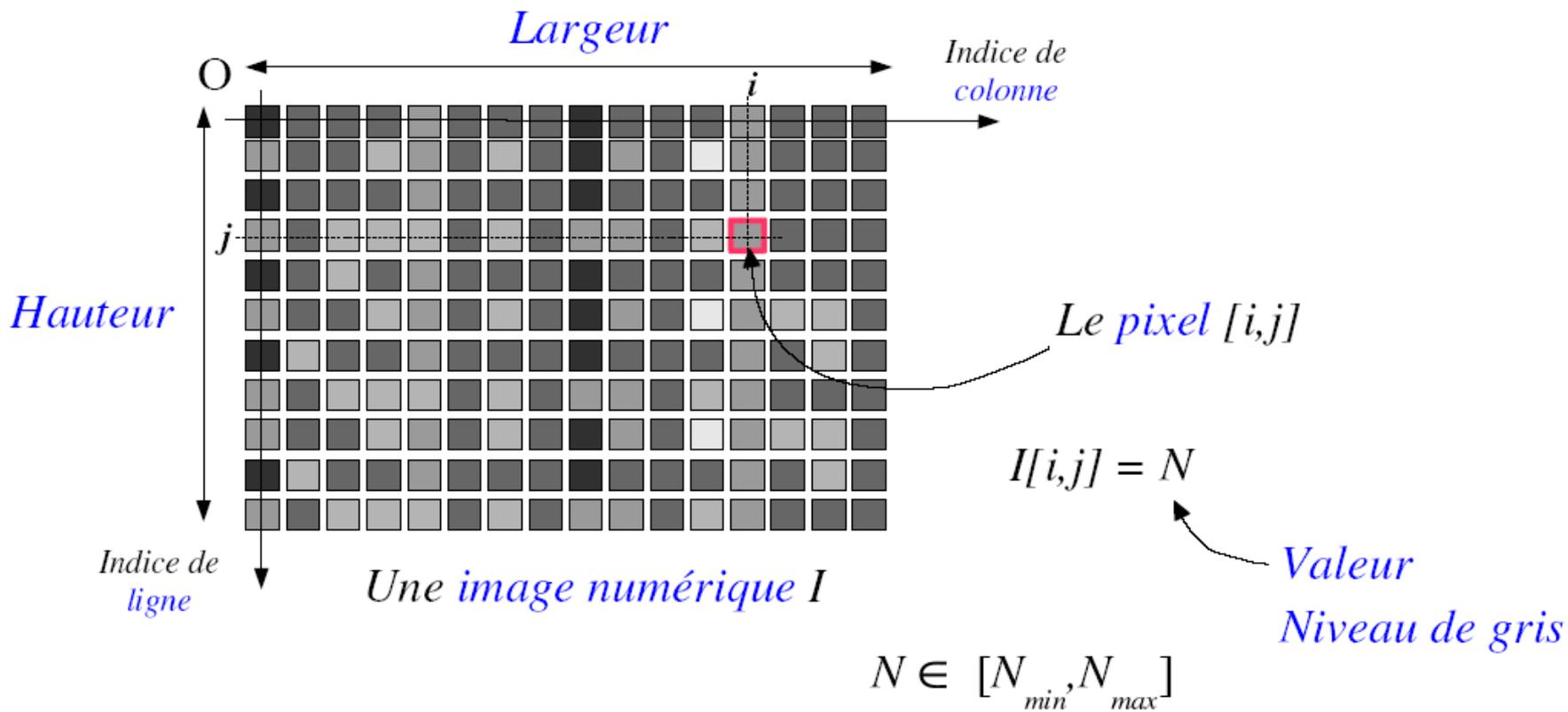
139 140 136 140 172 221 217 222 219 217
136 137 137 143 169 219 212 218 222 209
139 140 139 138 171 218 217 219 222 213
141 145 145 145 172 219 214 222 217 205
138 139 147 147 172 217 218 219 224 203
143 146 143 143 170 219 220 224 225 201
150 144 144 146 172 217 222 221 222 210
137 132 138 137 166 221 219 224 229 210
138 143 141 146 171 222 221 225 223 196
146 145 141 142 169 221 222 223 218 189
142 141 141 147 172 217 223 225 223 215
150 143 145 147 170 225 225 222 226 220
149 140 144 139 169 223 225 223 227 223
142 139 143 144 172 224 224 225 229 224
147 144 145 147 171 227 229 228 233 225
142 141 140 147 173 226 227 227 233 228

```

```

118 122 118 118 121 119 118 118 116 116
119 117 118 118 116 117 115 117 119 112
119 116 119 116 117 118 117 115 119 113
120 121 120 120 116 117 115 117 117 116
117 122 116 118 120 116 114 115 114 120
119 118 117 117 121 118 118 116 116 117
118 118 119 116 118 119 119 115 116 113
118 121 117 119 117 115 118 112 118 116
117 119 115 117 120 117 115 118 116 118
118 119 116 119 116 116 117 118 114 115
118 117 119 119 118 119 118 119 118 118
117 120 117 119 117 117 119 115 119 120
120 117 119 119 115 119 119 119 119 116
119 118 118 121 121 118 116 120 119 119
120 122 118 123 119 121 121 124 118 120
118 118 118 120 120 120 119 120 119 122

```



Un format portable : *pgm* ou *ppm* ou *pbm*

```
P2
#feep.pgm
10 5
4
0 0 0 1 1 4 4 3 0 0
0 1 4 1 1 4 4 3 0 0
0 0 3 1 1 4 4 3 0 0
0 0 0 1 1 3 3 3 0 0
0 0 0 1 1 2 2 2 2 2
```

```
P3
# exemple.ppm
4 4
15
0 0 0 0 0 0 0 0 15 0 15
0 0 0 0 15 7 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 15 7 0 0
15 0 15 0 0 0 0 0 0 0 0
```

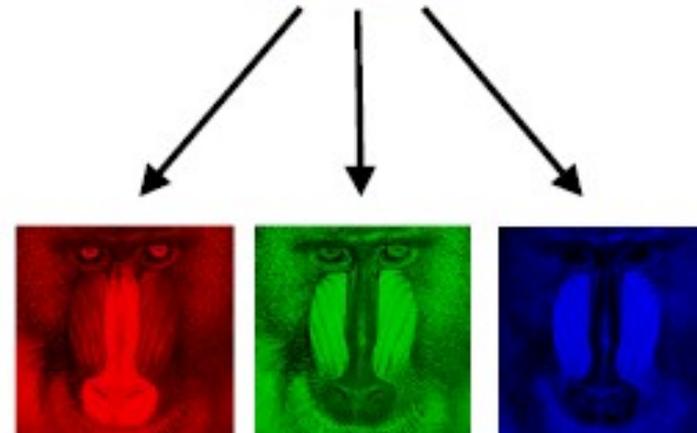
Code d'entête P5 ou P6 si les valeurs sont en byte et pas en ASCII

Logiciels libres de manipulation: *gimp* et *imageJ*

La jungle des formats d'image

- **bitmap** \Rightarrow image de niveaux de gris ou couleurs de type photo (Exemple: GIF, PCX, BMP, JPEG, PGM...)

- Binaire: $I(x,y) \in \{0,1\}$
- Niveau de gris: $I(x,y) \in [0,255]$
- Couleur: $I_R(x,y) I_V(x,y) I_B(x,y)$



#ligne: 256, 512, 480, 600, 768, 1024
#colonne: 256, 512, 640, 800, 1024, 1280
#NdeG: 2, 64, 256, 1024, 4096, 16384

2^k (architecture, FFT...)

Format GIF (CompuServe)

- Bien adapté au téléchargement
- Image compressée avec algorithme LZW (Lempel-Ziv & Welch) **sous licence Unisys** (gratuit sauf pour les commerces)
- Palette de couleur (en non pas RGB...) (Max de 256 couleurs simultanées, généralement suffisant sauf pour les “arts”)

Format PCX (Paintbrush)

- Bien adapté aux dessins
- Image compressée avec algorithme RLE (Run Length Encoding)
- Palette de couleur (Max de 256 couleurs simultanées...)

Format BMP (BitMaP de Microsoft)

- Format brute (“raw”) ou binaire
- Image NON compressée
- Palette de 256 couleurs (dont 20 pour Windows!)
- Papiers peints, icônes... de Windows (rapide mais gros)

Format TIFF (Tagged Image File Format)

- Très “ouvert”, permet différents formats, différentes options et compressions (différenciable par des “tags”)... donc pas très standard
- Pixel 24 bits (16,7 millions de couleurs)
- Difficile pour un logiciel de supporter TOUS les TIFF

JPEG (Joint Photographic Experts Group)

- Forte compression MAIS avec perte (25:1)
- Basée sur la transformée cosinus discrète (DCT) 2D **de sous-images 8 x 8**



Image Size	TIFF (uncompressed)	JPEG (high quality)	JPEG (medium quality)
640x480	1.0 MB	300 KB	90 KB
800x600	1.5 MB	500 KB	130 KB
1024x768	2.5 MB	800 KB	200 KB
1600x1200	6.0 MB	1.7 MB	420 KB

<http://electronics.howstuffworks.com/digital-camera4.htm>

Note: JPEG2000 utilise la transformée en ondelettes discrète encore plus performante que la DCT

Création des biomorphes par fractales

Noir et blanc

Pour chaque point du plan imaginaire ($z=x+iy$)

On lance une boucle de 10 itérations :

On calcule $z=f(z)$

Si ($|x|>10$ ou $|y|>10$ ou $|z|>10$),

on quitte la boucle.

En fin de boucle :

Si ($|x|>10$ ou $|y|>10$),

on marque un pixel noir sur fond blanc.

Couleur

La couleur dépend du nombre d'itérations et de la valeur de $|x|$, $|y|$, $|z|$.

Fonction $f(z)$

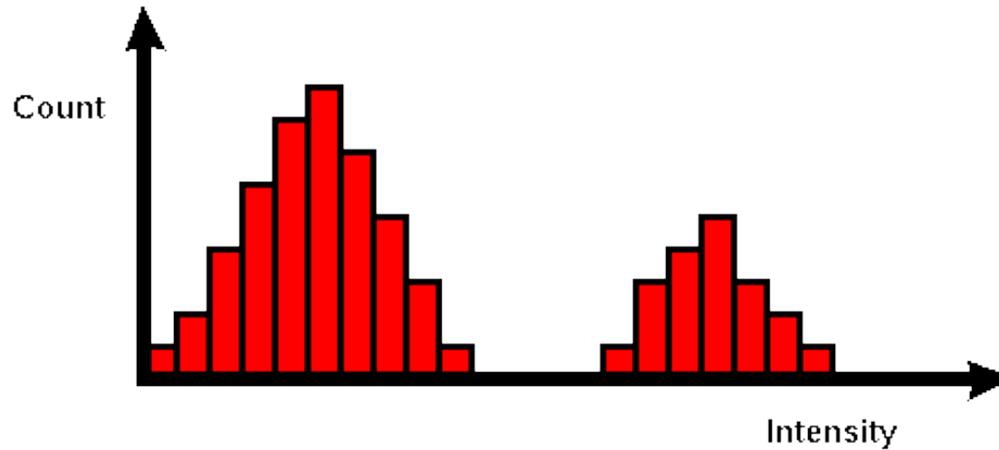
$$f(z) = z^{\text{Exposant}} + C$$

Ensembles de Julia

$c=0.3+0.6i$	$c=-0,4+0,7i,$
$c=-0.0519+0.688i$	$c=-0,7+0,3i$
$c=0.32+0.43i$	$c=-1,77+0,01i$
$c=-0.0986-0.65186i$	$c=0,15+0,45i$
$c=0+i$	

Analyse de l'amplitude : l'histogramme

Analyse de la fréquence d'apparition des niveaux de gris.

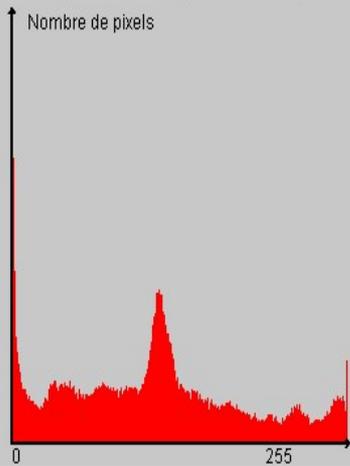


Comme l'image est constituée de 100 000 à plusieurs millions d'échantillons, le théorème central limite tendrait à prouver que l'amplitude de l'image suivrait une loi gaussienne. Il n'en est rien !

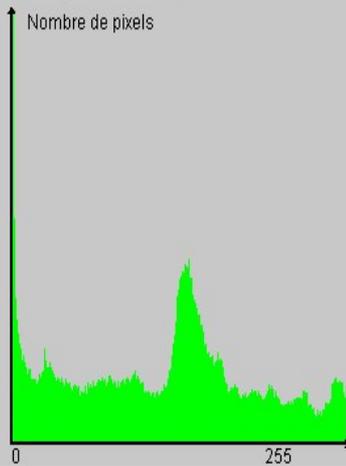
Image originale



Histogramme Composante Rouge



Histogramme Composante Verte



Histogramme Composante Bleu

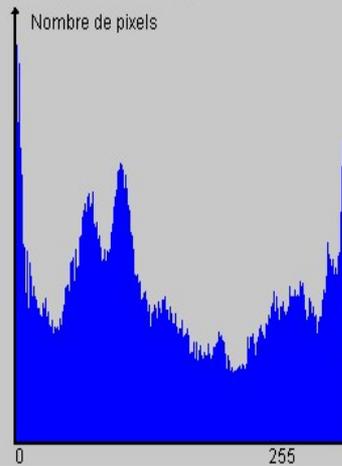
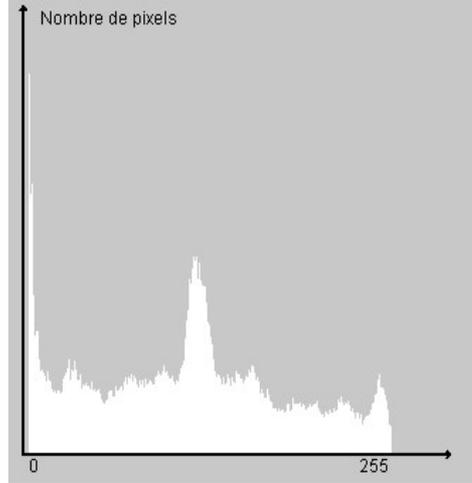


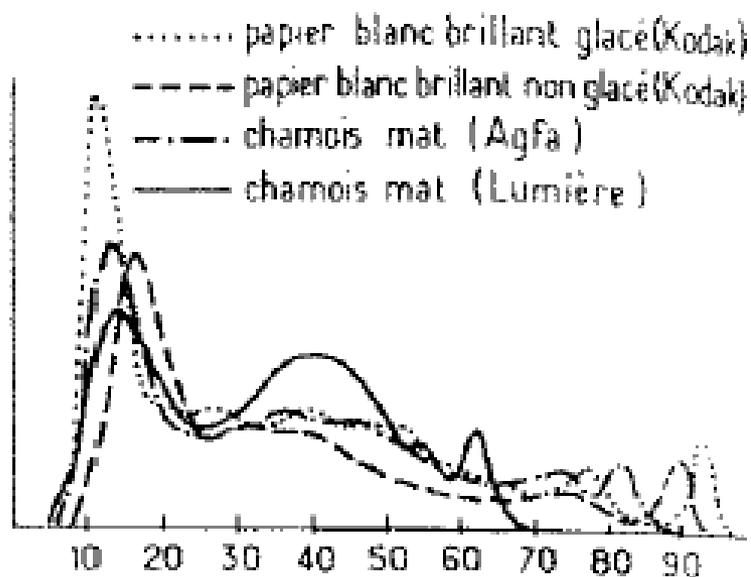
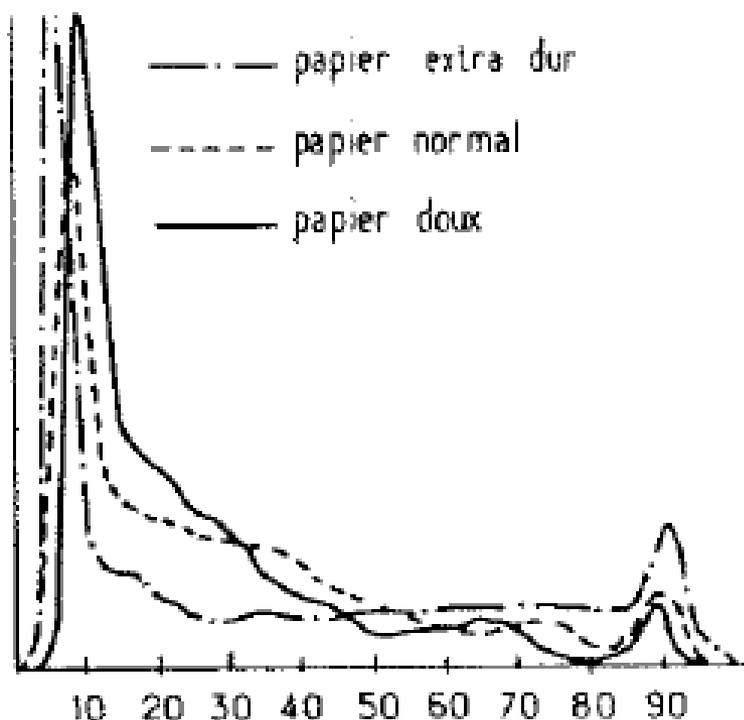
Image originale



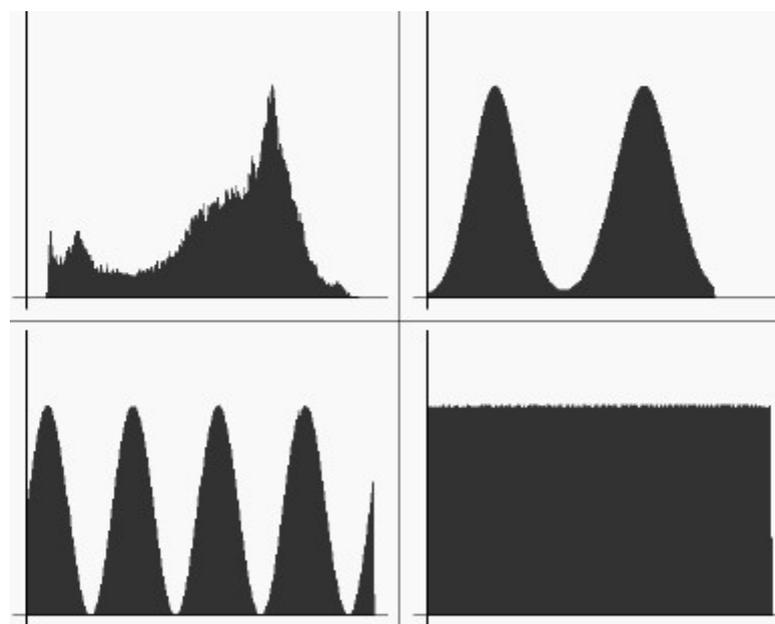
Histogramme



Forme de l'histogramme de l'image \leftrightarrow Signification de l'image



En général, une image peut avoir un histogramme quelconque sans que sa signification en soit affectée.



Cas particuliers où cela est faux : les images incohérentes “pathologiques” (échiquier, texte de livre, image de texture) et les images cohérentes qui suivent une loi de Rayleigh.

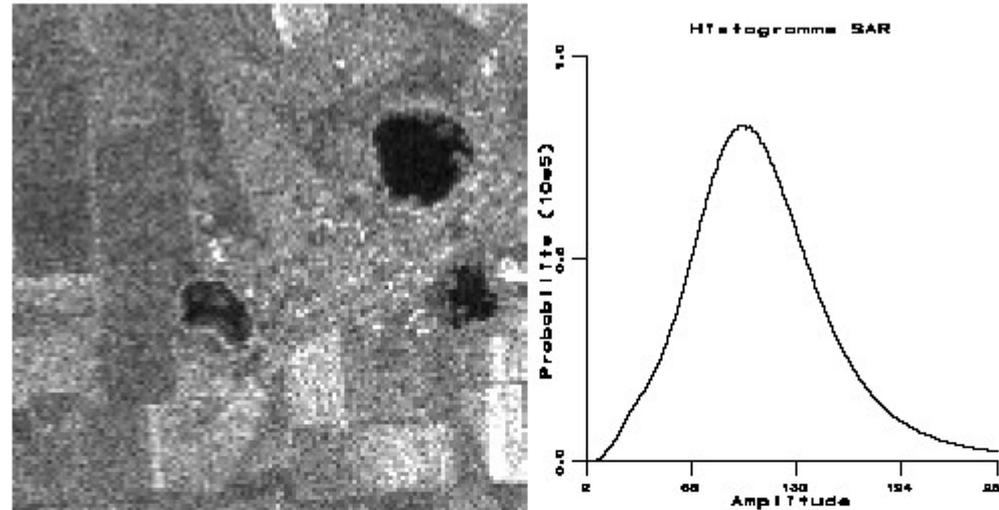


FIG. 2.5 – Agrandissement d'une image de radar à vision latérale (radar ERS-1) sur une région agricole de l'Ukraine (©Cnes) montrant l'importance du bruit de cohérence, et histogramme de la scène complète, très proche d'une loi de Rayleigh.

- Création d'un pixel sombre ou clair selon l'opposition de phase.
- Ces variations dépendent surtout des conditions de propagation et de la géométrie d'observation, plus que des objets qui constituent le pixel.
- Surface grossière des objets par rapport à l'échelle de la longueur d'onde incidente -> bruit

Histogramme des sauts d'amplitude

Saut d'amplitude s : différence entre niveaux de gris de deux pixels adjacents le long d'une ligne

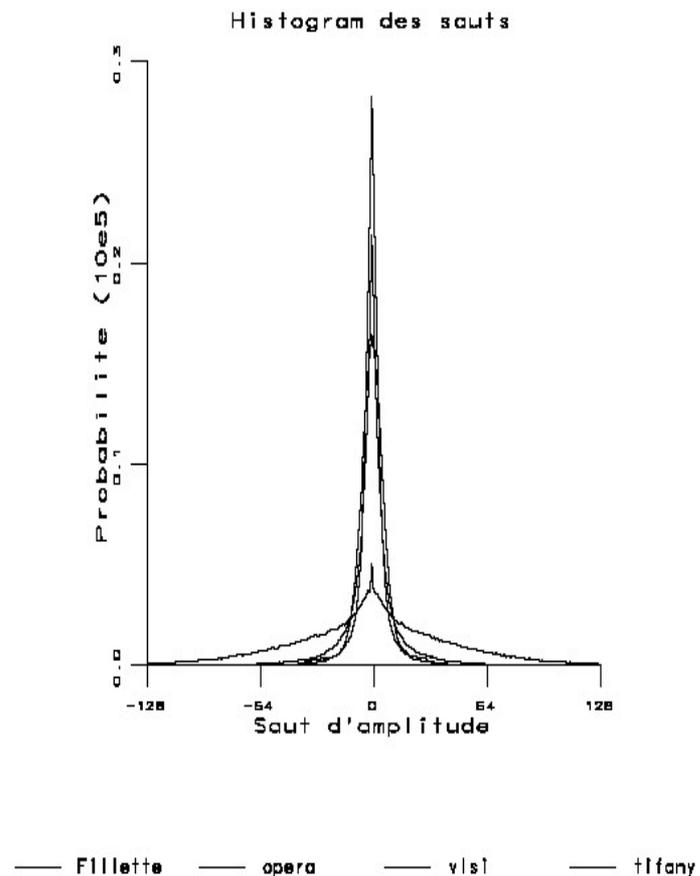
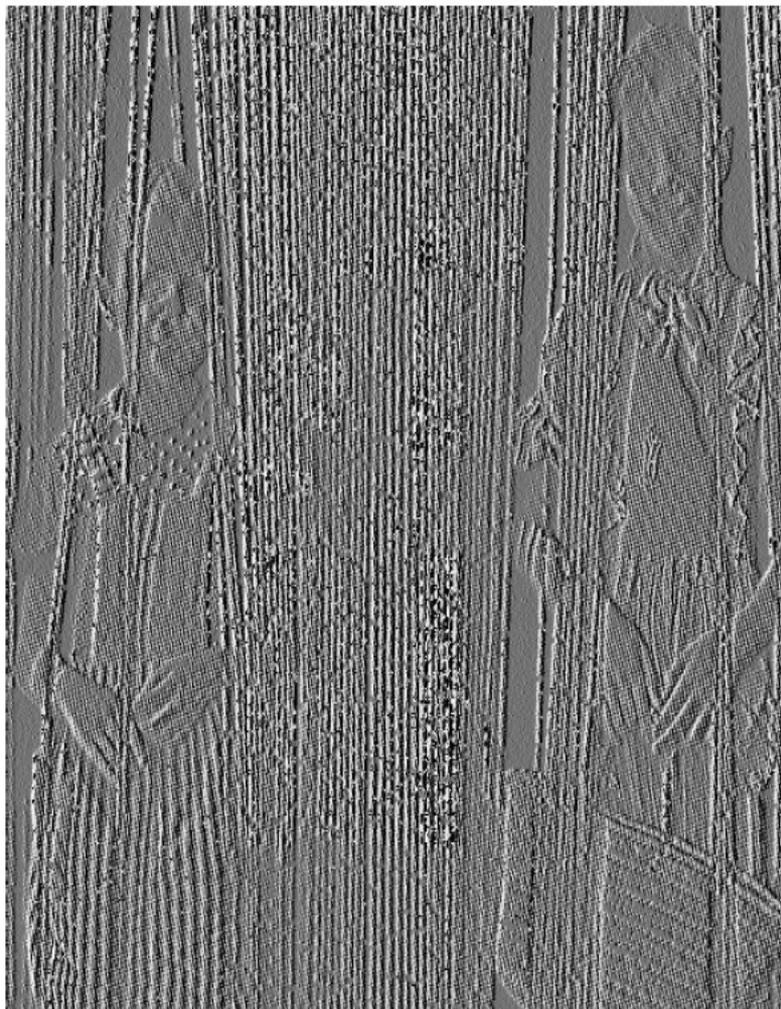
La loi de probabilité de s est globalement :

- marquée par un maximum pour $s=0$;
- symétrique;
- à décroissance très rapide et régulière.

D'où une première caractéristique statistique possible de l'image σ_s variant typiquement de 3 à 15 :

$$p(s) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right)$$





Exceptions : échiquier, dégradé régulier du blanc au noir

La fonction d'autocorrélation normée centrée

Elle résume les dépendances spatiales du signal en fournissant une interprétation dans le domaine de Fourier

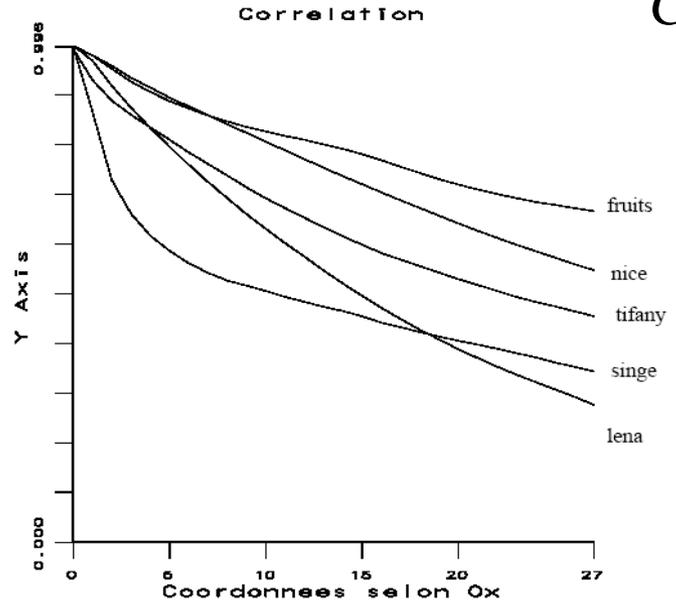
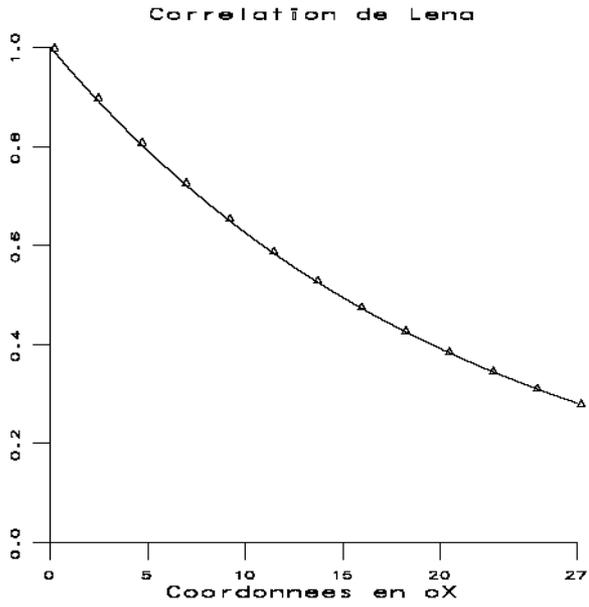
-> Fonction d'autocorrélation = TF du spectre de densité de puissance

$$C_f(k) = \frac{\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} (f(i) - \bar{f}) \cdot (f(i+k) - \bar{f})}{\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} (f(i) - \bar{f})^2}$$



Ce qui permet de définir un deuxième descripteur statistique globale d'une image, le paramètre α variant typiquement de 0.01 à 0.3 :

$$C_f(k) = \exp(-\alpha|k|)$$



Exception faite des fonctions périodiques par exemple (grilles, murs, tissus)

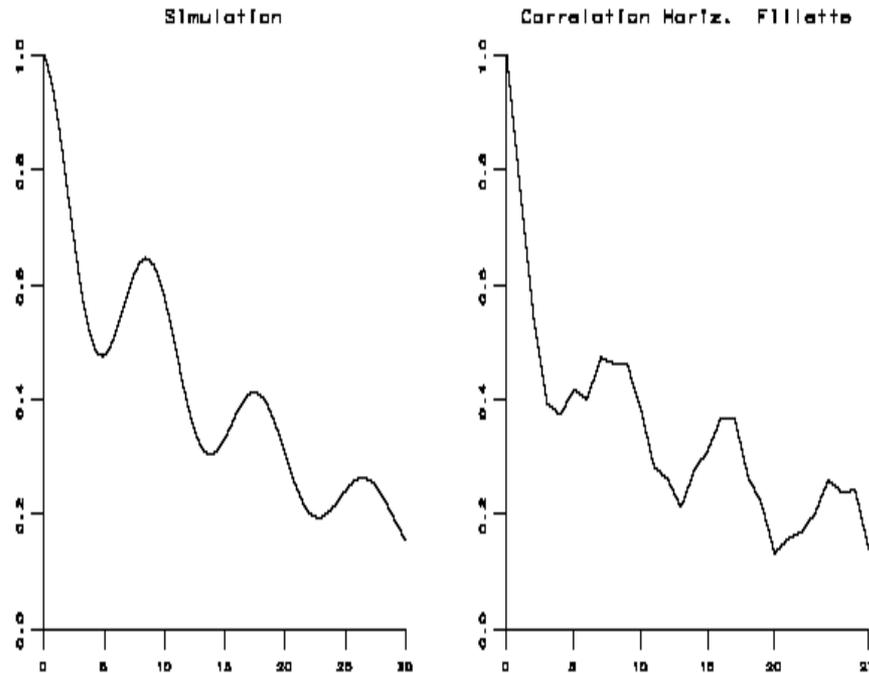
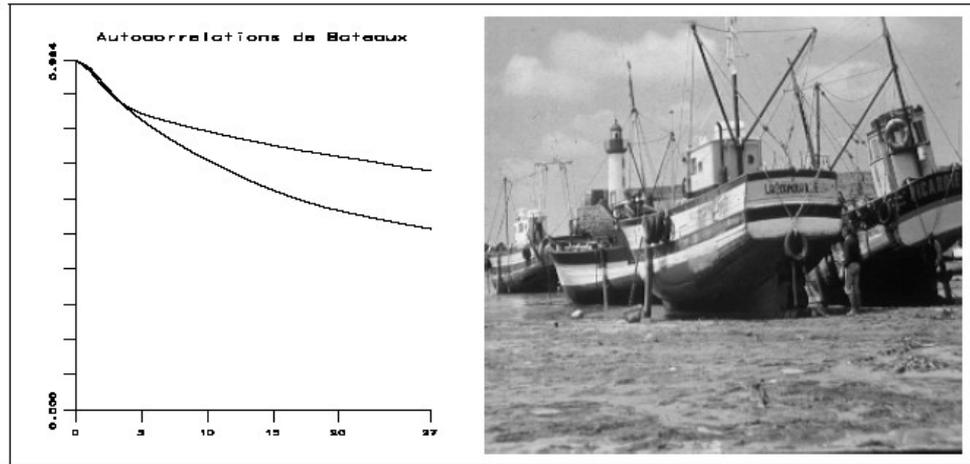


FIG. 2.9 – Allure de l'autocorrélation d'une image avec un fort contenu périodique : théorique à gauche et mesurée (sur *Fillettes*), à droite.

En 2D, par principe d'isotropie



Corrélation obtenue dans les directions horizontales (en haut) et verticales (en bas) pour l'image

2 modélisations possibles : quadratique ou séparable

$$C_f(x, y) = \exp\left(-\sqrt{\alpha x^2 + \beta y^2}\right)$$

ou

$$C_f(x, y) = \exp(-\alpha|x| - \beta|y|)$$

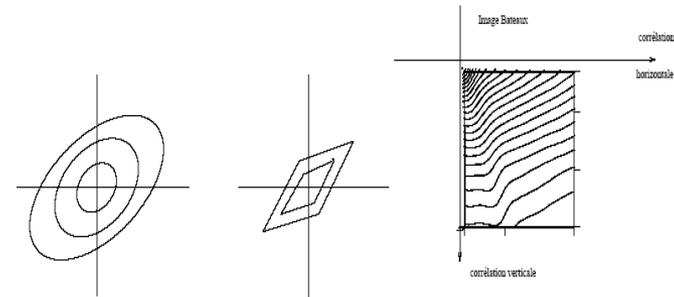


FIG. 2.11 – Courbes d'isocorrélation pour le modèle non-séparable (à gauche) et pour le modèle séparable (au centre) et courbes d'isocorrélation mesurée sur l'image « Bateaux » (le quart inférieur du plan est représenté).

Le spectre de densité de puissance P_f

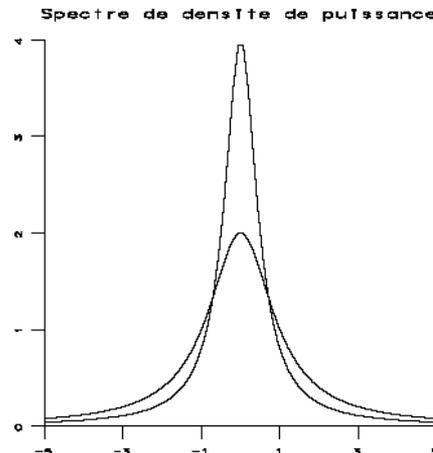
$$F = TF(f)$$

u variable associée à la variable d'espace (fréquence spatiale)

On a $TF(C_f(x, y)) = P_f$

et

$$P_f(u) = \langle |F(u)|^2 \rangle = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + u^2} \text{ qui suit une distribution de Lorentz}$$



Malgré toutes ces mesures statistiques classiques, il est difficile de modéliser une image dans sa globalité par un processus stochastique classique du type markovien et gaussien.

Les conditions de stationnarité ou de causalité prennent des dimensions soit plus arbitraires soit plus complexes en 2D.

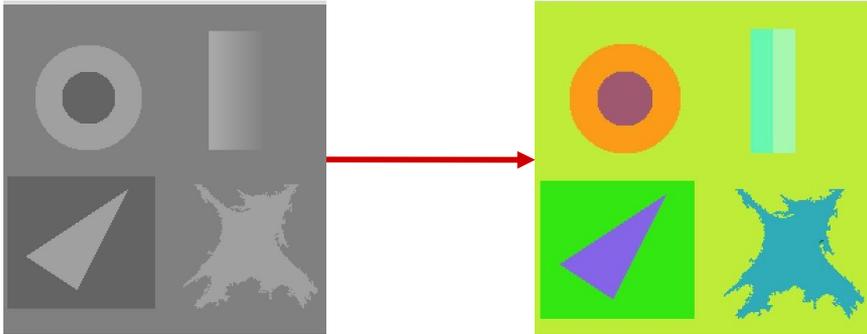
Appliquer les techniques du traitement de Signal 1D usuelles ne sont pas satisfaisantes dans le domaine de l'image. Par exemple, la modélisation par **champs de Markov** 2D et non plus par chaîne de Markov a apporté une réponse théorique aux limites causales précédentes, au prix d'une complexité algorithmique accrue.

Enfin, la non-stationnarité du signal image global, impose l'utilisation d'un modèle **en mosaïque**, qui partitionne l'image en plages où les techniques descriptives statistiques précédentes sont significatives.

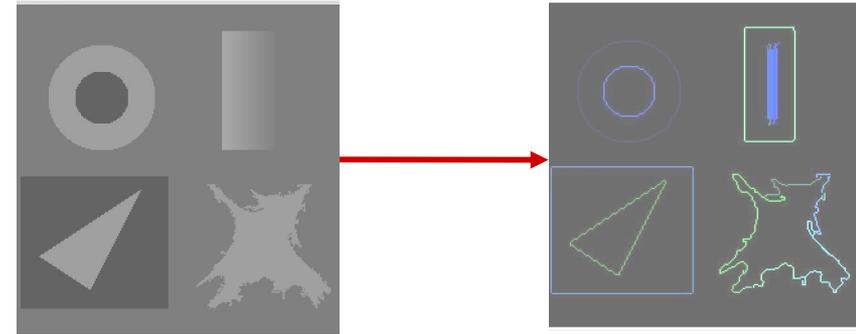
Voici un résumé graphique, en réponse aux critiques du transparent précédent, des chapitres que nous allons traiter :

- Une image **peut** être partitionnée et analysée de deux façons :

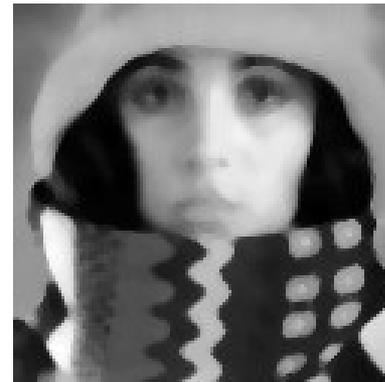
➤ aspect REGIONS ou TEXTURES
(chapitre 2)

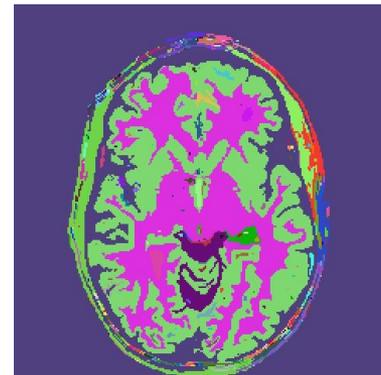
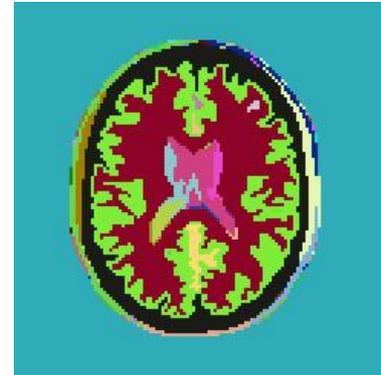
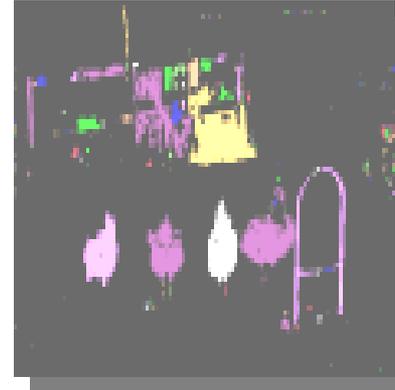


➤ aspect CONTOURS
(chapitre 3)



- Une image **doit** être pré-traitée (chapitre 4)





Segmentation en régions globale

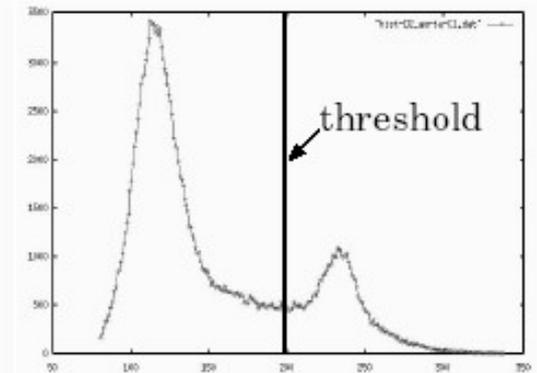
Seuillage

- Le seuillage est une technique de segmentation simple, non contextuelle et efficace :
 - Seuillage d'intensité
 - Classification des pixels (voxels) en deux catégories
 - Création d'une image binaire (binarisation)
- Le seuillage peut utiliser un seuil soit *fixé* soit *adaptatif*
- Diverses techniques ont été imaginées pour définir automatiquement ce seuil mais aucune n'est complètement robuste



Seuil et Histogramme

- Seuiller implique généralement l'analyse de l'histogramme :
 - Différentes caractéristiques image donne naissance à des modes dans un histogramme (bimodale)
 - EN général les pics (modes) de l'histogramme correspondant à des primitives image différentes vont se chevaucher



- Un exemple de valeur de seuil est la moyenne des niveaux de gris

Seuillage fixe

- Seuil T *fixé* ou *global*: constant sur toute l'image

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & f(x,y) < T \\ 1 & f(x,y) \geq T \end{cases}$$

Normal Threshold

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & f(x,y) \leq T \\ 0 & f(x,y) > T \end{cases}$$

Reverse Threshold

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & f(x,y) < T_1 \\ 1 & T_1 \leq f(x,y) \leq T_2 \\ 0 & f(x,y) > T_2 \end{cases}$$

Deux seuils : intervalle d'intensités

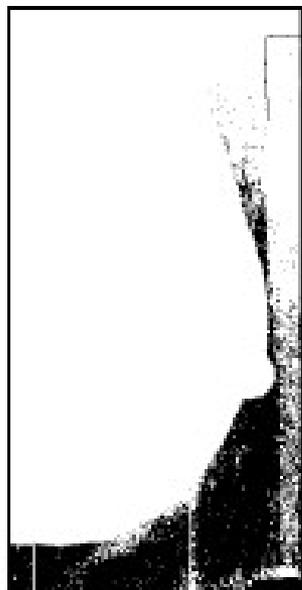
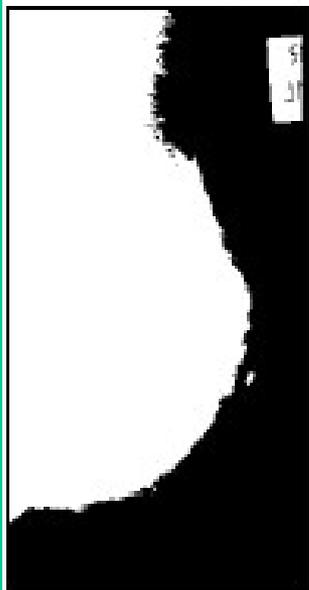
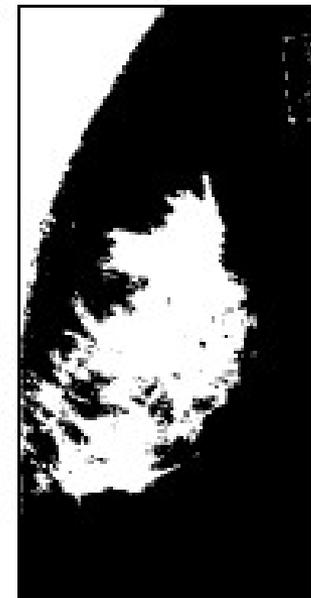
Seuillage fixe



Too high

Too low

Correct

 $T = 1 \ 1 \ 1$ $T = 3$ **comment choisir ?** $T_1=8, T_2=169$ $T_1=169, T_2=223$

ISODATA Algorithm :

Iterative threshold selection technique [Ridler et Calvard] :

- Select an initial threshold T_0 (e.g. the mean intensity)
- Partition the image into two groups (R_1 and R_2) using the T_0
- Calculate the mean intensity values μ_1 and μ_2 of the partitions R_1 and R_2 .
- Select a new threshold: $T_i = (\mu_1 + \mu_2)/2$
- Repeat steps 2-4 until: $T_i = T_{i-1}$

Sélection d'un Seuil Optimal ?

- Utilité de la forme de l'histogramme quand les pics ne sont pas bien définis ?
- Seuillage optimal : on mesure la séparation (statistique) entre deux régions à partir d'une fonction critère, et le seuil qui optimise ce critère est conservé

Otsu's Method

- Otsu's thresholding method is based on selecting the lowest point *between* two *classes* (peaks).
- Frequency and Mean value:

- Frequency:

$$\omega = \sum_{i=0}^T P(i) \quad P(i) = n_i / N \text{ number}$$

- Mean:

$$\mu = \sum_{i=0}^T iP(i) / \omega \text{ number of pixels in level I}$$

- Analysis of variance (standard deviation²)

- Total variance:

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=0}^T (i - \mu)^2 P(i)$$

Otsu's Method

- *between-classes* variance (δ_b^2): The variation of the mean values for each class from the overall intensity mean of all pixels:

$$\delta_b^2 = \omega_0 (\mu_0 - \mu_t)^2 + \omega_1 (\mu_1 - \mu_t)^2,$$

Substituting $\mu_t = \omega_0 \mu_0 + \omega_1 \mu_1$, we get:

$$\delta_b^2 = \omega_0 \omega_1 (\mu_1 - \mu_0)^2$$

$\omega_0, \omega_1, \mu_0, \mu_1$ stands for the frequencies and mean values of two classes, respectively.

Otsu's Method

- The criterion function involves *between-classes* variance to the total variance is defined as:

$$\eta = \delta_b^2 / \delta_t^2$$

- All possible thresholds are evaluated in this way, and the one that maximizes η is chosen as the optimal threshold

Entropy Method

- Entropy is served as a measure of information content
- A threshold level t separates the whole information into two classes, and the entropy associated with them is:

$$H_b = -\sum_{i=0}^t p_i \log(p_i)$$

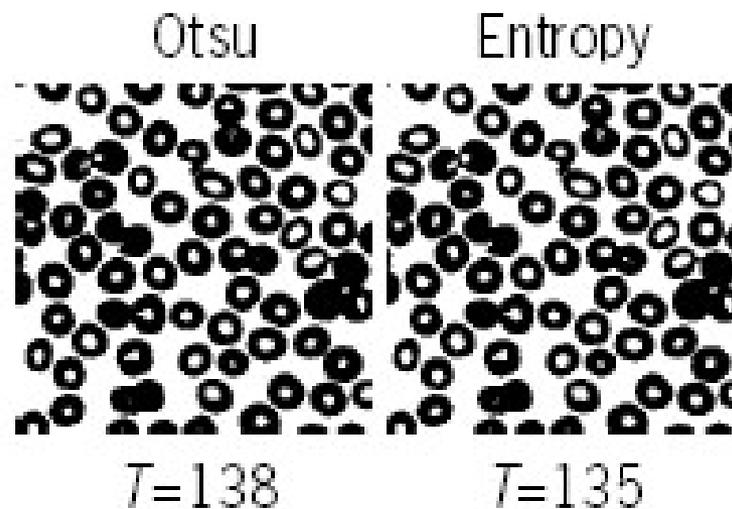
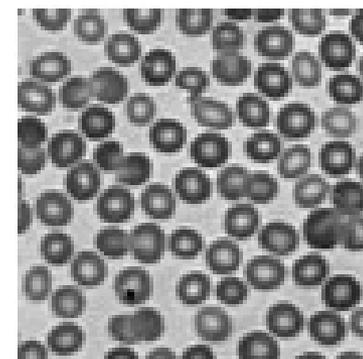
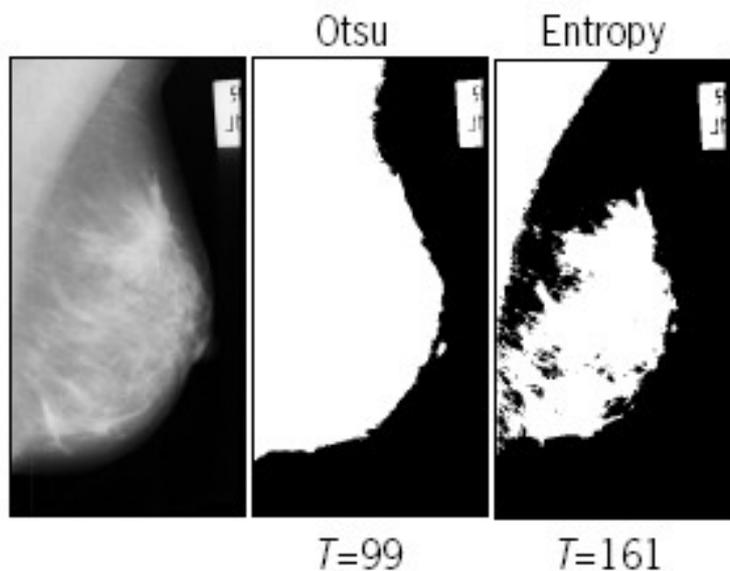
$$H_w = -\sum_{i=t+1}^{255} p_i \log(p_i)$$

- Optimal threshold is the one maximize:

$$H = H_b + H_w$$

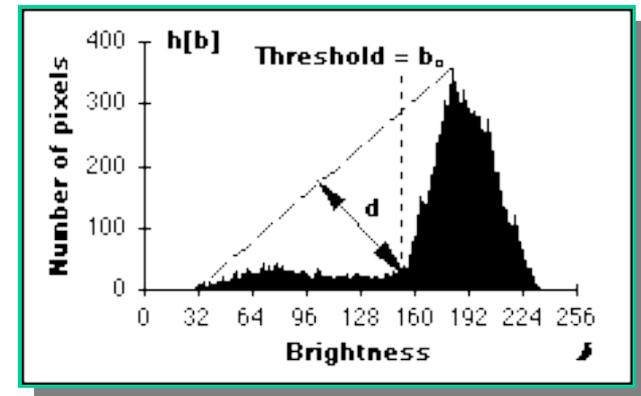
p_i ?

Comparons les valeurs de seuil :



Plein d'autres algorithmes :

- Moment Preservation Algorithm: Optimal threshold makes the original and thresholded images have the closest moments
- Minimum Error Algorithm: The criterion function is minimized to find the best fit between the statistical model (normal distribution) and the histogram.
- Triangle Algorithm:
 - Maximized distance d indicate the optimal threshold



Segmentation en régions semi-locale

Seuillage adaptatif

- Seuillage adaptatif ou *local* (ou *régional*)
 - Utilise plus d'une valeur de seuil
 - A utiliser quand le niveau d'intensité du fond n'est pas constant et que la classe objet varie à l'intérieur de l'image.
 - Examine les relations entre les intensités de pixels voisins pour adapter le seuil en fonction des statistiques radiométriques des différentes régions de l'image.
- Difficultés du seuillage :
 - Contraste pauvre ou non spatialement homogène, ambiguïté...

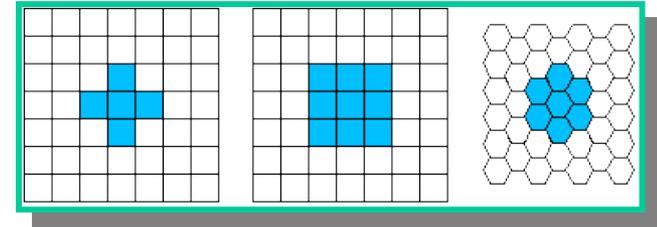
Segmentation en régions locale

Etiquetage de Composantes Connexes

- Connectivité des pixels :

Pour un pixel $P(x,y)$

- 4-voisinage : $N_4(P) = \{(x+1,y), (x-1,y), (x,y+1), (x,y-1)\}$
- 8-voisinage : $N_8(P) = N_4(P) \cup \{(x+1,y+1), (x+1,y-1), (x-1,y+1), (x-1,y-1)\}$
- 4(8)-connexité: deux pixels à l'intérieur de $N_4(P)$ or $N_8(P)$



- Etiquetage de composantes connexes :

- regroupe les pixels d'une image en composantes connexes en se fondant sur la connectivité des pixels
- Labélise (étiquette) les différentes composantes avec un niveau de gris ou une couleur (color labeling), ou un indice de texture



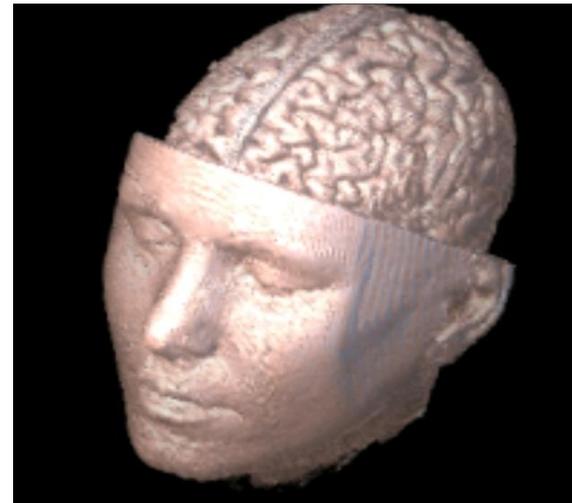
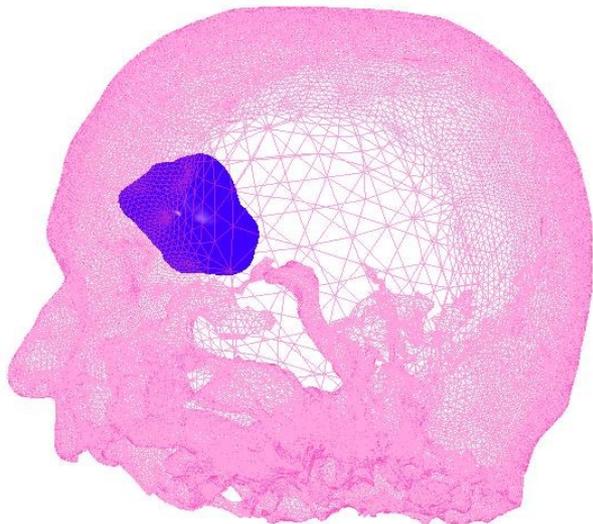
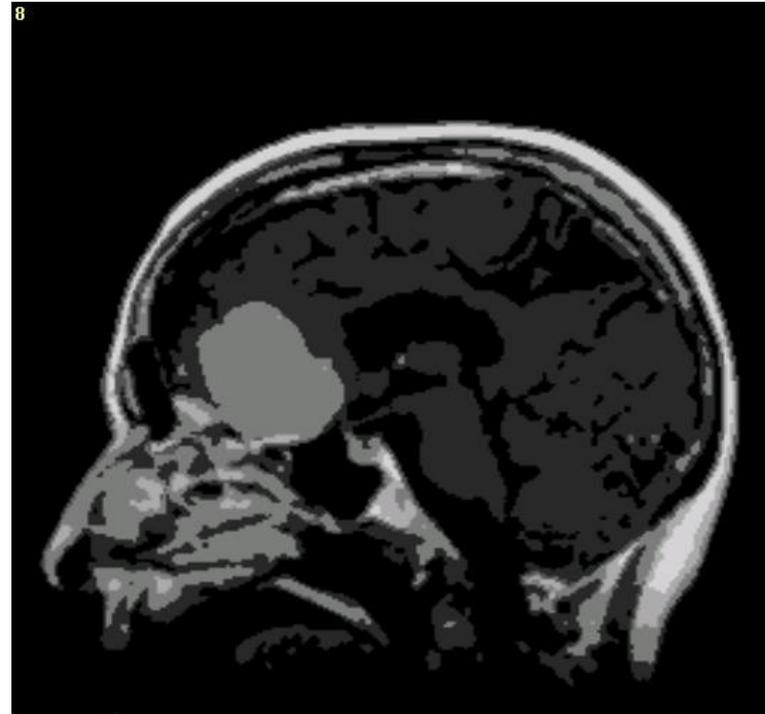
Etiquetage de Composantes Connexes

- On scanne une image, pixel par pixel (de haut en bas et de gauche à droite), pour identifier les régions de pixels connectés
- Critère d'intensité (IC) : le même ensemble de valeurs d'intensité (1 pour une image binaire; un intervalle de valeurs pour une image en niveaux de gris)
- Et si on s'intéresse à des images texturées ?

En synthèse d'image



Et en analyse <http://www.ablesw.com/3d-doctor/3ddoctor.html>



Labeling algorithm: for a pixel P satisfy IC

1. Step 1 (First Scan):

- If all neighbors do not satisfy IC, assign a new label to P
- if only one neighbor satisfy IC, assign its label to P
- if one or more of the neighbors satisfy IC, assign one of the labels to P and make a note of the equivalences.

– Step2 (Resolve equivalence) : The equivalent label pairs are sorted into equivalence classes by a equivalence resolve algorithm (e.g. Floyd-Warshall algorithm) and a unique label is assigned to each class

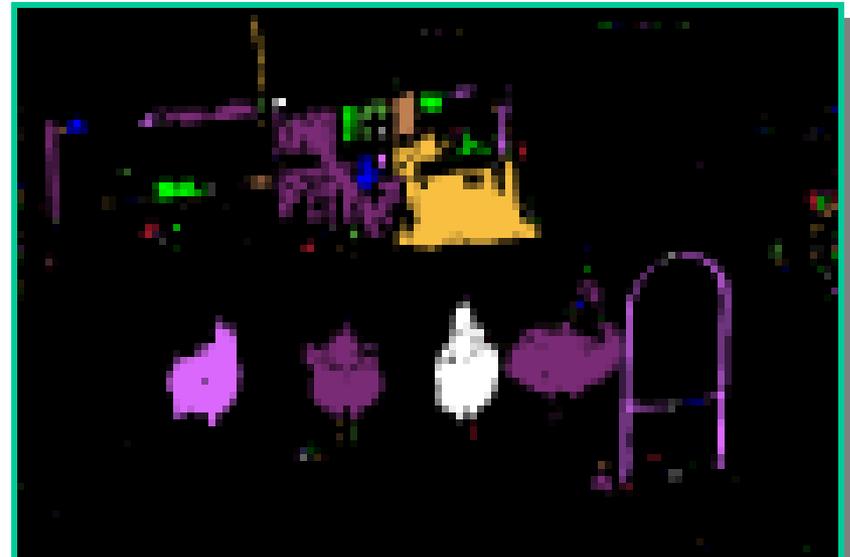
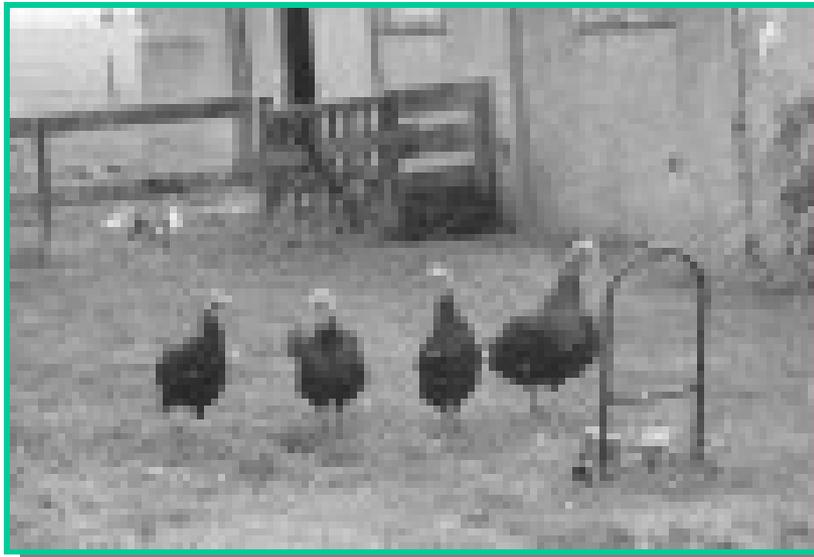
3. Step3 (Second scan) : Each label is replaced by the label assigned to its equivalence classes

En 4-connexité

%banner S	Labels	%banner C	Labels
#####	00000	#####	00000
# #	1 2	# #	1 2
#	1	#	1
#####	33333	#	1
#	4	#	1
# #	5 4	# #	1 3
#####	66666	#####	44444

En retour, des problématiques typiquement topologiques

En 8-connexité



Propriétés des régions

- Region Properties are important features for the region analysis (or measurement) after the regions have been labeled (segmented) -> RF
- Region Properties:
 - ❖ Perimeter and Area
 - ❖ Center, Radius and Diameter
 - ❖ Centroid Moments and Orientation
 - ❖ Extreme Points and Curvature
 - ❖ Intensity Properties

Propriétés des régions

- Perimeter and Area:

- ❖ **Perimeter**: The length of the contour of a connected component (region).

- calculated from the chain-code of the contour, or
- estimated by the number of pixels on the contour.

- ❖ **Area**: The number of unit squares contained.

- Pick's formula: $A(P) = n_i + n_B/2 - 1$

n_i , n_B : number of interior points or of points lying on borders, respectively.

Propriétés des régions

- Center, Radius and Diameter :

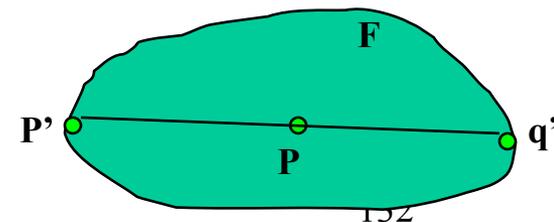
- ❖ Eccentricity of a point P in F is the maximum of distance $d(p,q)$ for all points $q \in F$:

$$ecc(p) = \max d(p,q) \mid q \in F$$

- ❖ **Center**: The set of points P of *least eccentricity*

- ❖ **Radius**: The value of the *least eccentricity*
 $d(p,p')$

- ❖ **Diameter**: The value of the *greatest eccentricity* $d(p',q')$



Propriétés des régions

● Centroid Moments and Orientation:

- ❖ **Centroid:** Given F , a set of n connected pixels (x_i, y_i) , we can define a centroid c as:

$$x_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad y_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

- ❖ **Moments:** The discrete (k, l) -order central moment is defined as:

$$\mu_{k,l} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_c)^k (y_i - y_c)^l$$

- ❖ **Orientation:** Orientation is defined here as an angle θ :

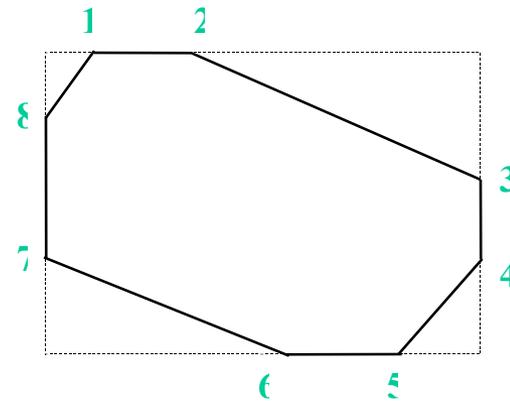
$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\mu_{1,1}}{\mu_{2,0} - \mu_{0,2}} \right)$$

Propriétés des régions

● Extreme Points and Curvature:

❖ Extreme Points:

- Topmost left 5. Bottommost right
- Topmost right 6. Bottommost left
- Rightmost top 7. Leftmost bottom
- Rightmost bottom 8. Leftmost top



❖ Curvature: is a very important region property for measuring contours. -> Hough Transform

● Intensity Properties:

- Gray level mean and variance, intensity-weighted centroid (gravity center) and moments.

Convolution VS. Corrélation

- Soit une image $f(x,y)$ et un noyau $w(a,b)$

- ❖ Convolution:

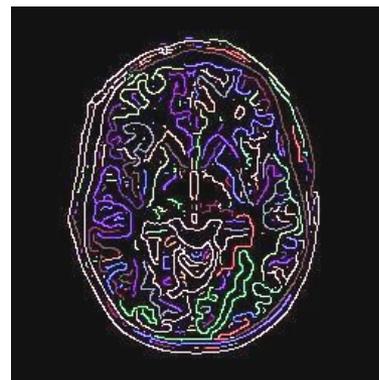
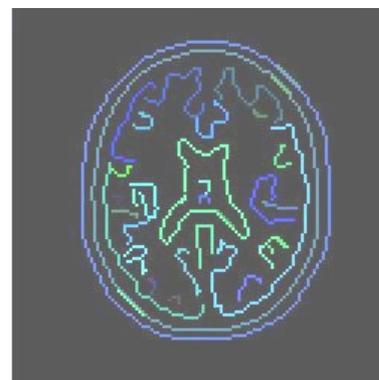
$$f * w = \sum_{\substack{(a,b) \in w \\ (x-a,y-b) \in f}} f(x-a, y-b)w(a,b)$$

- ❖ Corrélation:

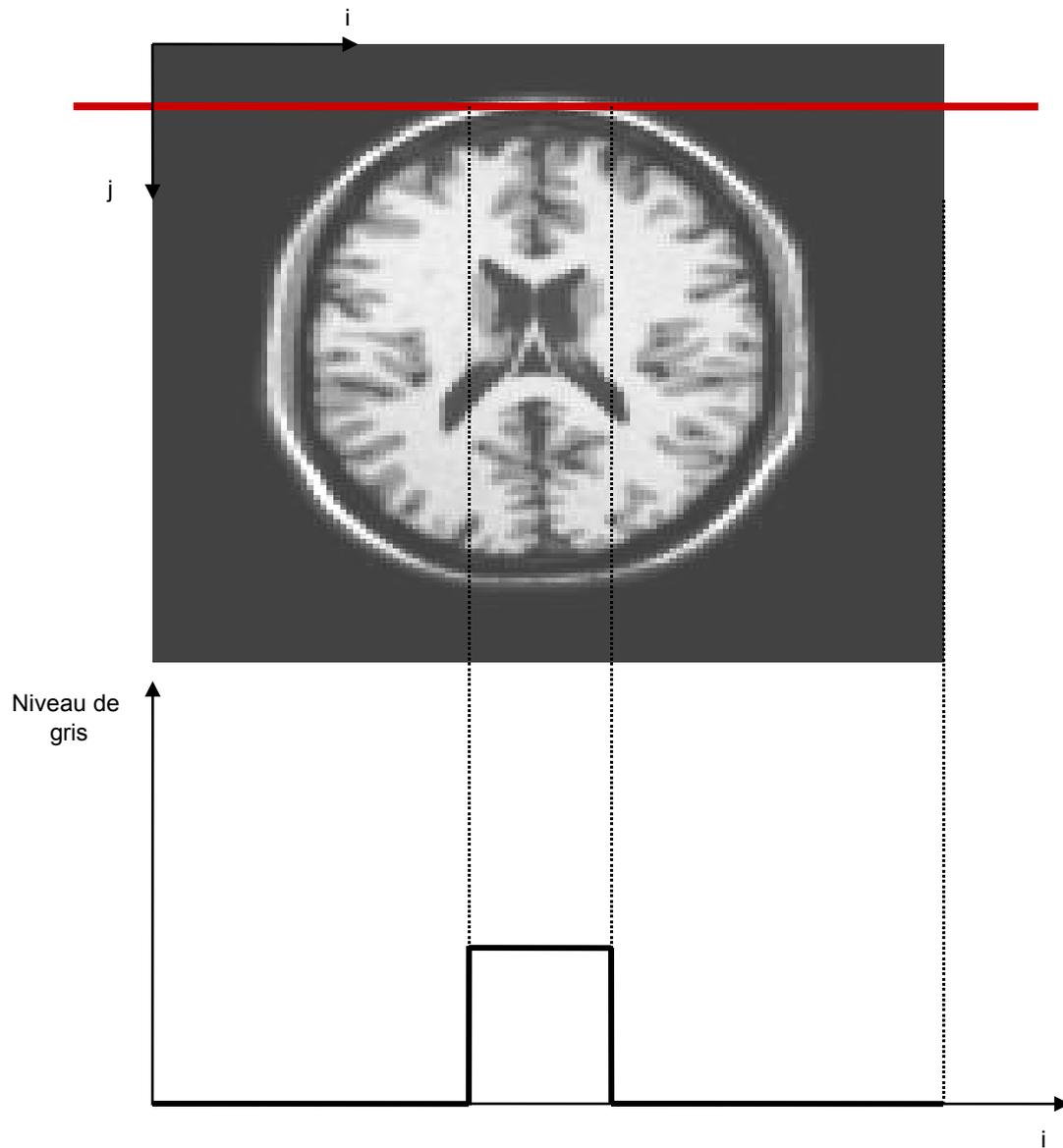
$$f \otimes w = \sum_{\substack{(a,b) \in w \\ (x+a,y+b) \in f}} f(x+a, y+b)w(a,b)$$

- Différence: Index différent.

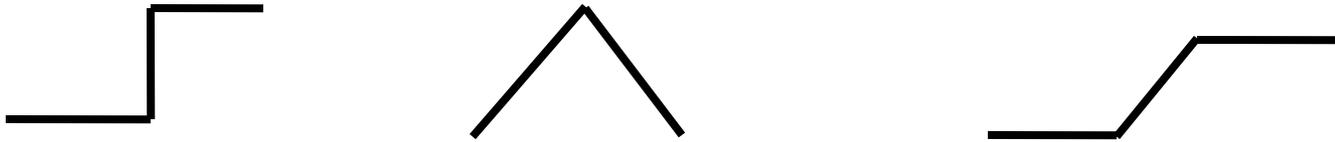
- ❖ Noyau asymétrique : la convolution retourne le noyau.



Notion de profil d'intensité



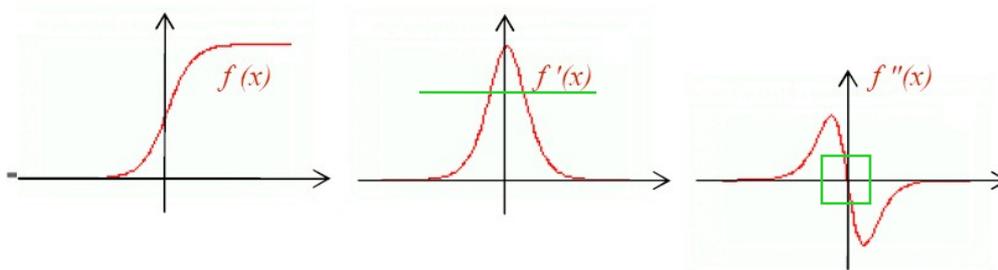
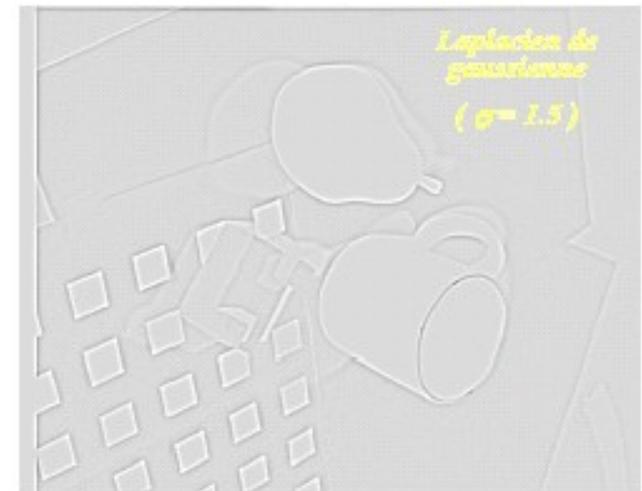
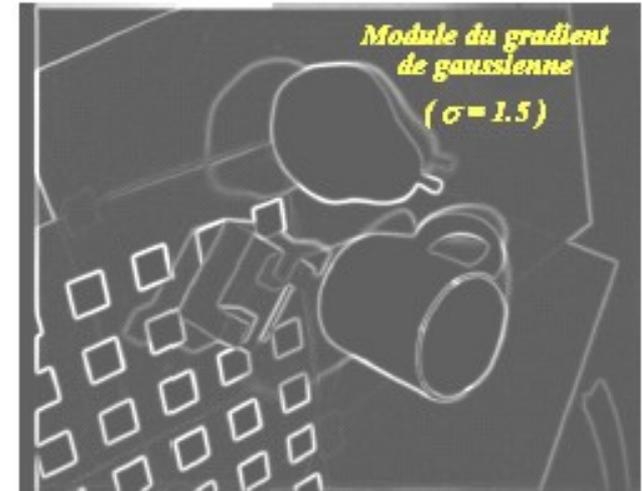
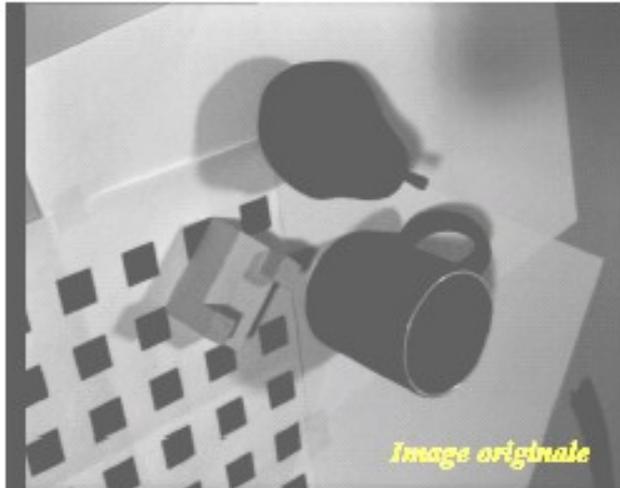
- Approche dérivative :
détection des variations d'intensité locales



-> Image vue comme une fonction continue de deux variables $f(x,y)$, échantillonnée à support borné

-> Utilisation des dérivées bidimensionnelles :
vecteur gradient et scalaire Laplacien

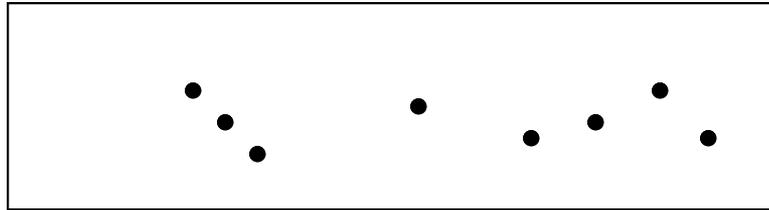
-> Attention : au niveau fréquentiel, **bruit \approx contour !**
en tant que discontinuité



Méthodes dérivatives de détection de contours 2D

- ❖ Détection des maxima locaux de la norme du gradient dans la direction du gradient
- ❖ Détection des passages par 0 du Laplacien

- Problèmes inverses et problèmes mal posés :
Exemple : Différentiation numérique pour la détection de contours
 $f(x) + \varepsilon \sin(\omega x)$
Dérivation très sensible au bruit
-> Régularisation [Tikhonov et Arsenin 1977]



- Un problème est bien posé si [Hadamard 1923] :
 1. Une solution existe
 2. La solution est unique
 3. Dépend continûment des données
- Vision = ensemble de problèmes mal posés !

Rappels :

Dérivée du premier ordre d'une fonction de deux variables $f(x,y)$

= Vecteur Gradient en $P(x,y)$

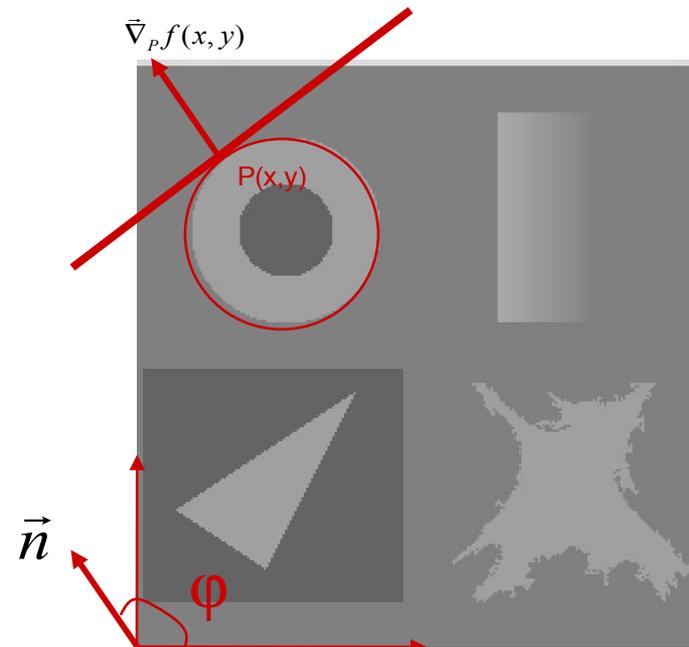
$$\vec{\nabla}_P f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

= Vecteur normal à la courbe de niveau $f(x,y) = f(x_P, y_P) = \text{cste}$, \vec{n}

Orientation du gradient :

$$\varphi = \text{Arc tan} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \right)$$

Orientation du contour : $\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$



Rappels :

Dérivée du second ordre d'une fonction de deux variables $f(x,y)$

= Scalaire Laplacien

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{n}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{n}^{\perp 2}}$$

Dérivées directionnelles :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \vec{\nabla} f(x, y) \cdot \vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{n}^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \varphi \sin \varphi$$

Isotropie de l'opérateur laplacien :

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{n}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{n}^{\perp 2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Procédure générale pour le 1^{er} ordre

- Obtention de deux images $I_m(m,n)$ et $I_n(m,n)$
- 3. Calcul de du gradient en chaque point $\vec{\nabla}_P I(m,n)$
->obtention de deux images $I_{\text{norme}}(m,n)$ et $I_{\text{direction}}(m,n)$
- 4. Extraction des maxima locaux dans la direction du gradient
->obtention de contours fins
- 5. Seuillage par hystérésis (seuils bas et haut)
->élimination des contours parasites

- Opérateurs dérivatifs du 1^{er} ordre : Maximum du module du gradient du signal :
 - Filtres RIF
 1. Prewitt : [1 0 -1]
 2. Sobel et Kirsh
 - Filtres RII
 1. Le filtre récursif de Canny-Deriche
- Opérateurs dérivatifs du 2^{ème} ordre : Passage par zéro de la dérivée seconde du signal :
 1. Laplacien : [1 -2 1]
 2. Opérateur de Marr et Hildreth ou DoG
 3. Opérateur de Huertas et Medioni
 4. Le filtre récursif de Canny-Deriche

Opérateurs dérivatifs du 1^{er} ordre :

Trouver le filtre linéaire de réponse impulsionnel w dérivant un signal -> lien avec l'espace des fréquences de Fourier

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Convolution : Etant donné un signal $f(x)$ et un noyau $h(a)$

$$f * h = \sum_{\substack{a \in h \\ (x-a) \in f}} f(x-a)h(a)$$

D'où le masque de convolution de dérivation dans le cas discret 1D :

$$h = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{qu'on écrit} \quad f * h$$

Par développement en série de Taylor de $f(x+\Delta x)$ et $f(x-\Delta x)$, on trouve une meilleure approximation

$$h = \frac{1}{2\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & \underline{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Convolution : Etant donné une image $f(x,y)$ et un noyau $h(a,b)$

$$f * h = \sum_{\substack{(a,b) \in h \\ (x-a,y-b) \in f}} f(x-a, y-b) h(a,b)$$

D'où les masques de Prewitt ou noyaux de convolution d'un RIF de dérivation dans le cas discret 2D :

$$h_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \underline{0} & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad h_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{0} & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Qui permettent de calculer les dérivées} \\ \bullet \text{ horizontales} \quad I_j[i, j] = h_j * I[i, j] \\ \bullet \text{ verticales} \quad I_i[i, j] = h_i * I[i, j] \end{array} \right.$$

Convolution : Etant donnés une image $I[i,j]$ et un noyau $h[m,n]$

$$h * I[i, j] = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N I[i-m, j-n] h[m, n]$$

- Discrete Convolution includes three steps:
 1. **Position the center of the kernel at the first pixel of an image and flip the kernel.**
 2. **Multiply and sum.**
 - **Slide to next pixel.**

Repeat steps 2 and 3 until the whole image is processed

- Demos:



*

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1



Sobel
(1980)

Masque moyenneur ou noyau de convolution d'un RIF de lissage dans le cas discret 2D :

$$h = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

h_j peut être vu comme réponse impulsionnelle infinie d'un filtre séparable comprenant un lissage suivant la direction verticale et une direction suivant la direction horizontale

$$h_j = [1 \ 1 \ 1]^T \bullet [1 \ 0 \ -1]$$

$$h_j = h_{L_i} \bullet h_{D_j}$$

$$h_j * I[i, j] = \sum_{m=-M}^M h_{L_i}[m] \sum_{n=-N}^N h_{D_j}[n] I[i-m, j-n]$$

Quid d'un RII ?

Soit $I(x)$ un signal monodimensionnel représentant un saut d'amplitude A , noyé dans un bruit Gaussien $n(x)$ de moyenne nulle et de variance n_0^2 :

$$I(x) = Au_{-1}(x) + n(x) \quad (52)$$

où u_{-1} désigne la fonction de Heaviside.

Soit $\Theta(x_0)$, la sortie au point x_0 de la convolution du signal $I(x)$ avec un opérateur de détection $f(x)$:

$$\Theta(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x)f(x_0 - x)dx \quad (53)$$

Le problème posé est de trouver $f(x)$ tel que $\Theta(x_0)$ soit maximum sous les 3 contraintes suivantes :

1. **Bonne détection** : Ce critère revient à chercher $f(x)$ antisymétrique et tel que le rapport signal sur bruit Σ soit maximum :

$$\Sigma = \frac{A \int_{-\infty}^0 f(x) dx}{n_0 \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx}} \quad (54)$$

2. **Bonne localisation** : Ce critère correspond à la minimisation de la variance σ^2 de la position des passages par zéro et revient à maximiser la localisation Λ définie comme l'inverse de σ^2 :

$$\Lambda = \frac{A |f'(0)|}{n_0 \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx}} \quad (55)$$

3. **Non Multiplicité des réponses**: Ce critère correspond à la limitation du nombre de maxima locaux détectés en réponse à un seul contour. La distance moyenne entre les maxima locaux, notée x_{max} est alors contrainte à l'égalité suivante :

$$x_{max} = 2\pi \left(\sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x) dx}} \right) \quad (56)$$

Trouver $f(x)$ qui maximise le produit $\Sigma\Lambda$ sous la contrainte que le 3ème critère soit fixé à une constante k revient alors à trouver la solution de l'équation différentielle suivante :

$$2f(x) - 2\lambda_1 f''(x) + 2\lambda_2 f''''(x) + \lambda_3 = 0 \quad (57)$$

qui admet comme solution générale :

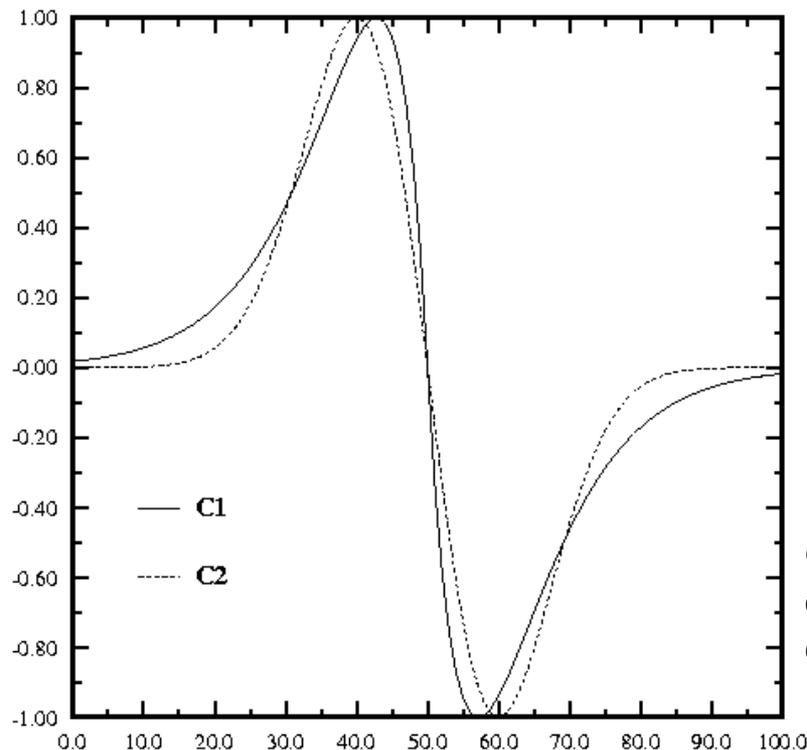
$$f(x) = a_1 e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega \cdot x) + a_2 e^{\alpha \cdot x} \cos(\omega \cdot x) + a_3 e^{-\alpha \cdot x} \sin(\omega \cdot x) + a_4 e^{-\alpha \cdot x} \cos(\omega \cdot x) \quad (58)$$

Cherchant l'opérateur $f(x)$ sous forme de filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) définie sur l'intervalle $[-W, +W]$ et présentant une pente S à l'origine, Canny a imposé les conditions aux limites suivantes :

$$f(0) = 0 \quad f(W) = 0 \quad f'(0) = S \quad f'(W) = 0 \quad (59)$$

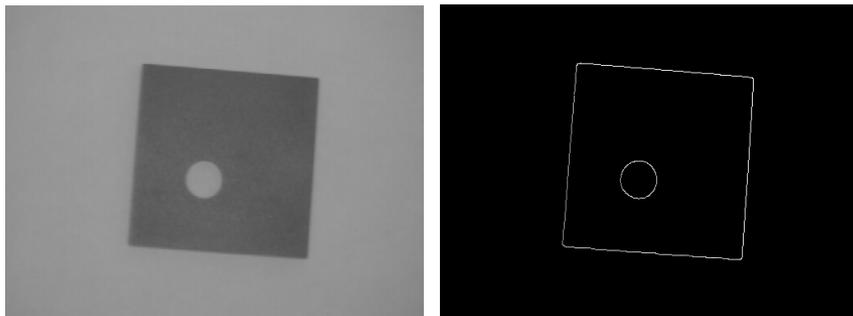
Utilisant une optimisation numérique sous contrainte, Canny trouva que l'opérateur le plus performant correspondait à un indice de performance $\Sigma\Lambda = 1.12$.

L'opérateur ne présentant pas de simplicité au niveau de sa mise en œuvre, Il l'approxima au vu de sa forme par l'opérateur première dérivée d'une Gaussienne qui présente un indice de performance $\Sigma\Lambda = .92$ et $k = .51$ dégradée de 20%



$$G(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Opérateurs de dérivation
de Canny C2(Gaussienne)
et Deriche C1 (Exponentielle)



$\sigma=1.0$ et $T_{\text{bas}}=1$, $T_{\text{haut}}=255$



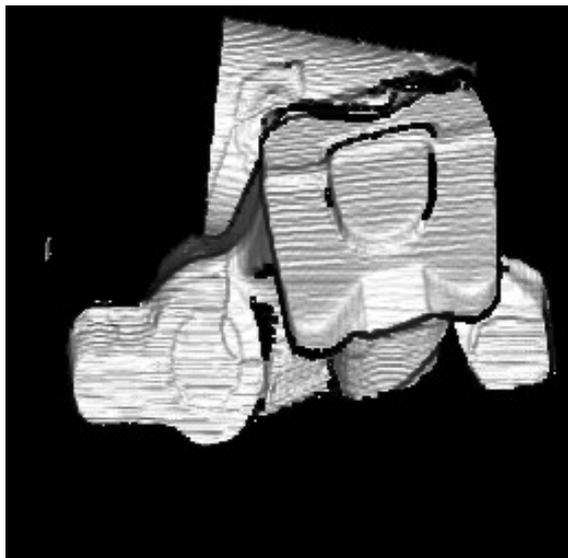
$\sigma=1.0$ et $T_{\text{bas}}=1$, $T_{\text{haut}}=128$



$\sigma=2.0$ et $T_{\text{bas}}=1$, $T_{\text{haut}}=255$

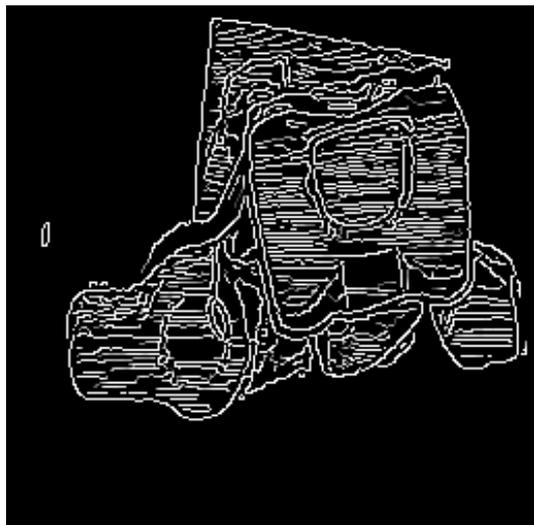
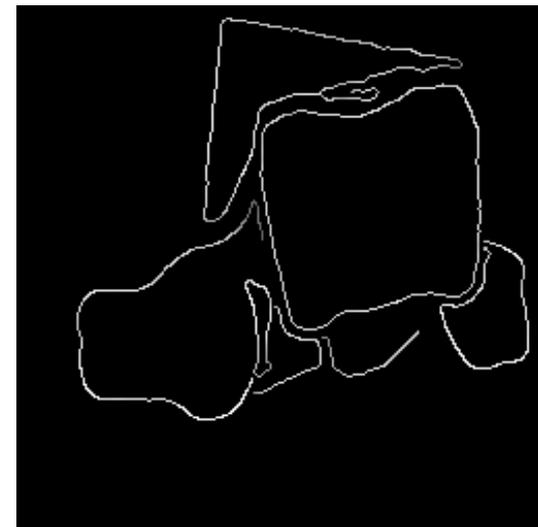


Problème des jonctions Y

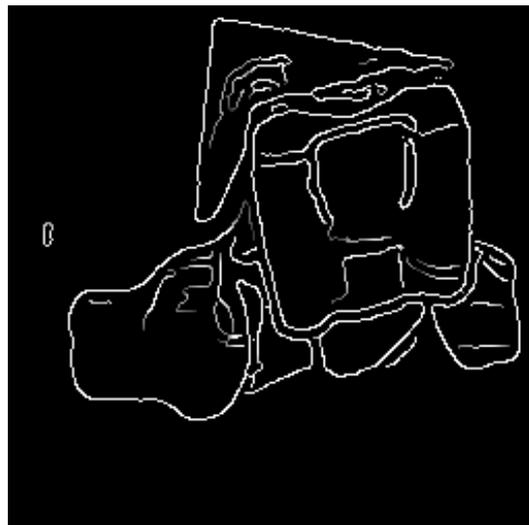


Scale-down by 0.25 before
edge extraction

$\sigma=1.8$ et $T_{\text{bas}}=1$, $T_{\text{haut}}=200$



$\sigma=1.0$ et $T_{\text{bas}}=1$, $T_{\text{haut}}=255$



$\sigma=1.8$ et $T_{\text{bas}}=1$, $T_{\text{haut}}=255$

Deriche

L'approche développée par Deriche [7] a consisté en la recherche de l'opérateur optimal sous forme de filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII). Il en résulte une équation différentielle admettant comme solution l'opérateur suivant :

$$f(x) = \frac{S}{\omega} e^{-\alpha|x|} \sin(\omega x) \quad (60)$$

Évaluant les différentes intégrales intervenant dans le calcul des indices de performance de cet opérateur, on obtient les résultats suivants :

$$\Lambda = \sqrt{2\alpha} \quad \Sigma = \sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}} \quad (61)$$

$$\Sigma\Lambda = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \quad k = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \omega^2}{5\alpha^2 + \omega^2}} \quad (62)$$

En posant $\alpha = m\omega$, on obtient les 3 cas suivants :

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{1} & m \gg 1 & \Lambda = \sqrt{2\alpha} & \Sigma = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} & \Sigma\Lambda = 2 & k = .44 \\ \mathbf{2} & m = 1 & \Lambda = \sqrt{2\alpha} & \Sigma = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} & \Sigma\Lambda = \sqrt{2} & k = .58 \\ \mathbf{3} & m = \sqrt{3} & \Lambda = \sqrt{2\alpha} & \Sigma = \sqrt{\frac{3}{2\alpha}} & \Sigma\Lambda = \sqrt{3} & k = .5 \end{array} \quad (63)$$

Le cas 3 montre que pour une valeur identique de k , l'indice de performance de l'opérateur Deriche est près de 90% meilleure que la première dérivée d'une Gaussienne.

Le cas 1 ($\omega \rightarrow 0$) est optimal, ce qui correspond au filtre de RII

$$f(x) = Sxe^{-\alpha|x|}$$

Comment l'implémenter sous la forme d'un RII ?

cas 1D

On développe dans cette partie la procédure pour implémenter de manière récursive l'opérateur de Deriche ainsi que son intégral qui va servir comme opérateur de lissage dans la version 2D.

Une mise en œuvre récursive du filtre optimal $f(x)$ peut être obtenue en appliquant les techniques de la transformée en Z. Soit $f(n)$ les échantillons de $f(x)$ et $F(Z)$ la transformée en Z correspondante :

$$F(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)Z^{-n} \quad (68)$$

La séquence $f(n)$ étant non causale, une étape préliminaire nécessaire est sa transformation en une somme de 2 séquences causales. Pour cela, on réécrit $f(n)$ sous la forme suivante d'une somme de 2 séquences causales $f_-(n)$ et $f_+(n)$ telles que :

$$f(n) = f_-(n) + f_+(n) \quad (69)$$

$$f_-(n) = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ S n e^{\alpha n} & n < 0 \end{cases} \quad f_+(n) = \begin{cases} S n e^{-\alpha n} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (70)$$

Utilisant la transformée en Z , on obtient :

$$F(Z) = F_-(Z) + F_+(Z^{-1}) \quad (71)$$

avec

$$F_+(Z^{-1}) = \frac{aZ^{-1}}{1+b_1Z^{-1}+b_2Z^{-2}} \quad F_-(Z) = \frac{-aZ}{1+b_1Z+b_2Z^2} \quad (72)$$

avec

$$a = S e^{-\alpha} \quad b_1 = -2e^{-\alpha} \quad b_2 = e^{-2\alpha} \quad (73)$$

Ces deux transformées en Z correspondent à deux fonctions de transfert de filtres récurrents stables de second ordre.

Le premier opérant de gauche à droite F_+ et le second de la droite vers la gauche F_- .

En particulier, la réponse à $x(m)$ comme entrée d'un système ayant $f(n)$ comme réponse impulsionnelle peut être obtenue de manière récursive suivant le schéma suivant :

$$y_1(n) = x(n-1) + 2e^{-\alpha}y_1(n-1) - e^{-2\alpha}y_1(n-2) \text{ pour } n=1,\dots,M \quad (74)$$

$$y_2(n) = x(n+1) + 2e^{-\alpha}y_2(n+1) - e^{-2\alpha}y_2(n+2) \text{ pour } n=M,\dots,1 \quad (75)$$

$$y(n) = ke^{-\alpha}[y_1(n) - y_2(n)] \text{ pour } n=1,\dots,M \quad (76)$$

la constante S peut être fixée par la contrainte de normalisation suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = - \sum_{n=-\infty}^0 f(n) = -1 \quad (77)$$

ce qui donne :

$$S = -\frac{(1 - e^{-\alpha})^2}{e^{-\alpha}} \quad (78)$$

Équations récursives :

- Nombre d'opérations requis par point très faible : 5
- Nombre d'opérations requis indépendant de la résolution à laquelle les contours doivent être détectés alors que la forme du filtre (α) peut changer
 - ❑ Implémentation RIF pour $\alpha = 0.5$ -> Masque $2N+1$ de taille 57
 - ❑ Implémentation RIF pour $\alpha = 0.25$ -> Masque $2N+1$ de taille 105
- Pas d'effet de troncature du RIF

Noyau de lissage possible : primitive du noyau de dérivation f

$$h(x) = k(\alpha|x|+1)e^{-\alpha|x|}$$

La sortie $y(m)$ résultat de la convolution de la séquence $x(m)$ avec la réponse impulsionnelle $h(n)$ s'obtient alors comme suit :

$$y_1(n) = k[x(n) + e^{-\alpha}(\alpha - 1)x(n - 1)] + 2e^{-\alpha}y_1(n - 1) - e^{-2\alpha}y_1(n - 2) \text{ pour } n=1, \dots, M \quad (83)$$

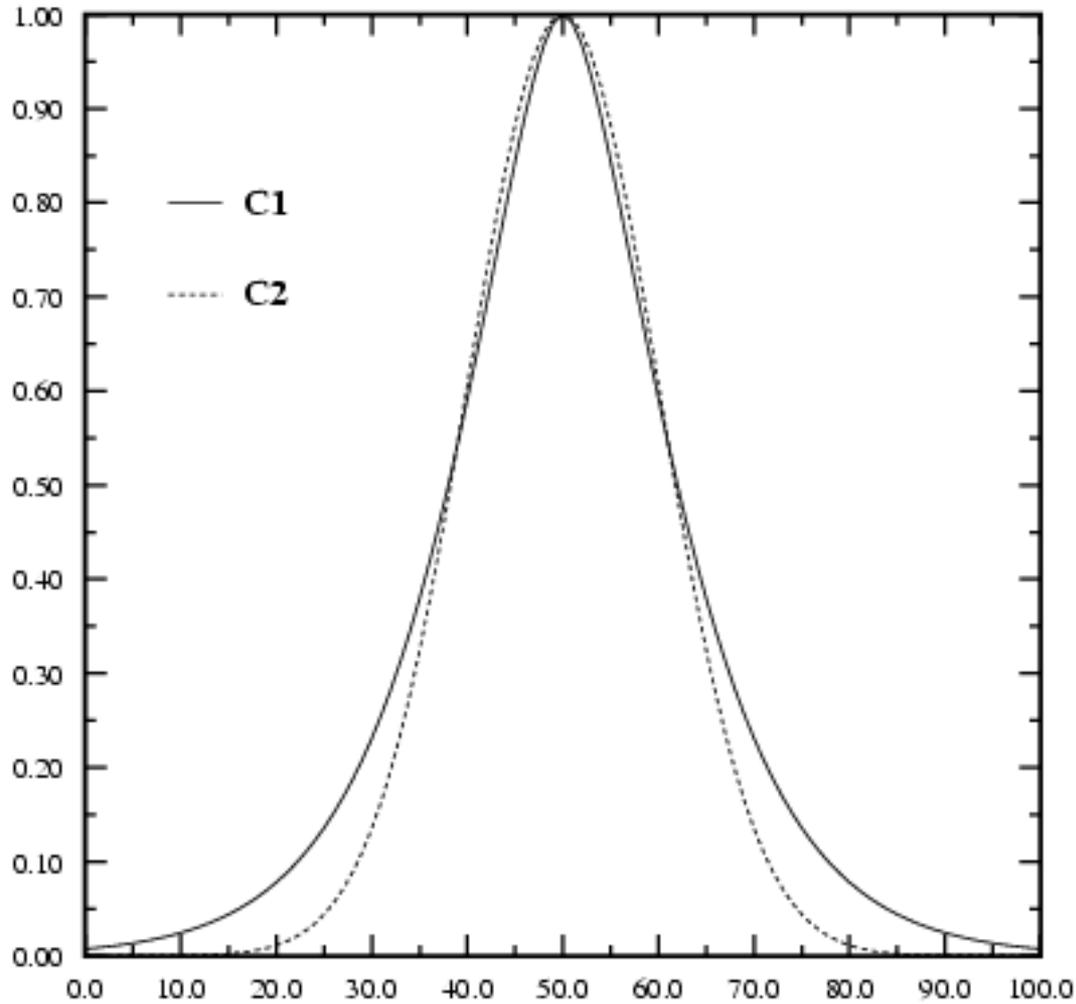
$$y_2(n) = k[e^{-\alpha}(\alpha + 1)x(n + 1) - e^{-2\alpha}x(n + 2)] + 2e^{-\alpha}y_2(n + 1) - e^{-2\alpha}y_2(n + 2) \text{ pour } n=M, \dots, 1 \quad (84)$$

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) \text{ pour } n=1, \dots, M \quad (85)$$

La constante k est fixée par la contrainte de normalisation suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n) = 1 \quad (86)$$

On obtient alors :
$$k = \frac{(1 - e^{-\alpha})^2}{1 + 2\alpha e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}}$$



Opérateurs de lissage
de Canny C2(Gaussienne)
et Deriche C1 (Exponentielle)

cas 2D

On présente dans cette partie, la procédure de généralisation au cas 2D de l'opérateur de détection de Deriche [7], [4]. Pour cela, on crée pour la direction en x (resp. y) un masque 2D noté SS_x (resp. SS_y) produit du détecteur aligné en x (resp. y) avec un opérateur de projection parallèle à la direction en y (resp x). Une implémentation totalement récursive en résulte si on choisit comme opérateur de lissage l'opérateur $h(x)$ présenté dans la section précédente.

$$SS_x(m, n) = k_1 m e^{-\alpha \cdot |m|} \cdot k_2 (\alpha |n| + 1) e^{-\alpha \cdot |n|} \quad (88)$$

$$SS_y(m, n) = k_2 (\alpha |m| + 1) e^{-\alpha \cdot |m|} \cdot k_1 n e^{-\alpha \cdot |n|} \quad (89)$$

On note par SS l'opérateur de lissage 2D correspondant à ces 2 gradients directionnels :

$$SS(m, n) = k_2 (\alpha |m| + 1) e^{-\alpha \cdot |m|} k_2 (\alpha |n| + 1) e^{-\alpha \cdot |n|} \quad (90)$$

Ces trois masques séparables peuvent être très efficacement mis en œuvre de manière récursive de la manière suivante :

Dans une première phase, un filtrage récursif est appliqué à chaque ligne de l'image $x(m, n)$ à traiter comme suit:

$$y_1(m, n) = a_1x(m, n) + a_2x(m, n - 1) + b_1y_1(m, n - 1) + b_2y_1(m, n - 2)$$

pour $n=1, \dots, N$ et $m=1, \dots, M$ (91)

$$y_2(m, n) = a_3x(m, n + 1) + a_4x(m, n + 2) + b_1y_2(m, n + 1) + b_2y_2(m, n + 2)$$

pour $n=N, \dots, 1$ et pour $m=1, \dots, M$ (92)

$$r(m, n) = c_1(y_1(m, n) + y_2(m, n)) \text{ pour } n=1, \dots, N \text{ et pour } m=1, \dots, M \quad (93)$$

Une seconde phase applique alors au résultat $r(m, n)$ le second filtre au niveau de chaque colonne pour obtenir le résultat final $y(m, n)$.

$$y_1(m, n) = a_5 r(m, n) + a_6 r(m - 1, n) + b_1 y_1(m - 1, n) + b_2 y_1(m - 2, n) \\ \text{pour } m=1, \dots, M \text{ et pour } n=1, \dots, N \quad (94)$$

$$y_2(m, n) = a_7 r(m + 1, n) + a_8 r(m + 2, n) + b_1 y_2(m + 1, n) + b_2 y_2(m + 2, n) \\ \text{pour } m=M, \dots, 1 \text{ et pour } n=1, \dots, N \quad (95)$$

$$y(m, n) = c_2 (y_1(m, n) + y_2(m, n)) \text{ pour } n=1, \dots, N \text{ et pour } m=1, \dots, M \quad (96)$$

- Lissage de l'image

$$a_1 = a_5 = k; a_2 = a_6 = ke^{-\alpha}(\alpha - 1);$$

$$a_3 = a_7 = ke^{-\alpha}(\alpha + 1); a_4 = a_8 = -ke^{-2\alpha}; c_1 = c_2 = 1;$$

- Dérivation en x de l'image

$$a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = -1; a_4 = 0; c_1 = -(1 - e^{-\alpha})^2;$$

$$a_5 = k; a_6 = ke^{-\alpha}(\alpha - 1); a_7 = ke^{-\alpha}(\alpha + 1); a_8 = -ke^{-2\alpha}; c_2 = 1;$$

- Dérivation en y de l'image : $a_i \leftrightarrow a_{i+4}$ et $c_1 \leftrightarrow c_2$

Avec
$$k = \frac{(1 - e^{-\alpha})^2}{1 + 2\alpha e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}}; b_1 = 2e^{-\alpha}; b_2 = -e^{-2\alpha}$$

- RII pour un Laplacien

$$LL(m, n) = e^{-\alpha|m|} \cdot e^{-\alpha|n|} - k\alpha |m| e^{-\alpha|m|} \cdot k\alpha |n| e^{-\alpha|n|}$$

$$k = \frac{1 - e^{-2\alpha}}{2\alpha e^{-\alpha}}$$

- Laplacien de l'image =

Soustraction entre les deux images r_1 et r_2



- Laplacien à n'importe quelle résolution spécifiée par le paramètre α avec 14 opérations par point de sortie

- Utiliser la structure récursive avec les coefficients suivants pour obtenir $r1(m, n)$:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1; a_2 = 0; a_3 = e^{-\alpha}; a_4 = 0; \\ k_0 &= 1; c_1 = 1, b_1 = 2e^{-\alpha}; b_2 = -e^{-2\alpha} \end{aligned} \quad (103)$$

$$a_5 = 1; a_6 = 0; a_7 = e^{-\alpha}; a_8 = 0; c_2 = 1; b_1 = 2e^{-\alpha}; b_2 = -e^{-2\alpha} \quad (104)$$

- Utiliser la structure récursive avec le jeu de paramètres suivant pour obtenir $r2(m, n)$:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0; a_2 = 1; a_3 = 1; a_4 = 0; \\ c_1 &= \frac{1 - e^{-2\alpha}}{2}; b_1 = 2 * e^{-\alpha}; b_2 = -e^{-2\alpha} \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} a_5 &= 0; a_6 = 1; a_7 = 1; a_8 = 0; \\ c_2 &= \frac{1 - e^{-2\alpha}}{2}; b_1 = 2 * e^{-\alpha}; b_2 = -e^{-2\alpha} \end{aligned} \quad (106)$$

seuillage par hystérésis

Ce seuillage présenté pour la première fois par Canny est basé sur l'utilisation de 2 seuils. La procédure peut être décrite de 2 manière différentes :

1. Seuiller toute l'image des maxima locaux par le seuil bas
2. Ne valider que les ensembles connexes de points présentant au moins un point dont la norme du gradient est supérieur au seuil haut.

ou

1. Seuiller toute l'image des maxima locaux par le seuil haut.
2. Valider tous les pixels qui sont connexes aux points détectés et qui possèdent une norme du gradient supérieur au seuil bas.

Le grand avantage de cette procédure de seuillage est qu'elle permet d'obtenir plus d'ensembles de points connexes, ce qui facilite grandement les étapes de chaînage et d'approximation prévues généralement en amont de cette chaîne.





Maxima locaux



Contours obtenus après seuillage par hystérésis.



Maxima du gradient
et
seuillage par hystérésis



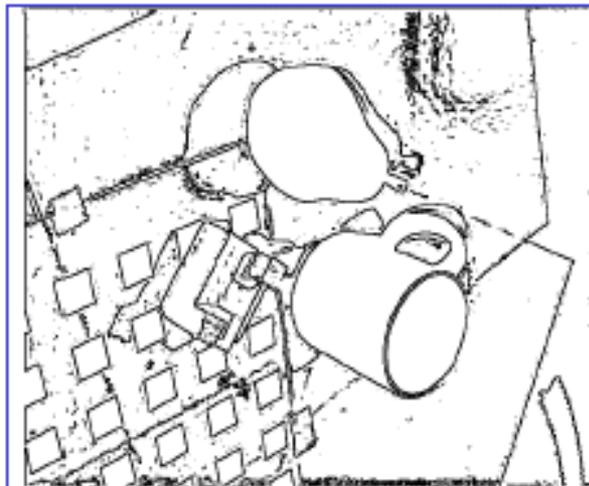
Passage par zéro du Laplacien
et
seuillage par hystérésis



Passages par zéro avec $\alpha=1$



Passages par zéro avec $\alpha=.25$

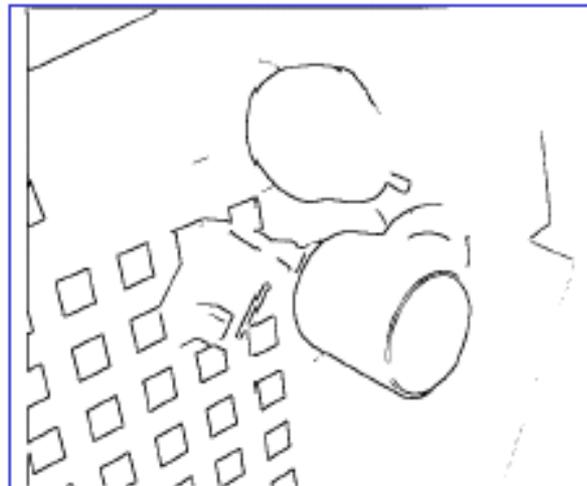


Passage par zéro du laplacien avec seuillage du module du gradient ($s = 1$) :

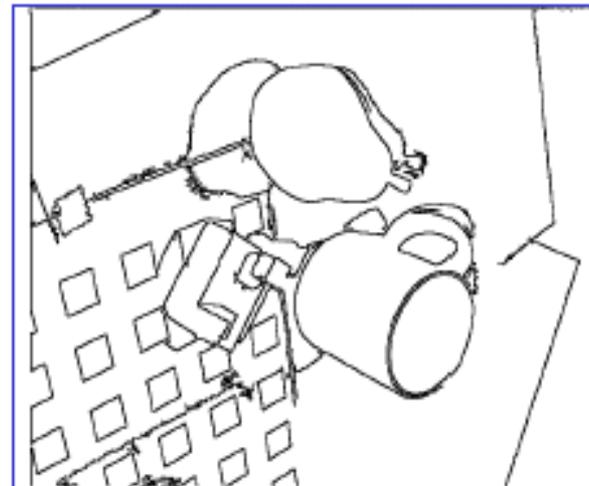
$$C_s(I) = \delta_B(\Delta_+ I) \cap \delta_B(\Delta_- I) \cap \sigma_s(\|\nabla I\|)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_+ I = \{(x, y) / \Delta I(x, y) > 0\} \\ \Delta_- I = \{(x, y) / \Delta I(x, y) < 0\} \\ \delta_B(X) = \{z - b / z \in X; b \in B\} \\ \quad \text{(dilatation morphologique par la} \\ \quad \text{boule élémentaire } B) \\ \sigma_s(X) = \{(x, y) / X(x, y) > s\} \end{cases}$$



Idem, avec ($s = 8$).



Idem, avec seuillage par hystérésis du module du gradient ($s_1 = 1, s_2 = 8$):

$$C_{s_1}^{s_2}(I) = R_{C_{s_1}(I)}(C_{s_2}(I))$$

Reconstruction géodésique du seuillage haut dans le seuillage bas.

[Marr – Hildreth 80]

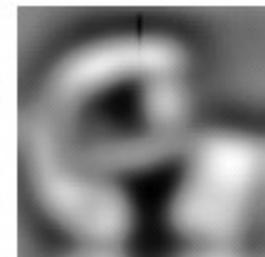
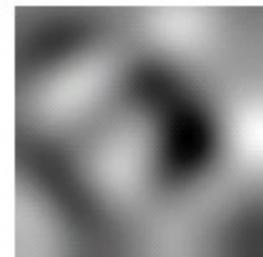
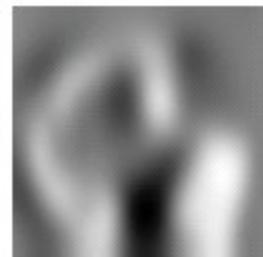
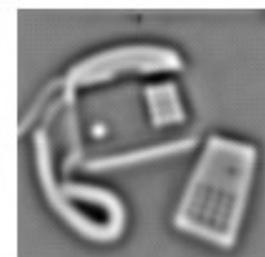
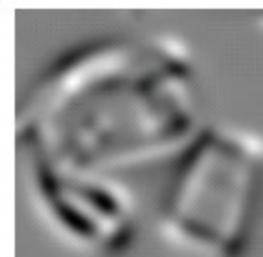
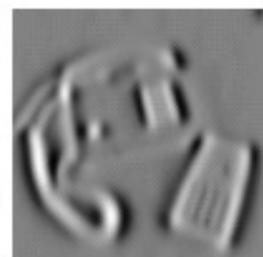
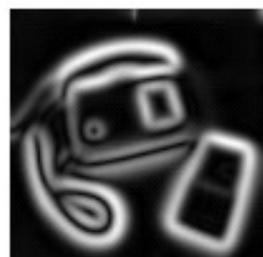
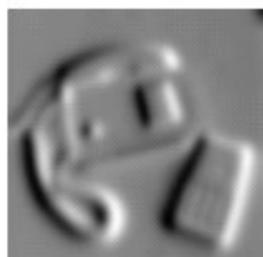
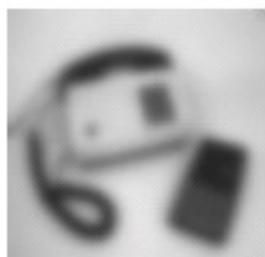
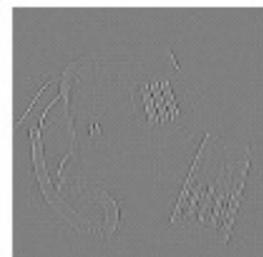
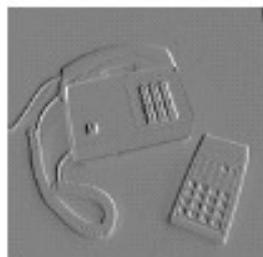
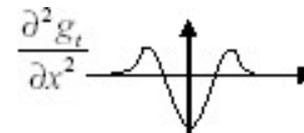
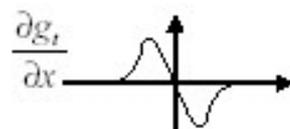
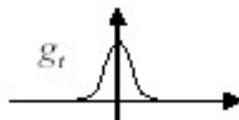


Passage par zéro du laplacien (contours)



Détection de points d'intérêt (ou points anguleux)

$$\partial^n (I * g_t) = I * \partial^n g_t$$



échelle
↓

I

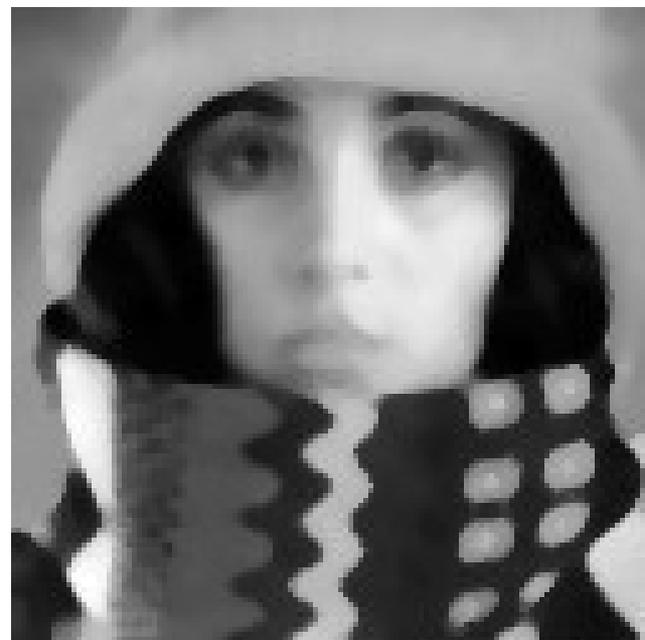
$$\frac{\partial I}{\partial x}$$

$$\|\nabla I\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2}$$

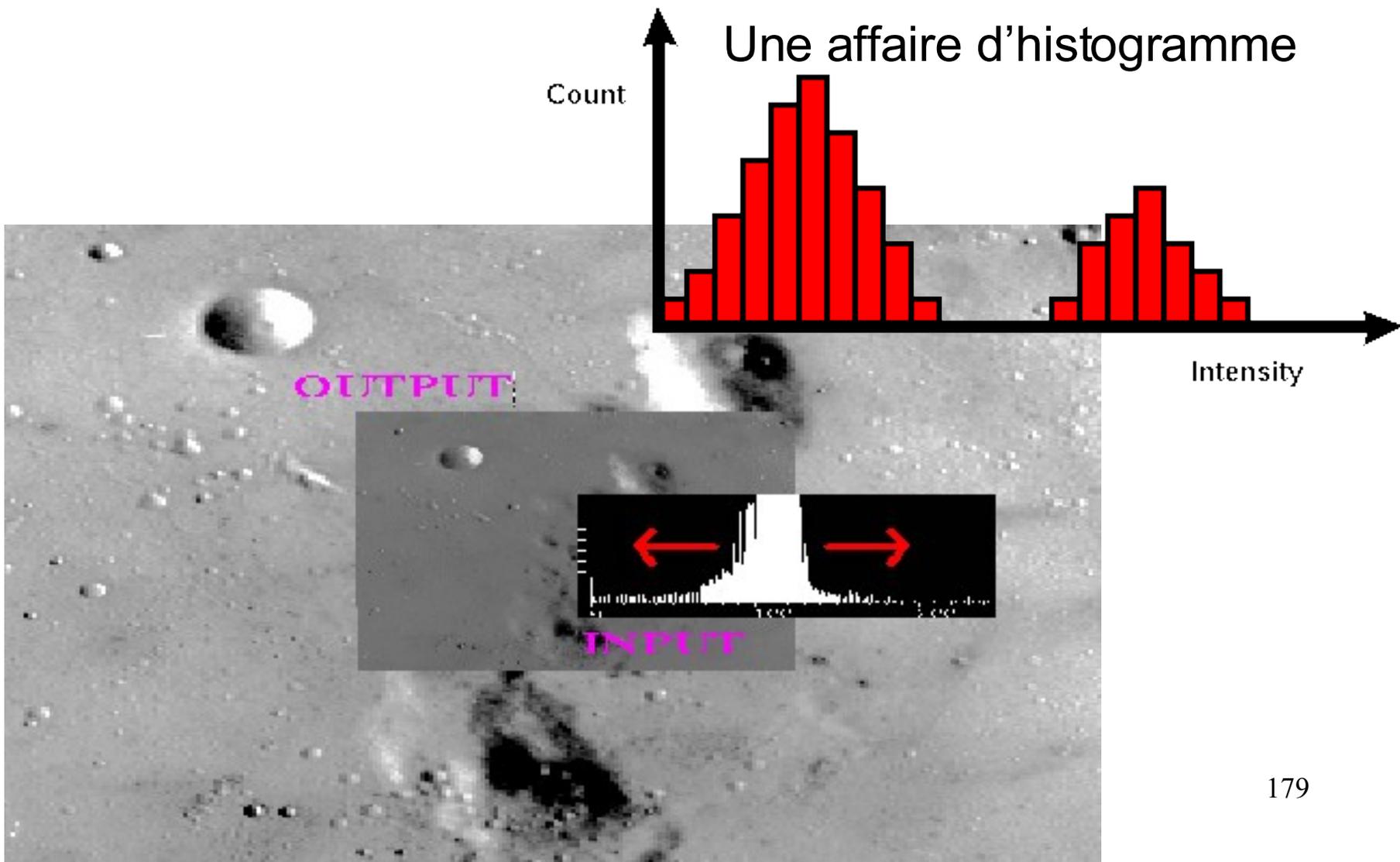
$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}$$

$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$



Modification d'histogramme



Expansion Dynamique

$$A[i, j] \rightarrow B[i, j]$$

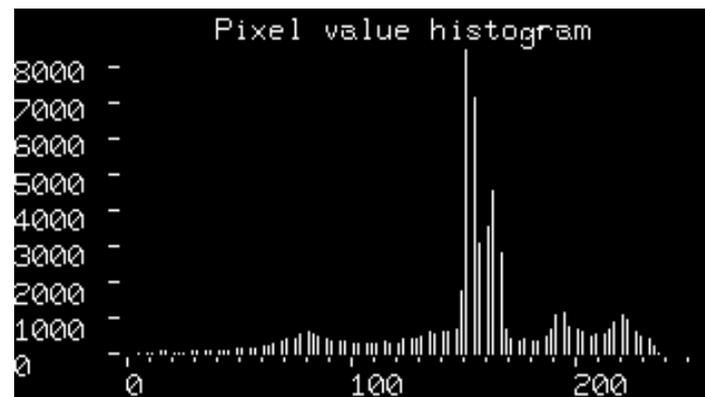
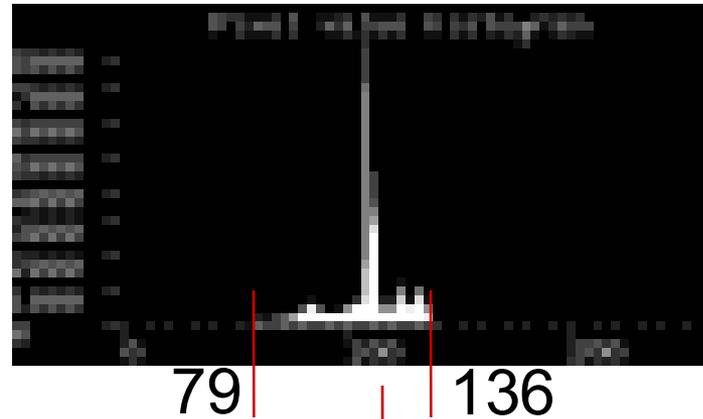
- Les intensités de l'image A varient dans $[a_{\min}, a_{\max}]$
- Trouver B telle que ses intensités utilisent la palette des intensités possible

Trouver T :

$$a \in [a_{\min}, a_{\max}] \rightarrow b \in [b_{\min}, b_{\max}] \quad / \quad b = T(a) = \alpha + \beta a$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{b_{\min} a_{\max} - b_{\max} a_{\min}}{a_{\max} - a_{\min}} \\ \text{et } \beta = \frac{b_{\max} - b_{\min}}{a_{\max} - a_{\min}} \end{array} \right.$$

Expansion Dynamique

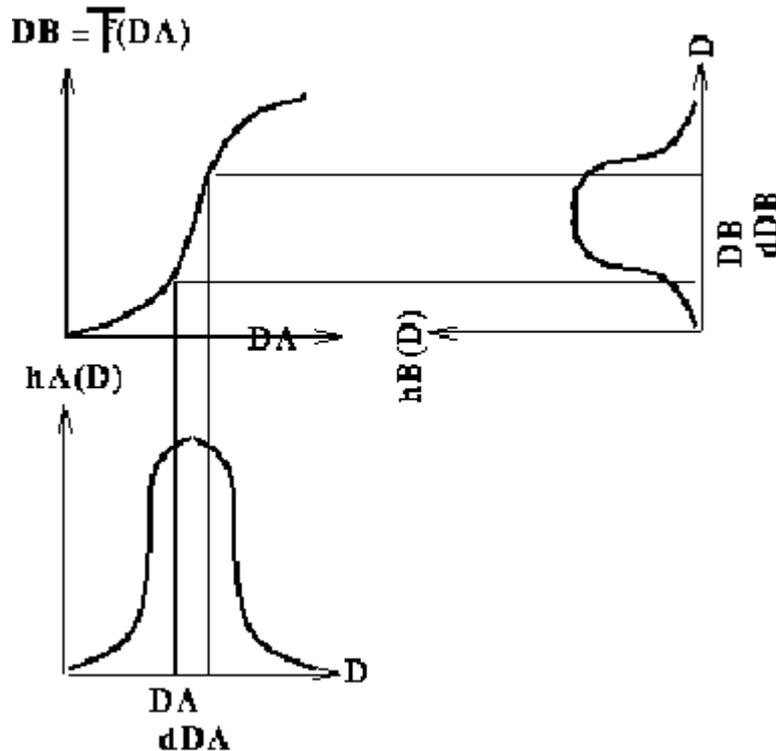


Egalisation d'histogramme $A[i, j] \rightarrow B[i, j]$

• Aplatir l'histogramme des niveaux de gris, l'image $A[i, j]$ étant modélisée comme un ensemble de réalisation d'une variable aléatoire A admettant comme densité de probabilité $h(a)$ non nulle sur $[a_{\min}, a_{\max}]$ et une fonction de répartition $H(a)$

• densité de probabilité $h(a) = \text{histogramme de l'image } A$
-> $h(a) = p(A[i, j]=a)$

• fonction de répartition $H(a) = \text{histogramme cumulé normalisé}$
-> $F(a) = P(A[i, j]<a)$



- Condition sur la variable aléatoire $B = T(A)$: sa d.p $g(b)$ doit être uniformément répartie dans l'intervalle $[b_{\min}, b_{\max}]$

$$g(b) \begin{cases} = \frac{f(a)}{T'(a)} = \frac{1}{b_{\max} - b_{\min}} & \text{pour } b_{\min} < b < b_{\max} \\ = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Egalisation d'histogramme

$$A[i, j] \rightarrow B[i, j]$$

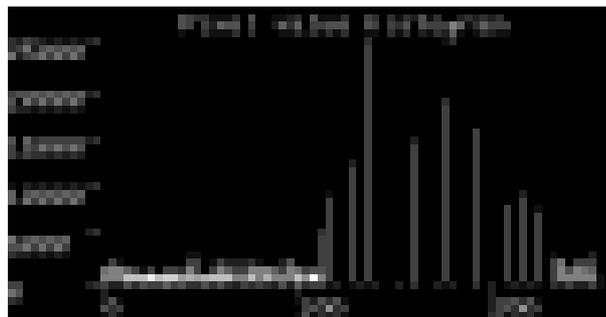
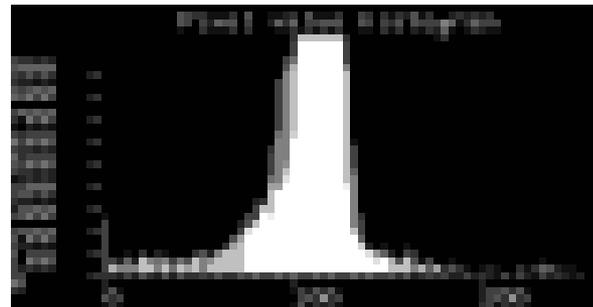
$$T'(a) = (b_{\max} - b_{\min}) f(a)$$

$$\text{soit } b = T(a) = (b_{\max} - b_{\min}) F(a) + b_{\min}$$

$$\text{donc } db = (b_{\max} - b_{\min}) f(a) da$$

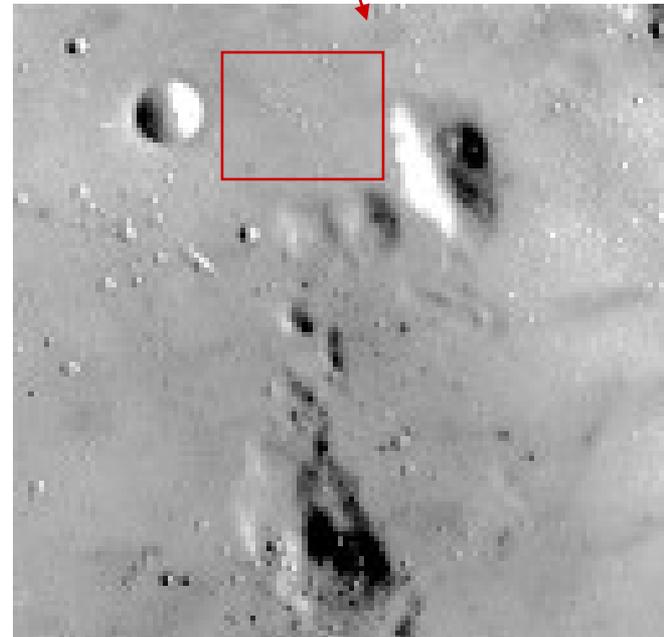
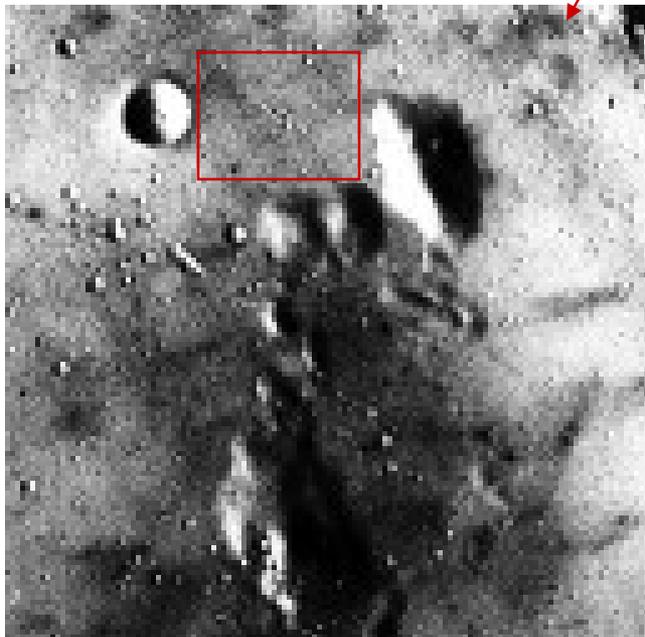
-> Amplification des fluctuations dans les zones où celles-ci sont faibles, cad là où les densités de probabilité sont élevées

Egalisation d'histogramme





Histogram Equalisation vs. Stretching

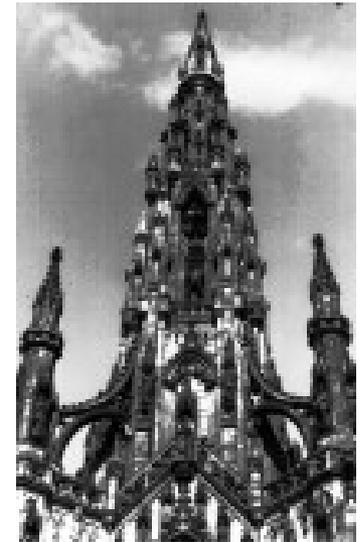
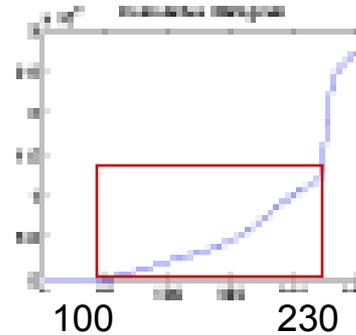




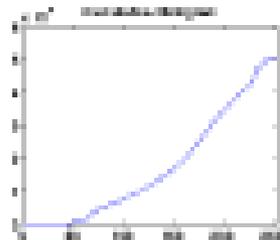
histogramme



Histogramme cumulé



Histogramme cumulé



Réduction du bruit

- Nettoyage du bruit ou lissage
- Deux catégories de méthodes :
 - Linéaires : Mean filter, Gaussian smoothing, Stretching, Equalizing
 - Non linéaires : Median filter, Opening, Closing

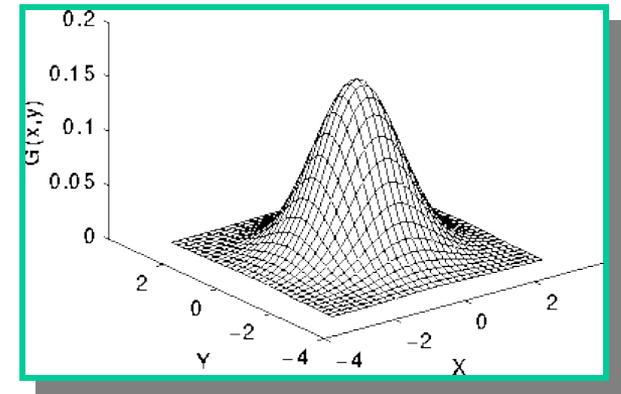
Filtrage Gaussien

- Convolution de l'image avec un Noyau Gaussien :

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

$$f * G = \sum_{\substack{(a,b) \in h \\ (x-a, y-b) \in f}} f(x-a, y-b) G(a, b)$$

- L'effet d'un filtrage Gaussien est de rendre flou l'image ("blur"). Le degré de lissage ou de flou est déterminé par la déviation standard σ de la distribution gaussienne
- La Gaussienne produit en sortie une 'moyenne pondérée' du voisinage de chaque pixel.



Filtrage Gaussien Discret

- On remplace la valeur de chaque pixel par la moyenne de ses voisins lui compris.

$$\frac{1}{16} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

- Intègre plus de 80% des approximations discrètes d'une gaussienne
- Génère du « flou » \implies diminue le contraste
- Convolution de l'image f avec un signal gaussien h

$$f * h = \sum_{\substack{(a,b) \in h \\ (x-a,y-b) \in f}} f(x-a, y-b)h(a,b)$$

Filtrage Moyenneur

- On remplace la valeur de chaque pixel par la moyenne de ses voisins lui compris.

$$\frac{1}{9} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

- Convolution de l'image f avec un signal porte h

$$f * h = \sum_{\substack{(a,b) \in h \\ (x-a,y-b) \in f}} f(x-a, y-b)h(a,b)$$

Filtrage Médian

- On remplace la valeur de chaque pixel avec la valeur *médiane* des valeurs ordonnées des pixels voisins.

123	125	126	130	140
122	124	126	127	135
118	120	150	125	134
119	115	119	123	133
111	116	110	120	130

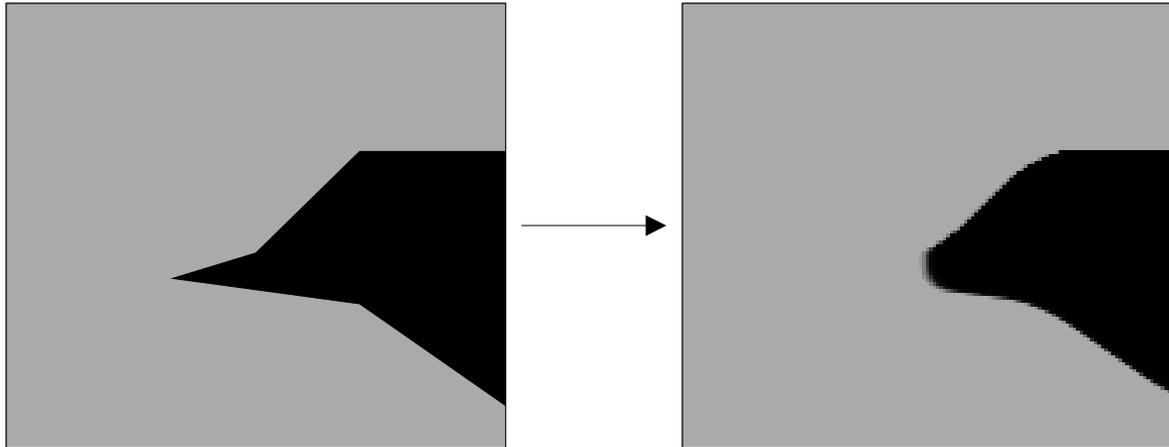
Neighbourhood values:
115, 119, 120, 123, 124,
125, 126, 127, 150

Median value: 124

- Filtre d'ordre = Filtrage non linéaire -> Lien fort avec la morphologie mathématique qui prend le *sup* et l'*inf* d'un ensemble ordonné.

Filtrage Médian

- Avantages : Elimine les petits bruits, sans rendre les frontières floues
- Inconvénients : A tendance à « déplacer » les frontières (rétrécir les convexités)



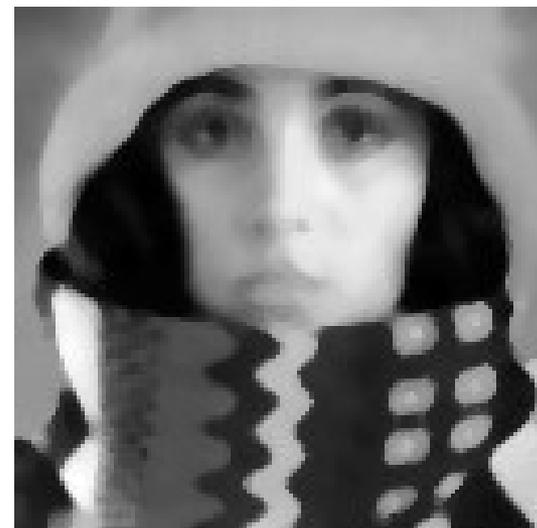
Gaussian vs. Median



Source

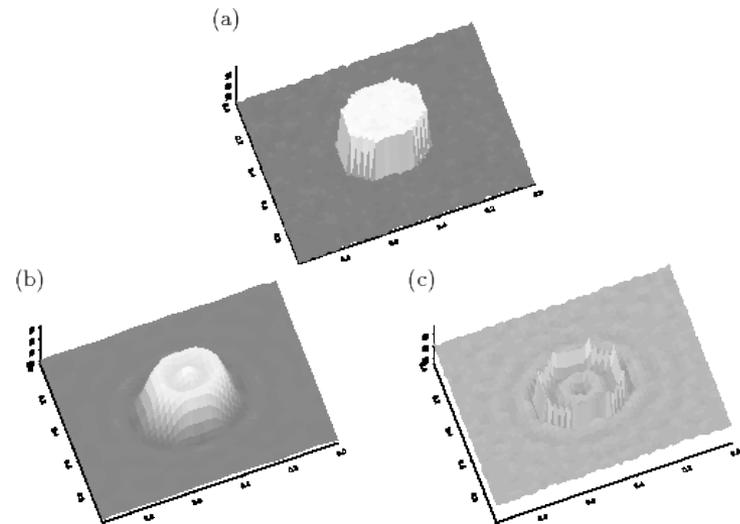
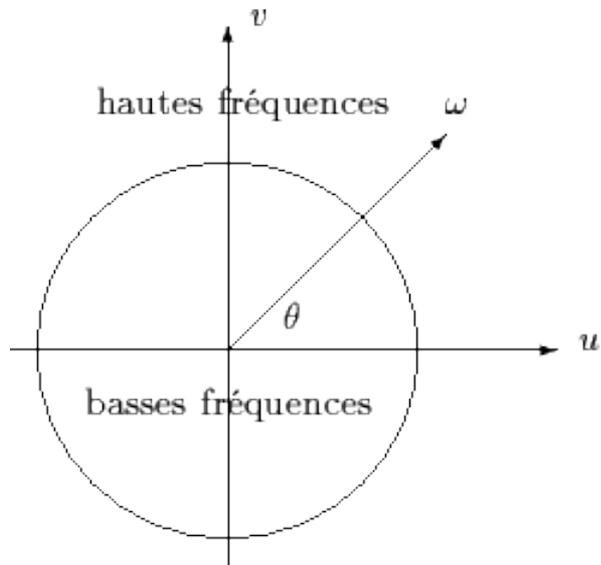


Gaussian ($\sigma = 2.5$)

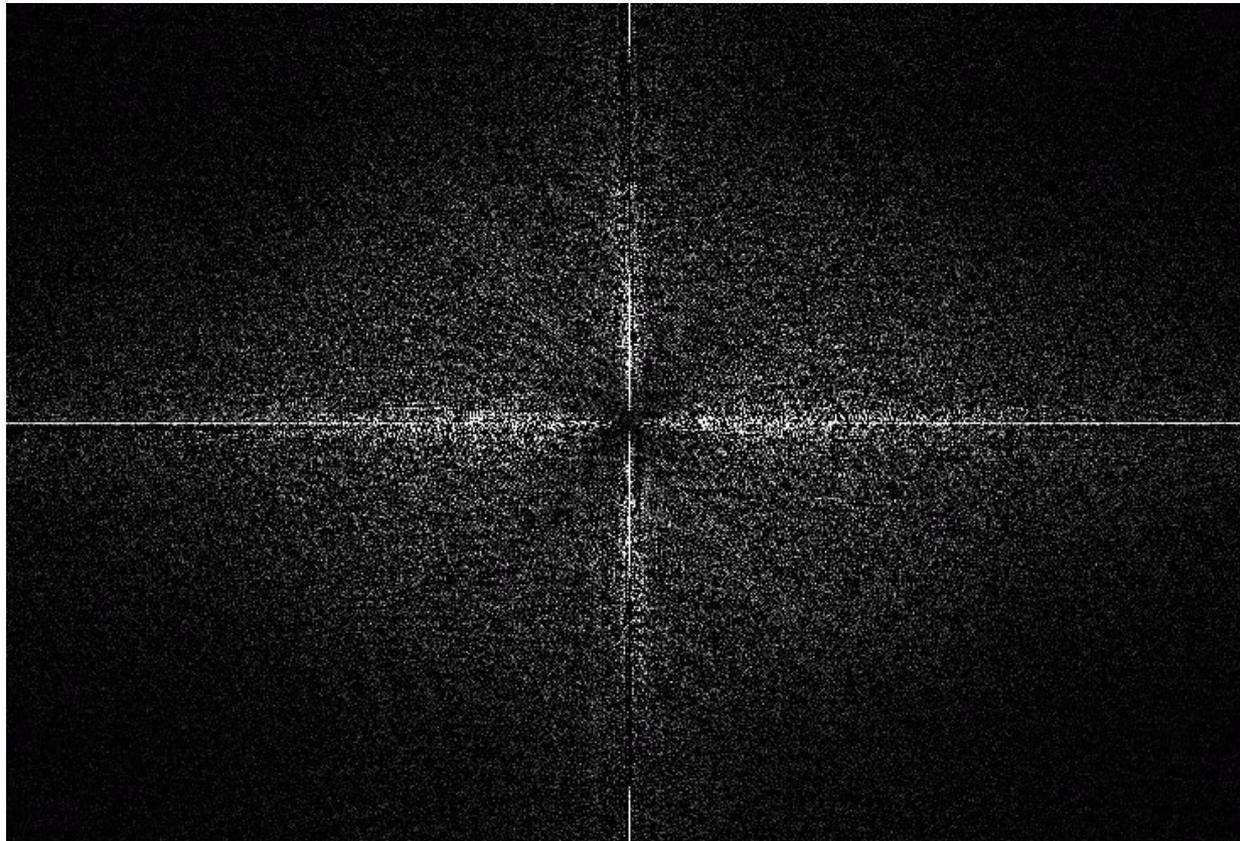


Median (5 X 5)

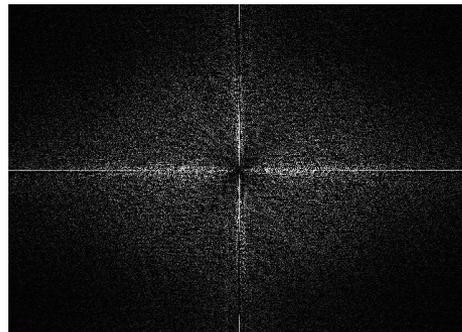
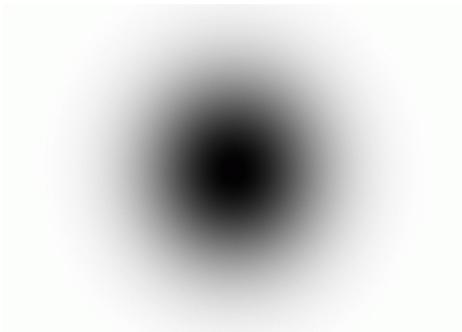
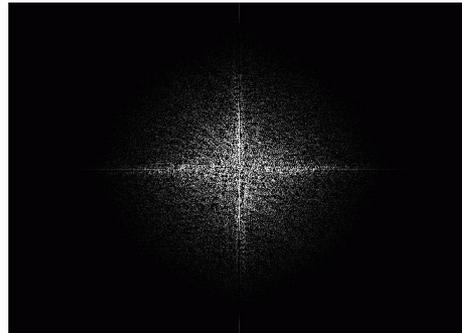
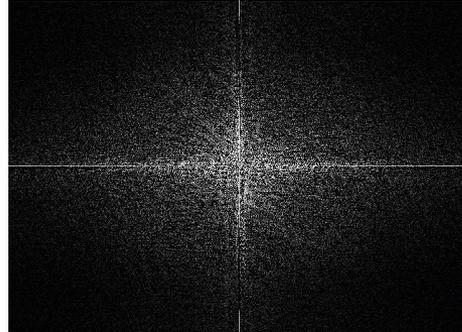
Dans le domaine fréquentiel



Filtrage fréquentiel 2D



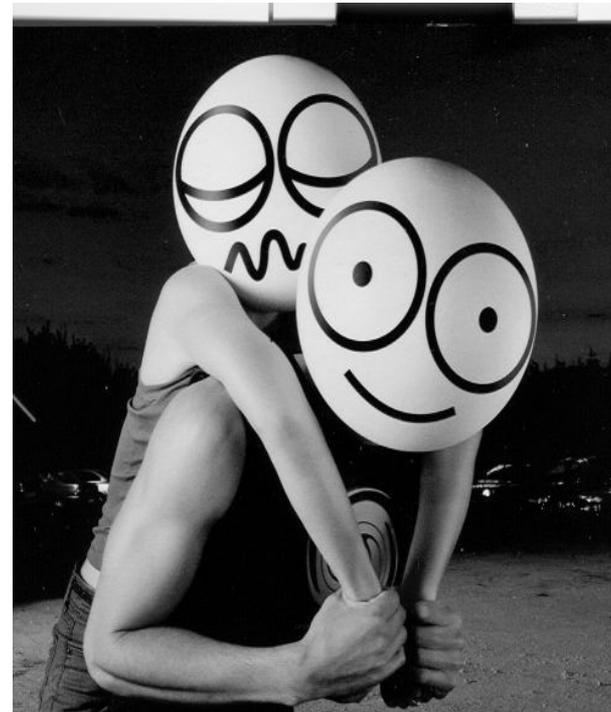
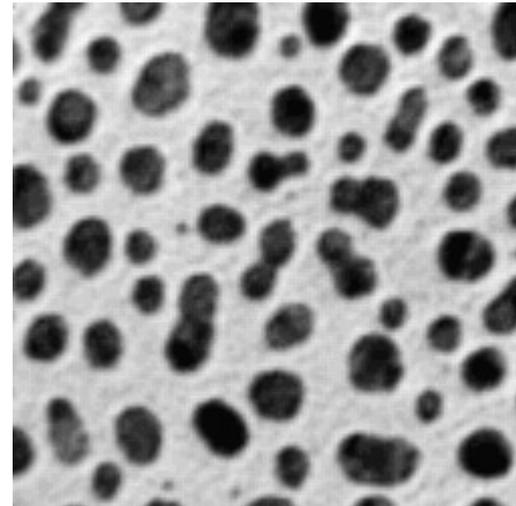
TF et Filtrage





Une fois ce filtrage syntaxico-structurel effectué, on peut commencer à analyser le sens du document. C'est ce qu'on appellera , filtrer sémantiquement le signal. Par exemple, on voudra chercher tous les paragraphes qui parlent de « chômage ». Dans une image, c'est la même idée. On cherchera toutes les zones de l'image qui contiennent des formes circulaires ou plus sémantique encore, toutes les images satellites qui contiennent des cheminées d'usine (dont l'apparence est circulaire en général).

Un opérateur algorithmique qui réalise ce filtrage quasi- sémantique est l'opérateur de Hough par exemple (voir plugin imageJ).

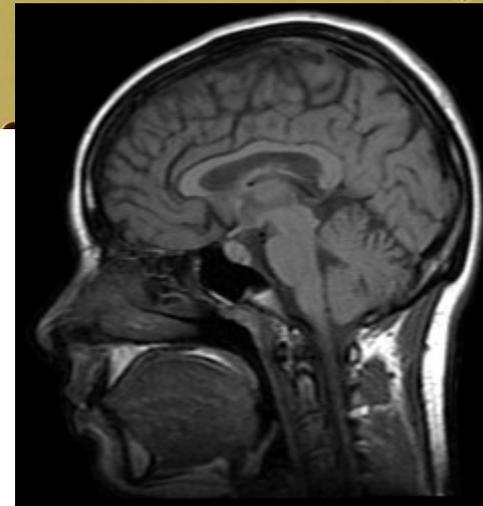
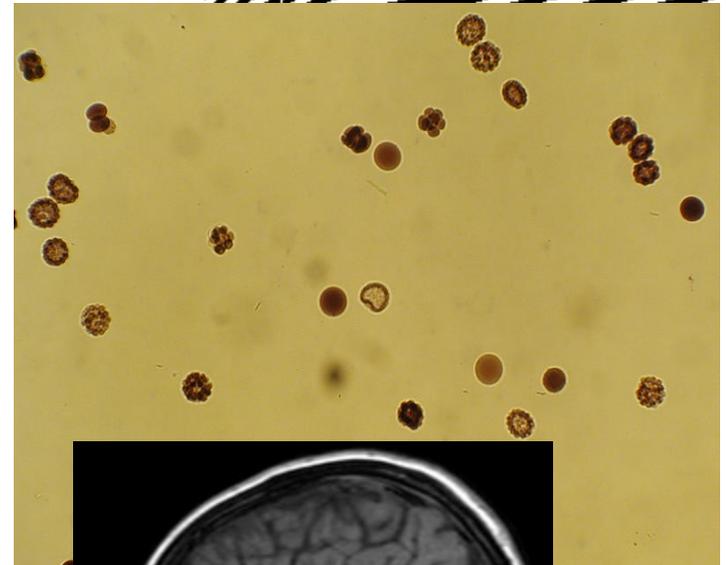


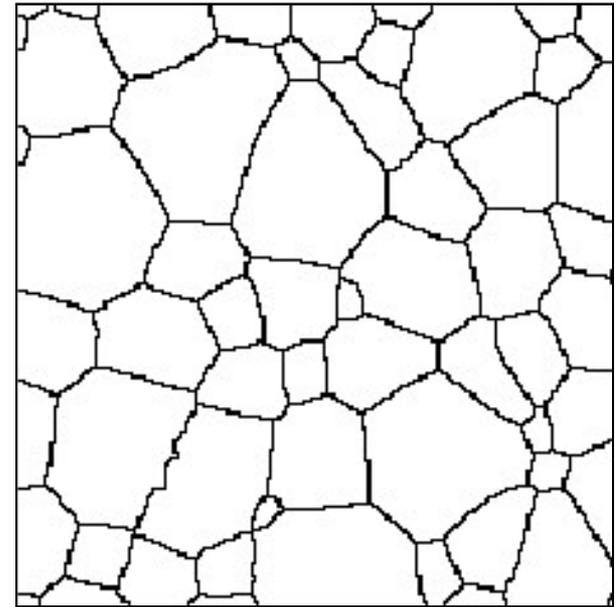
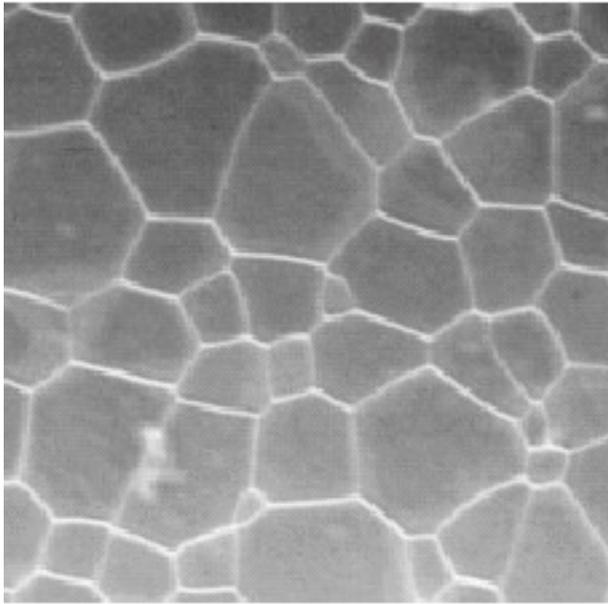
La suite logique de ces opérateurs converge une autre discipline qu'on appelle la Reconnaissance de Formes.

Par exemple, comment reconnaître des visages dans une image, puis une classe de personnes, puis identifier une personne en particulier. Ces techniques sont des procédés souvent statistiques s'appuyant sur des mesures effectuées dans l'image (cf. biométrie, empreintes digitales).

Dans le cas de l'imagerie médicale par exemple, il s'agira de reconnaître automatiquement une mammographie présentant une tumeur d'une autre.

Une technique qui est à la limite du filtrage syntaxique (niveau pixel seul) et du filtrage sémantique (niveau forme ou ensemble de pixels) s'appelle la Morphologie Mathématique : dans ce cas **il ne s'agit plus de filtrage linéaire mais de filtrage d'ordre et cette distinction est conceptuellement fondamentale.**





Structure fondamentale en Traitement d'Images Linéaire

structure
de base

ESPACE VECTORIEL

E espace vectoriel sur K

opérateurs
de base

Ce sont ceux qui préservent la structure et commutent avec les lois de base :

$$\forall \lambda \in K, \forall (x, y) \in E^2 : f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ et } f(x + y) = f(x) + f(y)$$

isomorphismes d'espace vectoriel

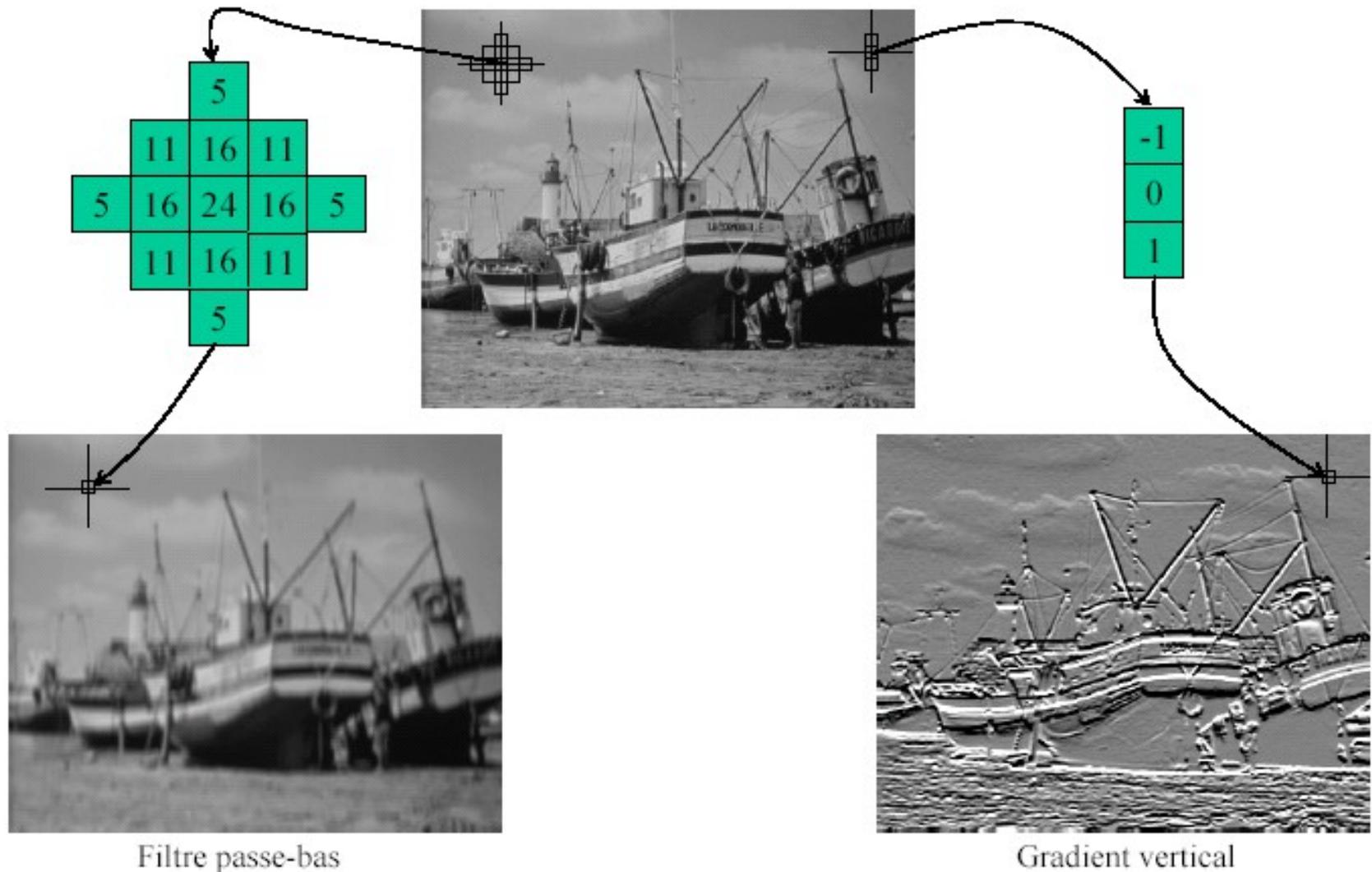


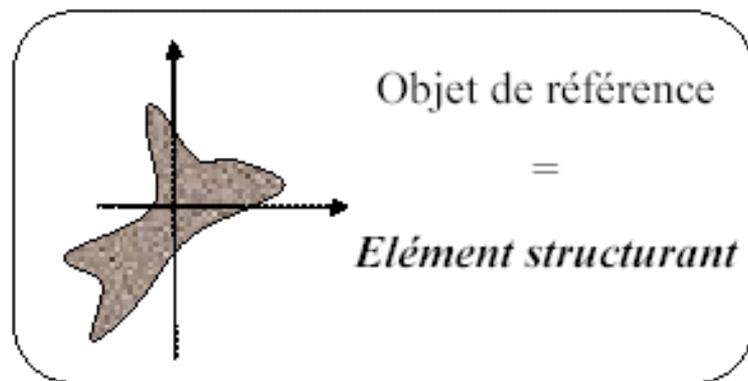
Applications linéaires



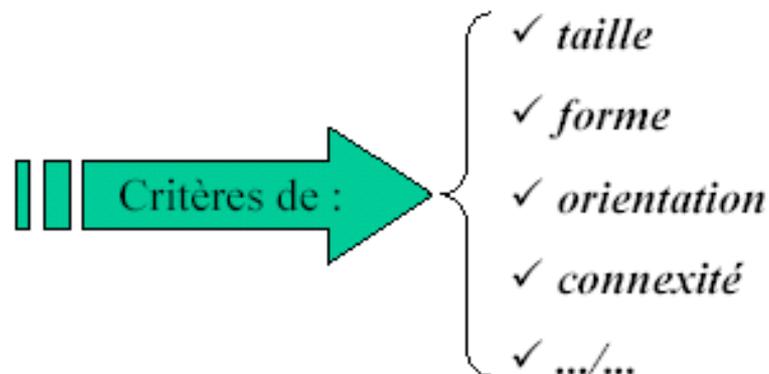
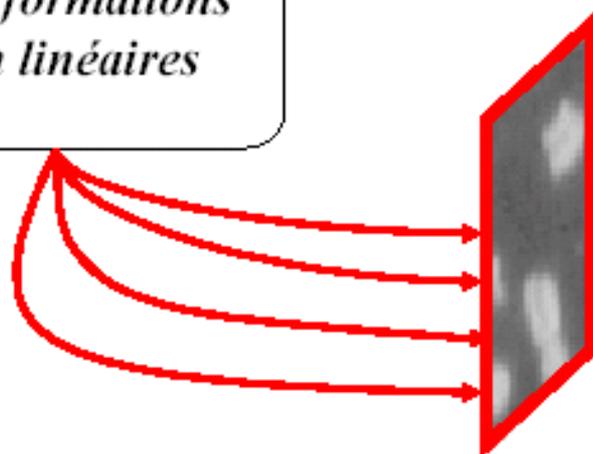
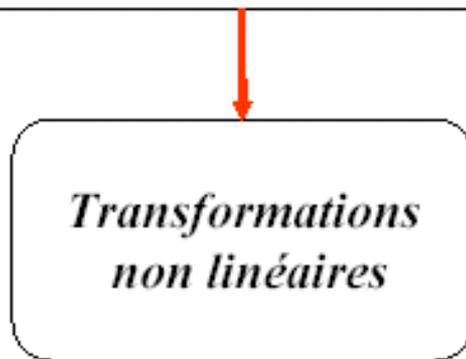
CONVOLUTIONS

Traitement d'Images Linéaire et Convolutions





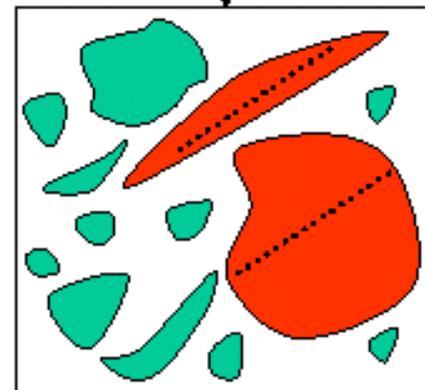
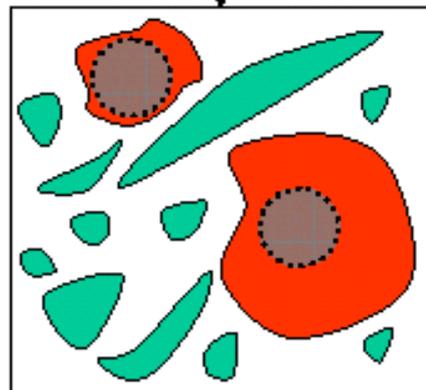
Le principe de base de l'analyse morphologique est d'extraire de la connaissance de l'image à partir des réponses fournies à différents tests (transformations).



Traitement d'Images Non Linéaire et Morpho. Math.

Exemple :Elément
structurant 1Elément
structurant 2

Test : « contient »



Taille, forme, orientation,...



Analyse quantitative, spatiale,...

Structure fondamentale en Morphologie Mathématique

structure
de base

TREILLIS COMPLET

(1) Ensemble ordonné (E, \leq)

$$\leq \begin{cases} \text{REFLEXIVE} & x \leq x \\ \text{ANTI-SYMETRIQUE} & x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow x = y \\ \text{TRANSITIVE} & x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z \end{cases}$$

(2) Toute partie P de E admet : $\begin{cases} \bullet \text{ une borne sup} \\ \bullet \text{ une borne inf} \end{cases}$

Sup : plus petit des majorants $\vee P$

Inf : plus grand des minorants $\wedge P$

Exemples de treillis complets

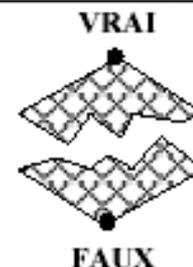
Treillis des formules booléennes

- *éléments* : formules booléennes f, g, h
- *relation d'ordre* : implication $f \rightarrow g$

- *sup* : OU logique

- *inf* : ET logique

- *éléments extrêmes* :



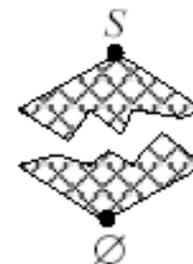
Treillis ensembliste

- *éléments* : les parties d'un ensemble S
- *relation d'ordre* : inclusion \subset

- *sup* : Union \cup

- *inf* : Intersection \cap

- *éléments extrêmes* :



Treillis des nombres

- *éléments* : nombres réels (ou nombres entiers)
- *relation d'ordre* : \leq (ordre total)

- *sup* : max

- *inf* : min

- *éléments extrêmes* :



Exemples de treillis complets

Treillis des fonctions

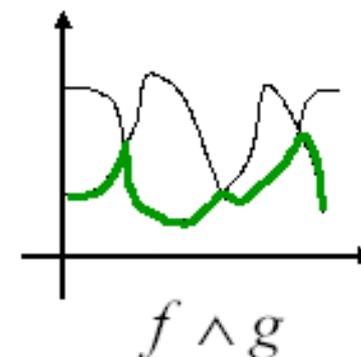
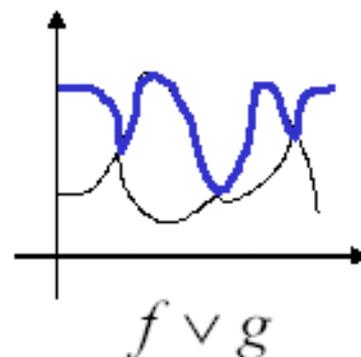
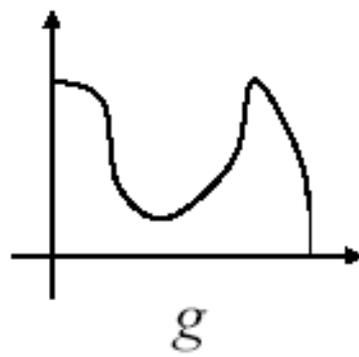
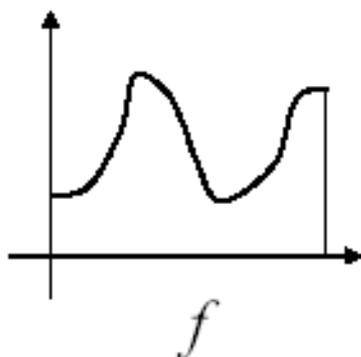
• *éléments* : les fonctions réelles ou numériques : $f : S \rightarrow \mathbf{R}$
ou $S \rightarrow \mathbf{Z}$

• *relation d'ordre* : $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in S, f(x) \leq g(x)$

• *sup* : $\vee \{f_i\}$

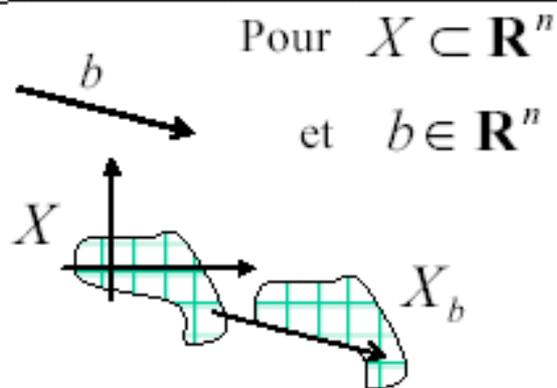
• *inf* : $\wedge \{f_i\}$

définies par :
$$\begin{cases} (\vee \{f_i\})(x) = \vee \{f_i(x)\} \\ (\wedge \{f_i\})(x) = \wedge \{f_i(x)\} \end{cases}$$



Définitions préliminaires

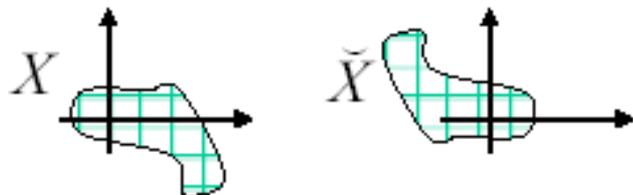
On se place ici dans E : l'ensemble des parties de \mathbf{R}^n



on note

$$X_b = \{x + b; x \in X\}$$

le *translaté* de X par b .



et on note

$$\tilde{X} = \{-x; x \in X\}$$

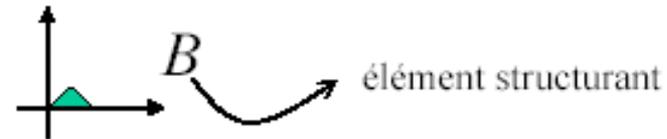
le *transposé* de X .

Rq: si X est symétrique alors $X = \tilde{X}$

Addition de Minkowsky

L'addition de Minkowski de X et B est définie par :

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b$$



Rq : $X \oplus B = B \oplus X$

C'est le lieu géométrique des points de B_x lorsque x parcourt X

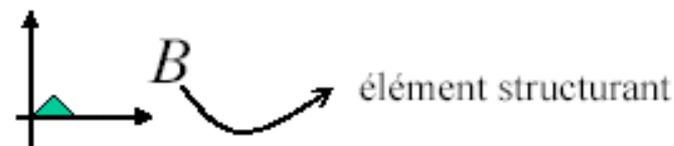
Ou encore : c'est le lieu géométrique des points z tels que \bar{B}_z intersecte X

 X  $X \oplus B$

Dilatation morphologique

La dilatation morphologique de X par B est définie par :

$$\delta_B(X) = X \oplus \check{B}$$



$$\begin{aligned} \delta_B(X) &= X \oplus \check{B} = \bigcup_{b \in \check{B}} X_b \\ &= \{z / \exists x \in X, \exists b \in B; z = x - b\} \\ &= \{z / \exists x \in X, \exists b \in B; z + b = x\} \\ &= \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

$$\delta_B(X) = \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\}$$

C'est le lieu géométrique
des points z tels que B_z
intersecte X

Le principe de dualité

Dans un treillis, les lois *Sup* et *Inf* jouent des rôles symétriques.

On appelle *involution* l'opérateur $\bar{\cdot} : E \rightarrow E$

qui permet d'échanger leur rôle :

$$\overline{\wedge P} = \overline{\vee P} \quad \text{et} \quad \overline{\vee P} = \overline{\wedge P}$$

Dans le cadre ensembliste, c'est opérateur est la complémentation par exemple P^c et $(P^c)^c=P$

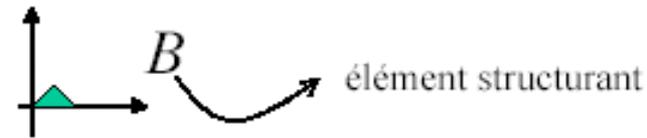
On dit que deux opérateurs Φ et Φ^* sont *duaux* pour l'involution $\bar{\cdot}$.

si :

$$\Phi(\bar{x}) = \overline{\Phi^*(x)}$$

Érosion morphologique

L'érosion morphologique de X par B est définie par le principe de dualité : $\varepsilon_B(\overline{X}) = \overline{\delta_B(X)}$



$$\varepsilon_B(X) = \overline{\delta_B(\overline{X})} = \overline{\overline{X} \oplus \overline{B}}$$

$$= \overline{\bigcup_{b \in \overline{B}} \overline{X}_b} = \bigcap_{b \in \overline{B}} X_b$$

$$= X \ominus \overline{B}$$

Soustraction de Minkowski

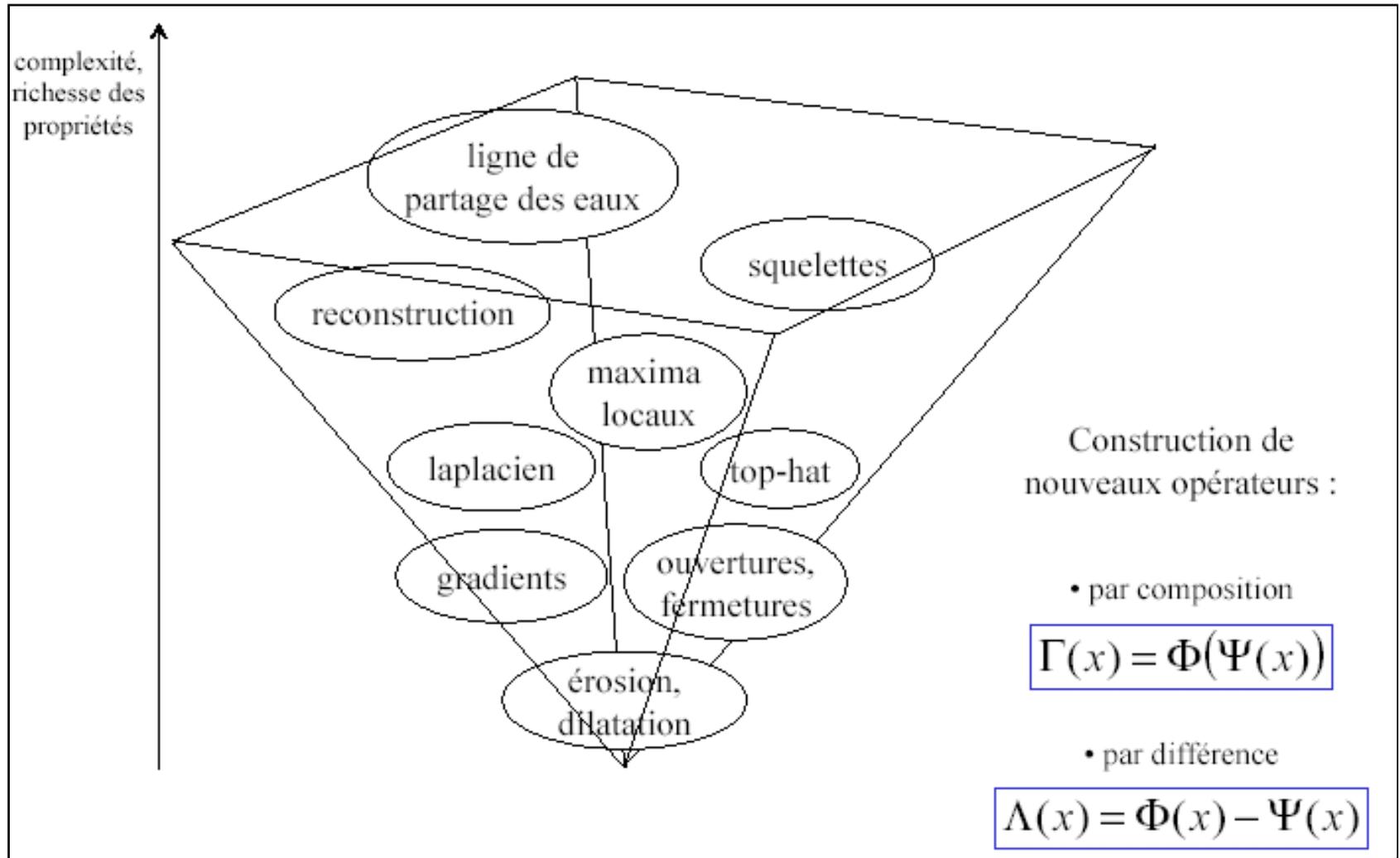
$$\varepsilon_B(X) = \bigcap_{b \in \overline{B}} X_b = \{z / \forall b \in B, \exists x \in X; z + b = x\}$$

$$= \{z / B_z \subset X\}$$

$$\varepsilon_B(X) = \{z / B_z \subset X\}$$

C'est le lieu géométrique des points z tels que B_z est inclus dans X

Construction des opérateurs



Propriétés fondamentales des opérateurs

$$\Phi : E \rightarrow E$$

$$x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y) \quad \textit{Croissance}$$

$$x \leq \Phi(x) \quad \textit{Extensivité}$$

$$\Phi(x) \leq x \quad \textit{Anti-extensivité}$$

$$\Phi(\Phi(x)) = \Phi(x) \quad \textit{Idempotence}$$

Propriétés algébriques des opérateurs de base

CROISSANCE

La dilatation et l'érosion sont des opérateurs *croissants*

$$X \subset Y \Rightarrow \delta_B(X) \subset \delta_B(Y)$$

$$X \subset Y \Rightarrow \varepsilon_B(X) \subset \varepsilon_B(Y)$$



L'érosion est *décroissante* par rapport à l'élément structurant :

$$B \subset B' \Rightarrow \varepsilon_B(X) \supset \varepsilon_{B'}(X)$$

EXTENSIVITE

Si l'élément structurant B contient l'origine :

• La dilatation est *extensive*

$$X \subset \delta_B(X)$$

• L'érosion est *anti-extensive*

$$\varepsilon_B(X) \subset X$$

• La dilatation commute avec le *Sup*

$$\delta_B(X \cup Y) = \delta_B(X) \cup \delta_B(Y)$$

• L'érosion commute avec le *Inf*

$$\varepsilon_B(X \cap Y) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_B(Y)$$

On a les égalités :

$$\delta_{B \cup B'}(X) = \delta_B(X) \cup \delta_{B'}(X)$$

$$\varepsilon_{B \cup B'}(X) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_{B'}(X)$$



Mais
seulement les
inclusions :

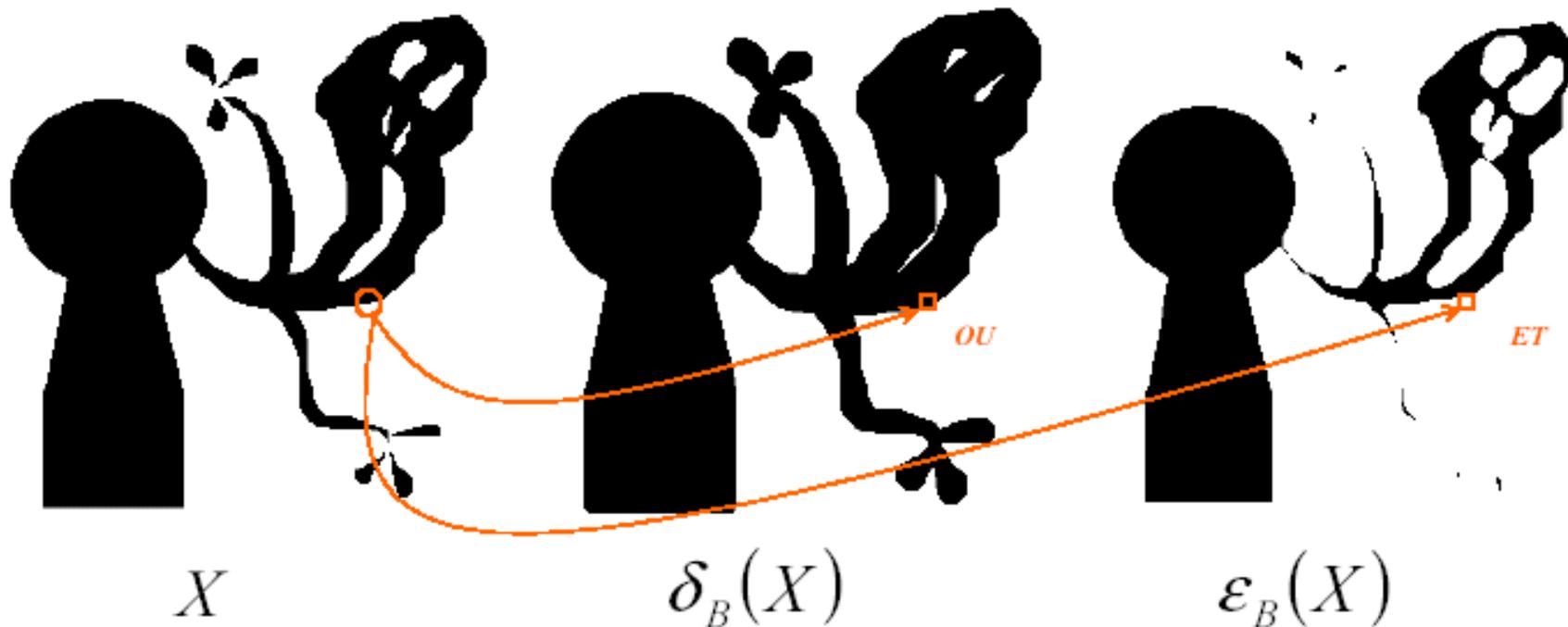
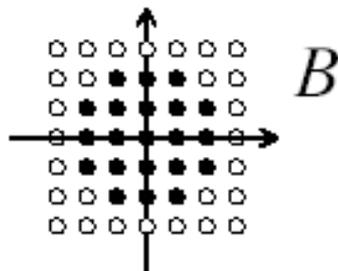
$$\delta_{B \cap B'}(X) \subset \delta_B(X) \cap \delta_{B'}(X)$$

$$\varepsilon_{B \cap B'}(X) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_{B'}(X)$$

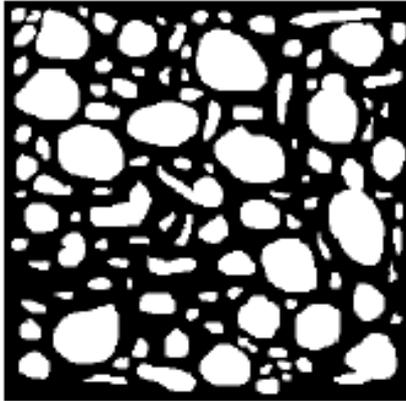
$$\varepsilon_B(X \cup Y) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_B(Y)$$

Applications aux images binaires

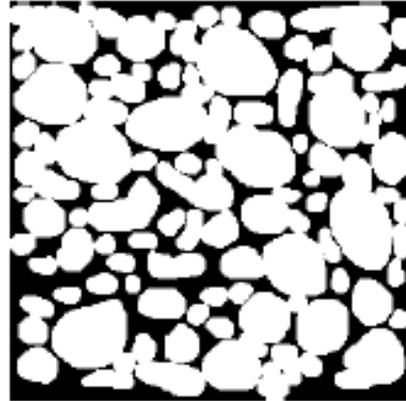
Le treillis est l'ensemble
des parties de \mathbf{Z}^2



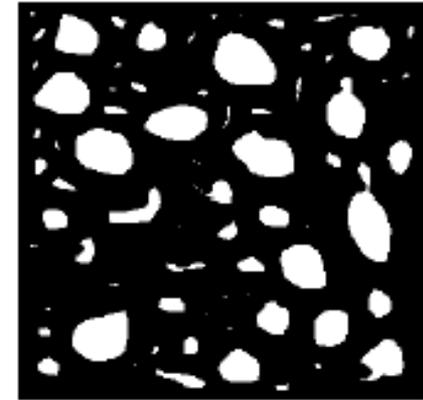
Conclusion sur les opérateurs de base



Originale



Dilatée



Erodée

- *La dilatation fait disparaître les petits trous et les petits détroits, et fait grossir les objets.*
- *L'érosion fait disparaître les petits objets et les petits isthmes, et amincit les objets restants.*



Dilatation et érosion sont des opérations *non réversibles*.

Dilatation et érosion sont des opérations *duales, pas inverses* !

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\text{dilatation}} & \delta_B(X) \\
 \updownarrow \text{complémentation} & & \updownarrow \\
 X^c & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \varepsilon_B(X^c)
 \end{array}$$

Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

On se place à présent dans le cadre des fonctions : $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

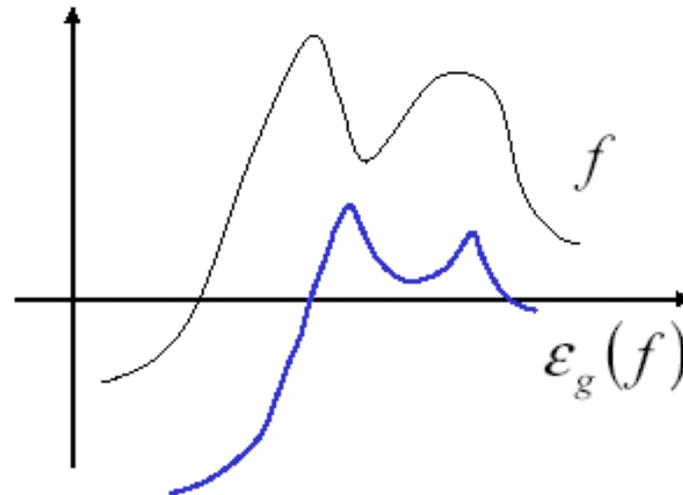
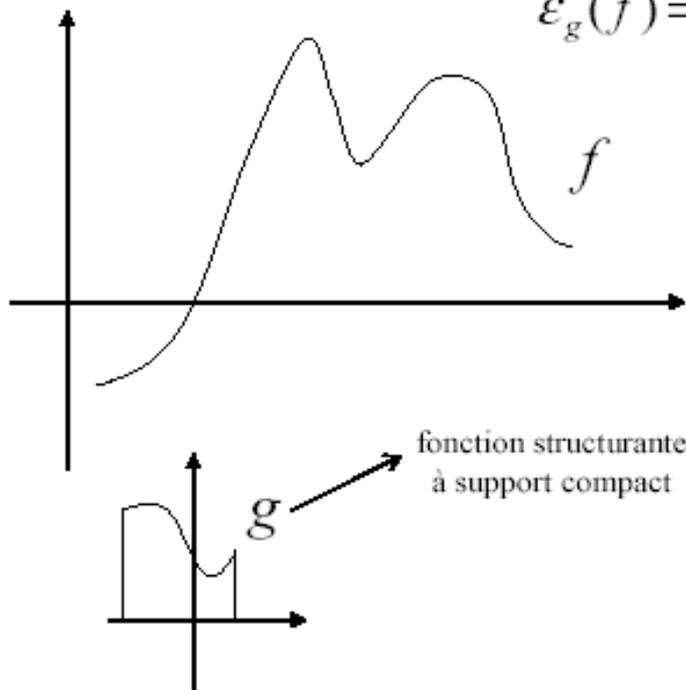
La dilatation et l'érosion fonctionnelles sont respectivement définies par :

$$\delta_g(f) = f \oplus \check{g}$$

$$\varepsilon_g(f) = f \ominus \check{g}$$

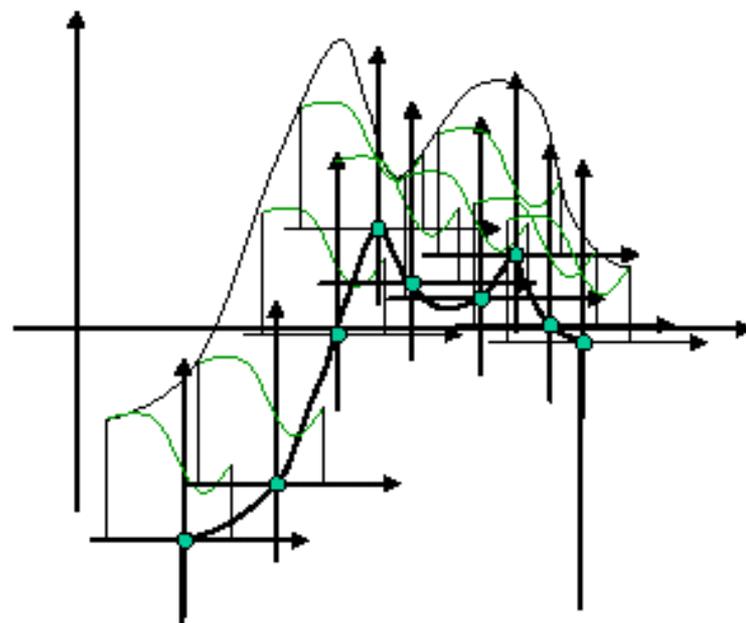
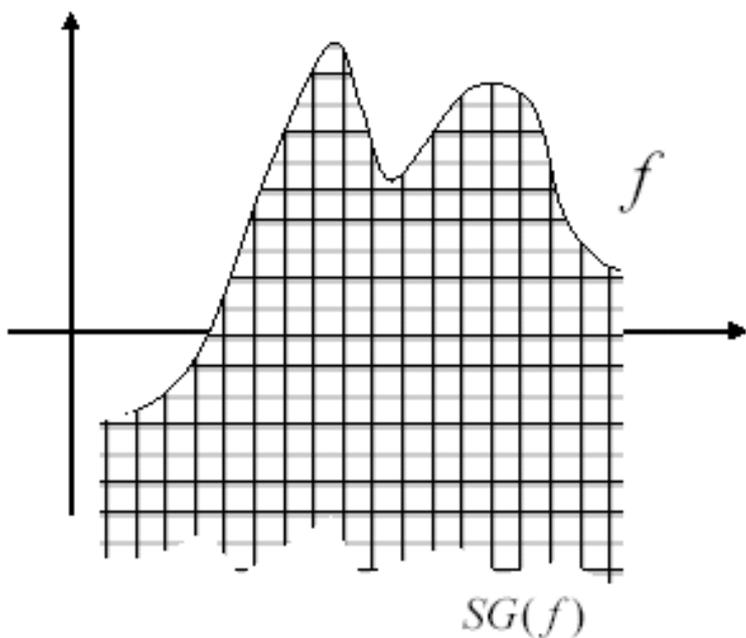
$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) + g(y-x)\}$$

$$\varepsilon_g(f)(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) - g(y-x)\}$$



Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

A toute fonction f on associe son *sous-graphe* : $SG(f) = \{(x, t) \in \mathbf{R}^n \times \overline{\mathbf{R}} / t \leq f(x)\}$



Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

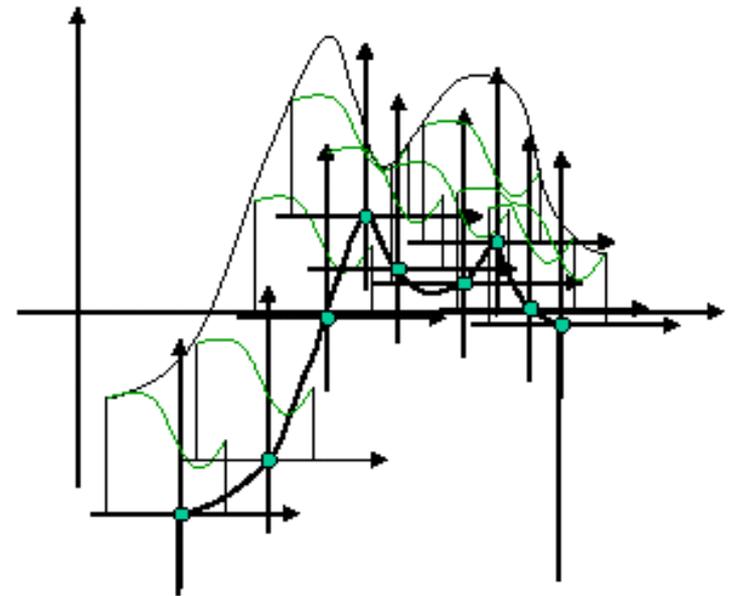
Interprétation ensembliste :

$$SG(\varepsilon_g(f)) = \mathbf{\varepsilon}_{SG(g)}(SG(f))$$

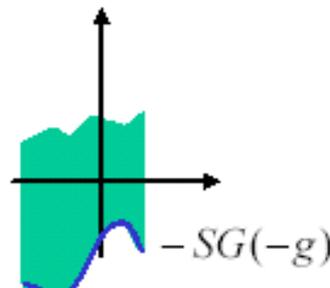
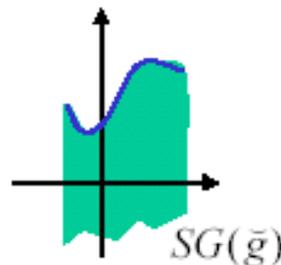
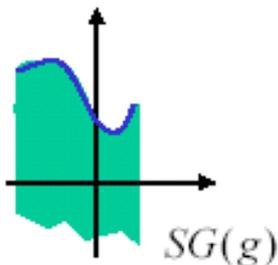
$$SG(\delta_g(f)) = \mathbf{\delta}_{-SG(-g)}(SG(f))$$

fonctionnel

ensembliste



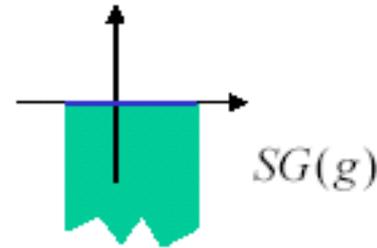
$$-g \neq \check{g}$$



Cas des éléments structurants plans

Illustration de la différence entre le filtrage linéaire et le filtrage d'ordre

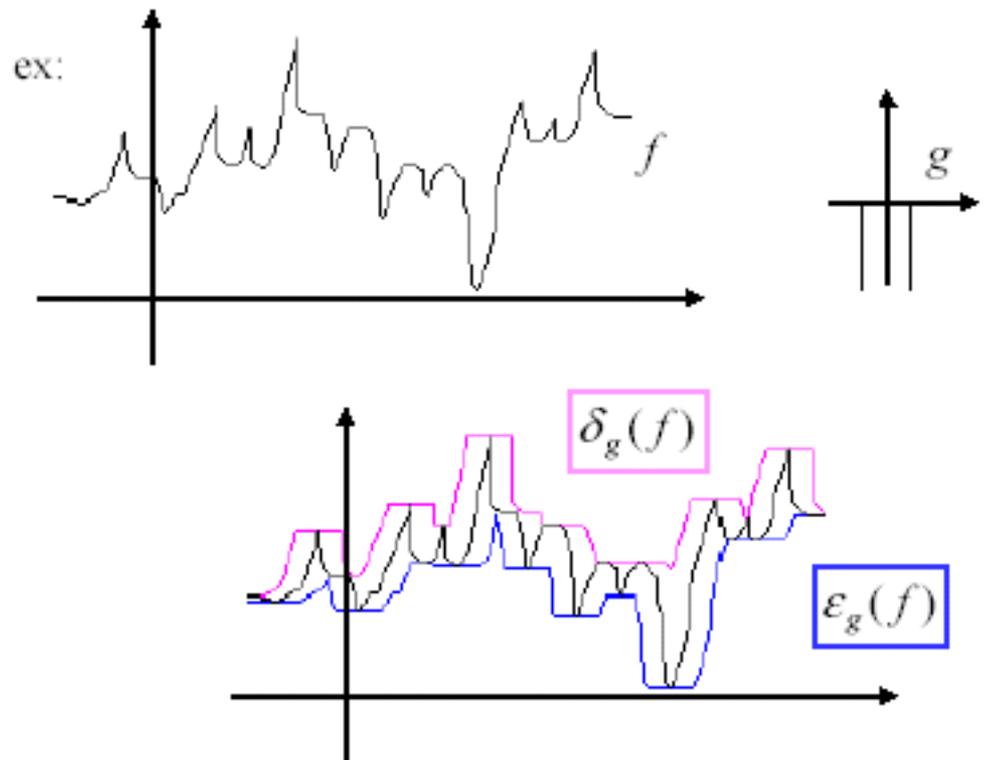
Élément structurant plan =
fonction structurante nulle sur un
support compact K



L'expression algébrique des
opérateurs de base devient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_g(f)(x) &= \inf_{\substack{y \in \mathbf{R}^n \\ y-x \in K}} \{f(y)\} \\ &= \inf_{y \in K_x} \{f(y)\}\end{aligned}$$

$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in K_x} \{f(y)\}$$



Propriétés des opérateurs de base dans le cadre fonctionnel

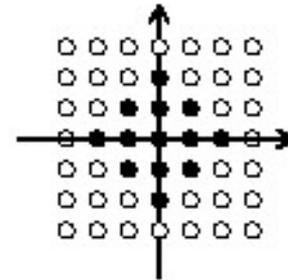
Identiques au cas ensembliste, en remplaçant :

$$\begin{array}{l} \subset \rightarrow \leq \\ \cup \rightarrow \vee \\ \cap \rightarrow \wedge \end{array}$$

$f \leq f' \Rightarrow \delta_g(f) \leq \delta_g(f')$ $f \leq f' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \leq \varepsilon_g(f')$ $g \leq g' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \geq \varepsilon_{g'}(f)$	Si $O \in \text{Supp}(g)$: $f \leq \delta_g(f)$ $\varepsilon_g(f) \leq f$	$\delta_g(f \vee f') = \delta_g(f) \vee \delta_g(f')$ $\varepsilon_g(f \wedge f') = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_g(f')$
$\delta_{g \vee g'}(f) = \delta_g(f) \vee \delta_{g'}(f)$ $\varepsilon_{g \vee g'}(f) = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_{g'}(f)$		$\delta_{g \wedge g'}(f) \leq \delta_g(f) \wedge \delta_{g'}(f)$ $\varepsilon_{g \wedge g'}(f) \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_{g'}(f)$ $\varepsilon_g(f \vee f') \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_g(f')$
$f \leq \varepsilon_g(f') \Leftrightarrow \delta_g(f) \leq f'$		$\delta_{g'}(\delta_g(f)) = \delta_{\delta_{g'}(g)}(f)$ $\varepsilon_{g'}(\varepsilon_g(f)) = \varepsilon_{\delta_{g'}(g)}(f)$

Application aux images numériques

Le treillis est l'ensemble
des fonctions de \mathbf{Z}^2 dans \mathbf{Z}

 B

élément
structurant plan
 \cong
ensemble

 X  $\delta_B(X)$  $\varepsilon_B(X)$

Premiers opérateurs par différence

Opérateur par différence :

Cas ensembliste

$$\Lambda(X) = \Phi(X) \setminus \Psi(X)$$

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

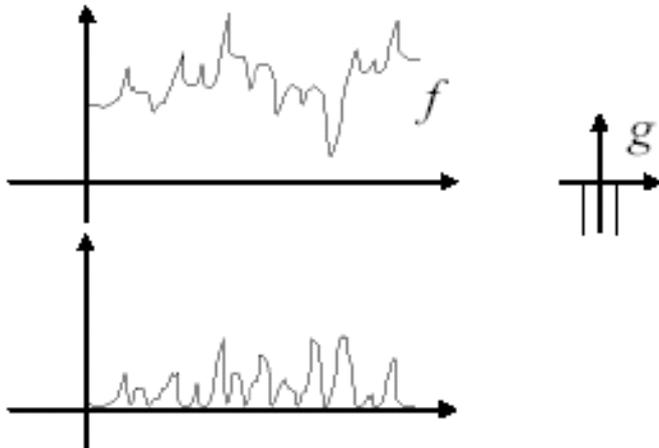
Cas fonctionnel

$$\Lambda(f) = \Phi(f) - \Psi(f)$$

Gradient intérieur

$$g_y^-(x)$$

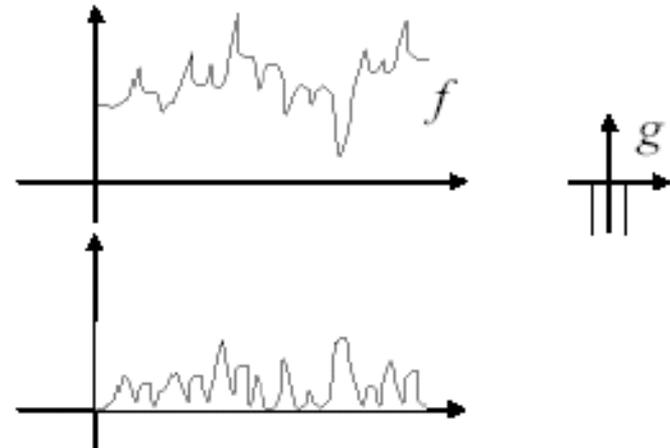
$$\Phi(x) = x \quad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$$



Gradient extérieur

$$g_y^+(x)$$

$$\Phi(x) = \delta_y(x) \quad \Psi(x) = x$$



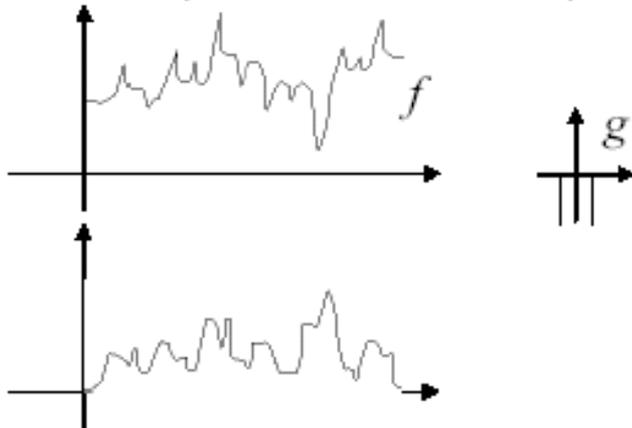
Premiers opérateurs par différence

Gradient morphologique

(symétrisée)

$$g_y^m(x)$$

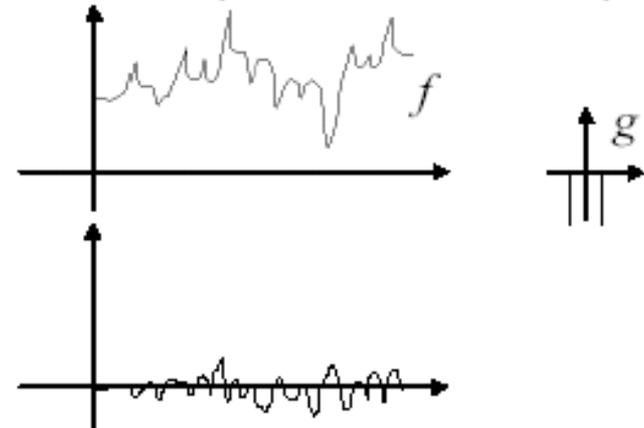
$$\Phi(x) = \delta_y(x) \quad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$$



Laplacien morphologique

$$\lambda_y(x)$$

$$\Phi(x) = g_y^+(x) \quad \Psi(x) = g_y^-(x)$$



Rq : dans le cas de fonctions de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} , en prenant pour élément structurant une boule euclidienne centrée sur l'origine, le gradient morphologique et le laplacien morphologique tendent respectivement vers le module du gradient et le laplacien euclidiens lorsqu'ils sont définis, quand le rayon de la boule tend vers zéro :

$$\|\nabla I\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}(u,v)\right)^2}$$

$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(u,v) + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(u,v)$$

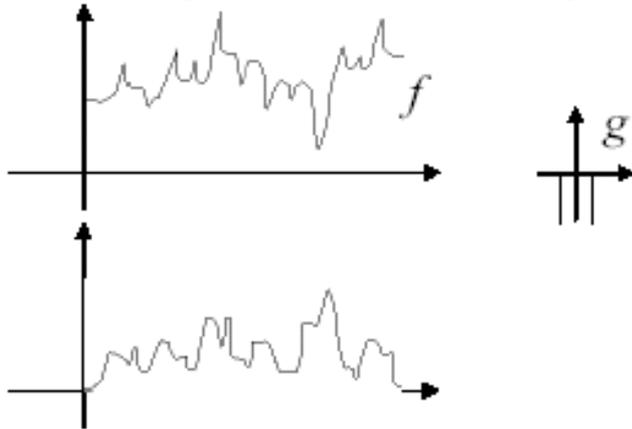
Premiers opérateurs par différence

Gradient morphologique

(symétrisée)

$$g_y^m(x)$$

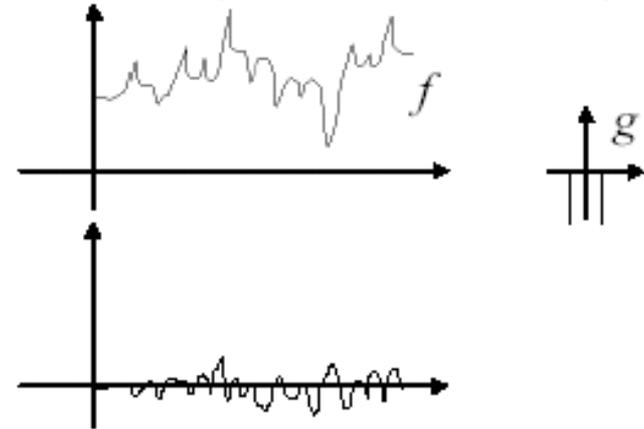
$$\Phi(x) = \delta_y(x) \quad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$$



Laplacien morphologique

$$\lambda_y(x)$$

$$\Phi(x) = g_y^+(x) \quad \Psi(x) = g_y^-(x)$$

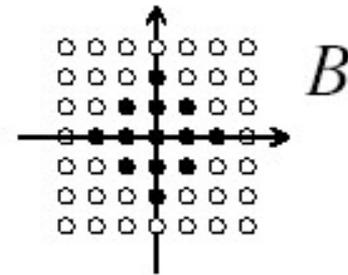
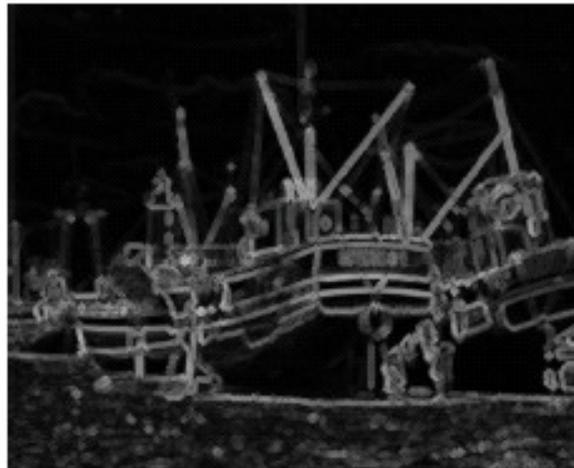


Rq : dans le cas de fonctions de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} , en prenant pour élément structurant une boule euclidienne centrée sur l'origine, le gradient morphologique et le laplacien morphologique tendent respectivement vers le module du gradient et le laplacien euclidiens lorsqu'ils sont définis, quand le rayon de la boule tend vers zéro :

$$\|\nabla I\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}(u,v)\right)^2}$$

$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(u,v) + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(u,v)$$

Gradients et laplacien : images numériques

 X  $g_B^m(X)$  $\lambda_B(X)$

Ouverture et fermeture morphologique

Problème Min/Max : étant donné $Y \in E$, $B \in E$,
trouver le plus petit $X \in E$ tel que : $Y = \varepsilon_B(X)$

 X_1  X_2  X_3 

$$\begin{aligned} Y &= \varepsilon_B(X_1) \\ &= \varepsilon_B(X_2) \\ &= \varepsilon_B(X_3) \end{aligned}$$

REPONSE : C'est le dilaté de Y par le transposé de B :

$$\delta_{\bar{B}}(Y) = Y \oplus B$$



On note : $\gamma_B(X) = X \circ B = \delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(X)) = (X \ominus \bar{B}) \oplus B$

l'ouverture morphologique de X par B .

et son dual : $\varphi_B(X) = X \bullet B = \varepsilon_{\bar{B}}(\delta_B(X)) = (X \oplus \bar{B}) \ominus B$

la fermeture morphologique de X par B .

Ouverture et fermeture : propriétés algébriques

CROISSANCE

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} \gamma_B(x) \leq \gamma_B(y) \\ \varphi_B(x) \leq \varphi_B(y) \end{cases}$$

IDEMPOTENCE

$$\gamma_B(\gamma_B(x)) = \gamma_B(x)$$

$$\varphi_B(\varphi_B(x)) = \varphi_B(x)$$

dém:

$$\delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(x)) \leq x \leq \varepsilon_{\bar{B}}(\delta_B(x))$$

$$\text{donc } \delta_{\bar{B}}\varepsilon_B \leq id_E \leq \varepsilon_{\bar{B}}\delta_B$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \text{et} & \downarrow \\ \varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B \leq \varepsilon_B & & \varepsilon_B \leq \varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B \end{array}$$

$$\text{donc } \varepsilon_B = \varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B$$

$$\text{et donc } \delta_{\bar{B}}\varepsilon_B = \delta_{\bar{B}}\varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B$$

EXTENSIVITE

L'ouverture est anti-extensive : $\gamma_B(x) \leq x$

La fermeture est extensive : $x \leq \varphi_B(x)$

dém:

Dans la propriété d'adjonction :

$$x \leq \varepsilon_B(y) \Leftrightarrow \delta_B(x) \leq y$$

$$x = \varepsilon_B(y) \quad \text{donne} \quad \delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(y)) \leq y$$

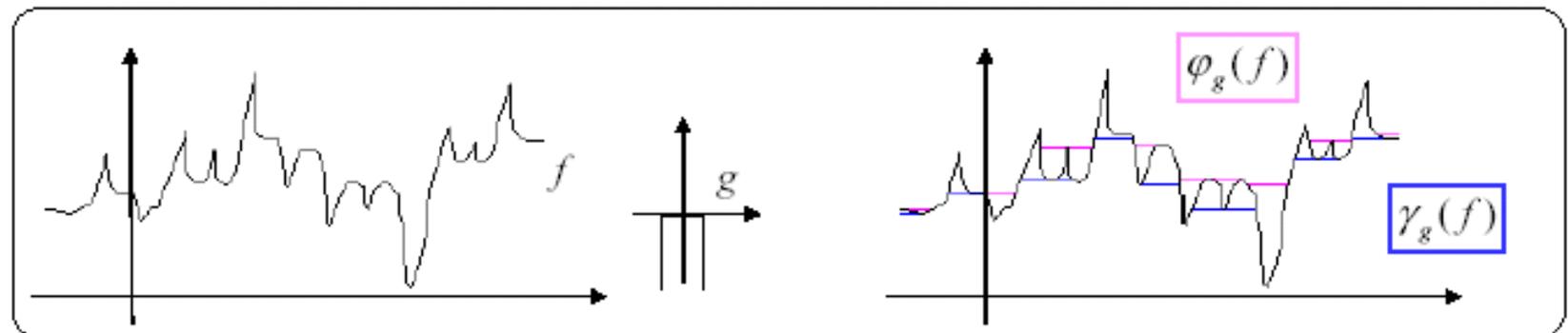
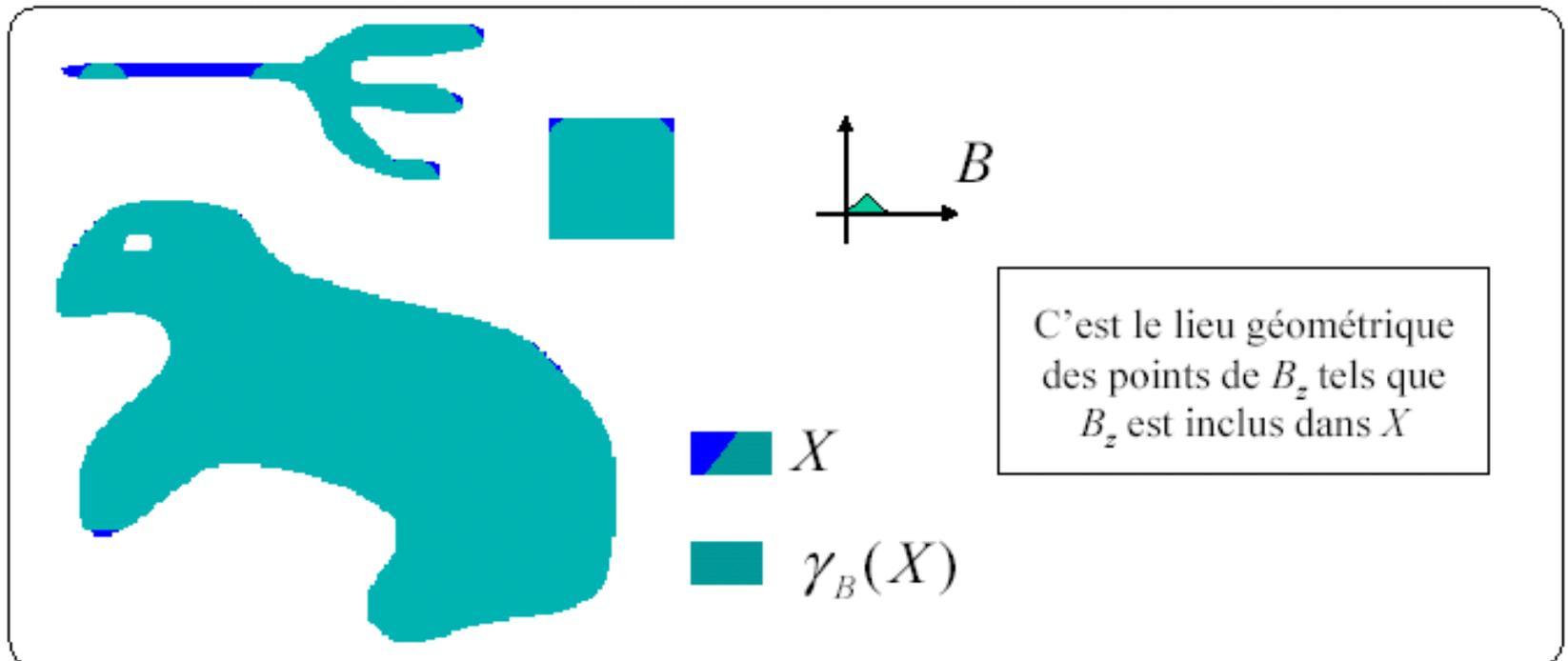
$$\text{et } y = \delta_B(x) \quad \text{donne} \quad x \leq \varepsilon_{\bar{B}}(\delta_B(x))$$

PROPRIETE MIN/MAX

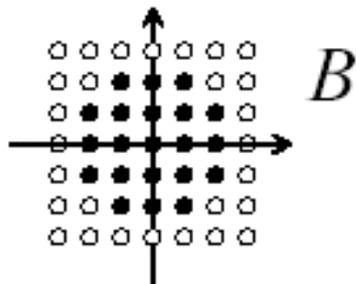
Soient x, x' , et y
tels que :
$$\begin{cases} y = \varepsilon_B(x) = \varepsilon_B(x') \\ \text{et} \\ x = \delta_{\bar{B}}(y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{alors } x &= \delta_{\bar{B}}(y) = \delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(x)) \\ &= \delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(x')) = \gamma_B(x') \leq x' \end{aligned}$$

Ouverture et fermeture : ensembles et fonctions



Ouverture et fermeture : images binaires



- l'ouverture élimine les petites composantes, et ouvre les petits isthmes.
- la fermeture bouche les petites trous, et ferme les petits détroits.

 X  $\gamma_B(X)$  $\phi_B(X)$

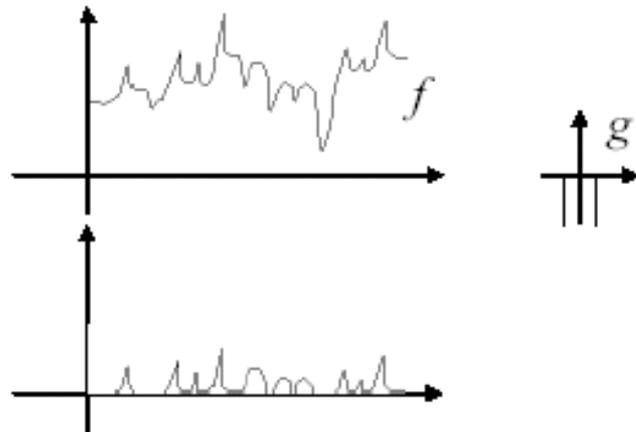
Ouverture et fermeture : opérateurs combinés

Opérateur par différence :

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

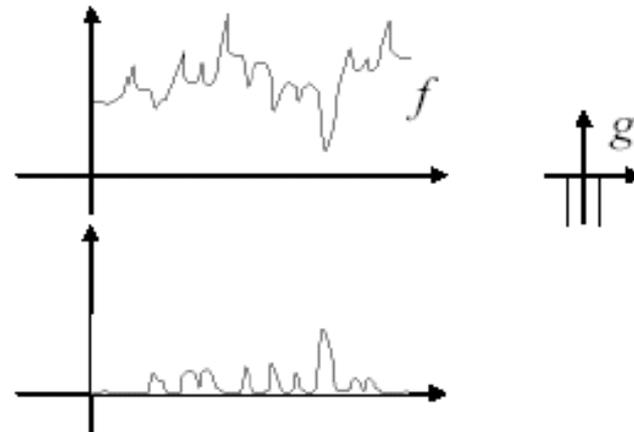
Top-hat

$$\Phi(x) = x \quad \Psi(x) = \gamma_y(x)$$

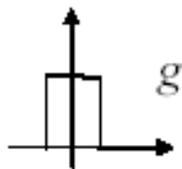


Top-hat conjugué

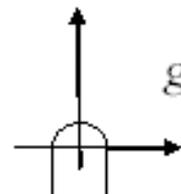
$$\Phi(x) = \varphi_y(x) \quad \Psi(x) = x$$



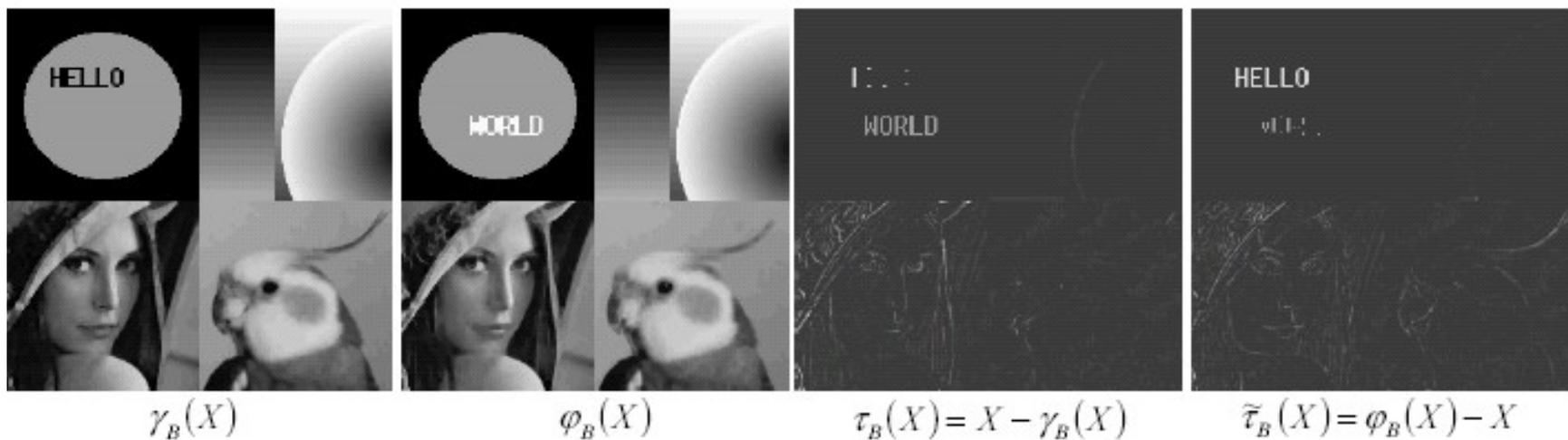
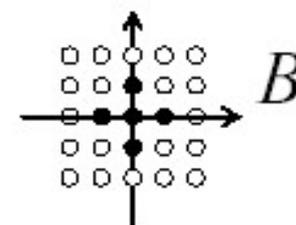
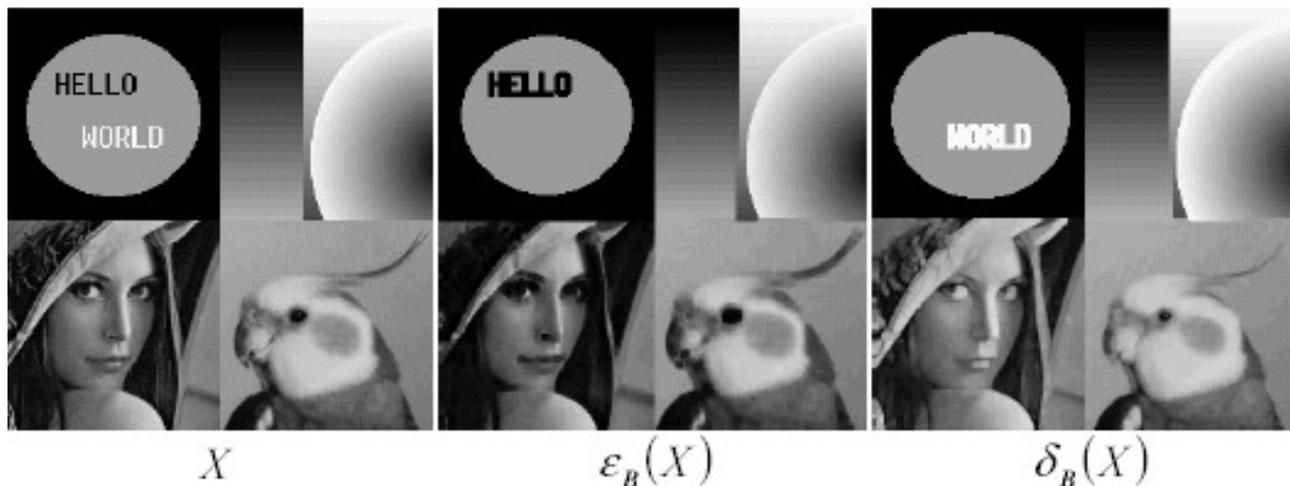
Top-hat



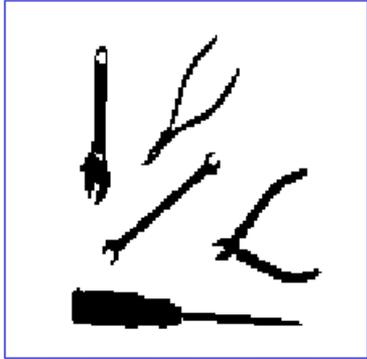
Rolling ball



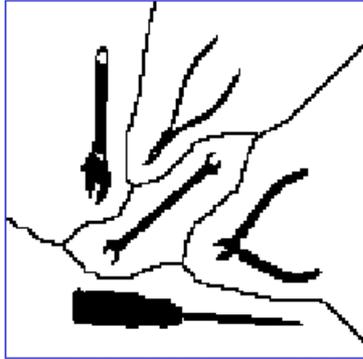
Top Hat : images numériques



SKIZ

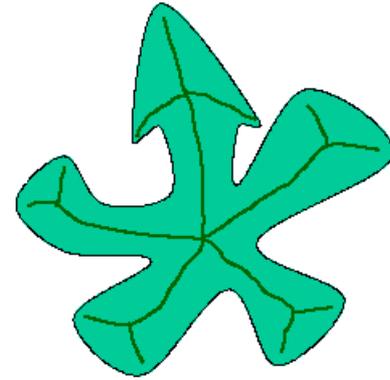


original



SKIZ + original

Squelette



Autres opérateurs

Germes

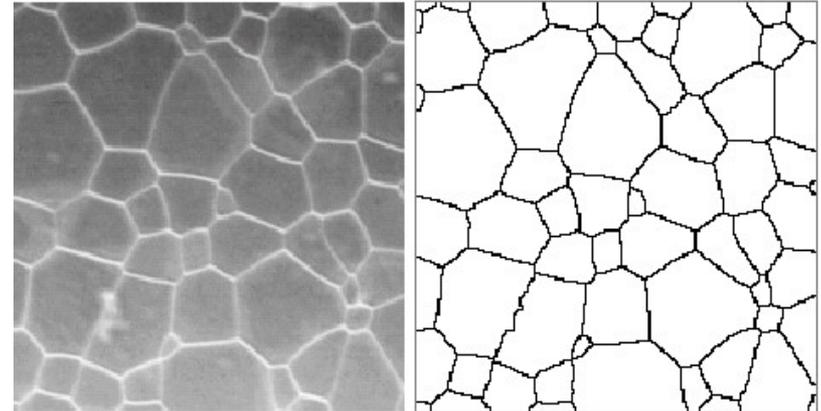


Original



Noyau homotopique

LPE ou Watershed



analyse des cristaux de minerai d'uramium

6.7.4 Granulométries

Les granulométries sont des opérations de \mathbb{I} tamisage \mathbb{I} qui servent à sélectionner successivement des particules de tailles données croissantes.

Définition 30. Granulométrie : Une granulométrie sur un ensemble \mathcal{A} de parties de \mathbb{R}^n est une famille de fonctions paramétrées ϕ_λ (avec $\lambda > 0$) définies sur \mathcal{A} telle que :

1. $\forall X \in \mathcal{A}, \forall \lambda > 0, \phi_\lambda(X) \subset X$ (ϕ_λ anti-extensive),
2. $\forall (X, Y) \in \mathcal{A}^2, \forall \lambda > 0, X \subset Y \Rightarrow \phi_\lambda(X) \subset \phi_\lambda(Y)$ (ϕ_λ croissante),
3. $\forall X \in \mathcal{A}, \forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lambda \geq \mu \Rightarrow \phi_\lambda(X) \subset \phi_\mu(X)$ (ϕ_λ décroissante par rapport au paramètre),
4. $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \phi_\lambda \circ \phi_\mu = \phi_\mu \circ \phi_\lambda = \phi_{\max(\lambda, \mu)}$.

Il est clair, d'après cette définition, que la famille d'ouvertures par des boules de rayon r définit une granulométrie. On montre même que ϕ_λ est une granulométrie si et seulement si ϕ_λ est une ouverture pour tout λ et la classe des ensembles de \mathcal{A} invariants par ϕ_λ est incluse dans celle des invariants par ϕ_μ pour $\lambda \geq \mu$.

Ainsi, si on applique à un ensemble une suite d'ouvertures de tailles croissantes (par des boules), on sélectionnera d'abord les plus petites parties de l'ensemble (celles qui sont supprimées par l'ouverture), puis des parties de plus en plus grosses.

La figure 6.14 montre une courbe de granulométrie obtenue sur une image binaire par ouvertures de différentes tailles. Lorsque la taille de l'ouverture correspond à la taille caractéristique de la plupart des objets, un saut apparaît dans la courbe.

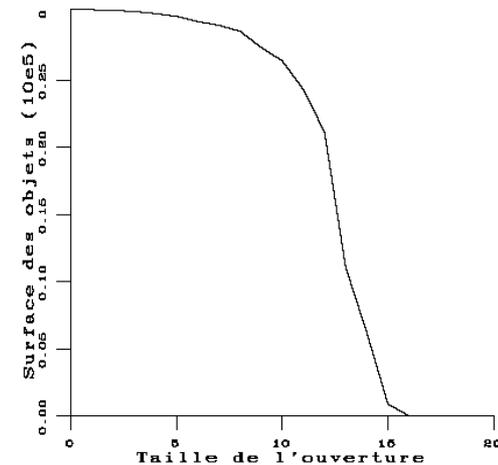
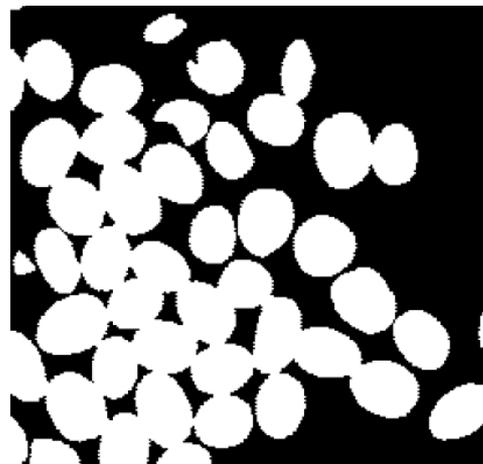


FIG. 6.14 – Image binaire et sa courbe de granulométrie.

CONCLUSION

Nous avons vu plein de modèles d'image et de traitement différents.

Si l'on prend comme modèle d'image une matrice discrète d'éléments f_{ij} , i et j décrivant les lignes et les colonnes de l'image, en première analyse, on peut catégoriser les traitements en deux types particuliers (ceci n'étant qu'une tentative d'unification : libre à vous de la reformuler, critiquer, etc.) :

- les filtres linéaires : on transforme la valeur du pixel par une combinaison linéaire des pixels voisins, le voisinage définissant la taille du filtre.

- Voisinage réduit au pixel considéré : on travaille sur l'histogramme : $f'_{ij} = a \cdot f_{ij} + b$

- Voisinage V de taille $2n+1 \times 2n+1$ centré sur le pixel f_{ij} : on convolue l'image par un filtre RIF donc la réponse est donnée par les coefficients h_{ij} de la fenêtre de convolution : $f'_{ij} = \text{Sum}_V(h_{kl} \cdot f_{kl})$

- les filtres non linéaires dit filtres d'ordre : on transforme la valeur du pixel suite à un ordonnancement des pixels « voisins », le voisinage étant défini par la forme de l'élément structurant.

- Voisinage réduit au pixel considéré : seuillage globale de l'image en fonction de l'histogramme : $f'_{ij} = \min(f_{ij} + \text{seuil}, 255)$

- Sinon, on fait de la morphologie mathématique ou du filtrage d'ordre : prendre la valeur minimale revient à éroder l'image avec un outil défini par la forme de l'élément structurant S : $f'_{ij} = \text{Min}_S(f_{kl})$

A vous de jouer ! Partant de ces cadres génériques, vous pouvez imaginer tous les filtrages possibles en faisant varier les coefficients de pondération, la forme et la taille des voisinage, les enchaînements de tels filtres et donner votre nom à un algorithme qui résoudra un problème spécifique mais d'intérêt général (environnement de programmation imageJ et ses plugins que les biologistes ont définitivement adoptés). Par ailleurs, ceci n'est qu'une porte ouverte dans cette discipline qui présente trop de ramifications pour être évoquées dans le cadre de cette introduction aux concepts et modèles en vision par ordinateur (séquence vidéo, imagerie 3D, couleur, voir les stacks sous imageJ)