Université Tunis Elmanar

Institut Supérieur d'Informatique

Cours : Traitement d'images

Chapitre 5: Morphologie mathématique

présenté par:

Mohamed Sahbi Bahroun

Année Universitaire 2011/2012

Objectifs

La *morphologie mathématique* est une théorie de traitement *non linéaire* de l'information apparue en France dans les années 60 (G. Matheron & J. Serra, Ecole des Mines de Paris), et qui est aujourd'hui très largement utilisée en *analyse d'images*.

Contrairement au traitement linéaire des images, la morphologie mathématique ne s'appuie pas sur le traitement du signal, mais repose sur la *théorie des ensembles*, ce qui en fait une discipline relativement « auto-contenue » et formant un tout cohérent.

L'objectif de ce cours est de *fournir les bases*, mais aussi de présenter *les techniques les plus récentes* du traitement morphologique des images. On s'efforcera de préserver un *équilibre* entre les *concepts* et les *algorithmes*, en développant autant que possible les problèmes d'implantation numérique posés.

Le cours s'accompagne *d'exercices* pour se *familiariser* avec les manipulations algébriques ou géométriques, et pour *développer* certains aspects du cours.

Plan du chapitre

1. Morphologie mathématique : définition
2. Notion de treillis
3. Transformations morphologiques
4. Transformations morphologiques discrètes

1. Morphologie mathématique : Définition

Définition

La morphologie mathématique constitue une technique d'analyse d'images à part entière et peut être utilisée pour résoudre un grand nombre de problèmes de traitement d'images tels que :

- Le filtrage non linéaire d'images : pour conserver ou supprimer des structures d'une image possédant certaines caractéristiques, notamment de forme (morphologiques).

Définition

- **Mesure** : pour obtenir des valeurs numériques caractérisant certaines propriétés des objets de l'image (exemple : granulométrie, analyse de textures, ...).
- **Segmentation** : pour obtenir une partition de l'image en ses différentes régions d'intérêt. Généralement, on cherche à séparer les objets de l'image du fond. Le paradigme de segmentation morphologique s'appuie sur l'opérateur de ligne de partage des eaux.

Opérations sur les ensembles

Propriétés des opérations sur les ensembles

La plupart des opérateurs morphologiques sont définis comme des opérations sur les ensembles, dont on associe les principales propriétés suivantes:

- **idempotence**: Une opération f est *idempotente si elle donne le même résultat qu'elle soit appliquée* une fois ou bien deux fois de suite.

$$\text{f } idempotent \Leftrightarrow \forall I \; image, f(f(I)) = f(I)$$

Propriétés des opérations sur les ensembles

➢ **extensivité**: pour toute image, une transformation f est *extensive si son résultat est plus grand que l'image de* départ. Une opération est *anti-extensive si son résultat est plus petit que* l'image de départ.

f *extensive* $\Leftrightarrow \forall I$ *image*, $f(I) \geq I$

➢**croissance**: Une transformation f est *croissante si elle préserve l'ordre.*

f *croissante* $\Leftrightarrow \forall I, J$ *image*, $I \leq J \Rightarrow f(I) \leq f(J)$.

Propriétés des opérateurs

$$\Phi : E \rightarrow E$$

$$x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y)$$ ***Croissance***

$$x \leq \Phi(x)$$ ***Extensivité***

$$\Phi(x) \leq x$$ ***Anti-extensivité***

$$\Phi\big(\Phi(x)\big) = \Phi(x)$$ ***Idempotence***

2. Notion de treillis

Notion de Treillis

Le cadre de travail de la morphologie mathématique est le treillis complet. Deux sortes de treillis sont couramment utilisés en imagerie : le treillis des ensembles (images binaires) et le treillis des fonctions (images à niveaux de gris).

Un treillis complet est un ensemble partiellement ordonné possédant une borne supérieure (le supremum) et une borne inférieure (l'infimum) et pour lequel toute paire d'éléments possède également un suprémum et un infimum.

Treillis des ensemble

Soit E un espace. L'ensemble des parties P(E) de E muni de l'ordre partiel d'inclusion ⊆ est un treillis complet car il possède un suprémum (E) et un infimum (l'ensemble vide Ø).

Toute paire d'éléments X, Y ⊆ E possède un suprémum : X ∪ Y et un infimum : X ∩ Y.

Les images binaires peuvent être considérées comme des éléments de ce treillis.

Treillis des fonctions

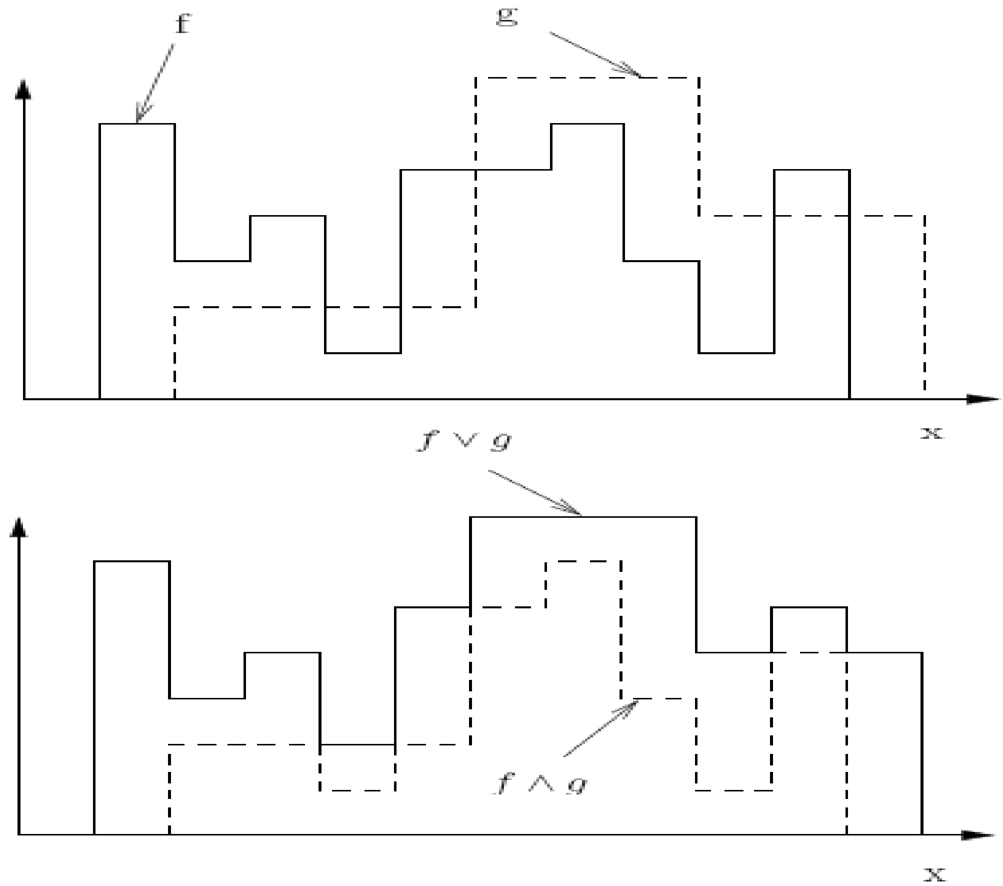
Soit E un espace et T un ensemble de valeurs. L'ensemble des fonctions $E \rightarrow T$ (noté T^E) est un treillis complet pour la relation d'ordre produit :

$F \leq G \Leftrightarrow \forall x \in E, F(x) \leq G(x)$

Le suprémum entre deux fonctions est la fonction résultante du suprémum point à point des deux fonctions : $(\vee_i F_i)(x) = \vee_i F_i(x)$. De même, l'infimum est donné par : $(\wedge_i F_i)(x) = \wedge_i F_i(x)$.

Les images binaires peuvent être considérées comme des éléments du treillis des fonctions.

Exemple



Supremum et infimum entre deux fonctions f et g

Exemple de treillis complets

Treillis des fonctions

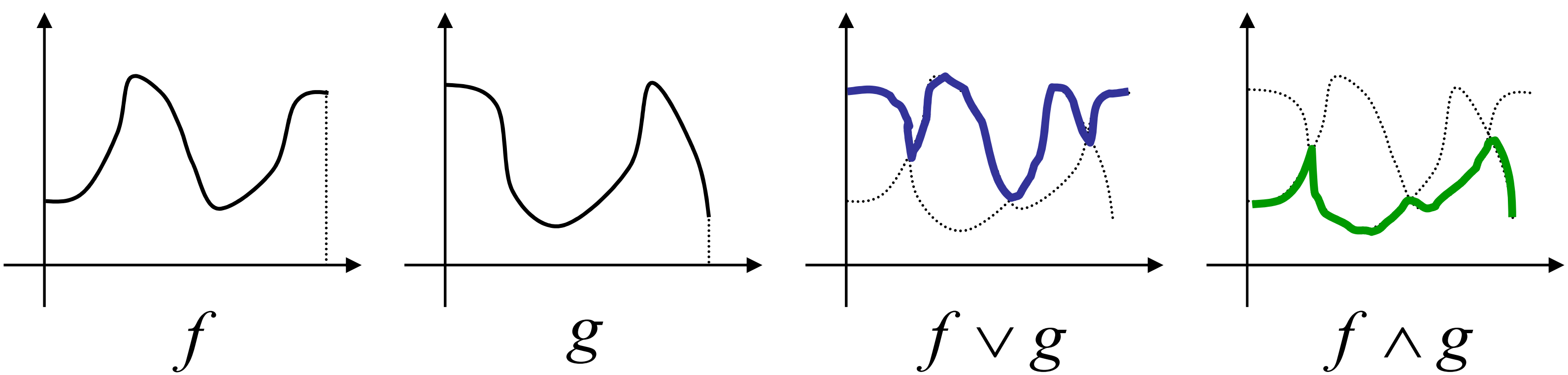
- ***éléments :*** les fonctions réelles ou numériques : $f : S \to \mathbf{R}$ ou $S \to \mathbf{Z}$

- ***relation d'ordre :*** $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in S, f(x) \leq g(x)$

- ***sup :*** $\vee \{f_i\}$

- ***inf :*** $\wedge \{f_i\}$

définies par : $\begin{cases} (\vee \{f_i\})(x) = \vee \{f_i(x)\} \\ (\wedge \{f_i\})(x) = \wedge \{f_i(x)\} \end{cases}$



3. Transformations morphologiques

Transformations morphologiques

Dans tout ce qui va suivre on évitera de faire la distinction entre les images binaires et les images à niveaux de gris, le premier étant un cas particulier du second.

Erosion et dilatation

Dans le cadre des treillis complets, on appelle érosion toute opération qui commute avec l'infimum, et dilatation toute opération qui commute avec le suprémum.

Morphologie : opérateurs de base

opérateurs de base

Ceux qui préservent la structure...

$$\boxed{x \le y \Rightarrow \Phi(x) \le \Phi(y)}$$

CROISSANCE

...et commutent avec les lois de base :

sup $\longrightarrow$ $\| \quad \Phi\left(\vee \{x_i\}\right) = \vee\{\Phi(x_i)\}$ $\nearrow$ ***DILATATION***

inf $\longrightarrow$ $\| \quad \Psi\left(\wedge \{x_i\}\right) = \wedge\{\Psi(x_i)\}$ $\searrow$ ***EROSION***

Erosion

- X, E *et* B des ensembles de R^2 tels que X est inclus dans R^2
- B est dit élément structurant. Il admet un centre $z \rightarrow B_z$
- On déplace B_z de telle sorte que son centre occupe tous les points de E et on pose la question :

est-ce que $B_z \subseteq X$?

- Tous les points z ayant une réponse positive forment un nouvel ensemble dit érodé de X par B

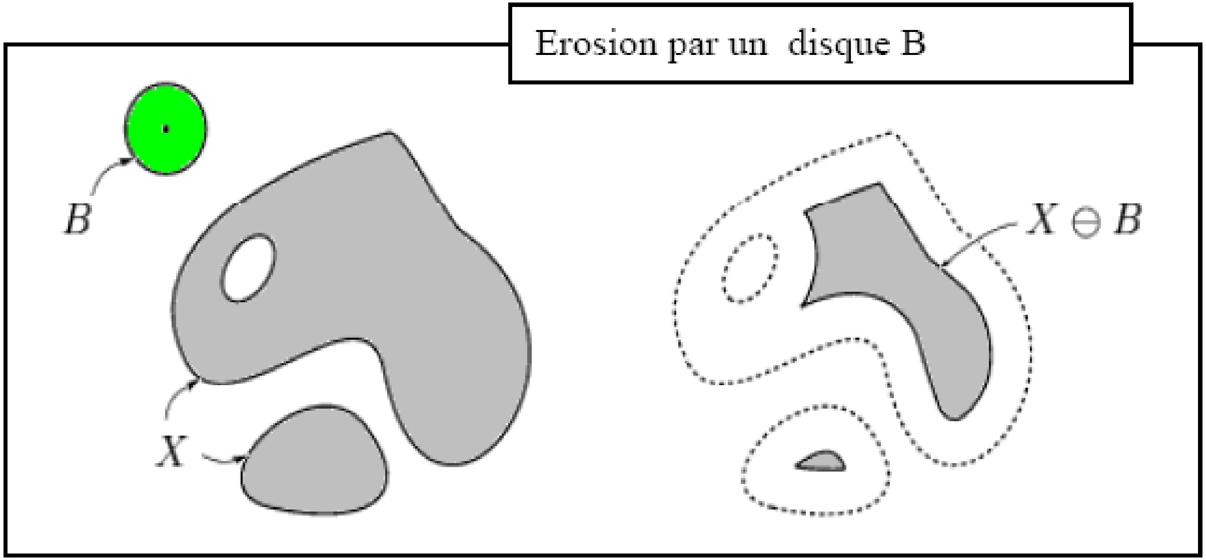
$$\varepsilon_B(X) : X \mapsto X \ominus B$$

$$X \Theta B = \{z \in E \, / \, B_z \subseteq X\}$$

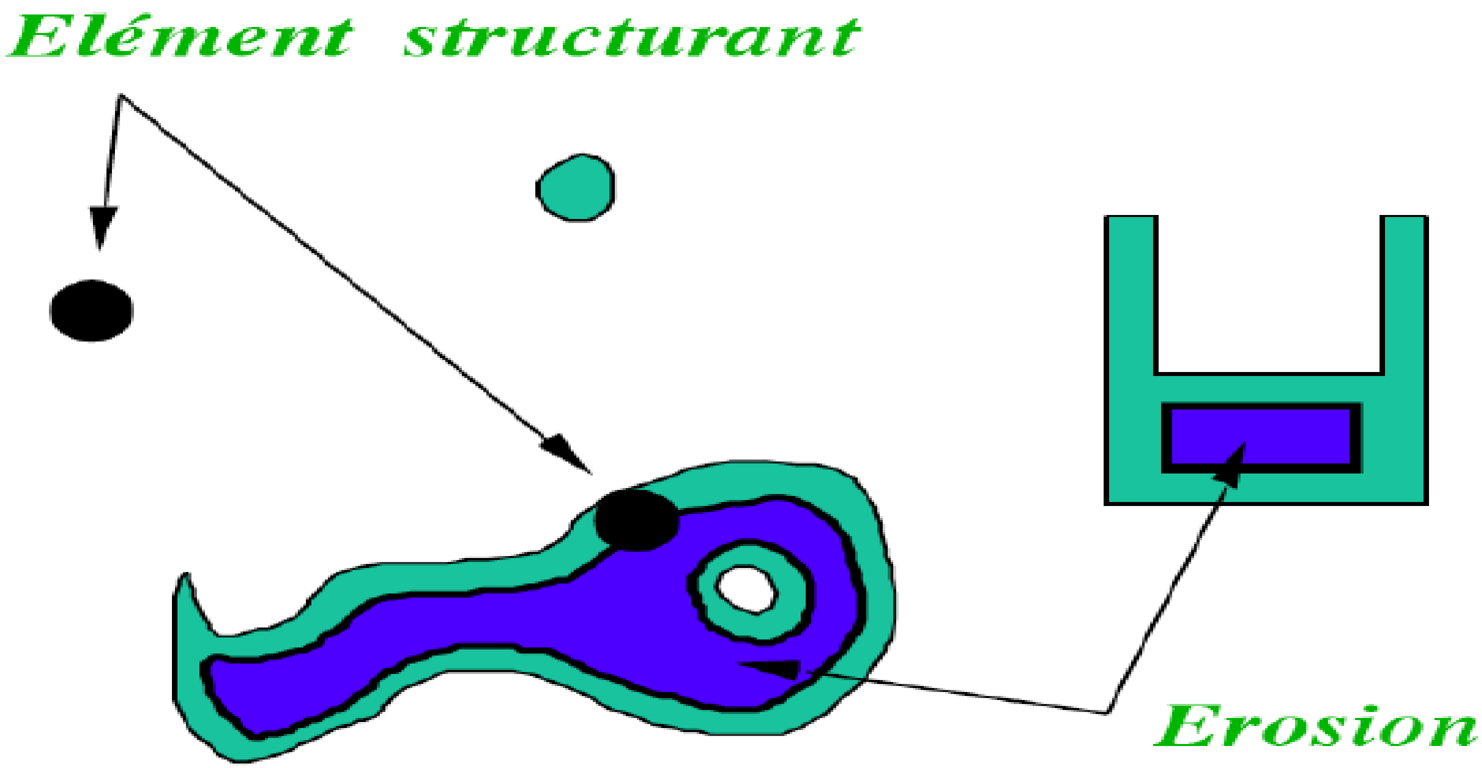
Effets de l'érosion

Effets de l'érosion :

- Rétrécissement des objets de taille > taille de B.
- Disparition des petites composantes.
- Séparation des objets aux étranglements.



Exemple érosion



Dilatation

- X inclus dans un ensemble E et B_z un élément structurant
- On B_z déplace de telle sorte que son centre occupe tous les points de E
- La dilatation d'un ensemble X par un élément structurant B_z est définie comme l'union des éléments structurants dont l'origine est déplacée à l'intérieur de X

$$\delta_B(X) : X \mapsto X \oplus B$$

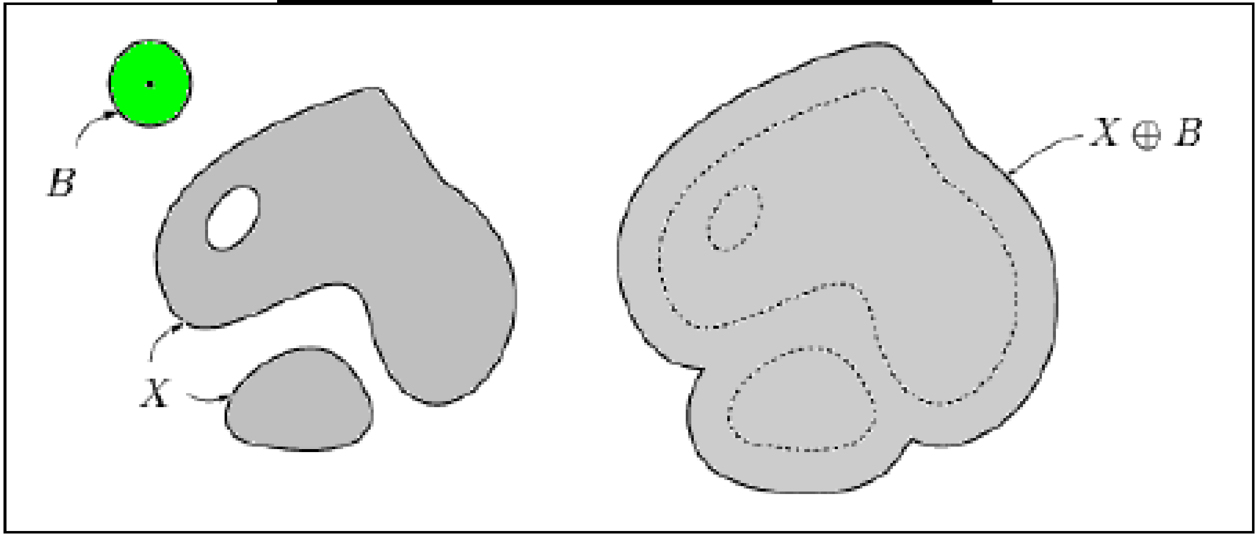
$$X \oplus B \Leftrightarrow \{ z \in E \,/\, B_z \cap X \neq \Phi \}$$

Dilatation

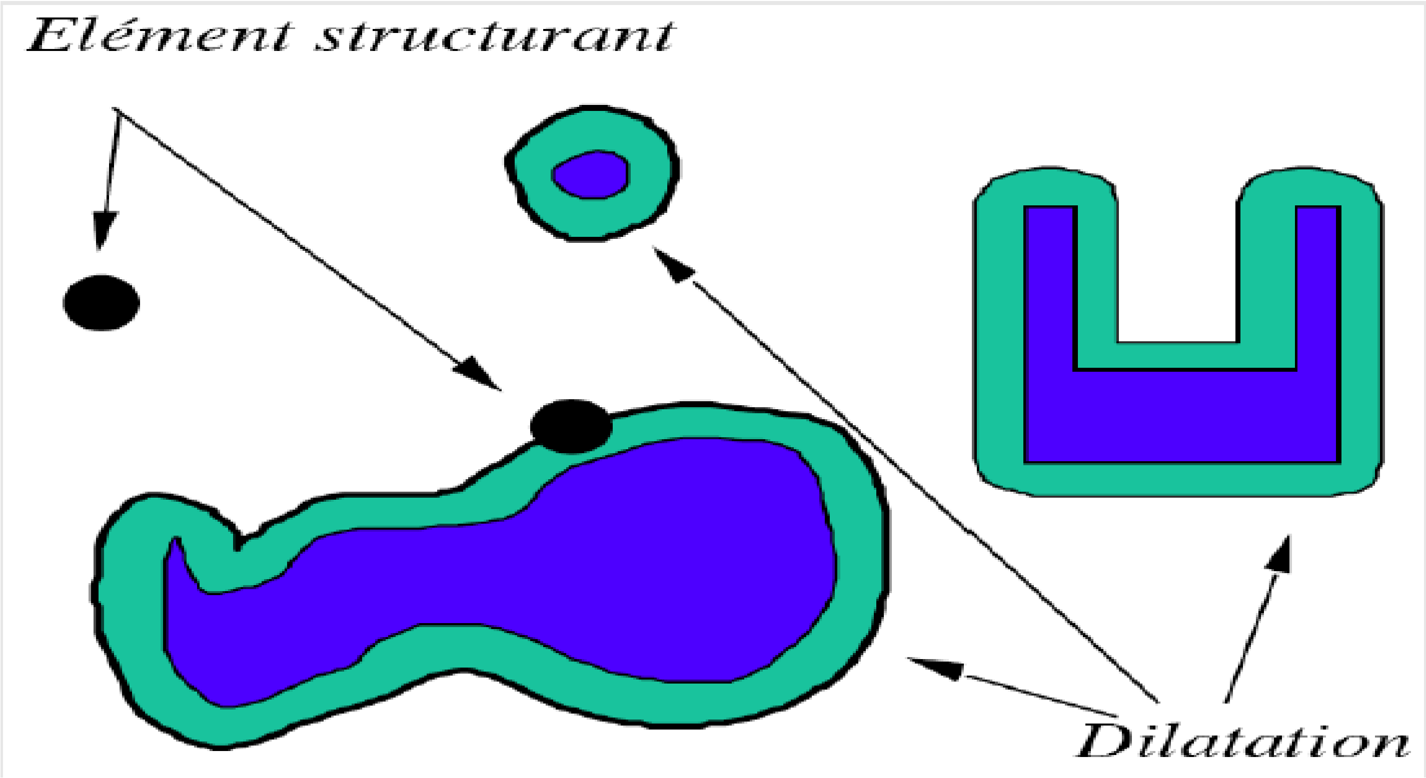
Effets de la dilatation

- Boucher les trous.
- Réunit les composants très proches.
- Ne préserve pas la connexité.

Dilatation par un disque B



Exemple dilatation



Propriétés topologiques

Propriétés topologiques de l'érosion:

- Croissante: $X \subseteq Y \Rightarrow X \Theta B \subseteq Y \Theta B$
- Anti-extensive: $X \Theta B \subseteq X$
- Non idempotente:
- Ne préserve pas la connexité

Propriétés topologiques de la dilatation

- Croissante: $X \subseteq Y \Rightarrow X \oplus B \subseteq Y \oplus B$
- Extensive: $X \subseteq X \oplus B$
- Non idempotente
- Ne préserve pas la connexité

Propriétés de l'érosion

l'érosion est anti-extensive: la transformée d'un objet est incluse dans l'objet lui-même.

l'érosion est une transformation croissante: si X est inclus dans Y, alors l'érodé de X est inclus dans l'érodé de Y.

l'érosion est une transformation semi-continue supérieure: si X tend vers Y, alors l'érodé de X tend vers un ensemble inclus dans ou égal à l'érodé de Y.

l'érosion n'est pas idempotente: l'érodé de l'érodé est différent de l'érodé.

Propriétés topologiques

l'érosion ne préserve pas la connexité des objets, mais préserve la connexité du fond.

l'érosion n'est pas une transformation homotopique.

Propriétés de la dilatation

- la dilatation est extensive: la transformée d'un objet est incluse dans l'objet lui-même.
- la dilatation est une transformation croissante: si X est inclus dans Y, alors le dilaté de X est inclus dans le dilaté de Y.
- la dilatation est une transformation semi-continue inférieure: si X tend vers Y, alors le dilaté de X tend vers un ensemble contenant ou égal au dilaté de Y.
- la dilatation n'est pas idempotente: le dilaté du dilaté est différent du dilaté.

Propriétés topologiques

- la dilatation préserve la connexité des objets, mais ne préserve pas la connexité du fond.
- la dilatation n'est pas une transformation homotopique.

Gradient Morphologique

Soient les opérateurs suivant:

$\delta_B(X) : X \mapsto X \oplus B$ et $\varepsilon_B(X) : X \mapsto X \ominus B$

Représentant respectivement les opérateurs de dilatation et d'érosion.

- Le gradient morphologique ou gradient de Beucher:

$$\rho_B(F) = \delta_B(F) - \varepsilon_B(F)$$

- Le gradient morphologique interne:

$$\rho_B^-(F) = F - \varepsilon_B(F)$$

- Le gradient morphologique externe:

$$\rho_B^+(F) = \delta_B(F) - F$$

Amélioration d'image

a) Image F, b) Gradient morphologique $\rho_B(F)$, c) Gradient morphologique interne $\rho_B^-(F)$, d) Gradient morphologique externe $\rho_B^+(F)$.

Ouverture

L'opérateur :

$$\gamma_B : F \mapsto (F \ominus B) \oplus B = \delta_B[\varepsilon_B(F)]$$

est appelé l'ouverture morphologique de l'image *F* par l'élément structurant (ensembliste ou fonctionnel) *B*. La réunion des éléments structurants entièrement inclus dans l'objet:

$$\gamma_B(X) = \bigcup \{B \mid B \subseteq X\}$$

Ouverture

- Erosion suivie d'une dilatation par le même ES.
- L'érosion permet de supprimer d'une image toutes les structures ne contenant pas l'élément structurant, les autres structures sont altérées.
- Eviter cette altération, en dilatant le résultat de l'érosion par le même élément structurant :
  - Ainsi les structures éliminées par l'érosion auront disparu (les petits détails).
  - Les structures simplement altérées par l'érosion retrouveront de manière approximative leur forme originelle .

Propriétés de l'ouverture

l'ouverture est une transformation croissante: si X est inclus dans Y, l'ouverture de X est incluse dans l'ouverture de Y.
l'ouverture est une transformation anti-extensive: l'ouverture de X est incluse dans X.
l'ouverture est une transformation semi-continue supérieure.
l'ouverture est idempotente: il suffit d'appliquer une seule fois la transformation.

Propriétés topologiques

l'ouverture ne préserve pas la connexité des objets, mais préserve la connexité du fond.
l'ouverture n'est pas une transformation homotopique.

Propriétés de l'ouverture

- Anti-extensive: elle assombrit l'image
- Croissante:

$$F \leq G \Rightarrow \gamma_B(F) \leq \gamma_B(G)$$

- Idempotente: $\gamma\gamma = \gamma$

  l'application successive du même opérateur ne modifiera plus l'image.

Fermeture

L'opérateur :

$$\phi_B : F \mapsto (F \oplus B) \ominus B = \varepsilon_B[\delta_B(F)]$$

est appelé la fermeture morphologique de l'image *F* par l'élément structurant *B*.

Fermeture

- Dilatation suivie d'une érosion par le même ES.
- La fermeture morphologique agit de manière duale, elle bouche les parties du fond de l'image ne contenant pas l'élément structurant.
- Elle remplit les golfes et les canaux étroits, supprime les petits lacs.

Propriétés Fermeture

- Extensive: elle éclaircit l'image
- Croissante:

$$F \leq G \Rightarrow \phi_B(F) \leq \phi_B(G)$$

- Idempotente: $\phi\phi = \phi$

l'application successive du même opérateur ne modifiera plus l'image.

Propriétés de la fermeture

la fermeture est une transformation croissante: si X est inclus dans Y, la fermeture de X est incluse dans la fermeture de Y.
la fermeture est une transformation extensive: X est inclus dans sa fermeture.
la fermeture est une transformation semi-continue supérieure.
la fermeture est idempotente: il suffit d'appliquer une seule fois la transformation.

Propriétés topologiques

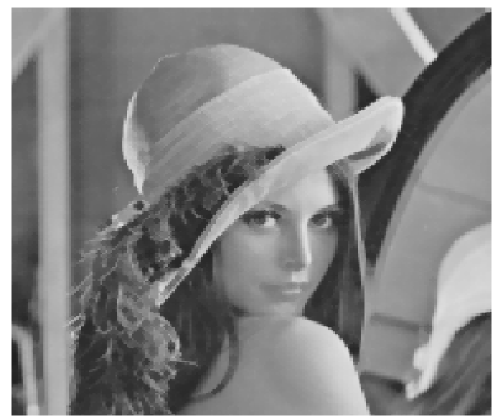
la fermeture préserve la connexité des objets, mais ne préserve par la connexité du fond.
la fermeture n'est pas une transformation homotopique.

Exemples

Image Originale

Ouverture

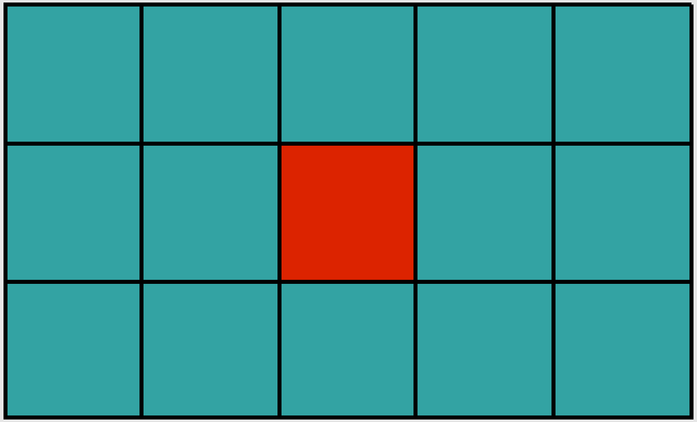
Fermeture



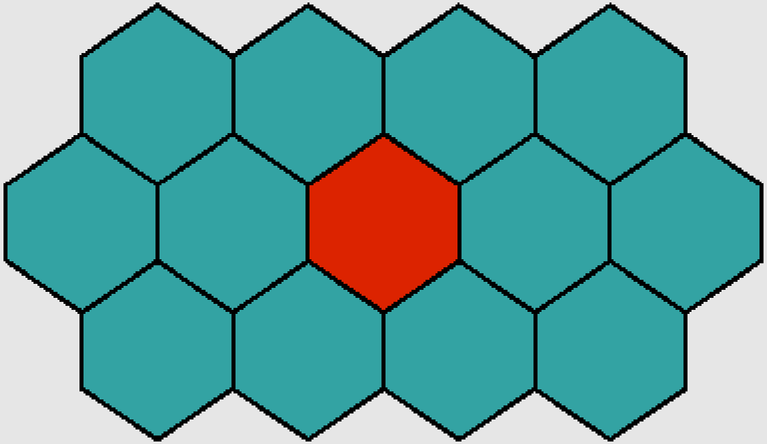
4. Transformations morphologiques discrétes

Echantillonnage spatial

le type de grille d'échantillonnage est important pour définir la notion de connexité en discret.



échantillonnage carré:
chaque pixel possède soit 4 soit 8 voisins.



échantillonnage hexagonal:
chaque pixel possède 6 voisins.

Transposition des opérateurs de base

Érosion et dilatation

simples transpositions des opérations ensemblistes définies sur un support continu.

mêmes propriétés algébriques et topologiques.

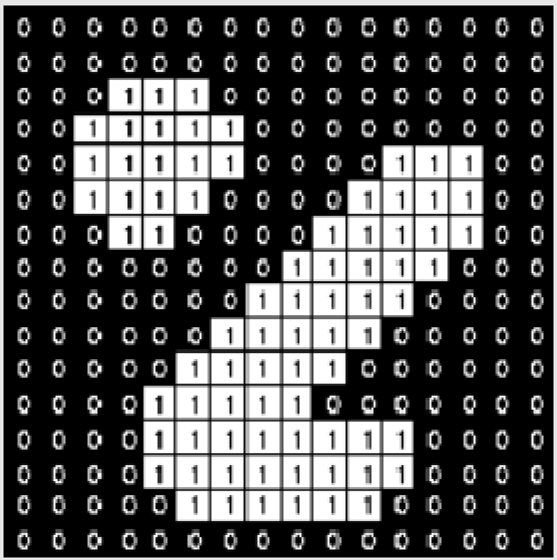


image initiale

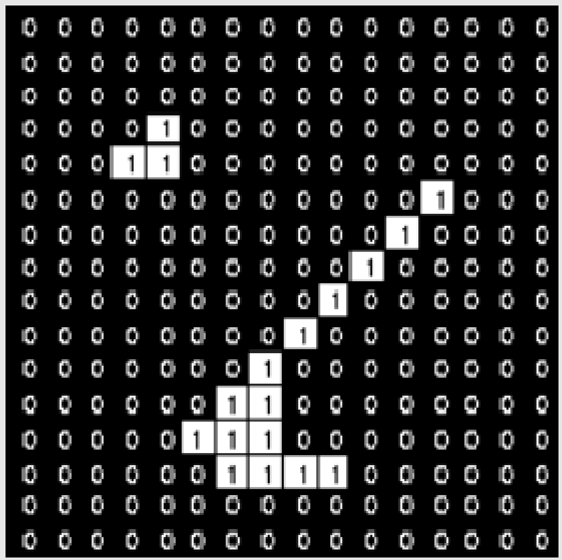


image érodée

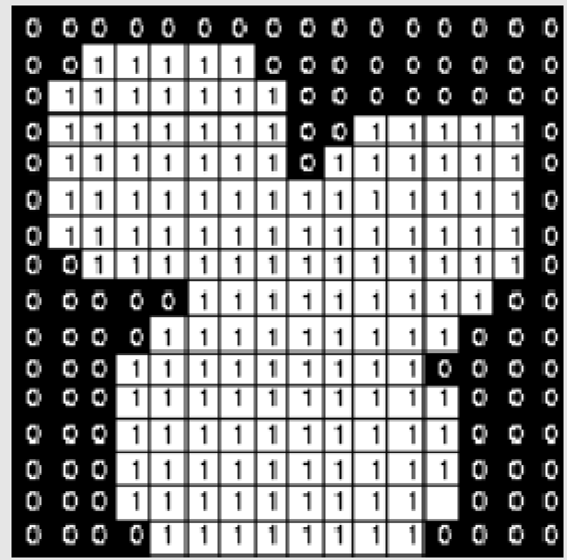


image dilatée

Transposition des opérateurs de base

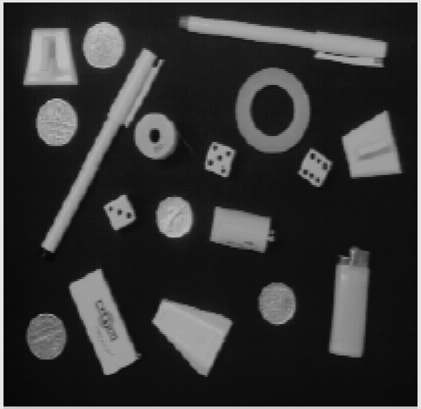


image initiale

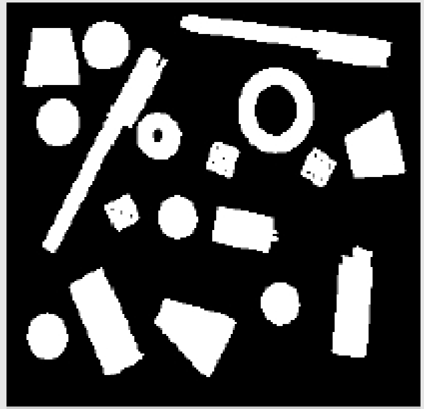


image binarisée

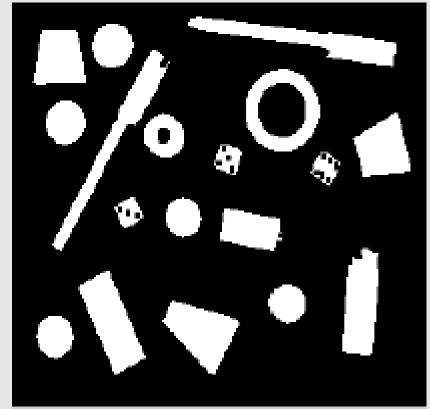


image érodée

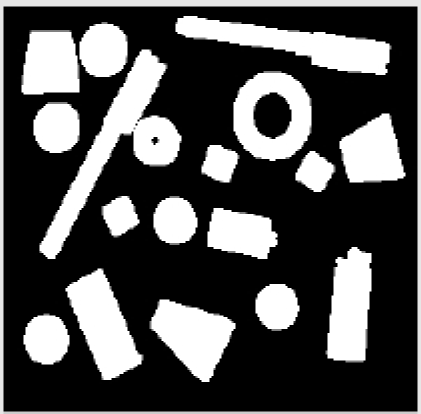


image dilatée

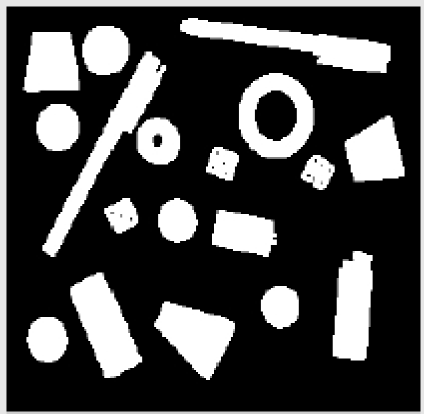


image ouverte

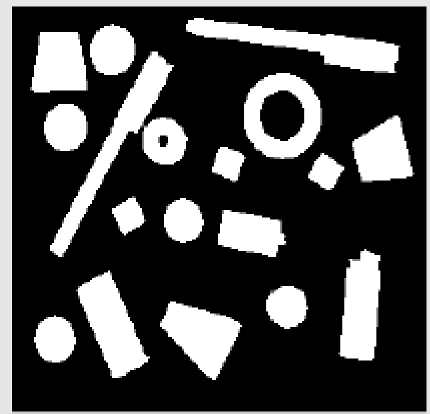


image fermée

opérations définies par l'élément structurant

Élément standard

voisinage comportant des 1 pour les pixels appartenant à l'élément structurant, les autres pixels étant indifférents.
les pixels indifférents sont parfois indiqués par des 0 ou des X.

Élément étendu

voisinage comportant de 1 et des 0 pour les pixels définissant l'élément structurant, les autres pixels sont soit marqués par un X, soit laissés vides.

	1	
1	1	1
	1	

0	1	0
1	1	1
0	1	0

X	1	X
1	1	1
X	1	X

éléments standards équivalents

	1	
0	0	1
	1	

X	1	X
0	0	1
X	1	X

éléments étendus équivalents

Transposition des opérateurs de base

Opération «Hit or Miss»

l'élément structurant étendu est centré sur chaque pixel de l'image comme pour les opérations ensemblistes.

la question posée est: est-ce que le contenu de l'image est identique au contenu de l'élément structurant, sauf pour les positions marquées comme indifférentes?

si la réponse est oui, le pixel résultant vaut 1, sinon il vaut 0.

Utilisation

permet de détecter des configurations locales particulières dans une image.

plusieurs masques peuvent être utilisés indépendamment, les images résultat étant ensuite combinées par une opération OU.

Exemple d’opération Hit or Miss

4 masques utilisés

0	0	
0	1	1
	1	

haut gauche

	0	0
1	1	0
	1	

haut droit

	1	
0	1	1
0	0	

bas gauche

	1	
1	1	0
	0	0

bas droit

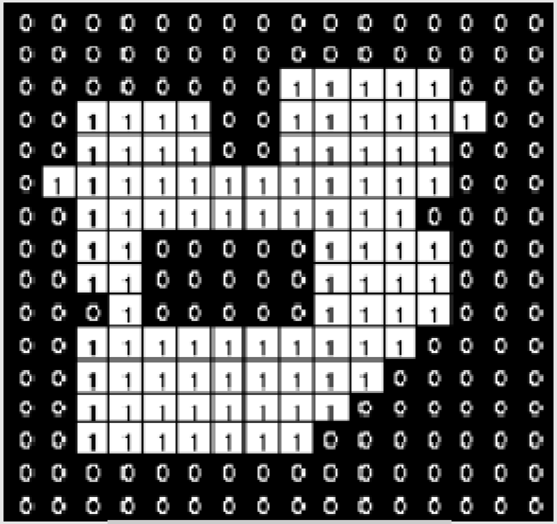
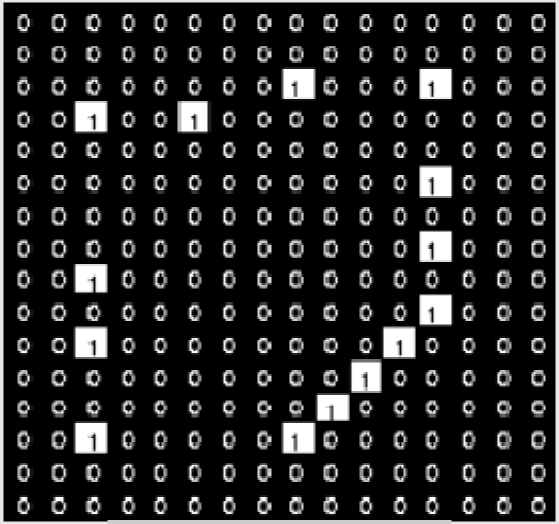


image originale



coins détectés

Bibliographie