

# Modélisation des machines électriques par le calcul analytique des champs

Jean-Paul CARON

I.N.P.L. – E.N.S.E.M. – G.R.E.E.N.  
2 Av. de la foret de Haye  
54500 Vandoeuvre-lès-Nancy

[Jean-Paul.Caron@ensem.inpl-nancy.fr](mailto:Jean-Paul.Caron@ensem.inpl-nancy.fr)

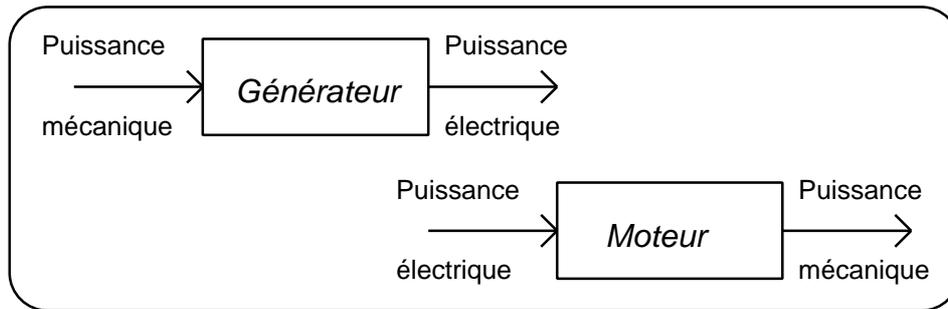
<b>00 - INTRODUCTION :</b> .....	<b>4</b>
<b>0 - REMARQUES IMPORTANTES :</b> .....	<b>4</b>
<b>1 - PRINCIPE DE BASE : LOI DE LAPLACE :</b> .....	<b>5</b>
<b>2 – INDUCTION MAGNÉTIQUE CRÉÉE PAR UNE NAPPE DE COURANT.....</b>	<b>7</b>
2 – 1 : Expression du Potentiel vecteur dans l'entrefer : .....	7
2 – 2 : Calcul du LAPLACIEN dans un système de coordonnées cylindriques.....	9
2 – 3 : Calcul des composantes de l'induction magnétique dans l'entrefer : .....	11
<b>3 – CALCUL DE L'ÉNERGIE MAGNÉTIQUE STOCKÉE :</b> .....	<b>12</b>
<b>4 – COUPLE EXERCÉ PAR UNE NAPPE DE COURANT SUR ELLE-MÊME :</b> .....	<b>13</b>
<b>5 – CALCUL DU COUPLE ENTRE DEUX NAPPES DE COURANT :</b> .....	<b>13</b>
5 – 1 : Calcul du potentiel en coordonnées cylindriques. ....	13
5 – 2 : Calcul de l'induction magnétique.....	15
5 – 3 : Calcul de l'énergie magnétique : .....	15
5 – 4 : Calcul du couple exercé entre les deux nappes de courant : .....	16
5 – 5 : Autre manière de calculer le couple exercé entre les deux nappes de courant : .....	17
5 – 6 : Approximation du couple : .....	17
<b>6 - CONCLUSIONS PARTIELLES :</b> .....	<b>17</b>
<b>7 - QUESTION : COMMENT CRÉER LES DENSITÉS DE COURANT ?.....</b>	<b>18</b>
7 – 1 Densité de courant équivalente à une encoche : .....	20
7 – 2 Cas d'une machine avec six encoches réparties sur le stator.....	21
7 – 3 Cas d'une machine avec douze encoches réparties sur le stator.....	24
7 – 4 Reprenons le cas de la machine avec douze encoches réparties sur le stator .....	26
<b>8 - CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ DANS L'ENTREFER PAR CETTE DENSITÉ DE COURANT ....</b>	<b>30</b>
<b>9 - ANGLE ÉLECTRIQUE, ANGLE MÉCANIQUE ; NOMBRE DE PAIRES DE PÔLES.....</b>	<b>32</b>
<b>10 - ALIMENTATION D'UNE MACHINE PAR TROIS COURANTS TRIPHASÉS ÉQUILIBRÉS. ....</b>	<b>34</b>
10 – 1 Cas N°1 : $k = 0$ : .....	35
10 – 2 Cas N°2 : $k = 1$ : .....	35
10 – 3 Cas N°2 : $k = 0$ : .....	35
10 – 4 Généralisation : $k =$ quelconque : .....	36
<b>11 - HYPOTHÈSE DU FONDAMENTAL :</b> .....	<b>37</b>
11 – 1 Conclusion : .....	38
<b>12 - CHAMPS TOURNANTS .....</b>	<b>38</b>
<i>Remarques:</i> .....	39
<b>13 – CONDITIONS D'EXISTENCE DU COUPLE DANS UNE MACHINE ÉLECTRIQUE. ....</b>	<b>39</b>
13 – 1 Introduction.....	39
13 - 2 Force de Laplace.....	39
13 - 3 Couple calculé avec deux nappes de courants.....	40
<b>14 - APPLICATIONS PARTICULIÈRES :</b> .....	<b>42</b>
14 - 1 La Machine à courant continu : $\omega_r = \omega_s = 0$ .....	42
14 - 2 Le Moteur universel : $\omega_r = \omega_s = 2\pi f$ .....	45
<b>15 - CONCLUSION PARTIELLE :</b> .....	<b>45</b>

<b>16 - NAPPE DE COURANT ROTORIQUE EN ROTATION DANS LE STATOR : .....</b>	<b>45</b>
16 - 1 La machine asynchrone.....	46
16 - 2 La machine synchrone .....	46
16 - 3 Exemple de réalisation d'un rotor de machine synchrone :.....	47
<b>17 - CONCLUSIONS :.....</b>	<b>50</b>

## GENERALITES SUR LES MACHINES TOURNANTES

### 00 - Introduction :

Les convertisseurs électromécaniques sont destinés à transformer de l'énergie électrique en énergie mécanique ou inversement.



Les plus classiques sont :

- les machines synchrones ( Alternateur ou Moteur Synchrone)
- les machines asynchrones (utilisées essentiellement en moteur)
- les machines à courant continu

D'autres machines existent :

- moteurs universels ( à courant continu ou alternatif )
- machines à réluctance variable ( moteurs pas à pas par exemple ).

Actuellement, les machines électriques sont de plus en plus associées avec des convertisseurs électroniques de puissance, qui permettent d'obtenir des formes de tension et/ou de courant très diverses quant à la forme, la fréquence ou l'amplitude.

L'évolution des machines électriques s'est faite grâce à :

- un refroidissement mieux contrôlé
- une meilleure qualité des matériaux utilisés (dans les matériaux ferromagnétiques, les performances sont souvent limitées par la valeur de l'induction de saturation)
- l'apparition d'aimants permanents performants.
- l'utilisation de matériaux supraconducteurs dans le domaine des forts courants et forts champs magnétiques (problème du refroidissement à l'hélium, espérance avec les supra à l'azote)

### 0 - Remarques importantes :

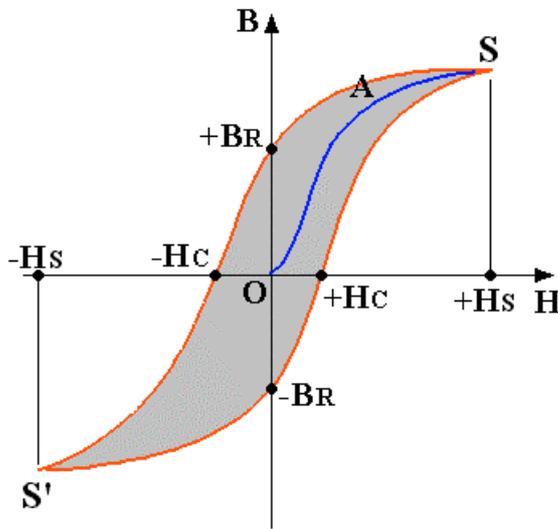
Une machine électrique est essentiellement constituée de :

- CUIVRE : traversé par des courants, et qui permet de créer le champ H et donc l'induction B
- FER : qui canalise les lignes d'induction, il est le siège de B élevé
- AIR : généralement l'entrefer d'une machine électrique est le plus petit possible. La mécanique et la thermique imposent un jeu entre le stator et le rotor.

L'utilisation de ces matériaux induit différentes pertes :

dans le cuivre, nous avons des pertes par effet Joule  $P_j = R I^2$

dans le fer, la variation de H par rapport au temps induit des pertes par hystérésis, proportionnelles au carré de la tension



Courbe de saturation d'un matériaux ferromagnétique. Cycle d'hystérésis

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\text{période}} H \cdot dB = S \text{ (surface du cycle)}$$

$P_{\text{hystérésis}} \approx k \cdot f \cdot B_{\text{max}}^2 \cdot V$  où f est la fréquence et V le volume de fer

de même nous avons dans le fer des pertes par courants de Foucault

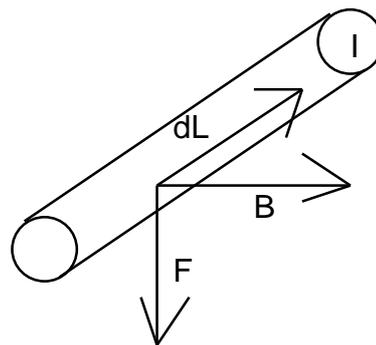
$P_{\text{foucault}} \approx K \cdot f^2 \cdot B_{\text{max}}^2 \cdot V \cdot e$  où e est l'épaisseur des tôles

Pour les matériaux utilisés dans les machines, les pertes fer sont de l'ordre de 0,5 à 5 Watt par kilo (à 50 Hz, 1 Tesla).

**Ces problèmes de pertes ne seront plus abordés lors de nos études ultérieures.**

## 1 - Principe de base : Loi de Laplace :

Le fonctionnement de toutes les machines tournantes est basé sur la loi de Laplace : un conducteur qui est parcouru par un courant I est soumis à la force F quand il est placé dans une induction B.



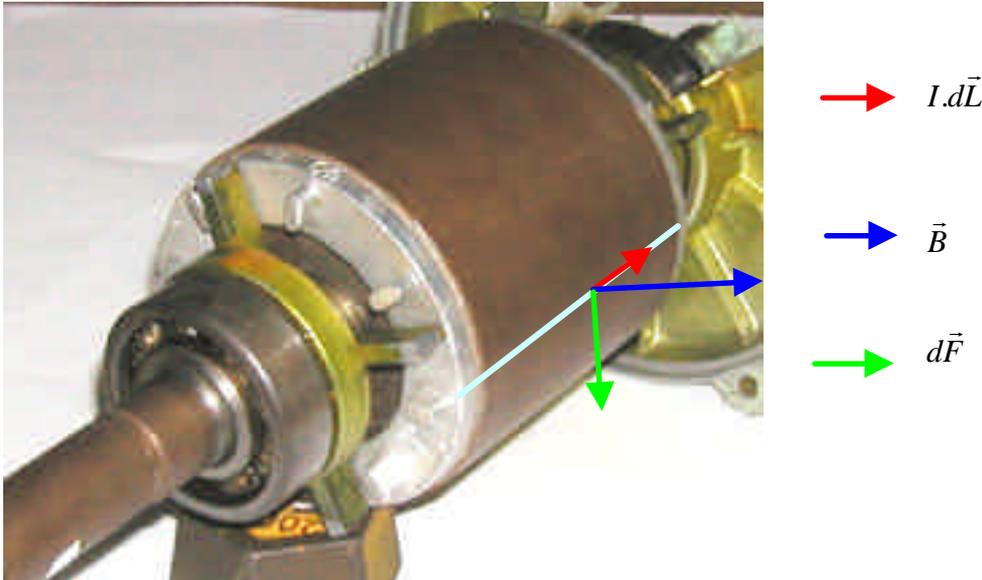
La force élémentaire s'exprime par la relation :

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{L} \wedge \vec{B} \Rightarrow dF = B \cdot I \cdot dL \cdot \sin(\alpha)$$

La force est proportionnelle à l'intensité du courant, et à l'induction B. L'induction est prépondérante dans les machines électriques et non le champ magnétique H. Pour augmenter la valeur de l'induction, nous pouvons soit faire passer une intensité I grande dans les bobinages (Bobinages supraconducteurs par exemple), soit utiliser un matériau magnétique pour canaliser les lignes d'induction et diminuer la réluctance du circuit.

Une machine tournante comprend un stator et un rotor, séparés par un entrefer. La valeur de l'induction dans l'entrefer d'une machine classique est de l'ordre de 1,2 Tesla.

La disposition des conducteurs doit être telle que la valeur :  $\sin(\mathbf{dl}, \mathbf{B})$  soit maximale, donc égale à 1. Les conducteurs sont donc placés perpendiculairement à l'induction. Il ne faut pas oublier non plus que c'est la valeur du couple par rapport à un axe qui est prépondérant. La force doit donc être perpendiculaire à la ligne d'action (ou parallèle au déplacement du conducteur dans le cas du moteur linéaire).



Les deux dispositions classiques des machines tournantes sont :

- Pour la première : conducteurs axiaux & champ radial (voir la photographie ci-dessus) :

Les conducteurs sont placés le long d'une génératrice du cylindre constituant le rotor de la machine ; l'induction magnétique doit être la plus radiale possible. Dans ce cas, la force, donc le couple, est optimisée.

Dans un repère de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , cela se traduit par :

$$d\vec{F} : dF \Rightarrow \vec{B} : \begin{matrix} B \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \text{ et } Id\vec{L} : \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ IdL \end{matrix}$$

Cette disposition est la plus classique, et sera largement utilisée.

- La deuxième disposition possible est la suivante : conducteurs radiaux & champ axial. Cette dernière disposition n'est vraiment utilisée que pour les moteurs dit à circuits imprimés ou pour certains moteurs à courant de Foucault.

Dans un repère de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , cela se traduit par :

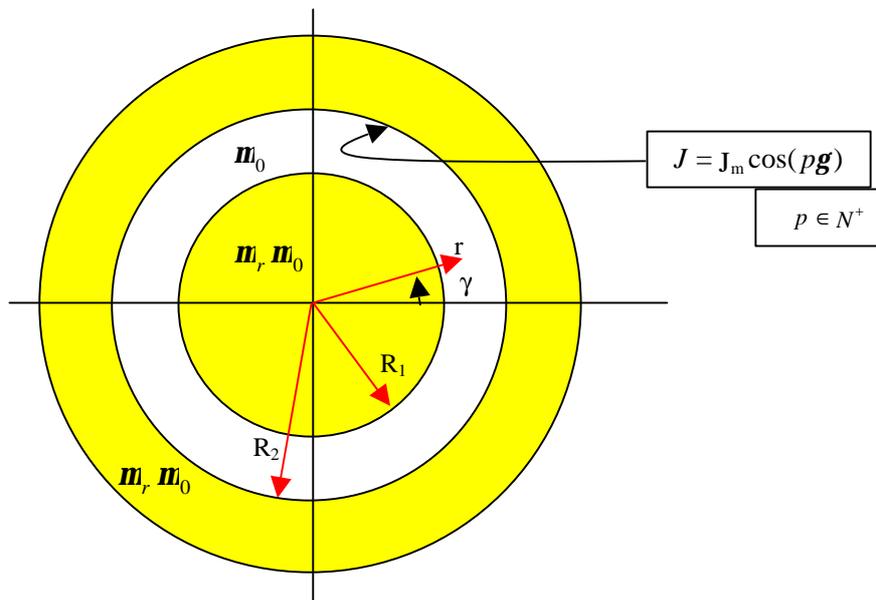
$$d\vec{F} : dF \Rightarrow \vec{B} : \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ B \end{matrix} \text{ et } Id\vec{L} : \begin{matrix} IdL \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Après avoir posé ces hypothèses de départ, il nous faut calculer la valeur de ces forces et donc du couple dans les machines électriques.

Pour ce faire, nous procéderons en étapes :

1. La première consiste à calculer l'induction magnétique créée par une densité superficielle de courant (être purement fictif mais au combien facile à manipuler mathématiquement).
2. Nous calculerons ensuite l'énergie magnétique stockée dans l'entrefer d'une machine et nous montrerons que le couple exercé par une densité de courant sur elle-même (dans une machine à pôles lisses) est nul
3. Nous disposerons alors deux nappes de courant : une au stator et une au rotor. Il sera alors possible de calculer le couple créé par l'interaction de ces deux densités de courant.
4. Il nous sera alors obligatoire d'abandonner les densités superficielles de courant au profit de courants réels, placés dans des encoches. Moyennant certaines hypothèses, nous pourrons représenter ces courants dans des encoches par une densité superficielle équivalente, et de ce fait, valider les étapes précédentes.

## 2 – Induction magnétique créée par une nappe de courant



Soit une machine électrique constituée d'un stator et d'un rotor en tôles magnétique de perméabilité magnétique relative supposée infinie. Sur la surface interne du stator on dispose une densité de courant  $J(\gamma)$ .

### 2 – 1 : Expression du Potentiel vecteur dans l'entrefer :

Les équations qui régissent l'induction magnétique sont les équations de Maxwell :

$$\vec{\text{Rot}}(\vec{H}) = \vec{j} \quad \text{Expression locale du Théorème d' AMPERE}$$

$$\text{Div}(\vec{B}) = 0 \quad \text{Aspect conservatif de l' induction}$$

Introduisons la relation qui existe entre le champ et l'induction magnétiques.

**Hypothèses :**

1) Cette relation est univoque. Nous ne prendrons donc pas en compte les phénomènes d'Hystérésis.

2) Cette relation est isotrope (la même dans toutes les dimensions).

3) Cette relation est linéaire : le coefficient qui relie B et H est une constante réelle.

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

La plupart des problèmes rencontrés en magnétostatique sont des problèmes bidimensionnels. En effet, le calcul d'une machine réelle, c'est à dire en tenant compte des effets de bords, des têtes de bobines ... etc., est un problème tridimensionnel et requiert l'usage de logiciels de calculs de type

"éléments finis" ou "différences finies", s'appuyant sur des connaissances mathématiques qui sortent du cadre de ce cours.

Traisons donc notre problème en bidimensionnel.

Disposons les densités de courant suivant l'axe Oz

$$\vec{J} \text{ a comme composantes: } \begin{cases} 0 \\ 0 \\ J(\gamma) \end{cases}$$

Nous pouvons écrire :

$$\text{Div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \exists \vec{A} \text{ t.q. } \vec{B} = \vec{R}ot(\vec{A}) \\ \text{Div}(\vec{A}) = 0 \end{cases}$$

où A est le potentiel vecteur. Cette

relation associe le lemme de Poincaré muni d'un terme de jauge.

Si les courants sont portés par l'axe Oz, alors le potentiel vecteur est lui aussi porté par l'axe Oz.

$$\vec{J} : \begin{cases} 0 \\ 0 \\ J(\gamma) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{A} : \begin{cases} 0 \\ 0 \\ A(r, \gamma) \end{cases}$$

Réécrivons le théorème d'Ampère :

$$\vec{R}ot\left(\frac{1}{\mu}\vec{R}ot(\vec{A})\right) = \vec{j} \Leftrightarrow \vec{R}ot\left(\eta\vec{R}ot(\vec{A})\right) = \vec{j} \quad \text{avec : } \left(\frac{1}{\mu}\right) = (\eta)$$

$$\vec{A} : \begin{cases} 0 \\ 0 \\ A(r, \gamma) \end{cases} \Rightarrow \vec{R}ot(\vec{A}) : \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial A(r, \gamma)}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial A(r, \gamma)}{\partial r} \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{R}ot(\eta\vec{R}ot(\vec{A})) : \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \eta r \frac{\partial A(r, \gamma)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\eta}{r} \frac{\partial A(r, \gamma)}{\partial \gamma} \right) \right] \end{cases}$$

Nous pouvons donc écrire cette relation sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\eta \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A(r, \gamma)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A(r, \gamma)}{\partial \gamma^2} \right] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\eta \Delta A(r, \gamma) \end{array} \right\}$$

$$\vec{R}ot\left(\frac{1}{\mu}\vec{R}ot(\vec{A})\right) = \vec{j} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\eta \Delta A(r, \gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j(\gamma) \end{bmatrix}$$

**D'où nous avons à résoudre l'équation :**

$$-\frac{1}{\mu} \Delta A(r, \gamma) = j(\gamma)$$

**Remarque :** Cette équation peut être écrite de manière plus générale sous la forme :

$$\text{Div}\left(\frac{1}{\mu}\nabla A(r,\gamma)\right) + j(\gamma) = 0$$

La perméabilité relative étant supposée infinie, nous pouvons écrire  $H = 0$  dans le fer. En effet, nous avons  $B = \mu H$ . Si  $\mu$  est infini,  $B$  reste fini et donc  $H = 0$ .

Calculons donc les grandeurs électromagnétiques dans la machine décrite auparavant :

## 2 – 2 : Calcul du LAPLACIEN dans un système de coordonnées cylindriques.

Dans un système de coordonnées cylindriques les grandeurs s'écrivent (Problème 3D) :

POTENTIEL	ROTATIONNEL	LAPLACIEN
$\bar{A} \Leftrightarrow \begin{cases} a_r \\ a_\gamma \\ a_z \end{cases}$	$\bar{\text{Rot}}(\bar{A}) \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \gamma} - \frac{\partial a_\gamma}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial r a_\gamma}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \gamma} \right] \end{cases}$	$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Nous avons dit que ce problème pouvait être traité en deux dimensions. Donc :

### Système à deux dimensions : Problème 2D

POTENTIEL	ROTATIONNEL	LAPLACIEN
$\bar{A} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \\ 0 \\ A(r,\gamma) \end{cases}$	$\bar{\text{Rot}}(\bar{A}) \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \gamma} \\ -\frac{\partial A}{\partial r} \\ 0 \end{cases}$	$\Delta A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma^2}$

Résolution du LAPLACIEN en coordonnées cylindriques :

$$\Delta A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma^2} = 0 \text{ nous donne : } \Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma^2} = 0$$

Quand le problème est à variables séparables (une ou plusieurs surfaces caractéristiques du problème sont des surfaces à coordonnées constantes), nous cherchons une solution de la forme :

$$A = \sum_n A_n \quad \text{et} \quad A_n = F_n(r) \cdot G_n(\gamma)$$

Chaque élément de la série est tel que :  $\Delta A_n = 0$

Ecrivons :  $\frac{\Delta A_n}{A_n} = 0$  soit donc :  $\frac{\Delta A_n}{A_n} = \frac{\frac{\partial^2 G_n F_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial G_n F_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G_n F_n}{\partial \gamma^2}}{G_n F_n} = 0$

ce qui nous donne :  $\frac{G_n F_n'' + \frac{1}{r} G_n F_n' + \frac{1}{r^2} G_n'' F_n}{G_n F_n} = 0$  soit donc :

$$\frac{F_n''}{F_n} + \frac{1}{r} \frac{F_n'}{F_n} + \frac{1}{r^2} \frac{G_n''}{G_n} = 0 \text{ et en multipliant par } r^2 \quad \left[ r^2 \frac{F_n''}{F_n} + r \frac{F_n'}{F_n} \right] + \left[ \frac{G_n''}{G_n} \right] = 0$$

Le premier terme entre parenthèses est uniquement une fonction de la variable r, le deuxième terme une fonction de l'angle  $\gamma$  uniquement.

Nous pouvons donc écrire :

$$\left[ \frac{G_n''}{G_n} \right] = -m^2 \text{ où } m \text{ appartient à } \mathbb{N}^+$$

et  $\left[ r^2 \frac{F_n''}{F_n} + r \frac{F_n'}{F_n} \right] = m^2$

On démontre facilement que les solutions n'existent que si  $m = n$  et que  $m$  appartient à  $\mathbb{N}^+$  (unicité du potentiel quand  $\gamma$  passe de  $\gamma$  à  $\gamma + 2\pi$ )

Les solutions sont du type :  $G_m = \alpha_m \cos(m\gamma) + \beta_m \sin(m\gamma)$

et  $F_m = \chi_m r^m + \delta_m r^{-m}$

d'où la solution complète :

$$A = \sum_m [\alpha_m \cos(m\gamma) + \beta_m \sin(m\gamma)] \cdot [\chi_m r^m + \delta_m r^{-m}]$$

Notons que  $m$  est un entier positif, et que dans ce cas, les  $\cos(m\gamma)$  forment une base.

les conditions de passage sur la valeur du champ tangentiel en  $r = R_1$  et  $r = R_2$  sont :

$$H_T = 0 \text{ en } r = R_1 \quad \text{et} \quad -H_T = J \text{ en } r = R_2$$

La valeur de la composante tangentielle du champ est donnée par :  $H_{T,J} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_J}{\partial r}$

soit donc :  $H_{T,J} = -\frac{1}{\mu_0} \sum_m [\alpha_m \cos(m\gamma) + \beta_m \sin(m\gamma)] \cdot m [\chi_m r^{m-1} - \delta_m r^{-m-1}]$

calculons maintenant les valeurs en  $r = R_1$  et  $R_2$  :

$$[H_{T,J}]_{r=R_1} = -\frac{1}{\mu_0} \sum \frac{1}{m} [\alpha_m \cos(m\gamma) + \beta_m \sin(m\gamma)] \cdot m [\chi_m R_1^{m-1} - \delta_m R_1^{-m-1}] = 0$$

$$[H_{T,J}]_{r=R_2} = \frac{1}{\mu_0} \sum \frac{1}{m} [\alpha_m \cos(m\gamma) + \beta_m \sin(m\gamma)] \cdot m [\chi_m R_2^{m-1} - \delta_m R_2^{-m-1}] = J_{\max} \cos p\gamma$$

- pour toute valeur de **m différente de p** nous pouvons écrire:

$$[\chi_m R_1^{m-1} + \delta_m R_1^{-m-1}] = 0$$

Les cosinus forment une base et après identification terme à terme , nous pouvons écrire :

$$[\chi_m R_2^{m-1} + \delta_m R_2^{-m-1}] = 0$$

ce système forme un système dont la résolution donne :  $\chi_m = \delta_m = 0$  pour tout  $m \neq p$

- pour la valeur de **m égal p** nous écrivons:  $[\chi_p R_1^{p-1} + \delta_p R_1^{-p-1}] = 0$

$$[H_{T,J}]_{r=R_2} = \frac{1}{\mu_0} [\alpha_p \cos(p\gamma) + \beta_p \sin(p\gamma)] \cdot p [\chi_p R_2^{p-1} - \delta_p R_2^{-p-1}] = J_{\max} \cos p\gamma$$

Les solutions de ce système d'équations sont :

$$\text{avec: } x = \frac{R_1}{R_2} \left| \begin{array}{l} \alpha_p = 1 \\ \beta_p = 0 \\ \chi_p = \frac{\mu_0 J_{\max}}{p} \frac{1}{(1-x^{2p})} \frac{1}{R_2^{p-1}} \\ \delta_p = \frac{\mu_0 J_{\max}}{p} \frac{1}{(1-x^{2p})} x^{2p} R_2^{p+1} \end{array} \right.$$

D'où la solution du potentiel dû à la nappe de courant J :

$$A_J = [\cos(p\gamma)] \frac{\mu_0 J_{\max}}{p} \frac{1}{(1-x^{2p})} \left( \frac{r^p}{R_2^{p-1}} + x^{2p} R_2^{p+1} r^{-p} \right)$$

### 2 – 3 : Calcul des composantes de l'induction magnétique dans l'entrefer :

En partant de l'équation :

$$\vec{B} = \vec{Rot}(\vec{A}) \left| \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \gamma} = B_r \\ -\frac{\partial A}{\partial r} = B_\gamma \\ 0 = B_z \end{array} \right.$$

Les composantes de l'induction magnétique due à la nappe de courant J s'écrivent :

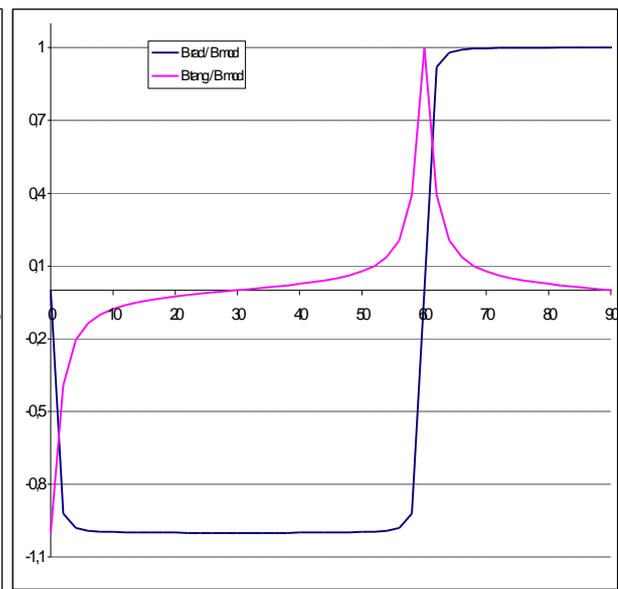
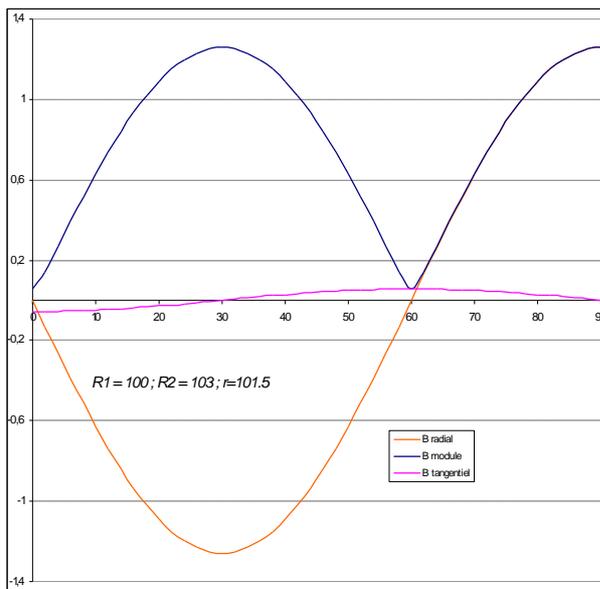
$$B_{J,r} = -\frac{\mu_0 J_m}{(1-x^{2p})} \cdot \left[ \left( \frac{r}{R_2} \right)^{p-1} + \left( \frac{R_2}{r} \right)^{p+1} x^{2p} \right] \sin p\gamma$$

$$B_{J,\gamma} = -\frac{\mu_0 J_m}{(1-x^{2p})} \cdot \left[ \left( \frac{r}{R_2} \right)^{p-1} - \left( \frac{R_2}{r} \right)^{p+1} x^{2p} \right] \cos p\gamma$$

et  $B_{J,z} = 0$

Sur le premier des graphes ci-dessous, nous avons tracé la variation des composantes radiale et tangentielle de l'induction magnétique, ainsi que la valeur du module de l'induction, en fonction de l'angle  $\gamma$ , pour une machine à 6 pôles ( $p=3$ ) dont le rayon du rotor est de 100 mm, le rayon interne du stator étant de 103 mm. La valeur du rayon pour laquelle nous faisons ces graphes est de 101,5 mm, c'est-à-dire au milieu de l'entrefer.

Nous pouvons constater que la valeur de la composante tangentielle est faible par rapport à la composante radiale. Cela se confirme sur le deuxième graphe où nous avons tracé les rapports de chaque composante de l'induction et de son module. Les points à zéro degrés et soixante degrés ne sont pas significatifs : la composante radiale vaut alors zéro, mais la composante tangentielle est faible, bien qu'à son maximum de valeur.



### 3 – Calcul de l'énergie magnétique stockée :

L'énergie magnétique s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \vec{A} \cdot \vec{j} \cdot d\tau$$

l'élément de volume  $d\tau$  s'écrit :  $d\tau = r dr d\gamma dz$

L'intégration en  $z$  est la longueur utile  $L$  de la machine. Il nous reste donc à intégrer en  $r$  et en  $\gamma$ .

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (A_J)_{(r=R_2)} \cdot [J(\gamma)] R_2 \cdot d\gamma$$

pour une valeur de  $r = R_2$ , le potentiel vecteur vaut :

$$(A_J)_{r=R_2} = \frac{\mu_0 J_m}{p} \cdot \frac{1}{(1-x^{2p})} R_2 [x^{2p} + 1] \cos p\gamma$$

Cette énergie s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 J_m^2}{p} \cdot \frac{1}{(1-x^{2p})} R_2^2 [x^{2p} + 1] \cos^2 p\gamma \, d\gamma$$

En se souvenant que :  $\cos^2 a = 1/2 (1 + \cos 2a)$ , la valeur finale de l'énergie s'écrit :

$$W = \frac{\mu_0 \pi}{2p(1-x^{2p})} J_m^2 R_2^2 (1 + x^{2p})$$

Notons que cette énergie est constante. Elle ne dépend que des paramètres constructifs de la machine : longueur  $L$  ; rayons  $R_1$  et  $R_2$ .

#### 4 – Couple exercé par une nappe de courant sur elle-même :

Si nous appliquons le théorème du déplacement virtuel, en dérivant cette énergie trouvée par un déplacement virtuel quelconque, nous trouvons un résultat nul :

Le couple s'écrit :

$$\Gamma = - \frac{\partial W}{\partial \text{déplacement virtuel}} = 0$$

, l'énergie ne dépendant pas d'un coefficient variable quelconque.

Nous pouvons donc en déduire que, dans le cas d'une machine à pôles lisses, le couple exercé par une nappe de courant sur elle-même, est nul.

#### 5 – Calcul du couple entre deux nappes de courant :

Comme une seule nappe de courant ne peut fournir le couple, nous sommes amenés à introduire une deuxième densité de courant.

Soit une machine électrique constituée d'un stator et d'un rotor en tôles magnétiques de perméabilité relative très grande (et que nous supposons donc comme infinie). Nous disposons une densité de courant  $K(\gamma)$  sur la surface du rotor et une densité de courant  $J(\gamma)$  sur la surface interne du stator. Le schéma de cette machine est donné par la figure ci-dessous.

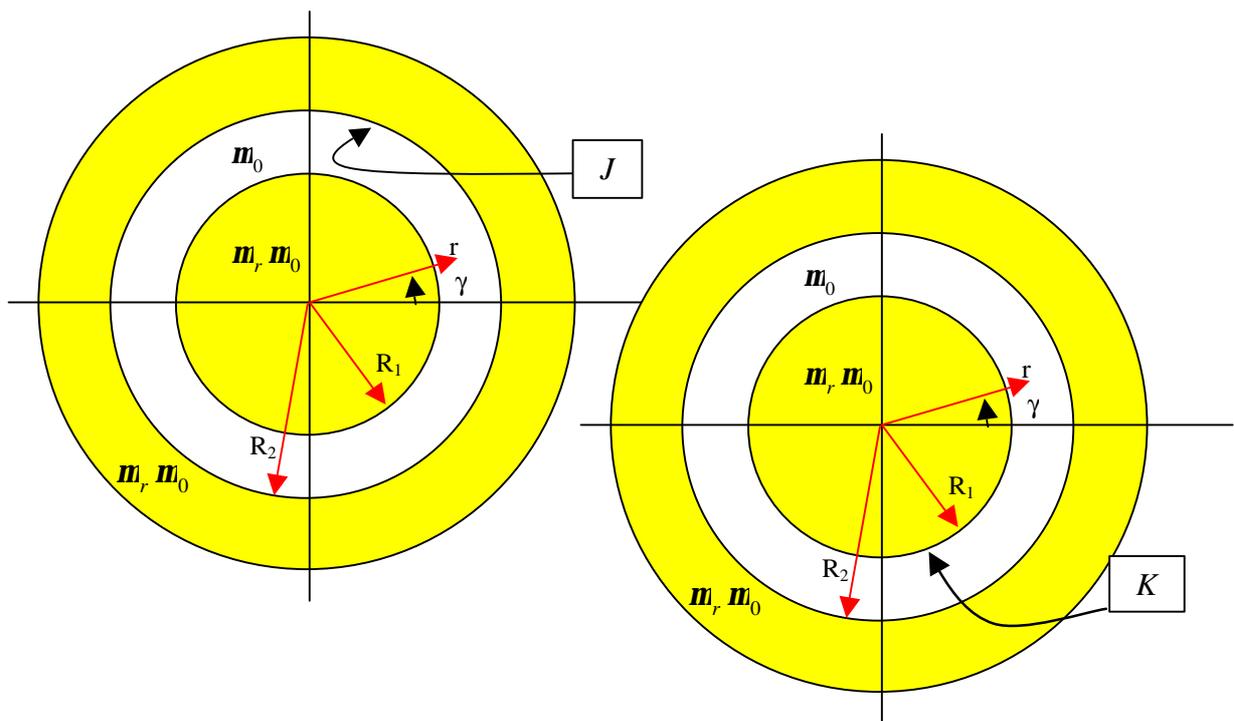
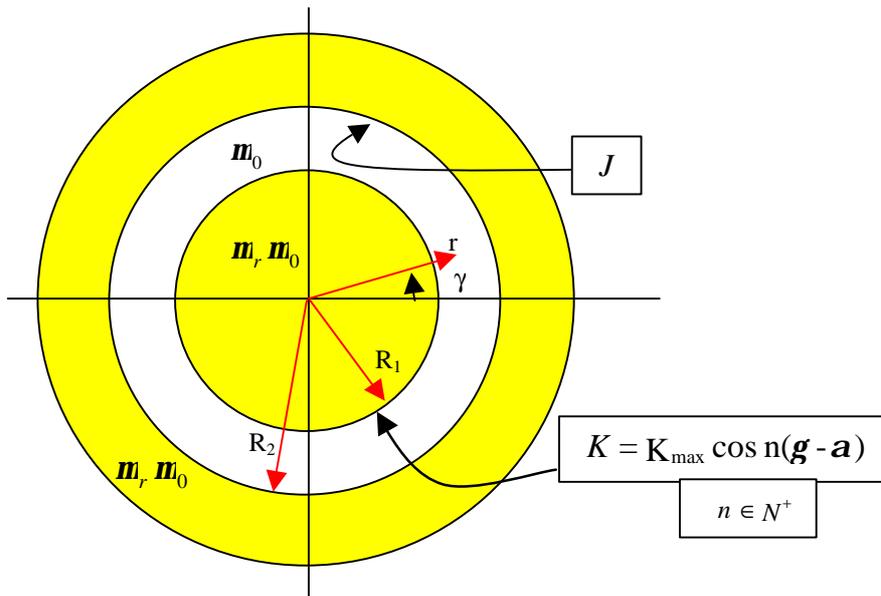
Les calculs seront menés comme précédemment. Nous nous bornerons à ne donner que les résultats.

Comme la valeur de  $\mu$  est considérée comme constante, le problème peut être traité par superposition :

##### 5 – 1 : Calcul du potentiel en coordonnées cylindriques.

Nous calculons en premier lieu les potentiels dus aux deux nappes de courant

Ensuite, nous en déduisons les valeurs des composantes de l'induction magnétique due aux deux nappes de courant.



avec :  $x = R_1/R_2$

$$A_J = [\cos(p\gamma)] \frac{\mu_0 J_{\max}}{p} \frac{1}{(1-x^{2p})} \left( \frac{r^p}{R_2^{p-1}} + x^{2p} R_2^{p+1} r^{-p} \right)$$

De même, le potentiel vecteur dû à la nappe de courant K s'écrit :

$$A_K = \frac{\mu_0 K_{\max}}{n} \cdot \frac{1}{(1-x^{2n})} \left[ \frac{r^n}{R_1^{n-1}} x^{2n} + \frac{R_1^{n+1}}{r^n} \right] \cos n(\gamma - \alpha)$$

La valeur du potentiel dans l'entrefer est donc la somme des potentiels  $A_J$  et  $A_K$ .

$$\mathbf{A} = \left( \frac{\mu_0 J_{\max}}{p} \frac{1}{(1-x^{2p})} \left( \frac{r^p}{R_2^{p-1}} + x^{2p} R_2^{p+1} r^{-p} \right) \cos(p\gamma) \right) + \left( \frac{\mu_0 K_{\max}}{n} \frac{1}{(1-x^{2n})} \left[ \frac{r^n}{R_1^{n-1}} x^{2n} + \frac{R_1^{n+1}}{r^n} \right] \cos n(\gamma - \alpha) \right)$$

### 5 – 2 : Calcul de l'induction magnétique..

En partant de l'équation :

$$\vec{B} = \vec{Rot}(\vec{A}) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \gamma} = B_r \\ -\frac{\partial A}{\partial r} = B_\gamma \\ 0 = B_z \end{array} \right.$$

Les composantes de l'induction magnétique due à la nappe de courant J s'écrivent :

$$B_{J,r} = -\frac{\mu_0 J_m}{(1-x^{2p})} \cdot \left[ \left( \frac{r}{R_2} \right)^{p-1} + \left( \frac{R_2}{r} \right)^{p+1} x^{2p} \right] \sin p\gamma$$

$$B_{J,\gamma} = -\frac{\mu_0 J_m}{(1-x^{2p})} \cdot \left[ \left( \frac{r}{R_2} \right)^{p-1} - \left( \frac{R_2}{r} \right)^{p+1} x^{2p} \right] \cos p\gamma$$

$$B_{J,z} = 0$$

Les composantes de l'induction magnétique due à la nappe de courant K s'écrivent :

$$B_{K,r} = -\frac{\mu_0 K_m}{(1-x^{2n})} \cdot \left[ \left( \frac{r}{R_1} \right)^{n-1} x^{2n} + \left( \frac{R_1}{r} \right)^{n+1} \right] \sin n(\gamma - \alpha)$$

$$B_{K,\gamma} = -\frac{\mu_0 K_m}{(1-x^{2n})} \cdot \left[ \left( \frac{r}{R_1} \right)^{n-1} x^{2n} - \left( \frac{R_1}{r} \right)^{n+1} \right] \cos n(\gamma - \alpha)$$

$$B_{K,z} = 0$$

### 5 – 3 : Calcul de l'énergie magnétique :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \vec{A} \cdot \vec{j} \cdot d\tau$$

l'élément de volume  $d\tau$  s'écrit :  $d\tau = r dr d\gamma dz$

L'intégration en  $z$  est la longueur utile  $L$  de la machine. Il nous reste donc à intégrer en  $r$  et en  $\gamma$ .

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ (A_K)_{(r=R_1)} + (A_J)_{(r=R_1)} \right] [K(\gamma)] R_1 d\gamma + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ (A_K)_{(r=R_2)} + (A_J)_{(r=R_2)} \right] [J(\gamma)] R_2 d\gamma$$

soit donc :

$$(A_K)_{r=R_1} = \frac{\mu_0 K_m}{n} \cdot \frac{1}{(1-x^{2n})} R_1 [x^{2n} + 1] \cos n(\gamma - \alpha) \quad ; \quad (A_J)_{r=R_1} = \frac{\mu_0 J_m}{p} \cdot \frac{1}{(1-x^{2p})} R_2 2x^p \cos p\gamma$$

$$(A_K)_{r=R_2} = \frac{\mu_0 K_m}{n} \cdot \frac{1}{(1-x^{2n})} R_1 2x^n \cos n(\gamma - \alpha) \quad ; \quad (A_J)_{r=R_2} = \frac{\mu_0 J_m}{p} \cdot \frac{1}{(1-x^{2p})} R_2 [x^{2p} + 1] \cos p\gamma$$

**Remarque :** pour  $l$  et  $m$  appartenant à  $N^+$ , l'intégrale entre 0 et  $2\pi$  d'un produit  $\cos lg \cdot \cos mg$  n'est pas nulle si et seulement si  $l = m$

En tenant compte de la remarque importante citée ci-dessus, nous ne calculerons l'énergie que dans le cas où  $n = p$ .

Cette énergie s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 K_m^2}{p} \cdot \frac{1}{(1-x^{2p})} R_1^2 [x^{2p} + 1] \cos^2 p(\gamma - \alpha) d\gamma$$

$$+ \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 K_m J_m}{p} \cdot \frac{1}{(1-x^{2p})} R_1 R_2 2x^p \cos p\gamma \cos p(\gamma - \alpha) d\gamma$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 J_m^2}{p} \cdot \frac{1}{(1-x^{2p})} R_2^2 [x^{2p} + 1] \cos^2 p\gamma d\gamma$$

En se souvenant que :  $\cos(a) \cdot \cos(b) = 1/2 \{ \cos(a+b) + \cos(a-b) \}$

$\cos^2 a = 1/2 (1 + \cos 2a)$  la valeur finale de l'énergie s'écrit :

$$W = \frac{\mu_0 \pi}{2p(1-x^{2p})} \left\{ (K_m^2 R_1^2 + J_m^2 R_2^2) (1 + x^{2p}) + 2 R_1 R_2 K_m J_m (2x^p) \cos p\alpha \right\}$$

#### 5 - 4 : Calcul du couple exercé entre les deux nappes de courant :

Appliquons le théorème du déplacement virtuel. L'élément de déplacement est ici l'angle  $\alpha$  de décalage angulaire entre les deux nappes de courant. C'est en effet le seul paramètre qui modifie la valeur de l'énergie magnétique.

Le couple s'écrit dans ce cas :

$$\Gamma = - \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{-\mu_0 \pi}{p(1-x^{2p})} \left[ R_1 R_2 K_m J_m (2x^p) \frac{\partial \cos p\alpha}{\partial \alpha} \right]$$

soit donc :

$$\Gamma = \frac{\mu_0 \pi}{(1-x^{2p})} \left[ R_1 R_2 K_m J_m (2x^p) \sin p\alpha \right]$$

**5 – 5 : Autre manière de calculer le couple exercé entre les deux nappes de courant :**

La loi de Laplace s'écrit :

$$d\vec{F} = di \cdot \vec{l} \wedge \vec{B} \Rightarrow dF = di \cdot l \cdot B_r$$

L'élément de couple se calcule donc :

$$d\Gamma = R_2 \cdot di \cdot B_r \text{ par unité de longueur}$$

Le courant di est donné par la relation :

$$di = J(\gamma) \cdot R_2 \cdot d\gamma = R_2 \cdot J_m \cdot \cos p\gamma \cdot d\gamma$$

et donc l'élément de couple vaut :

$$d\Gamma = R_2^2 \cdot J_m \cdot B_{r(r=R_2)} \cos p\gamma \cdot d\gamma$$

le couple total se déduit par intégration :

$$\Gamma = - \frac{\mu_0 J_m^2 R_2^2}{(1-x^{2p})} \cdot (1-x^{2p}) \int_0^{2\pi} \sin p\gamma \cos p\gamma d\gamma - \frac{\mu_0 K_m J_m R_2^2}{(1-x^{2p})} \cdot (2x^{p+1}) \int_0^{2\pi} \cos p\gamma \sin p(\gamma - \alpha) d\gamma$$

La première intégrale étant nulle, nous avons donc la valeur du couple par unité de longueur de machine :

$$\Gamma = \frac{\mu_0 \pi}{(1-x^{2p})} \left[ R_1 R_2 K_m J_m (2x^p) \sin p\alpha \right]$$

**5 – 6 : Approximation du couple :**

En écrivant  $x = 1 - \epsilon$  et donc  $x^{2n} \cong 1 - 2n\epsilon$  et en négligeant  $\epsilon$  quand cela est possible:

$$\Gamma = \frac{\mu_0 \pi}{p\epsilon} \left[ R_1 R_2 K_m J_m \sin p\alpha \right]$$

**6 - CONCLUSIONS PARTIELLES :**

La valeur du couple augmente proportionnellement aux valeurs des courants disposés sur le stator et le rotor; proportionnellement au carré du rayon de la machine et inversement proportionnellement à l'épaisseur de l'entrefer (notons ici encore que  $\epsilon$  représente la valeur de l'entrefer  $e$  divisée par la valeur du rayon de la machine :  $R_2$  soit donc :  $e = \epsilon/R_2$  ).

La valeur du couple est d'autant plus élevée que  $\sin(p\alpha)$  vaut 1.

d'où :  $\alpha = \frac{\pi}{2p} \pm \frac{2k\pi}{p}$  Les deux nappes de courant doivent être "en QUADRATURE"

Plus tard, si vous continuez l'étude de l'électrotechnique, cette notion importante sera systématisée par une écriture dans des systèmes d'axes dits : *axes d,q*.

### 7 - Question : Comment créer les densités de courant ?

*Réponse : Plaçons des conducteurs dans des encoches.*

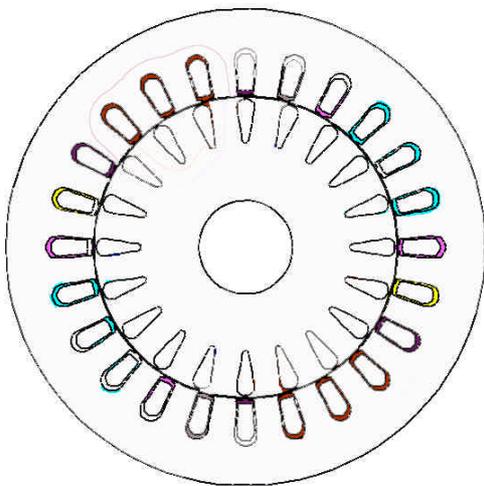
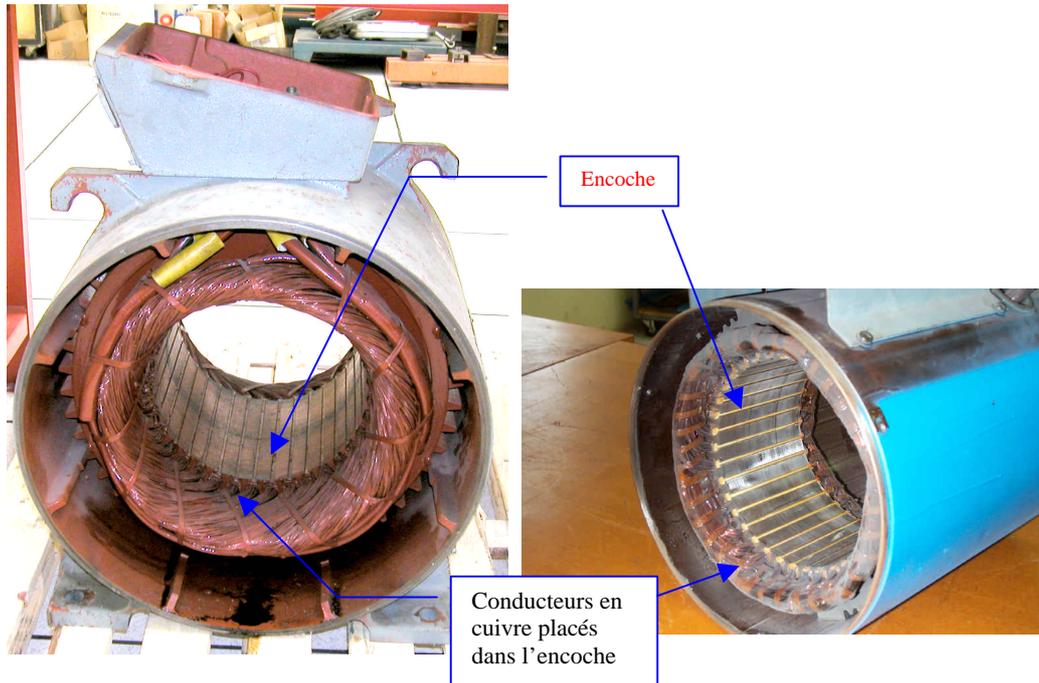
Les deux photos qui suivent montrent un rotor et ses encoches dans lesquelles seront placés les conducteurs en cuivre. Ces conducteurs sont enrobés d'isolant afin d'éviter les courts-circuits électriques.



Photo N°2 : Conducteurs en cuivre en cours d'enrobage d'isolation.

Photo N°1 : Rotor et ses encoches.

Les photos qui suivent montrent deux stators terminés : Les conducteurs, enrobés d'isolant, sont montés dans les encoches, imprégnés de résine époxy et cuits au four.



Considérons la machine représentée ci contre. Les encoches au stator et au rotor sont découpées dans la tôle. Elles contiennent chacune au stator, deux conducteurs parcourus soit par le même courant, soit par deux courants différents.

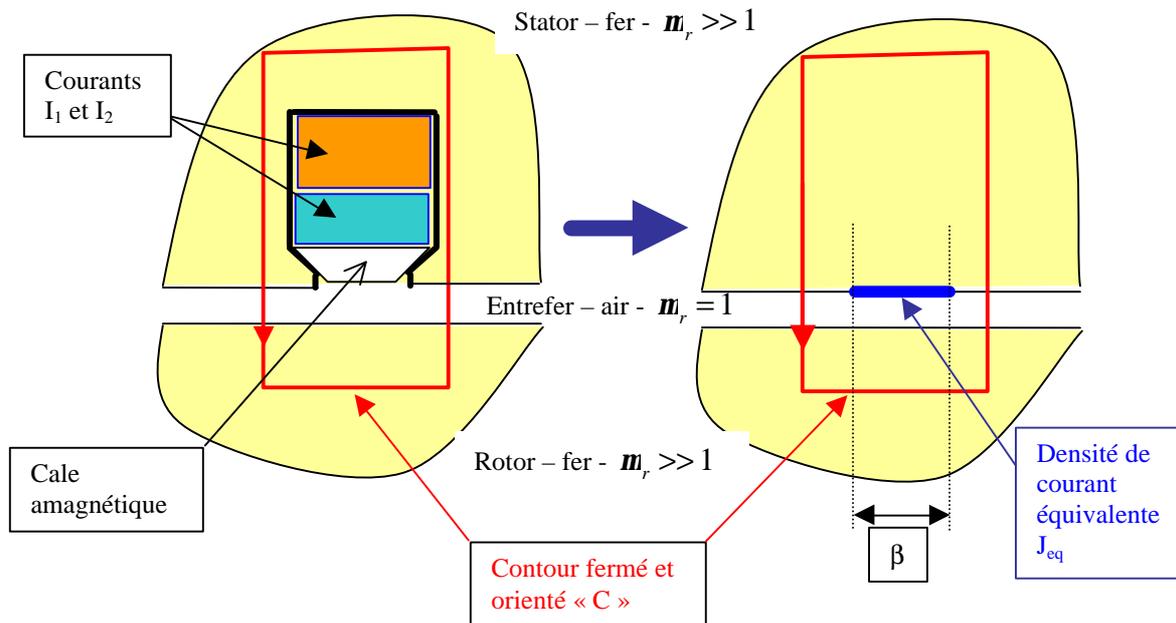
Le calcul du champ magnétique réel dans l'entrefer d'une telle machine est analytiquement ardu et l'on ne dispose pas, dans le cadre de ce cours, de tous les outils mathématiques nécessaires. Si nous faisons néanmoins un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, nous pouvons calculer le champ dans une machine à entrefer constant – machine dite « à pôles lisses ».

Dans la suite de vos études, il vous sera proposé de calculer le champ magnétique créé dans une machine électrique, en manipulant des logiciels basés sur des méthodes de calcul par éléments finis. La présentation de ces méthodes dépasse le cadre de ce cours.

*Le calcul sera mené de la manière suivante : Nous allons rechercher la meilleure configuration de courants placés dans des encoches qui nous donne une densité de courant équivalente (au stator ou au rotor) la plus sinusoïdale possible. Si nous arrivons à ce résultat, nous pourrons alors utiliser les conclusions obtenues précédemment.*

*Nous commencerons par remplacer une encoche dans laquelle sont placés des conducteurs parcourus par des courants, par une densité de courant équivalente, placée au droit de l'encoche.*

**7 – 1 Densité de courant équivalente à une encoche :**



Afin de pouvoir faire cette transformation, nous devons poser de manière claire, un certain nombre d'hypothèses :

- Le champ magnétique est extrêmement faible dans les parties ferromagnétiques supposées à perméabilité très grande. La conservation de B impose une valeur de H nulle si  $\mu_r$  est pris infini ( $\mu_r$  est de l'ordre de 500 à 1000 pour des aciers utilisés en construction de machines).

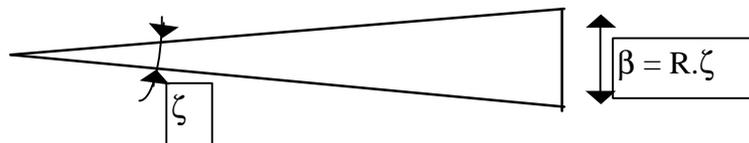
$$B = \mu_r \mu_0 H \text{ dans l'acier} \quad B = \mu_0 H \text{ dans l'entrefer}$$

- L'entrefer est supposé suffisamment petit pour que champ et induction magnétiques soient strictement radiaux (il n'y a pas de composantes tangentielles).

En écrivant le théorème d'Ampère le long des deux contours de la figure, nous pouvons dire :

$$\int_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_1 + I_2 = J_{eq} \cdot \beta \Rightarrow J_{eq} = \frac{I_1 + I_2}{\beta}$$

Nous pouvons relier la longueur  $\beta$  avec l'angle  $\zeta$  qui la sous-tend par la relation :



$$J_{eq} = \frac{I_1 + I_2}{\beta} = \frac{I_1 + I_2}{R \zeta} \quad \text{où } R \text{ est le rayon du stator.}$$

L'angle  $\zeta$  sera appelé : angle d'ouverture d'encoche.

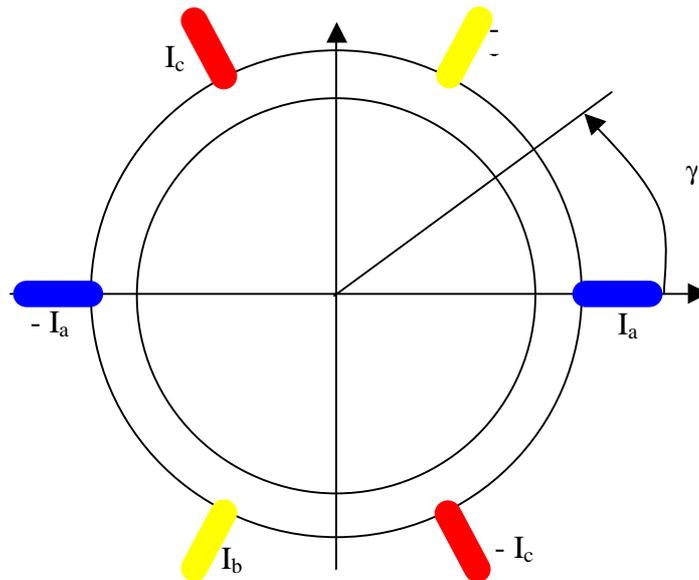
Fort de ce premier résultat, nous allons étudier la première configuration qui vient à l'esprit : Nous avons trois courants ( $I_a, I_b, I_c$ ). L'idée la plus simple est de mettre une encoche aller et une

encoche retour par courant. Nous nous retrouvons avec la configuration proposée par le schéma ci-dessous :

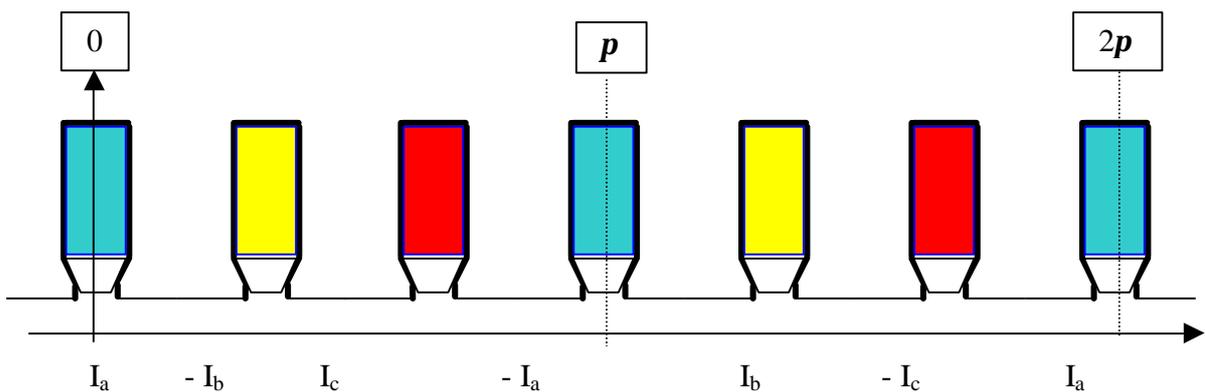
Remarque : nous nous plaçons volontairement dans le cadre des machines électriques triphasées ; mais le cheminement d'esprit proposé ici s'applique à tout type de répartition de courants dans une machine.

### 7 – 2 Cas d'une machine avec six encoches réparties sur le stator

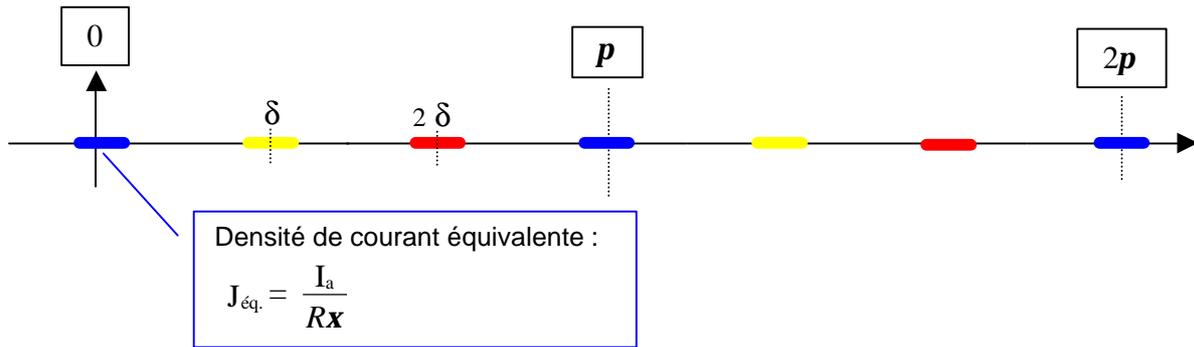
Le stator comporte six encoches régulièrement réparties sur la périphérie du stator. Pour le moment, nous ne faisons aucune hypothèse sur la variation temporelle des courants parcourant les conducteurs placés dans ces encoches.



Si nous développons le stator, nous obtenons la figure suivante :



Et nous remplaçons une encoche dans laquelle sont placés des conducteurs parcourus par un ou des courants, par une densité de courant équivalente, placée au droit de l'encoche.



L'angle entre deux encoches successives,  $\delta$ , est ce que nous nommons le "pas d'encoche". Il vaut ici :  $\delta = 2\pi / 6$  soit  $\delta = \pi / 3$  ( 60 degrés )

L'angle  $\xi$  est l'angle d'ouverture d'encoche.

La densité de courant due aux courants  $I_a$  dans l'encoche N°1 et  $-I_a$  dans l'encoche N°4, s'écrit en fonction de l'angle  $\gamma$  d'un point du stator.

$$J_{s,a} = J_{s,a}(\gamma) = I_a \cdot f(\gamma)$$

Si le courant  $I_a$  est une fonction du temps, cette densité de courant sera aussi une fonction du temps .

$$J_{s,a} = J_{s,a}(\gamma, t) = I_a(t) \cdot f(\gamma) \quad J_{s,a} = J_{s,a}(\gamma, t) = \frac{I_a(t)}{R\xi} \cdot f(\gamma)$$

La fonction  $f(\gamma)$  prend les valeurs suivantes :

$$f(\gamma) = +1 \text{ pour } \gamma \in \left[ -\frac{\xi}{2}, \frac{\xi}{2} \right] \quad ; \quad f(\gamma) = -1 \text{ pour } \gamma \in \left[ \pi - \frac{\xi}{2}, \pi + \frac{\xi}{2} \right] \quad ; \quad f(\gamma) = 0 \text{ ailleurs}$$

La fonction  $f(\gamma)$  est périodique, elle est donc décomposable en série de Fourier sous la forme :

$$f(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\gamma) \quad \text{avec : } F_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(\gamma) \cos(n\gamma) d\gamma$$

Calculons cette relation .:

La fonction est symétrique par rapport à 0 donc nous avons :  $F_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(\gamma) \cos(n\gamma) d\gamma$

La fonction est anti-symétrique par rapport à  $\pi/2$  donc nous avons :

$$F_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(\gamma) \cos((2k+1)\gamma) d\gamma \quad \text{et} \quad F_{2k} = 0$$

Pour la justification de ces formules de calcul des coefficients d'une série de Fourier, l'étudiant pourra se reporter de manière bénéfique, à un cours de mathématiques.

D'où nous pouvons écrire :  $F_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\xi/2} \cos((2k+1)\gamma) d\gamma$  et donc :

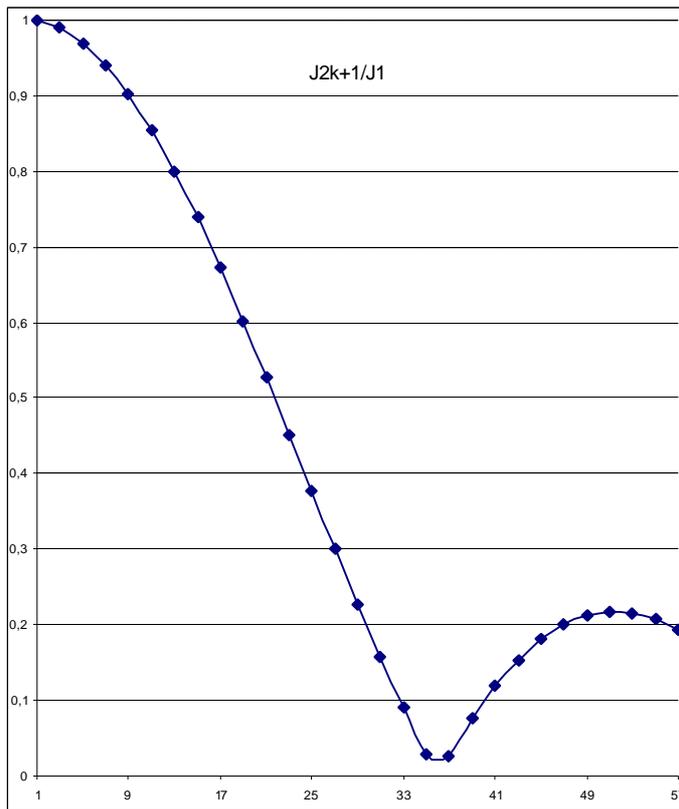
$$F_{2k+1} = \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin(2k+1)\xi/2 \quad \text{D'où la valeur de la densité de courant :}$$

$$J_{s,a}(\gamma, t) = \frac{2 I_a(t)}{\pi R} \sum_k \frac{\sin(2k+1)\xi/2}{(2k+1)\xi/2} \cos((2k+1)\gamma) \quad \text{que nous écrivons de la}$$

manière suivante :

$$J_{s,a}(\gamma, t) = \frac{I_a(t)}{R} \sum_k J_{2k+1} \cos((2k+1)\gamma)$$

Nous pouvons calculer les valeurs réduites des amplitudes des harmoniques de cette densité de courant :  $J_{2k+1}/J_1$ . La valeur de l'angle  $\xi$  est de 10 degrés.



k	2k+1	J <sub>2k+1</sub>	J <sub>2k+1</sub> /J <sub>1</sub>
0	1	0,64	1,00
1	3	0,63	0,99
2	5	0,62	0,97
3	7	0,60	0,94
4	9	0,57	0,90
5	11	0,54	0,85
6	13	0,51	0,80
7	15	0,47	0,74
8	17	0,43	0,67
9	19	0,38	0,60
10	21	0,34	0,53
11	23	0,29	0,45
12	25	0,24	0,38
13	27	0,19	0,30
14	29	0,14	0,23
15	31	0,10	0,16
16	33	0,06	0,09
17	35	0,02	0,03
18	37	0,02	0,03
19	39	0,05	0,08
20	41	0,08	0,12

Nous constatons qu'avec cette disposition de courant dans des encoches, il est impossible d'obtenir une densité résultante quasi sinusoïdale.

Remarque :

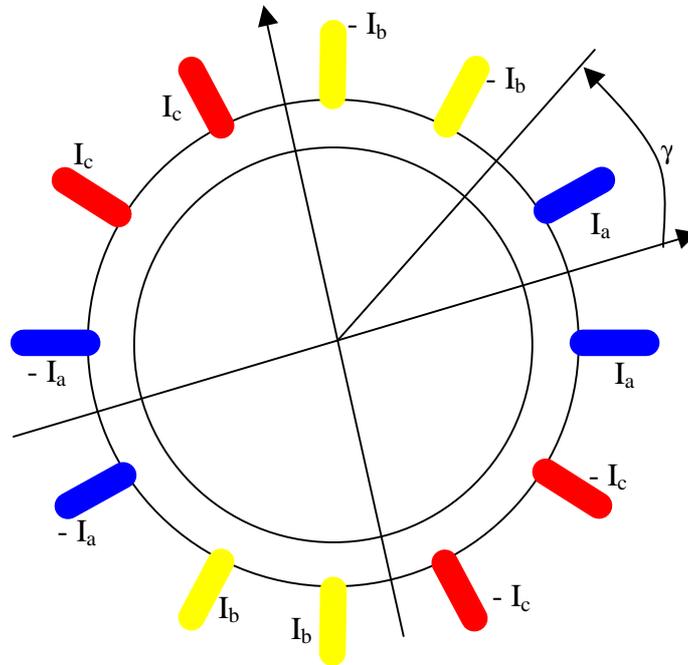
Nous pouvons écrire de la même manière les densités de courant créées par les courants  $I_b$  et  $I_c$  :

$$J_{s,b}(\gamma, t) = \frac{I_b(t)}{R} \sum_k J_{2k+1} \cos\left((2k+1)\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

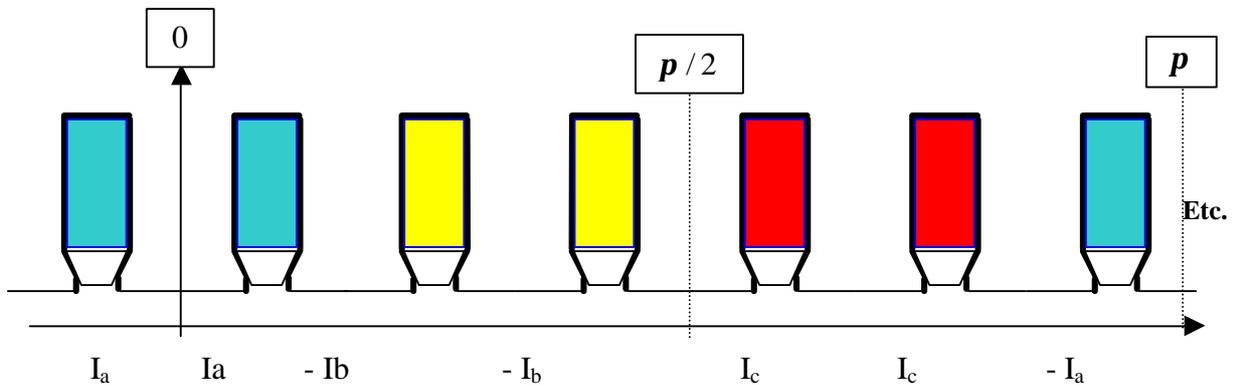
$$J_{s,c}(\gamma, t) = \frac{I_c(t)}{R} \sum_k J_{2k+1} \cos\left((2k+1)\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

### 7 – 3 Cas d'une machine avec douze encoches réparties sur le stator

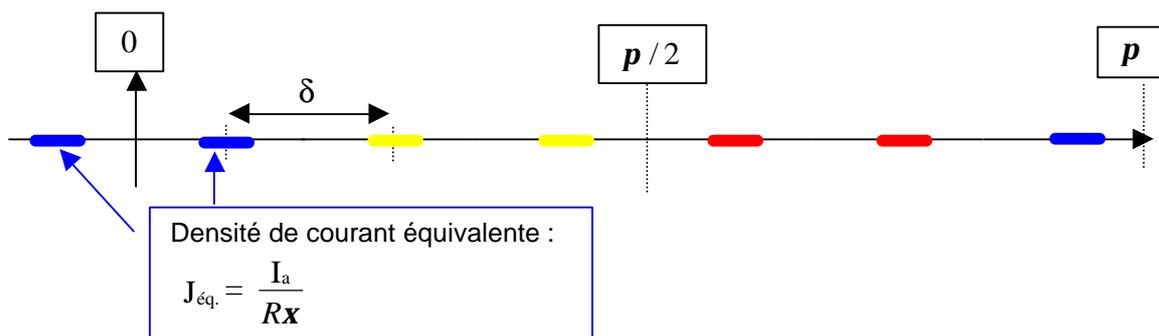
Une machine ne possédant que six encoches pour trois phases ne peut convenir, essayons de doubler ce nombre d'encoches. Le stator comporte donc douze encoches régulièrement réparties sur la périphérie du stator. Nous répartissons les courants dans les encoches de la manière suivante :



Si nous développons le stator, nous obtenons la figure suivante :



Et nous remplaçons une encoche dans laquelle sont placés des conducteurs parcourus par un ou des courants, par une densité de courant équivalente, placée au droit de l'encoche.



Le « pas d'encoche » (angle entre deux encoches successives),  $\delta$ , vaut ici :  $\delta = 2 \pi / 12$   
 soit  $\delta = \pi / 6$  ( 30 degrés )

L'angle  $\xi$  est l'angle d'ouverture d'encoche.

La densité de courant due aux courants  $I_a$  dans l'encoche N°12 et l'encoche N°1 ;  $-I_a$  dans l'encoche N°6 et l'encoche N°7, s'écrit en fonction de l'angle  $\gamma$  d'un point du stator.

$$J_{s,a} = J_{s,a}(\gamma) = I_a \cdot f(\gamma)$$

Si le courant  $I_a$  est une fonction du temps, cette densité de courant sera aussi une fonction du temps .

$$J_{s,a} = J_{s,a}(\gamma, t) = I_a(t) \cdot f(\gamma) \quad J_{s,a} = J_{s,a}(\gamma, t) = \frac{I_a(t)}{R\xi} \cdot f(\gamma)$$

La fonction  $f(\gamma)$  prend les valeurs suivantes :

$$f(\gamma) = +1 \text{ pour } \gamma \in \left[ -\frac{\delta}{2} - \frac{\xi}{2}, -\frac{\delta}{2} + \frac{\xi}{2} \right] \quad \text{et pour } \gamma \in \left[ \frac{\delta}{2} - \frac{\xi}{2}, \frac{\delta}{2} + \frac{\xi}{2} \right]$$

$$f(\gamma) = -1 \text{ pour } \gamma \in \left[ \pi - \frac{\delta}{2} - \frac{\xi}{2}, \pi - \frac{\delta}{2} + \frac{\xi}{2} \right] \quad \text{et pour } \gamma \in \left[ \pi + \frac{\delta}{2} - \frac{\xi}{2}, \pi + \frac{\delta}{2} + \frac{\xi}{2} \right]$$

La fonction  $f(\gamma)$  est périodique, elle est donc décomposable en série de Fourier sous la forme :

$$f(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\gamma) \quad \text{avec : } F_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(\gamma) \cos(n\gamma) d\gamma$$

Calculons cette relation .

Pour les mêmes raisons de symétrie et d anti-symétrie nous aurons :

$$F_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(\gamma) \cos((2k+1)\gamma) d\gamma \quad \text{et} \quad F_{2k} = 0$$

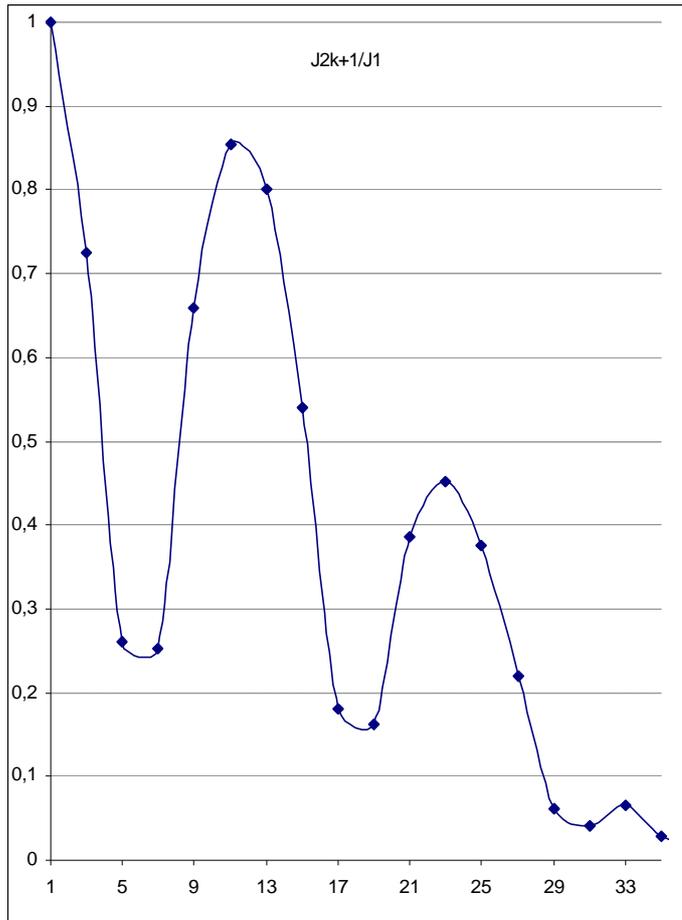
Nous pouvons écrire :  $F_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \int_{\delta/2-\xi/2}^{\delta/2+\xi/2} \cos((2k+1)\gamma) d\gamma \quad \text{et donc :}$

La densité de courant s'écrit alors sous la forme :

$$j_a(\gamma, t) = \frac{4 \cdot I_a(t)}{\pi \cdot R} \sum_k \left[ \frac{\sin(2k+1) \frac{\xi}{2}}{(2k+1) \frac{\xi}{2}} \cos(2k+1) \frac{\delta}{2} \right] \cos(2k+1)\gamma$$

que nous écrirons de la manière suivante :  $J_{s,a}(\gamma, t) = \frac{I_a(t)}{R} \sum_k J_{2k+1} \cos((2k+1)\gamma)$

Nous pouvons calculer les valeurs réduites des amplitudes des harmoniques de cette densité de courant :  $J_{2k+1} / J_1$  . La valeur de l'angle  $\xi$  est de 10 degrés comme auparavant.

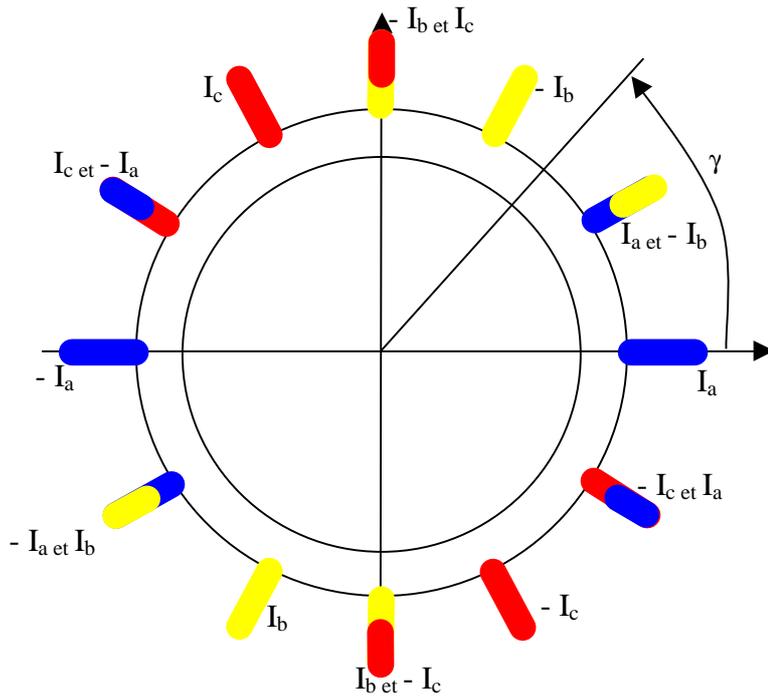


k	2k+1	J <sub>2k+1</sub> /J <sub>1</sub>
0	1	1,00
1	3	0,72
2	5	0,26
3	7	0,25
4	9	0,66
5	11	0,85
6	13	0,80
7	15	0,54
8	17	0,18
9	19	0,16
10	21	0,39
11	23	0,45
12	25	0,38
13	27	0,22
14	29	0,06
15	31	0,04
16	33	0,07

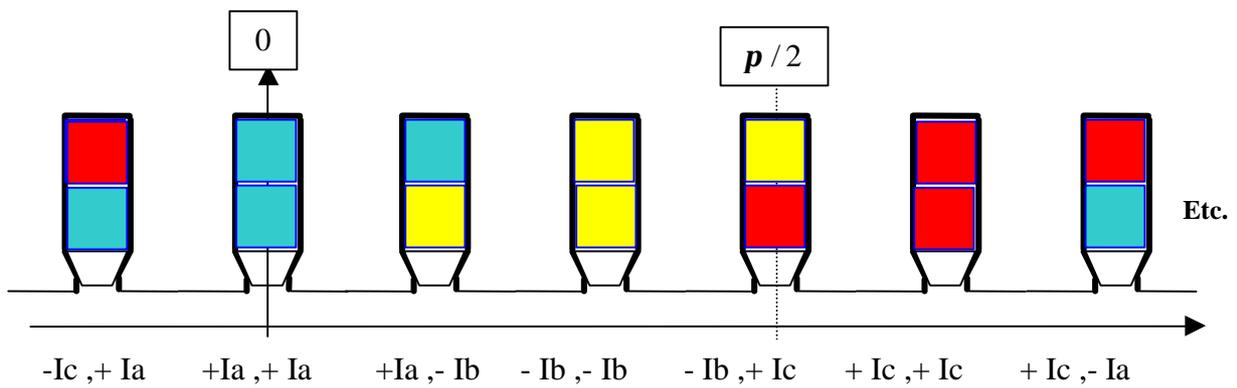
Nous constatons que les amplitudes des harmoniques sont en forte diminution par rapport au cas précédent.

#### **7 – 4 Reprenons le cas de la machine avec douze encoches réparties sur le stator**

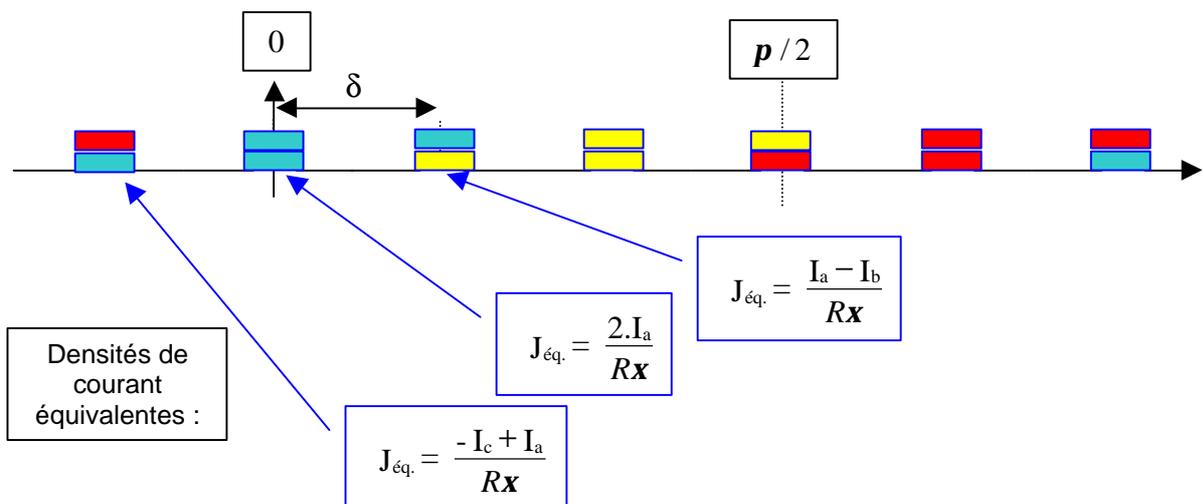
Nous pourrions continuer à augmenter le nombre des encoches au stator afin d'essayer de minimiser encore plus l'amplitude des harmoniques de la densité de courant. Mais nous allons essayer de répartir les courants de manière différente dans les mêmes douze encoches et calculer à nouveau ces harmoniques. . Le stator comporte donc douze encoches régulièrement réparties sur la périphérie du stator. Nous répartissons les courants dans les encoches de la manière suivante :



Si nous développons le stator, nous obtenons la figure suivante :



Et nous remplaçons une encoche dans laquelle sont placés des conducteurs parcourus par un ou



des courants, par une densité de courant équivalente, placée au droit de l'encoche.

Le « pas d'encoche » (angle entre deux encoches successives),  $\delta$ , a la même valeur que précédemment :  $\delta = 2\pi / 12$  soit  $\delta = \pi / 6$  ( 30 degrés )

L'angle  $\xi$  est l'angle d'ouverture d'encoche.

La densité de courant due aux courants s'écrit en fonction de l'angle  $\gamma$  d'un point du stator.

$$J_{s,a} = J_{s,a}(\gamma) = I_a \cdot f(\gamma)$$

Si le courant  $I_a$  est une fonction du temps, cette densité de courant sera aussi une fonction du temps :

$$J_{s,a} = J_{s,a}(\gamma, t) = I_a(t) \cdot f(\gamma) \quad J_{s,a} = J_{s,a}(\gamma, t) = \frac{I_a(t)}{R\xi} \cdot f(\gamma)$$

La fonction  $f(\gamma)$  prend les valeurs suivantes :

$$f(\gamma) = 2 \text{ pour } \gamma \in \left[ -\frac{\xi}{2}, +\frac{\xi}{2} \right]; f(\gamma) = 1 \text{ pour } \gamma \in \left[ -\delta - \frac{\xi}{2}, -\delta + \frac{\xi}{2} \right] \text{ et } \gamma \in \left[ \delta - \frac{\xi}{2}, \delta + \frac{\xi}{2} \right]$$

$$f(\gamma) = -2 \text{ pour } \gamma \in \left[ \pi - \frac{\xi}{2}, \pi + \frac{\xi}{2} \right]; \quad f(\gamma) = -1 \text{ pour } \gamma \in \left[ \pi - \delta - \frac{\xi}{2}, \pi - \delta + \frac{\xi}{2} \right]$$

$$\text{et pour } \gamma \in \left[ \pi + \delta - \frac{\xi}{2}, \pi + \delta + \frac{\xi}{2} \right]$$

La densité de courant s'écrit alors sous la forme :

$$j_a(\gamma, t) = \frac{4 \cdot I_a(t)}{\pi \cdot R} \sum_k \left[ \frac{\sin(2k+1)\frac{\xi}{2}}{(2k+1)\frac{\xi}{2}} \cos^2(2k+1)\frac{\delta}{2} \right] \cos(2k+1)\gamma$$

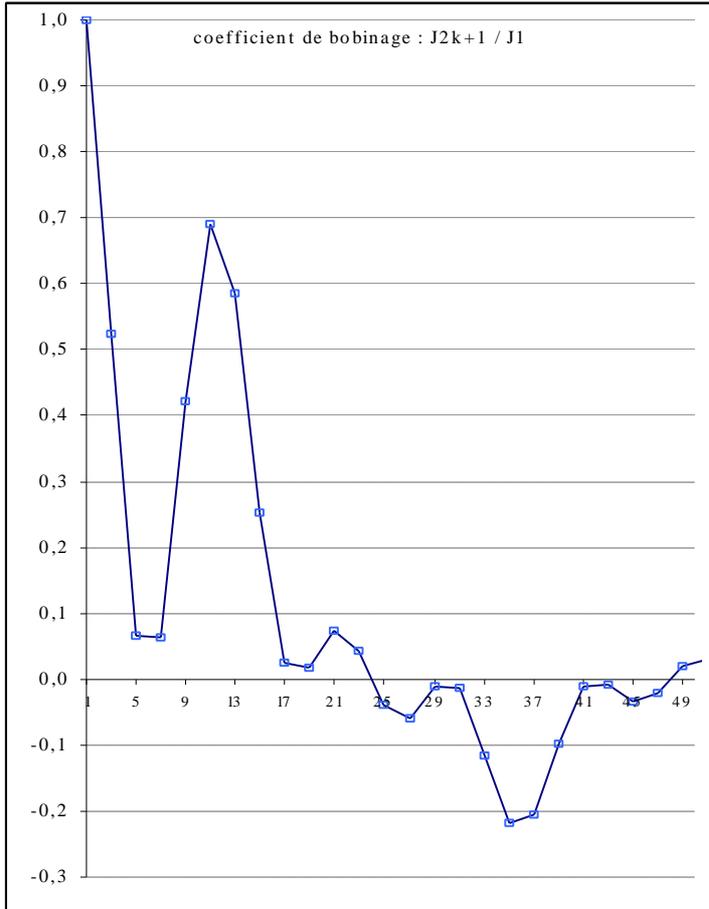
que nous écrirons de la manière suivante :  $J_{s,a}(\gamma, t) = \frac{I_a(t)}{R} \sum_k J_{2k+1} \cos((2k+1)\gamma)$

Nous pouvons calculer les valeurs réduites des amplitudes des harmoniques de cette densité de courant :  $J_{2k+1} / J_1$ . La valeur de l'angle  $\xi$  est de 15 degrés.

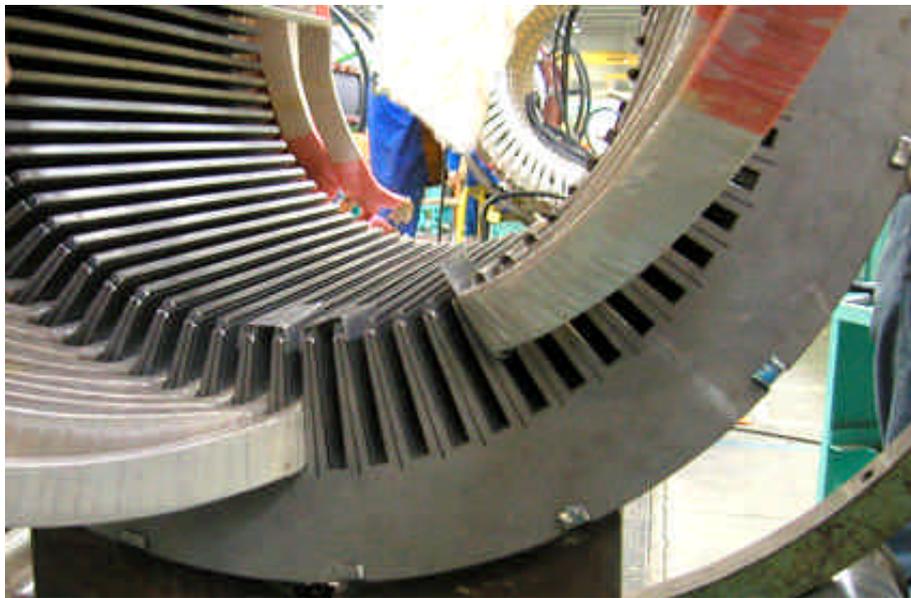
Cette manière de placer les courants dans les encoches porte le nom de :

**Bobinage à pas raccourci.**

Il constitue le meilleur compromis entre le fait de continuer à positionner des encoches dans les tôles stator (ce qui revient à remplacer de plus en plus  $\mu_r = \infty$  - présence de fer - par  $\mu_r = 1$  - présence d'encoches remplies par du cuivre - et ce fait est en contradiction avec nos hypothèses de départ )



k	2k+1	bobinage : $J_{2k+1} / J_1$
0	1	1,000
1	3	0,524
2	5	0,067
3	7	0,062
4	9	0,421
5	11	0,691
6	13	0,584
7	15	0,253
8	17	0,026
9	19	0,018
10	21	0,075
11	23	0,043
12	25	-0,040
13	27	-0,058
14	29	-0,012
15	31	-0,014
16	33	-0,115
17	35	-0,217
18	37	-0,205
19	39	-0,097
20	41	-0,011
21	43	-0,008
22	45	-0,035
23	47	-0,021
24	49	0,020



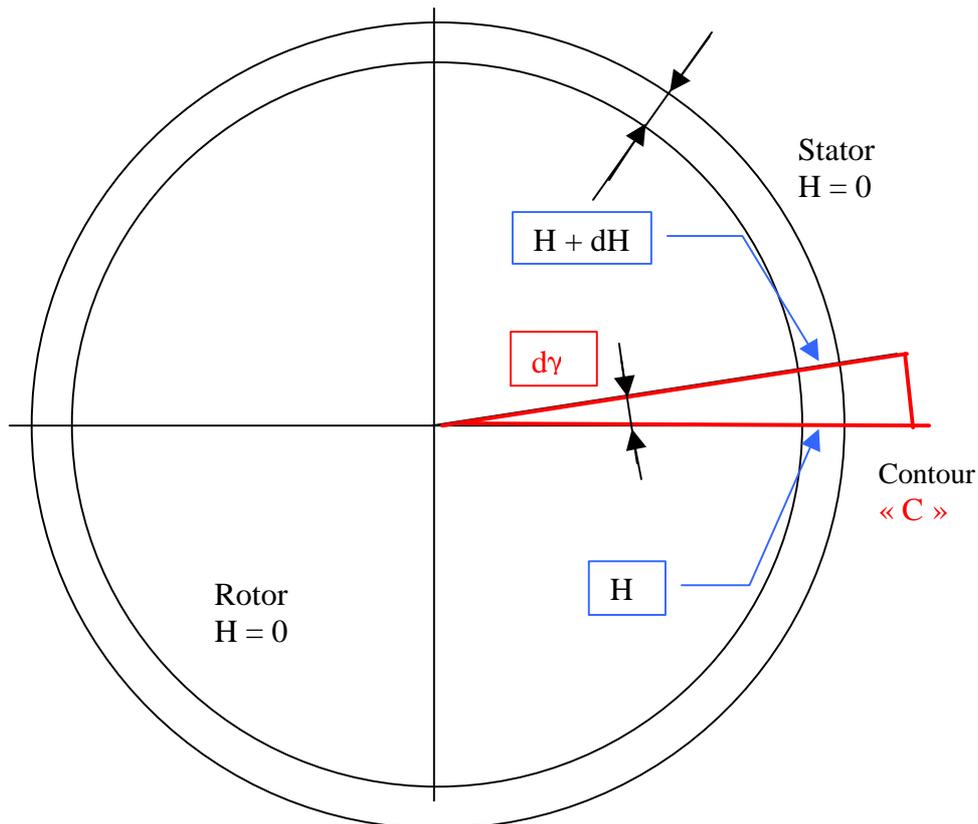
Sur cette photographie, nous pouvons voir, lors du montage, les conducteurs placés en fond d'encoche, et ceux placés près de l'isthme d'encoche.

## 8 - Champ magnétique créé dans l'entrefer par cette densité de courant

Ecrivons le théorème d'ampère sous sa forme intégrale :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum n \cdot I$$

En tenant compte là aussi des hypothèses, définies auparavant : champ nul dans l'acier si la perméabilité magnétique est très grande, cette équation va s'écrire :



$$H.e + dH.e - H.e = j_s(\gamma, t) \cdot R_2 \cdot d\gamma \Rightarrow dH.e = j_s(\gamma, t) \cdot R_2 \cdot d\theta$$

d'où l'équation donnant le champ dans l'entrefer :

$$H_a = \frac{R_2}{e} \int I_a(t) \sum_k F_{2k+1} \cos(2k+1)\gamma \, d\gamma$$

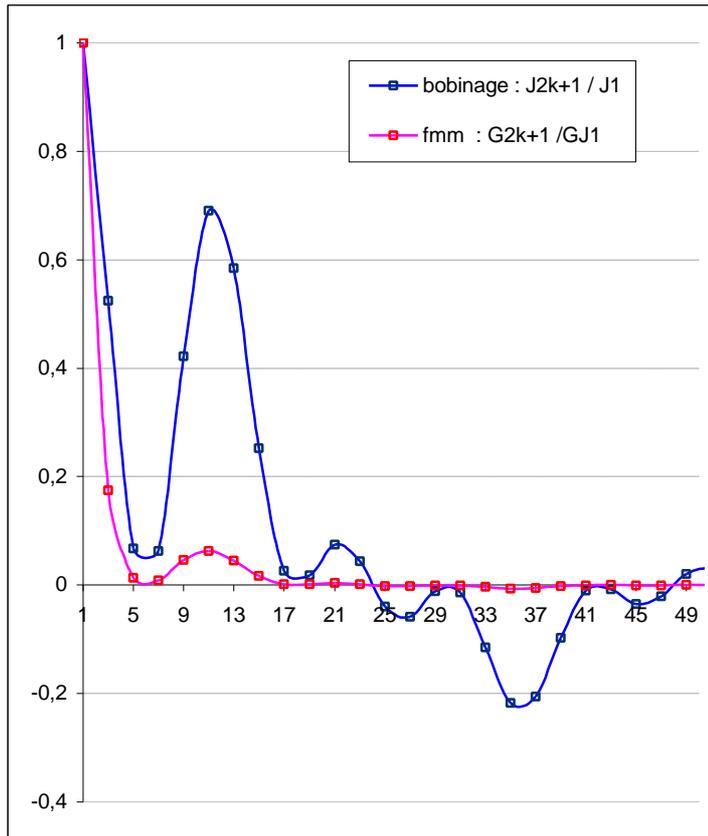
ce qui donne une fois l'intégration faite :

$$H_a(\gamma, t) = H_0 + \frac{R_2}{e} I_a(t) \cdot \sum_k \frac{F_{2k+1}}{(2k+1)} \sin(2k+1)\gamma \quad \text{que nous écrirons :}$$

$$H_a(\gamma, t) = H_0 - \frac{R_2 \cdot I_a(t)}{e} \cdot \sum_k G_{2k+1} \sin(2k+1)\gamma$$

Nous pouvons calculer les coefficients  $G_{2k+1}$ , et nous devons donner une valeur à la constante d'intégration  $H_0$  :

k	2k+1	bobinage : $G_{2k+1} / G_1$
0	1	1,000
1	3	0,175
2	5	0,013
3	7	0,009
4	9	0,047
5	11	0,063
6	13	0,045
7	15	0,017
8	17	0,002
9	19	0,001
10	21	0,004
11	23	0,002
12	25	-0,002
13	27	-0,002
14	29	négligé
15	31	négligé
16	33	-0,003
17	35	-0,006
18	37	-0,006
19	39	-0,002
20	41	négligé
21	43	négligé
22	45	négligé



Pour déterminer la valeur de  $H_0$  , nous allons utiliser la propriété suivante : le flux de B à travers une surface fermée est nul. Considérons un cylindre de longueur L s'appuyant sur un cercle de rayon r passant dans l'entrefer et d'axe Oy .

L'élément de surface est :  $L.r.d\gamma$  .Nous en déduisons que :

$$\iint_s \vec{B}.d\vec{s} = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} H(\gamma, t).L.r.d\gamma = 0$$

qui va s'écrire ici :

$$0 = L.r. \int_0^{2\pi} \left[ H_0 + \frac{R_2 \cdot I_a(t)}{e} \cdot \sum_k G_{2k+1} \sin(2k + 1)\gamma \right] d\gamma$$

Il est évident que de cette intégrale nous en déduisons que  $H_0$  ne peut être qu'égal à ZERO.

Ce résultat est général : la valeur moyenne du champ le long de l'entrefer est nulle . D'où la valeur finale du champ magnétique le long de l'entrefer :

$$H(\gamma, t) = \frac{R_2 \cdot I_a(t)}{e} \cdot \sum_k G_{2k+1} \sin(2k + 1)\gamma$$

et la valeur de l'induction magnétique :

$$B(\gamma, t) = \frac{\mu_0 R_2 \cdot I_a(t)}{e} \cdot \sum_k G_{2k+1} \sin(2k+1)\gamma$$

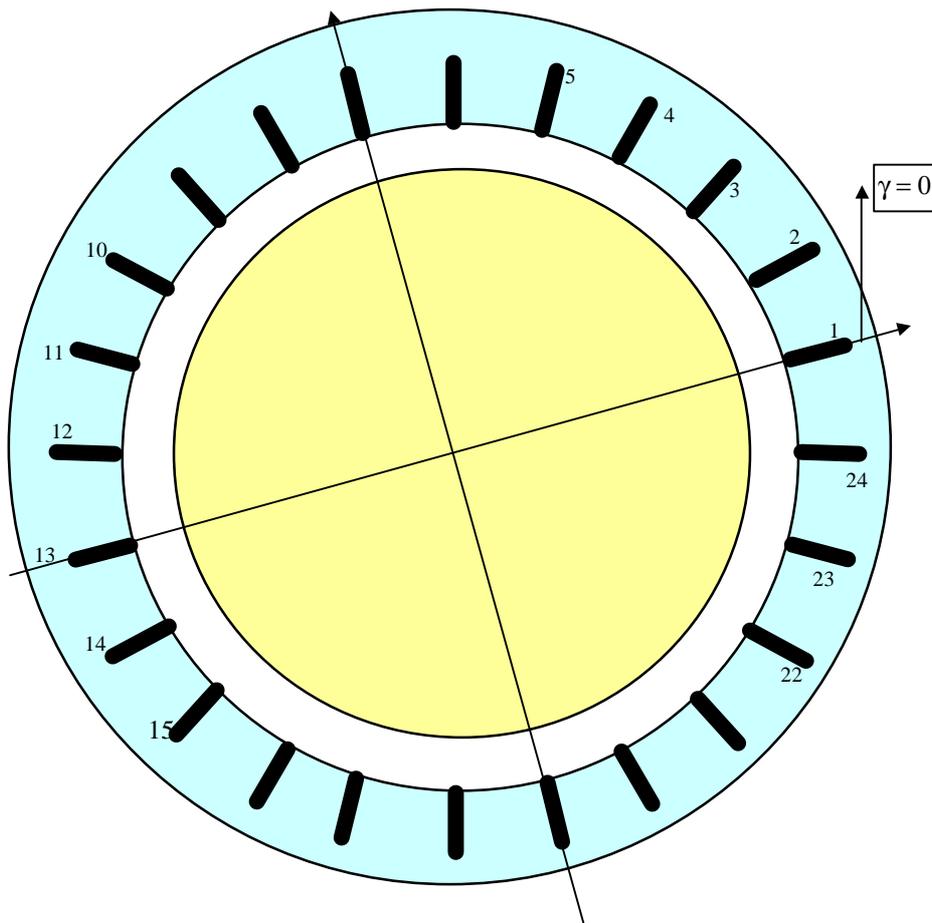
### 9 - Angle électrique, angle mécanique ; Nombre de paires de pôles.

Pour illustrer notre propos, prenons l'exemple de la machine ci-dessous dans laquelle les courants sont disposés dans des encoches conformément au tableau qui suit :

Répartition des courants triphasés dans les encoches :

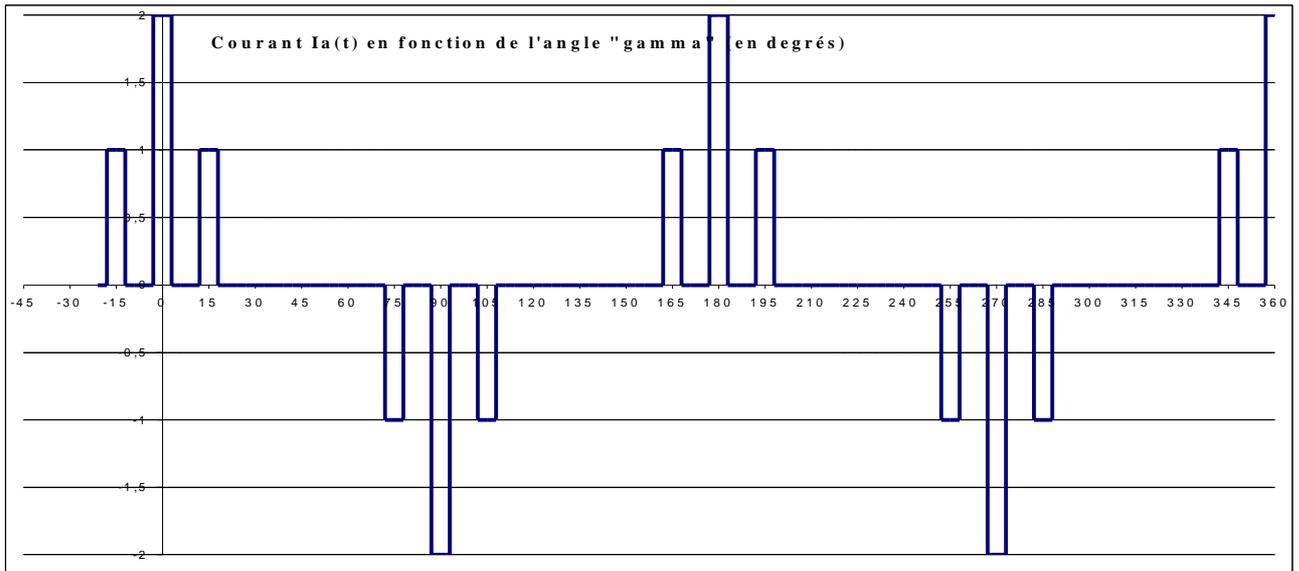
N° de l'encoche	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Courants	Ib -Ic	- 2Ic	-Ic +Ia	2Ia	Ia -Ib	- 2Ib	-Ib +Ic	2Ic	Ic -Ia	- 2Ia	-Ia Ib	2Ib	Ib -Ic	- 2Ic	-Ic +Ia	2Ia	Ia -Ib

N° de l'encoche	15	16	17	18	19	20	21
Courants	- 2Ib	-Ib +Ic	2Ic	Ic -Ia	- 2Ia	-Ia Ib	2Ib



De la même manière que précédemment, nous pouvons remplacer les courants dans des encoches par une densité de courant équivalente.

Nous avons représenté cette densité équivalente sur le graphe qui suit :



Dans le calcul des coefficients de la série de fourrier, nous ferons un changement de variable :

$$\theta = 2.\gamma$$

Dans ce cas, la fonction ci dessus qui était  $\pi$  périodique, devient  $2.\pi$  périodique et est donc décomposable facilement en une série infinie de sinus et / ou cosinus.

Ce changement de variable, classique mathématiquement, est couramment utilisé par les électrotechniciens. De manière générale, ce changement de variable s'écrit sous la forme :

$$\theta = p.\gamma$$

où :

- $\theta$      porte le nom d' « angle électrique »,
- $\gamma$      porte le nom d' « angle mécanique »,
- p**     **porte le nom de « nombre de paires de pôles ».**

Nous verrons par la suite, que ce nombre de paires de pôles influence la vitesse de rotation des machines électriques.

La densité de courant équivalente à la répartition décrite ci dessus s'écrira sous la forme :

$$j_a(\gamma, t) = \frac{4.I_a(t)}{\pi.R} \sum_k \left[ \frac{\sin 2(2k+1) \frac{\xi}{2}}{2(2k+1) \frac{\xi}{2}} \cos^2 2(2k+1) \frac{\delta}{2} \right] \cos (2k+1)2.\gamma$$

Et de manière générale en tenant compte de l'angle mécanique :

$$j_a(\gamma, t) = \frac{4.I_a(t)}{\pi.R} \sum_k \left[ \frac{\sin p(2k+1) \frac{\xi}{2}}{p(2k+1) \frac{\xi}{2}} \cos^2 p(2k+1) \frac{\delta}{2} \right] \cos (2k+1)p.\gamma$$

Si nous écrivons cette relation en tenant compte de l'angle électrique, cette relation s'écrira :

$$j_a(\theta, t) = \frac{4 \cdot I_a(t)}{\pi \cdot R} \sum_k \left[ \frac{\sin(2k+1) \frac{\varepsilon}{2}}{(2k+1) \frac{\varepsilon}{2}} \cos^2(2k+1) \frac{\lambda}{2} \right] \cos(2k+1)\theta$$

où :

$$\varepsilon = p \cdot \xi \quad \lambda = p \cdot \delta$$

Nous écrivons donc indifféremment la densité de courant résultante sous les deux formes suivantes :

$$J_{s,a}(\gamma, t) = \frac{I_a(t)}{R} \sum_k F_{2k+1} \cos((2k+1)p \cdot \gamma) \quad \text{ou} \quad J_{s,a}(\theta, t) = \frac{I_a(t)}{R} \sum_k F_{2k+1} \cos((2k+1)\theta)$$

## 10 - Alimentation d'une machine par trois courants triphasés équilibrés.

Nous pouvons écrire les trois densités de courants équivalentes aux trois courants alimentant la machine de la manière suivante :

$$\begin{aligned} J_{s,a}(\gamma, t) &= \frac{I_a(t)}{R} \sum_k F_{2k+1} \cos((2k+1)p \cdot \gamma) \quad \text{ou} \quad J_{s,a}(\theta, t) = \frac{I_a(t)}{R} \sum_k F_{2k+1} \cos((2k+1)\theta) \\ J_{s,b}(\gamma, t) &= \frac{I_b(t)}{R} \sum_k F_{2k+1} \cos((2k+1)p \cdot (\gamma - \frac{2\pi}{3})) \quad \text{ou} \quad J_{s,b}(\theta, t) = \frac{I_b(t)}{R} \sum_k F_{2k+1} \cos((2k+1)(\theta - \frac{2\pi}{3})) \\ J_{s,c}(\gamma, t) &= \frac{I_c(t)}{R} \sum_k F_{2k+1} \cos((2k+1)p \cdot (\gamma + \frac{2\pi}{3})) \quad \text{ou} \quad J_{s,c}(\theta, t) = \frac{I_c(t)}{R} \sum_k F_{2k+1} \cos((2k+1)(\theta + \frac{2\pi}{3})) \end{aligned}$$

Nous alimentons cette machine par trois courants triphasés équilibrés :

$$\begin{aligned} I_a(t) &= I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi) \\ I_b(t) &= I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi - 2\frac{\pi}{3}) \\ I_c(t) &= I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi + 2\frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

*Remarque : Nous pourrions alimenter cette machine par un système de trois courants équilibrés délivrés par un convertisseur électronique. Ces courants sont souvent chargés en harmoniques. Le lecteur pourra se reporter avec succès au cours d'électronique de puissance. Dans ce cas, ces courants peuvent s'écrire sous la forme :*

$$\begin{aligned} I_a(t) &= I\sqrt{2} \sum_m C_{2m+1} \cos(2m+1)(\omega t - \varphi) \\ I_b(t) &= I\sqrt{2} \sum_m C_{2m+1} \cos(2m+1)(\omega t - \varphi - 2\frac{\pi}{3}) \\ I_c(t) &= I\sqrt{2} \sum_m C_{2m+1} \cos(2m+1)(\omega t - \varphi + 2\frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

Nous ne ferons pas les calculs dans ce cas là.

Recalculons les valeurs des densités de courants, en travaillant avec l'angle électrique  $\theta$  :

$$J_{s,a}(\theta, t) = \frac{I\sqrt{2}}{R} \sum_k F_{2k+1} \cos((2k+1)\theta) \cdot \cos(\omega t)$$

$$J_{s,b}(\theta, t) = \frac{I\sqrt{2}}{R} \sum_k F_{2k+1} \cos((2k+1)(\theta - \frac{2\pi}{3})) \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$J_{s,c}(\theta, t) = \frac{I\sqrt{2}}{R} \sum_k F_{2k+1} \cos((2k+1)(\theta + \frac{2\pi}{3})) \cdot \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})$$

Qui s'écrivent sous la forme :

$$J_{s,a}(\theta, t) = \frac{I\sqrt{2}}{2R} \sum_k F_{2k+1} \cos(\omega t + (2k+1)\theta) + \cos(\omega t - (2k+1)\theta)$$

$$J_{s,b}(\theta, t) = \frac{I\sqrt{2}}{R} \sum_k F_{2k+1} \cos\left(\left(\omega t - 2(k+1)\frac{2\pi}{3} + (2k+1)\theta\right) + \cos\left(\left(\omega t + 2k\frac{2\pi}{3} - (2k+1)\theta\right)\right)$$

$$J_{s,c}(\theta, t) = \frac{I\sqrt{2}}{R} \sum_k F_{2k+1} \cos\left(\left(\omega t + 2(k+1)\frac{2\pi}{3} + (2k+1)\theta\right) + \cos\left(\left(\omega t - 2k\frac{2\pi}{3} - (2k+1)\theta\right)\right)$$

Calculons maintenant la densité de courant résultante à ces trois densités :

$$J_s(\theta, t) = J_{s,a}(\theta, t) + J_{s,b}(\theta, t) + J_{s,c}(\theta, t)$$

### 10 – 1 Cas N°1 : k = 0 :

Nous trouvons dans ce cas :  $J_s(\theta, t) = 3 \frac{I\sqrt{2}}{2R} F_1 \cos(\omega t - \theta)$

Si nous généralisons ce résultat aux cas k = 0 modulo 3, nous trouvons le résultat suivant :

$$J_s(\theta, t) = 3 \frac{I\sqrt{2}}{2R} F_{6n+1} \cos(\omega t - (6n+1)\theta)$$

### 10 – 2 Cas N°2 : k = 1 :

Nous trouvons dans ce cas :  $J_s(\theta, t) = 0$

Si nous généralisons ce résultat aux cas k = 1 modulo 3, nous trouvons le résultat suivant :

$$J_s(\theta, t) = 0$$

### 10 – 3 Cas N°2 : k = 0 :

Nous trouvons dans ce cas :  $J_s(\theta, t) = 3 \frac{I\sqrt{2}}{2R} F_5 \cos(\omega t + 5\theta)$

Si nous généralisons ce résultat aux cas k = 2 modulo 3, nous trouvons le résultat suivant :

$$J_s(\theta, t) = 3 \frac{I\sqrt{2}}{2R} F_{6n-1} \cos(\omega t + (6n-1)\theta)$$

**10 – 4 Généralisation : k = quelconque :**

Nous pouvons donc écrire la densité de courant résultante sous la forme d'une série de fourrier comme ci-dessous :

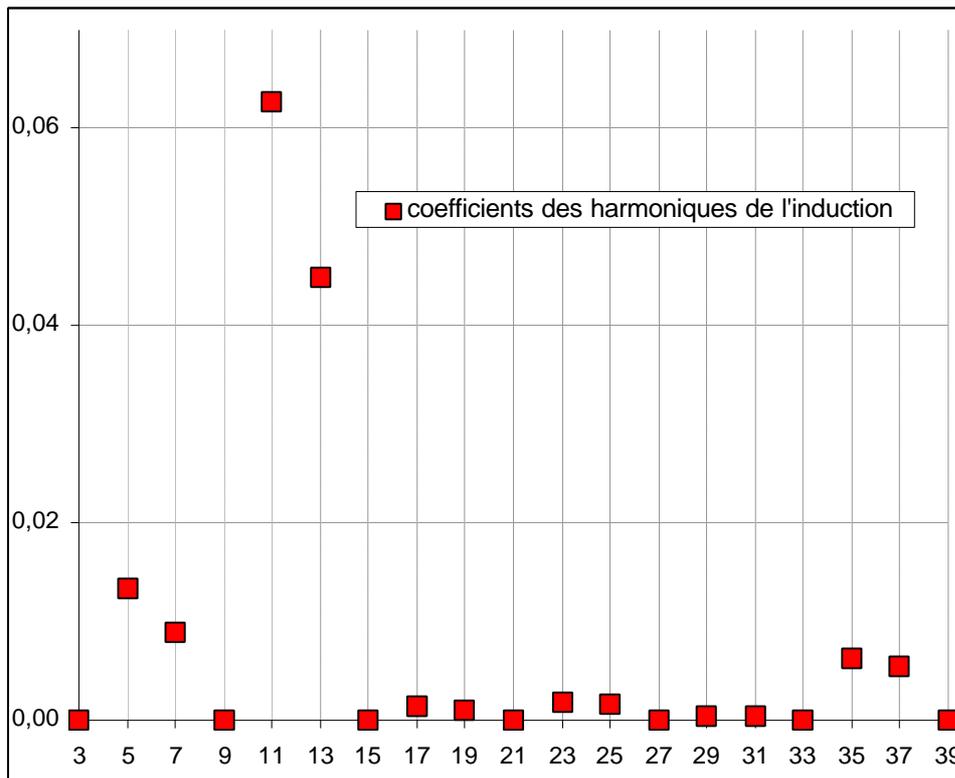
$$J_s(\theta, t) = 3 \frac{I\sqrt{2}}{2R} \sum_n (F_{6n+1} \cos(\omega t - (6n + 1)\theta) + F_{6n-1} \cos(\omega t + (6n - 1)\theta))$$

De même, l'induction magnétique s'écrira sous la forme :

$$B(\theta, t) = 3 \frac{\mu_0 \cdot I\sqrt{2}}{2e} \cdot \sum_{n \geq 0} \left( \frac{F_{6n+1}}{6n + 1} \cos(\omega t - (6n + 1)\theta) \right) + \sum_{n > 0} \left( \frac{F_{6n-1}}{6n - 1} \cos(\omega t + (6n - 1)\theta) \right)$$

Dans le tableau ci-dessous ainsi que sur le graphe, nous avons indiqué la valeur réduite de l'amplitude de chaque harmonique de l'induction (dans le cas d'une machine bobinée à pas raccourci).

La valeur réduite se calcule par :  $\frac{F_{6n \pm 1}}{6n \pm 1} / F_1$



6n ± 1	coefficient
1	1,000
5	0,013
7	0,009
11	0,063
13	0,045
17	0,002
19	0,001
23	0,002
25	0,002
29	0,000
31	0,000
35	0,006
37	0,006
39	0,000

Calculons maintenant le Taux d'harmoniques dû à cette distribution de courants le long de l'entrefer :

Deux définitions prévalent pour cette valeur. Nous calculerons ici ces deux valeurs, pour la densité de courant et pour l'induction magnétique.

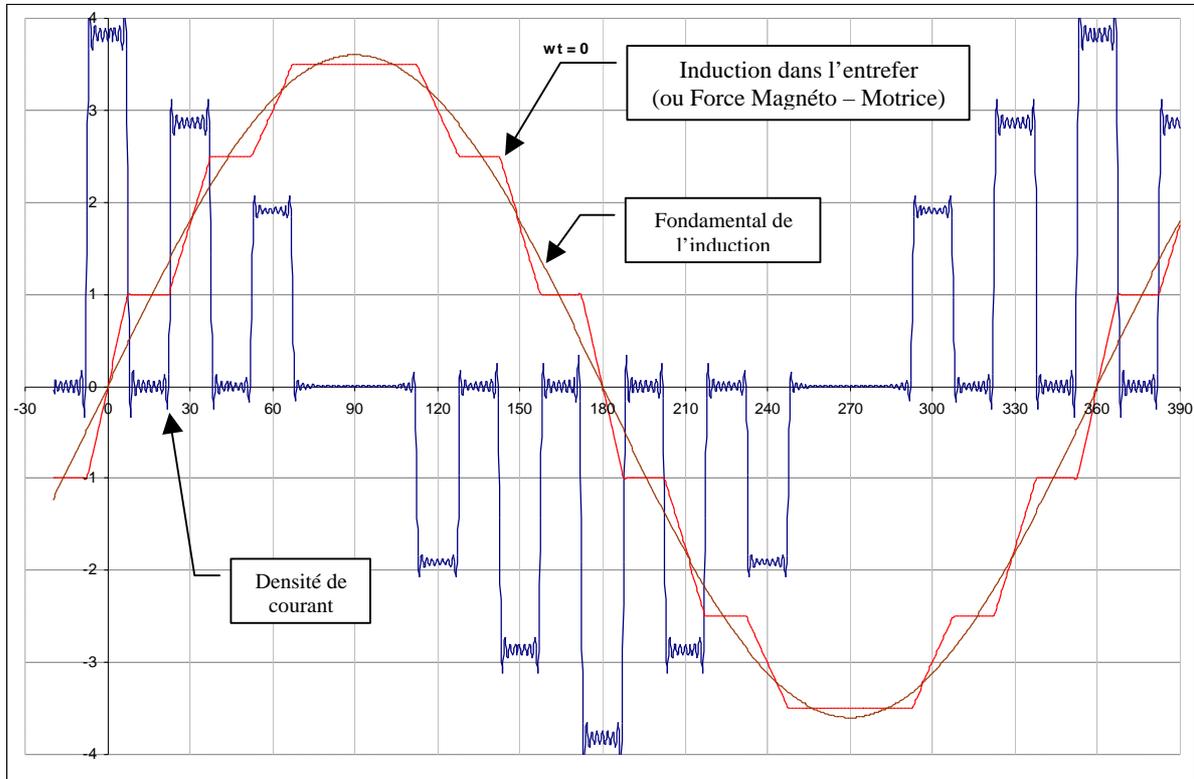
Définitions (en %)  $THD_1 = 100 \cdot \frac{\sqrt{\sum_{m \geq 2} Y_m^2}}{Y_1}$  et  $THD_2 = 100 \cdot \frac{\sqrt{\sum_{m \geq 2} Y_m^2}}{\sqrt{\sum_{m \geq 1} Y_m^2}}$

Pour la valeur de l'induction, les deux définitions donnent la même valeur :

$$\text{THD}_{1,B} = 7,94 \% \quad \text{et} \quad \text{THD}_{2,B} = 7,92 \%$$

Par contre, pour la valeur de la densité de courant, ces deux définitions induisent des résultats très différents :

$$\text{THD}_{1,j} = 98,54 \% \quad \text{et} \quad \text{THD}_{2,j} = 70,19 \%$$



Forme de la densité de courant après décomposition en série de Fourier, de l'induction et de son fondamental en fonction de l'angle statorique.

## 11 - Hypothèse du fondamental :

Nous venons de voir qu'une densité de courant est créée grâce à des courants correctement répartis dans des encoches le long de l'entrefer. En décomposant cette densité de courant en une série de Fourier, puis en intégrant cette densité de courant, nous aboutissons à une valeur de la force magnéto motrice dont la valeur du fondamental est prépondérante vis à vis des harmoniques.

Donc nous pourrions faire l'approximation de la valeur de l'induction, écrite sous la forme :

$$B(\theta, t) = 3 \frac{\mu_0 \cdot I \sqrt{2}}{2e} \cdot \sum_{n \geq 0} \left( \frac{F_{6n+1}}{6n+1} \cos(\omega t - (6n+1)\theta) \right) + \sum_{n > 0} \left( \frac{F_{6n-1}}{6n-1} \cos(\omega t + (6n-1)\theta) \right)$$

par :

$$B(\theta, t) \approx 3 \frac{\mu_0 \cdot I \sqrt{2}}{2e} \cdot G_1 \cos(\omega t - \theta) \quad \text{créée par} \quad J(\theta, t) \approx 3 \frac{I \sqrt{2}}{2R} \cdot F_1 \sin(\omega t - \theta)$$

ou encore en tenant compte de l'angle mécanique :

$$B(\gamma, t) \approx 3 \frac{\mu_0 \cdot I \sqrt{2}}{2e} \cdot G_1 \cos(\omega t - p\gamma) \quad \text{créée par} \quad J(\theta, t) \approx 3 \frac{I \sqrt{2}}{2R} \cdot F_1 \sin(\omega t - p\gamma)$$

Dans tout ce qui suit, nous n'allons plus tenir compte que de la valeur fondamentale des densités de courants et des force magnéto motrice, donc des inductions dans l'entrefer :

### 11 – 1 Conclusion :

Pour conclure, nous écrivons donc que le fondamental de l'induction (hypothèse vérifiée grâce à un THD faible) n'est créé que par le fondamental de la densité de courant équivalente à des courants disposés dans des encoches (hypothèse non vérifiée directement à cause d'un THD trop fort).

## 12 - CHAMPS TOURNANTS

J'utilise ici volontairement ce terme de « champ tournant », bien que cette appellation soit souvent contestée par nombre de mes confrères.

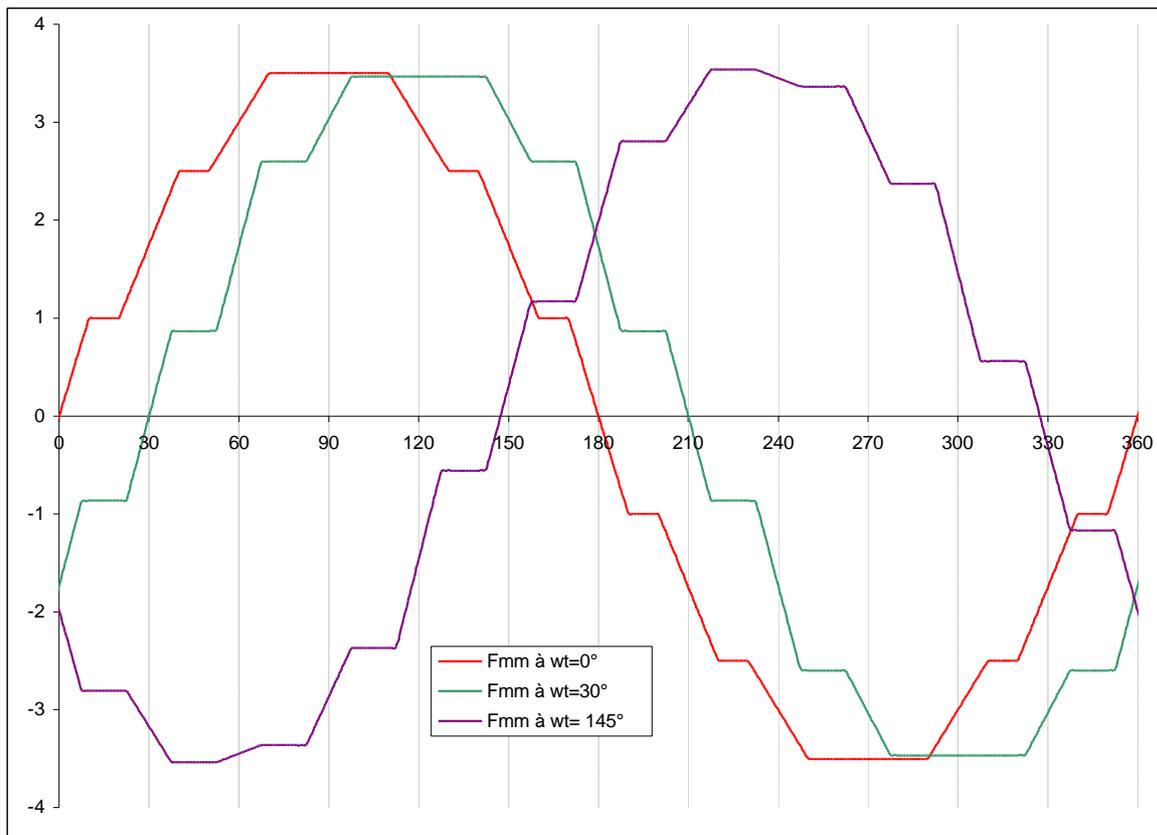
Nous venons de voir qu'une distribution de courants placés dans des encoches conduit à considérer la densité de courant équivalente qui crée une induction dans l'entrefer

Une induction de la forme

$$B(\theta, t) = B_m [\cos(\omega t - \theta)] \Leftrightarrow B(\gamma, t) = B_m [\cos(\omega t - p\gamma)]$$

est nommée :

**CHAMP TOURNANT**



à une valeur fixe de l'angle  $\theta$ , l'induction B est une fonction sinusoïdale du temps t.

à une valeur fixe du temps  $t$ ,  $B$  est une fonction sinusoïdale de l'espace  $\theta$ .

Afin d'illustrer cela, dans le graphe ci dessus, nous avons tracé la valeur de cette induction dans l'espace de la machine, pour différentes valeurs du temps ( $\omega.t$ ).

Le maximum de l'induction se déplace mécaniquement à la vitesse angulaire :  $\omega/p$  (se déplace électriquement à la vitesse angulaire :  $\omega$ ).

### Remarques:

- On permute le sens de rotation du champ tournant en permutant deux phases de l'alimentation.
- Une permutation circulaire des phases ne change pas le sens de rotation du champ
- Dire que l'on a un champ tournant signifie que celui-ci tourne à la vitesse angulaire  $\omega / p$ .
- Une alimentation avec un système homo polaire triphasé de courants entraîne un champ global nul dans l'entrefer (ce cas correspond à  $k = 1$  modulo 3).

## 13 – Conditions d'existence du couple dans une machine électrique.

### 13 – 1 Introduction

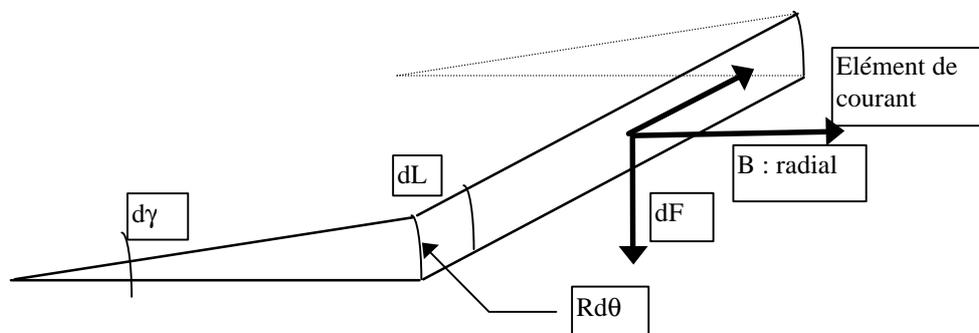
Positionnons nous dans le cas suivant :

Nous pouvons toujours calculer la densité de courant équivalente à un ou des courants guidés dans des conducteurs correctement répartis le long d'un stator et / ou d'un rotor (nous venons de faire cela pour un système triphasé de courants, mais nous pourrions généraliser ce raisonnement à un système polyphasé ou un courant monophasé ou continu ou ... etc.).

Quoiqu'il en soit, à cette densité de courant, nous pouvons lui associer le fondamental de l'induction créée dans l'entrefer.

Dans le paragraphe qui suit, nous placerons des densités de courant au stator et au rotor d'une machine, sans faire aucune hypothèse sur la nature des courants qui alimentent cette machine. En clair, nous pourrions rechercher la meilleure manière de positionner les conducteurs dans l'espace, ainsi que la nature des courants utilisés (alternatifs ou continus) quand nous aurons trouvé les conditions d'existence du couple.

### 13 - 2 Force de Laplace

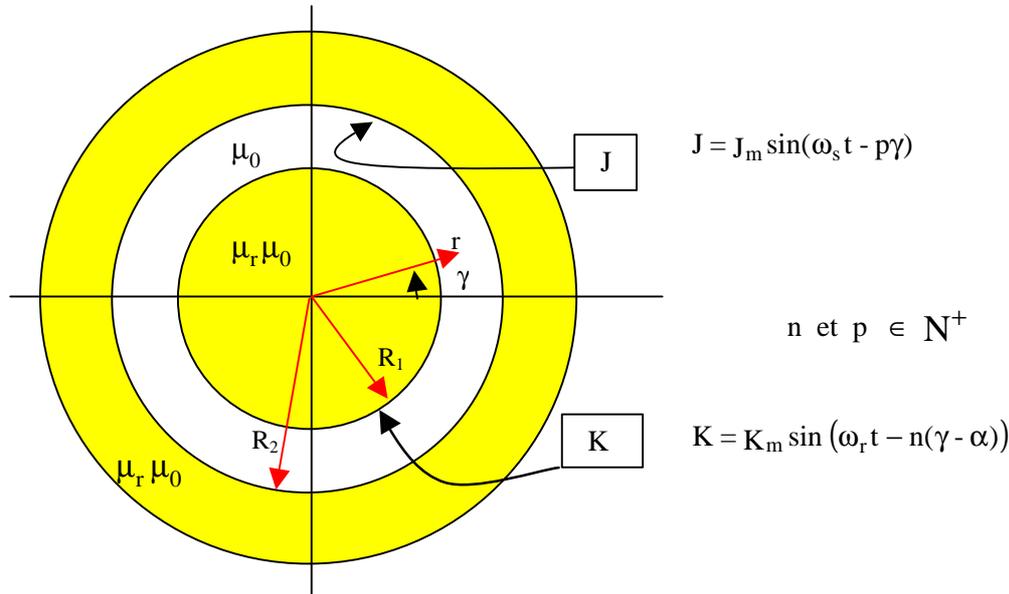


Considérons la force exercée sur un élément de courant surfacique  $J \cdot Rd\theta \cdot dL$

L'élément de couple s'écrit :  $d\Gamma = R * dF$  avec  $dF = J(\gamma,t) * dL * R * d\gamma * B(\gamma,t)$

### 13 - 3 Couple calculé avec deux nappes de courants.

Nous sommes donc amenés à considérer deux nappes de courant disposées sur le rotor et le stator comme il l'est montré sur la figure suivante :



La nappe de courant disposée au stator « J », induit une induction  $B_J$ , tous les deux sous la forme suivante :

$$J = J_m \sin(\omega_s t - p\gamma) \quad \Leftrightarrow \quad B_J = B_{m,j} \cos(\omega_s t - p\gamma)$$

De même, la nappe de courant disposée au rotor « K », induit une induction  $B_K$ , tous les deux sous la forme suivante :

$$K = K_m \sin(\omega_r t - n(\gamma - \alpha)) \quad \Leftrightarrow \quad B_K = B_{m,k} \cos(\omega_r t - n(\gamma - \alpha))$$

Dans l'entrefer, le champ total est la somme des champs créés.

$$B = B_J(\gamma, t) + B_K(\gamma, t)$$

L'élément de couple sur le rotor s'écrit :

$$d\Gamma = R^2 \cdot (K_m \sin(\omega_r t - n(\gamma - \alpha))) \cdot \left\{ \begin{array}{l} B_{m,j} \cdot \cos((\omega_s t - p\gamma)) \\ B_{m,k} \cos(\omega_r t - n(\gamma - \alpha)) \end{array} \right\} \cdot d\gamma \cdot dL$$

$$d\Gamma = R^2 \cdot B_{m,j} K_m \sin(\omega_r t - n(\gamma - \alpha)) \cdot \cos((\omega_s t - p\gamma)) \cdot d\gamma \cdot dL + R^2 \cdot B_{m,k} K_m \sin(\omega_r t - n(\gamma - \alpha)) \cdot \cos(\omega_r t - n(\gamma - \alpha)) \cdot d\gamma \cdot dL$$

$$\Gamma = R^2 \cdot B_{m,j} K_m \iint \sin(\omega_r t - n(\gamma - \alpha)) \cdot \cos((\omega_s t - p\gamma)) \cdot d\gamma \cdot dL + R^2 \cdot B_{m,k} K_m \iint \sin(\omega_r t - n(\gamma - \alpha)) \cdot \cos(\omega_r t - n(\gamma - \alpha)) \cdot d\gamma \cdot dL$$

La deuxième intégrale est nulle ( $\Gamma = \int_0^{2\pi} \sin(n\gamma + b) \cdot \cos(n\gamma + b) \cdot d\gamma = 0$  car  $n \in \mathbb{N}^+$ )

**Première condition d'existence du couple :**

Si nous cherchons à calculer le couple qu'exerce une nappe de courant sur elle-même, nous le trouverons égal à zéro. **Dans une machine à stator et rotor lisse, il faut deux nappes de courants pour créer un couple.**

Donc : 
$$\Gamma = R^2 \cdot B_{m,j} K_m \iint \sin(\omega_r t - n(\gamma - \alpha)) \cdot \cos((\omega_s t - p\gamma)) \cdot d\gamma \cdot dL$$

Calculons cette intégrale :

$$\Gamma = \frac{1}{2} L \cdot R^2 \cdot B_{m,j} \cdot K_m \left( \int_0^{2\pi} \sin(\omega_r - \omega_s)t - (n - p)\gamma - n\alpha \cdot d\gamma + \int_0^{2\pi} \sin(\omega_r + \omega_s)t - (n + p)\gamma - n\alpha \cdot d\gamma \right)$$

La deuxième intégrale est nulle et nous avons donc :

$$\Gamma = \frac{1}{2} L \cdot R^2 \cdot B_{m,j} \cdot K_m \left( \int_0^{2\pi} \sin(\omega_r - \omega_s)t - (n - p)\gamma - n\alpha \cdot d\gamma \right)$$

Cette intégrale est différente de ZERO si et seulement si  $n = p$ . Le couple s'écrit alors :

$$\Gamma = \frac{1}{2} L \cdot R^2 \cdot B_{m,j} \cdot K_m \left( \int_0^{2\pi} \sin(\omega_r - \omega_s)t - p\alpha \cdot d\gamma \right)$$

D'où :

$\Gamma = \pi L \cdot R^2 \cdot B_{m,j} \cdot K_m (\sin(\omega_r - \omega_s)t - p\alpha)$
---

**Deuxième condition d'existence du couple :**

***Nous devons avoir le même nombre de paires de pôles au stator et au rotor***

(Ce résultat avait déjà été démontré auparavant.)

Nous constatons que le couple est une fonction sinusoïdale du temps, ce qui signifie que pendant une demi période, la valeur de C est positive, puis négative pendant l'autre demi période. Donc en valeur moyenne le couple est nul et la machine électrique ne peut pas tourner.

Nous devons traduire cela par la relation suivante :

$$\langle \Gamma(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma dt \neq 0$$

La valeur moyenne temporelle doit être non nulle, comme la valeur

moyenne spatiale du couple. Si ce n'est pas le cas, il n'y a pas conversion d'énergie.

D'où :

$$\Gamma = \frac{1}{T} \int_0^T \pi L \cdot R^2 \cdot B_{m,j} \cdot K_m (\sin(\omega_r - \omega_s)t - n\alpha) dt \neq 0$$

Pour avoir une intégrale non nulle, nous devons avoir obligatoirement :

**Troisième condition d'existence du couple :**

*Nous devons avoir*  $\omega_r - \omega_s = 0$

Nous allons détailler cette condition dans le cas des machines électriques usuelles et retrouver ainsi la manière de les concevoir.

## 14 - Applications particulières :

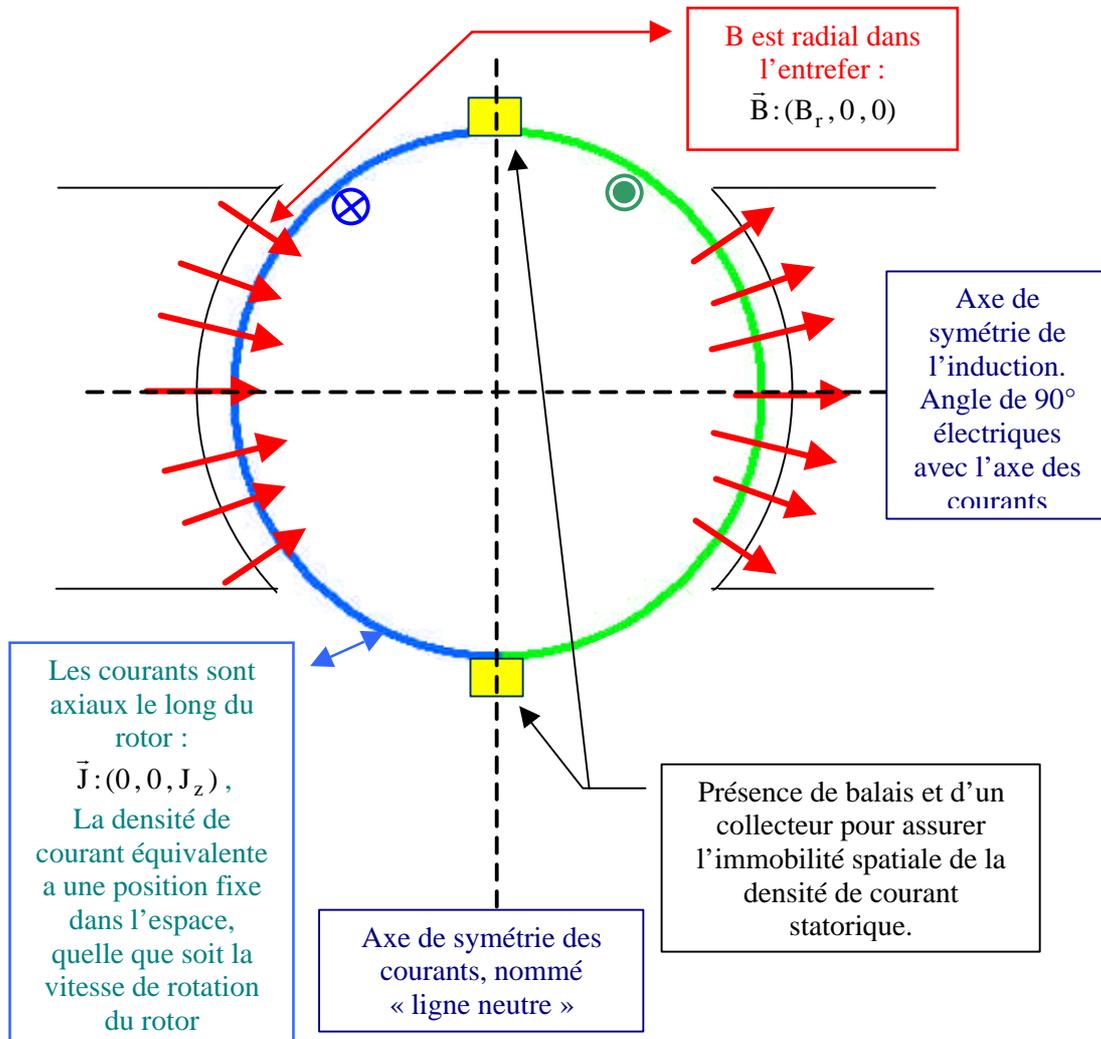
### 14 - 1 La Machine à courant continu : $\omega_r = \omega_s = 0$

Dans ce cas là, les pulsations des courants au stator et au rotor sont nulles. Le champ est fixe et la distribution des courants l'est également.

Le couple se calcule facilement et s'écrit :

$$\Gamma = \pi L.R^2 .B_{m,j}.K_m(\sin p\alpha)$$

La valeur du couple est maximum si l'angle mécanique  $\alpha$  est égal à  $\pi/2p$ , ce qui correspond à un angle de décalage électrique entre les deux nappes de courant égal à  $\pi/2$ .

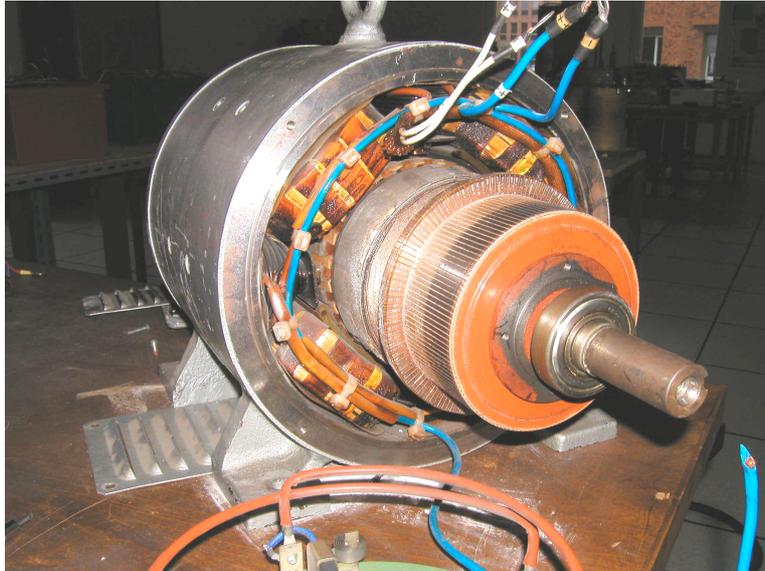


Nous aboutissons à la configuration suivante : l'angle de décalage entre les nappes de courant stator et rotor doit rester fixe dans l'espace, même si le rotor tourne. Il doit en permanence être égal à  $\pi/2$ .

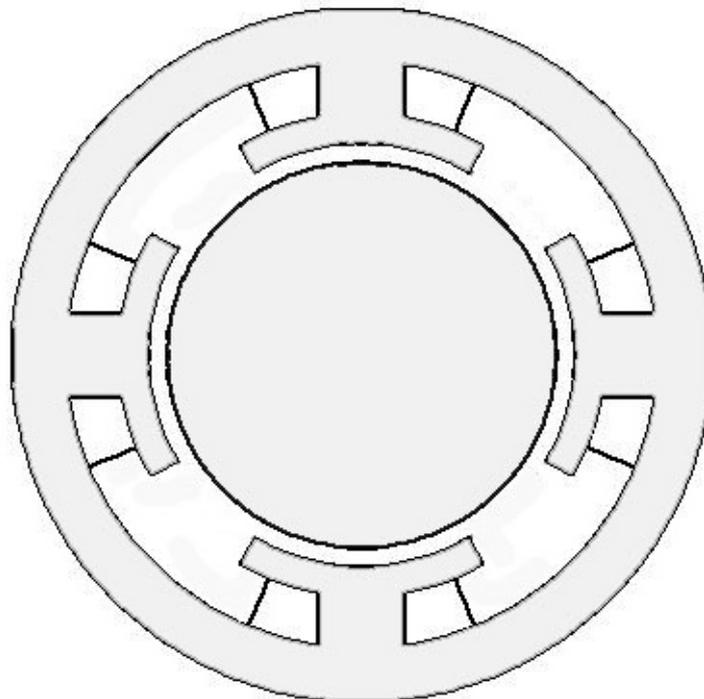
Pour respecter cette condition, les hommes ont inventé un système de collecteur et de balais.

La manière dont les conducteurs sont placés dans la machine, dépasse le cadre de ce cours. Nous pouvons néanmoins regrouper ces remarques sur le schéma de la page précédente.

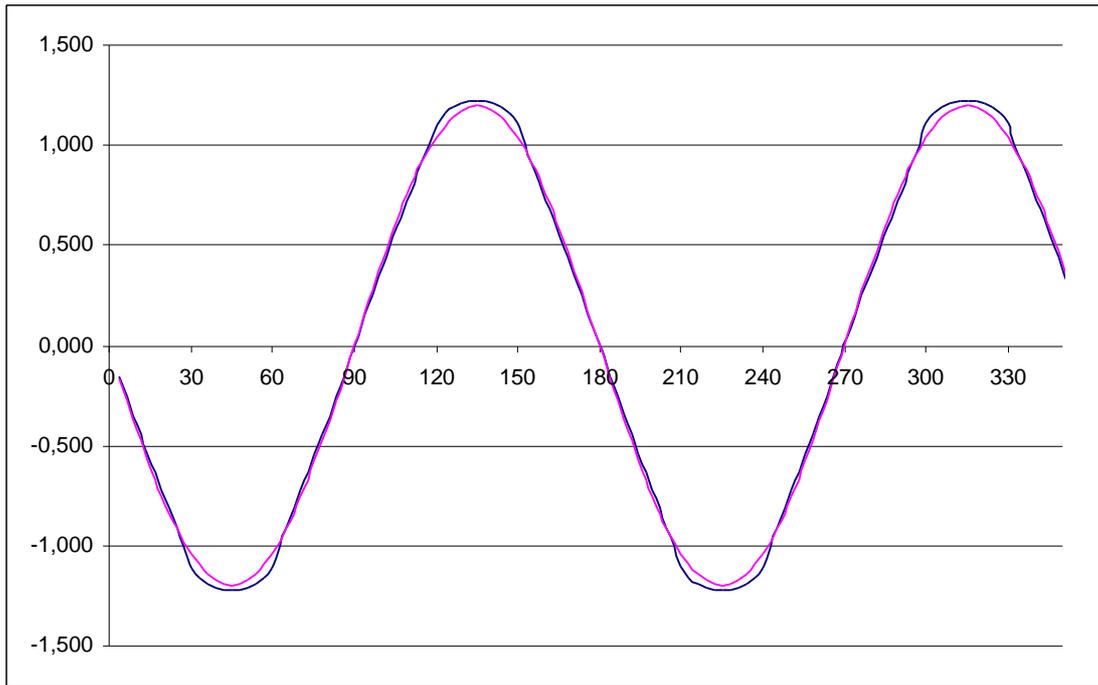
Généralement, les machines à courant continu n'ont pas un stator lisse, mais à pôles saillants, comme montré sur la photo qui suit :



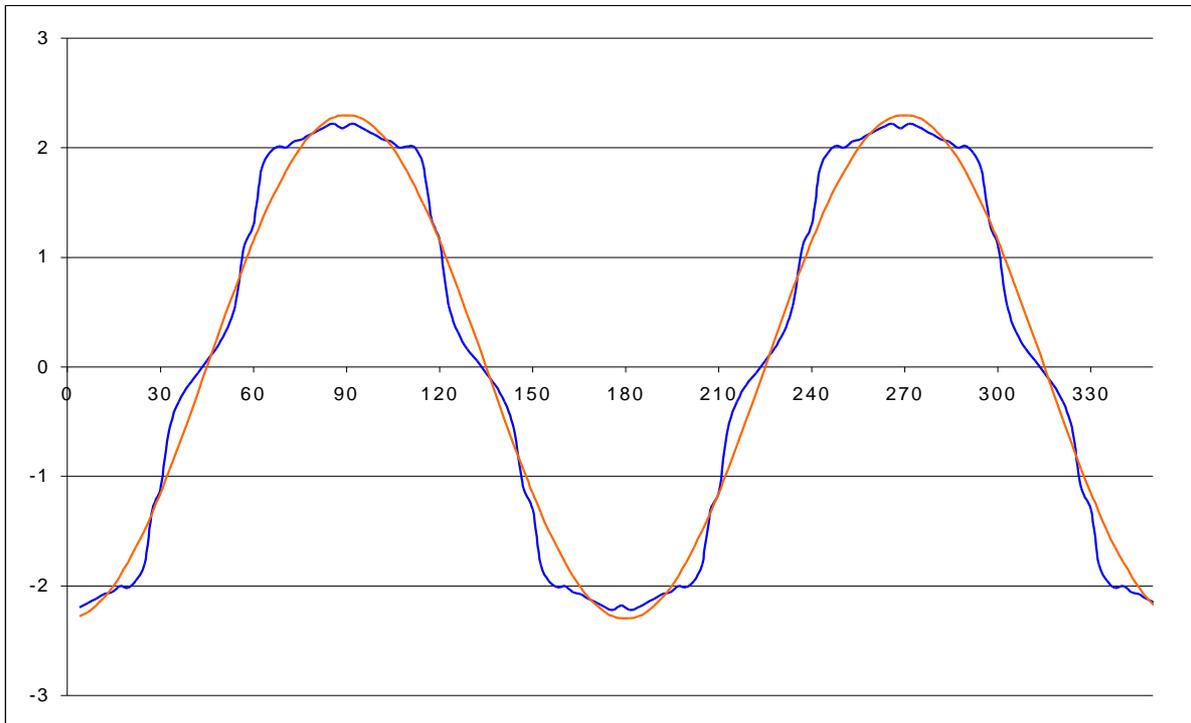
Nous pourrions néanmoins, pour les besoins d'une éventuelle étude, remplacer ce stator par un stator lisse avec une densité de courant équivalente sinusoïdale. Pour justifier cette hypothèse, nous avons simulé, grâce à un logiciel d'éléments finis du laboratoire, cette machine et cherché à obtenir la forme de l'induction magnétique le long de l'entrefer :



Machine simulée



Potentiel vecteur  $A_z(r,\gamma)$  dans l'entrefer  
 En bleu : potentiel calculé ; en rouge : fondamental du potentiel



Induction  $B_r(\gamma)$  dans l'entrefer

$$B_r(\gamma) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} A_z(r, \gamma)$$

En bleu : induction calculée ; en rouge : fondamental de l'induction

Nous laisserons le lecteur découvrir la machine à courant continu dans le cours spécialement prévu à cet effet.

## 14 - 2 Le Moteur universel : $\omega_r = \omega_s = 2\pi f$

Ces moteurs sont largement utilisés dans le domaine grand public : perceuse, aspirateur, ..etc.

Réécrivons les densités de courants J et K sous la forme :

$$J = J_m \sin(p\gamma + \omega_s t + \varphi_s) \quad \text{donc} \quad B_J(\gamma, t) = B_m \cdot \cos(p\gamma + \omega t + \varphi_s)$$

et

$$K = K_m \sin(p(\gamma + \alpha) + \omega_r t + \varphi_r)$$

d'où, tous calculs faits, la valeur du couple :

$$\Gamma = \pi L R^2 B_{m,j} K_m (\sin p\alpha)(\cos(\varphi_s - \varphi_r))$$

Nous retrouvons là aussi le fait que la valeur du couple est maximum si l'angle mécanique  $\alpha$  est égal à  $\pi/2p$ , ce qui correspond à un angle de décalage électrique entre les deux nappes de courant égal à  $\pi/2$ . Mais il est nécessaire en plus d'avoir  $(\varphi_s - \varphi_r) = 0$

Donc, le moteur universel a la même structure que la machine à courant continu. En plus, les enroulements du stator et du rotor sont branchés en série.

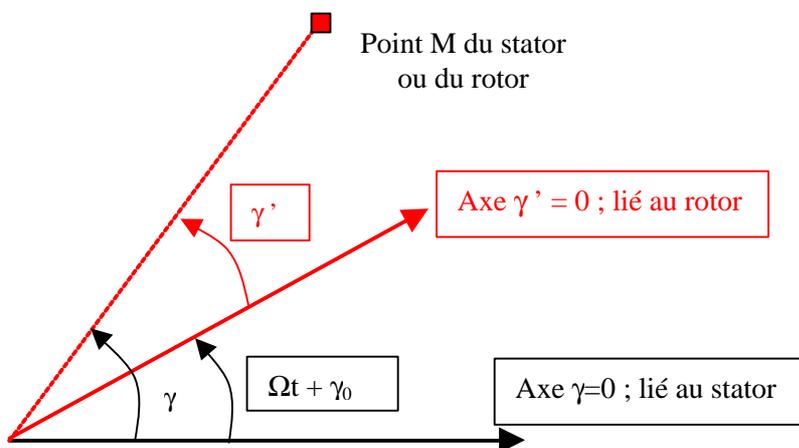
Dans ce cas seulement, le moteur universel fournit le couple maximum possible.

## 15 - Conclusion partielle :

Nous venons de voir ce qu'il en est quand les nappes de courant restent fixes dans l'espace, alors que le rotor tourne. Nous nous sommes aperçus que dans ce cas, nous devons disposer d'un collecteur et de balais pour assurer cette condition. Une conséquence importante est le fait que la valeur de la vitesse n'intervient pas dans l'équation du couple.

## 16 - Nappe de courant rotorique en rotation dans le stator :

Qu'advient-il maintenant si le rotor « emmène » avec lui dans sa rotation une densité de courant ? Cela va être l'objet de notre étude maintenant.



Nous écrivons dans ce cas, la relation qui existe entre l'axe lié au stator (fixe dans l'espace) et l'axe lié au rotor (en rotation par rapport aux axes liés au stator), sous la forme suivante :

Un point M est repéré dans le repaire du rotor par l'angle  $\gamma'$  dans le repaire du stator par un angle  $\gamma$ .

Le rotor tourne à la vitesse angulaire  $\Omega$ .

Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma'}{dt} + \Omega$$

soit donc :

$$\gamma - \gamma_0 = \gamma' + \Omega.t$$

## 16 - 1 La machine asynchrone

L'enroulement est triphasé au stator, les courants d'alimentation sont équilibrés direct de pulsation  $\omega$  ; l'enroulement du rotor est triphasé, alimenté par des courants de pulsation  $\omega_r$ .

Nous allons là encore, réécrire les densités de courants :

Stator :

$$J = J_m \sin(p(\gamma + \alpha) + \omega_s t) \quad \text{donc} \quad B_J(\gamma, t) = B_{m,j} \cdot \cos(p(\gamma + \alpha) + \omega_s t)$$

Rotor :

Dans le repaire du rotor :

$$K = K_m \sin(n\gamma' + \omega_r t) \quad \text{et}$$

en écrivant là aussi dès le départ :  $n = p$

$$K = K_m \sin(p\gamma' + \omega_r t)$$

Dans le repaire du stator :

$$K = K_m \sin(p(\gamma - \gamma_0 - \Omega t) + \omega_r t)$$

En égalant les termes temporels de l'intégrale, nous obtenons :

$$\omega_s - \omega_r - p\Omega = 0$$

La machine asynchrone développe du couple si et seulement si nous avons une relation liant les fréquences des courants statoriques, des courants rotoriques et la vitesse de rotation du rotor par rapport au stator :

$$\Omega = \frac{\omega_s - \omega_r}{p} \quad \text{qui peut aussi s'écrire:} \quad \Omega = \frac{\omega_s}{p} \left( 1 - \frac{\omega_r}{\omega_s} \right) = \frac{2\pi f_s}{p} (1 - g)$$

## 16 - 2 La machine synchrone

L'enroulement est triphasé au stator, les courants d'alimentation sont équilibrés direct de pulsation  $\omega$  ; l'enroulement du rotor est alimenté par du courant continu.

Nous allons là encore, réécrire les densités de courants :

Stator :

$$J = J_m \sin(p(\gamma + \alpha) + \omega_s t) \quad \text{donc} \quad B_J(\gamma, t) = B_{m,j} \cdot \cos(p(\gamma + \alpha) + \omega_s t)$$

Rotor :

Dans le repaire du rotor :

$$K = K_m \sin(n\gamma') \quad \text{et}$$

en écrivant là aussi dès le départ :  $n = p$

$$K = K_m \sin(p\gamma')$$

Dans le repaire du stator :

$$K = K_m \sin(p(\gamma - \gamma_0 - \Omega t))$$

En égalant les termes temporels de l'intégrale, nous obtenons :

$$\omega_s - p\Omega = 0$$

La machine synchrone ne peut développer du couple qu'à une seule vitesse de rotation du rotor par rapport au stator :

$$\Omega = \frac{\omega_s}{p} \quad \text{qui peut aussi s'écrire :} \quad \Omega = \frac{2\pi f_s}{p}$$

### 16 – 3 Exemple de réalisation d'un rotor de machine synchrone :

Nous plaçons un courant continu dans des encoches rotoriques de la manière suivante :

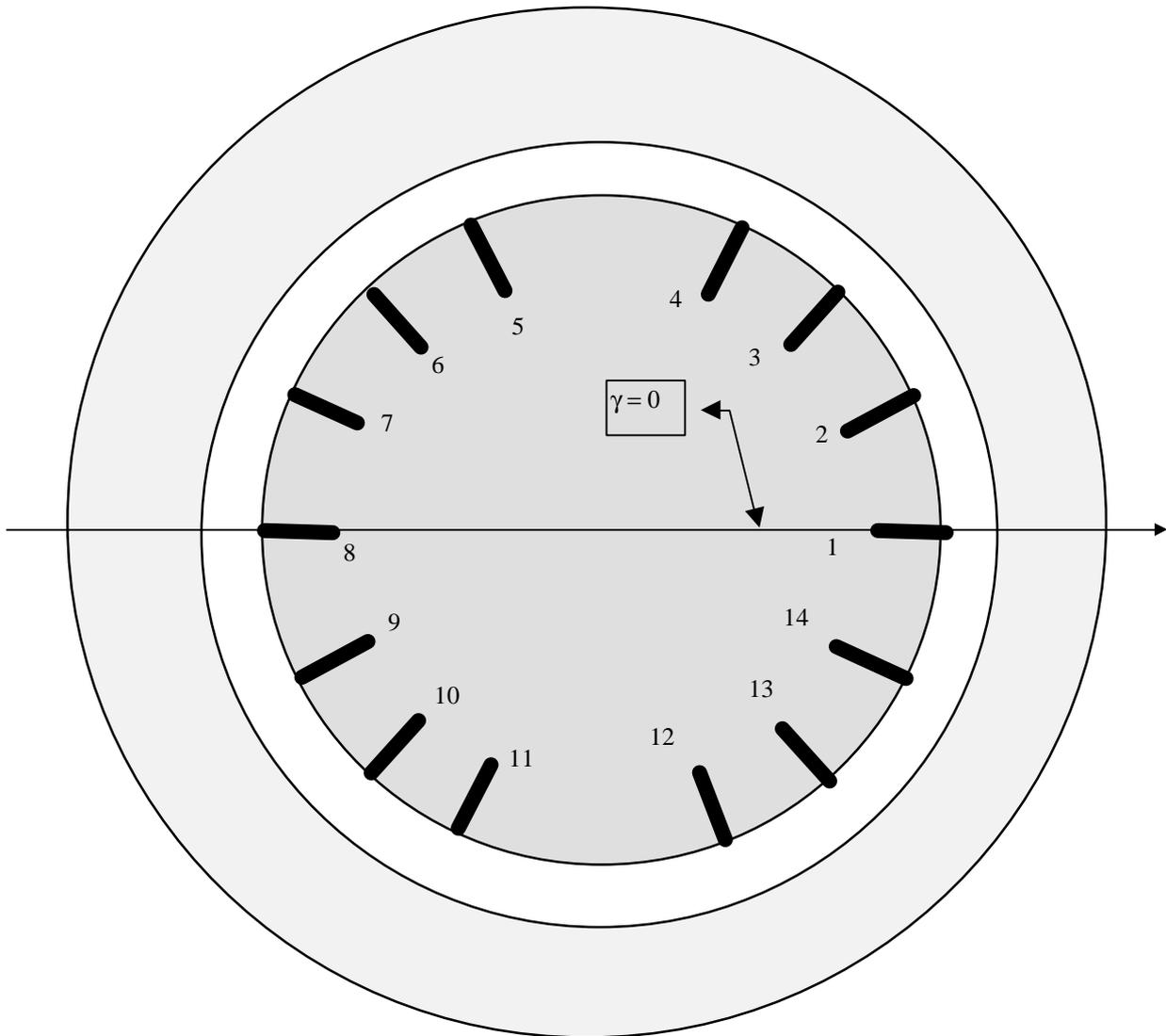
La densité de courant résultante, reconstituée à partir de ses coefficients de la série de fourrier, l'induction magnétique créée dans l'entrefer ainsi que son fondamental, ont été tracés sur le graphe suivant :

Répartition du courant continu dans les encoches :

N° de l'encoche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Courant	+I	+I	+I	+I	-I	+I	+I	+I						

Nous pouvons là aussi indiquer dans le tableau suivant les valeurs des coefficients de bobinage et de force magnéto motrice.

Les coefficients  $J_{2k+1}$  et  $G_{2k+1}$  ont les mêmes significations qu'auparavant, c'est à dire, sont relatifs à la densité de courant résultante et à l'induction.



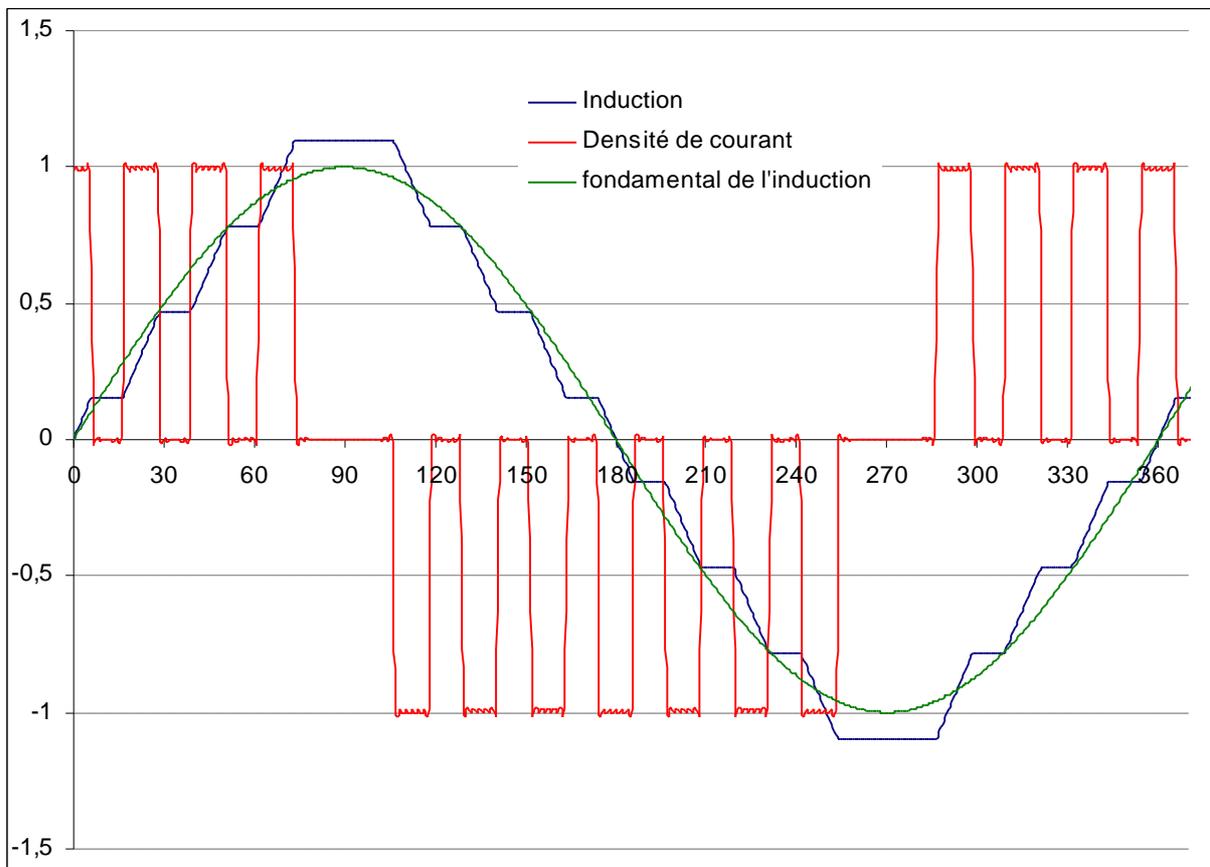
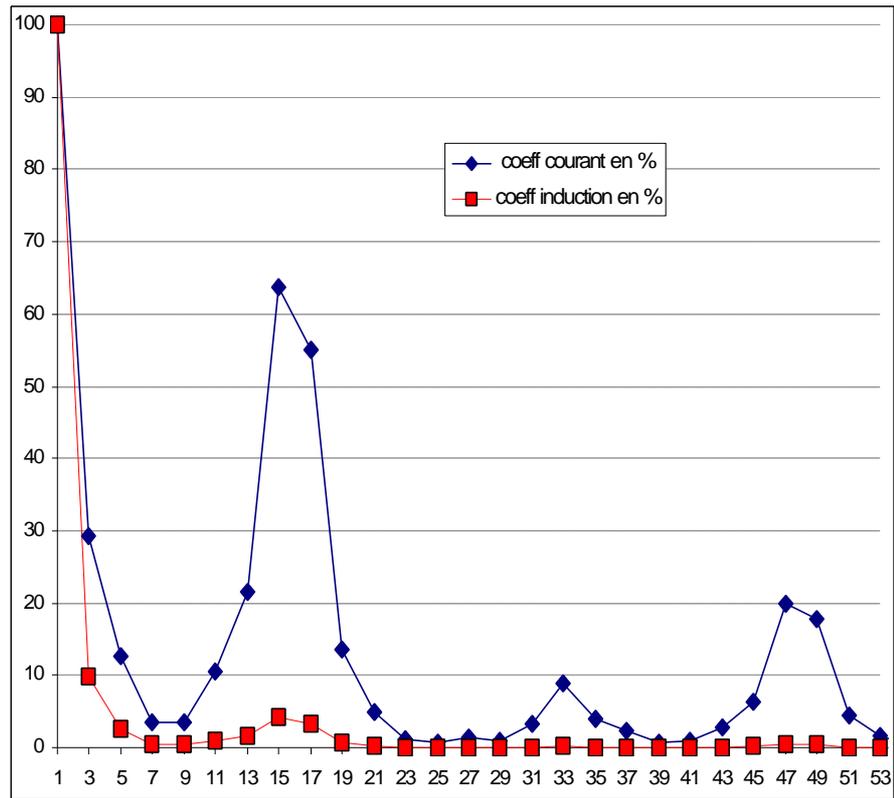
Nous calculerons aussi le taux d'harmoniques :

$$\text{THD}_1 = 100 \cdot \frac{\sqrt{\sum_{m \geq 2} Y_m^2}}{Y_1} \quad \text{et} \quad \text{THD}_2 = 100 \cdot \frac{\sqrt{\sum_{m \geq 2} Y_m^2}}{\sqrt{\sum_{m \geq 1} Y_m^2}}$$

Pour la valeur de l'induction, :  $\text{THD}_{1,B} = 11,6 \%$  et  $\text{THD}_{2,B} = 11,6\%$

Pour la valeur de la densité de courant, :  $\text{THD}_{1,j} = 95,1 \%$  et  $\text{THD}_{2,j} = 68,9 \%$

$2k+1$	$J_{2k+1}/J_1$ en %	$G_{2k+1}/G_1$ en %
1	100,0	100,0
3	29,3	9,8
5	12,7	2,5
7	3,6	0,5
9	3,4	0,4
11	10,6	1,0
13	21,4	1,6
15	63,8	4,3
17	55,0	3,2
19	13,7	0,7
21	4,9	0,2
23	1,1	0,0
25	0,8	0,0
27	1,5	0,1
29	1,0	0,0
31	3,2	0,1
33	9,0	0,3
35	4,1	0,1
37	2,3	0,1
39	0,8	0,0
41	0,8	0,0
43	2,9	0,1



## 17 - Conclusions :

La machine idéale sera, en tenant compte de toutes les conclusions partielles le long de cette leçon, définie comme suit :

1. L'induction dans l'entrefer est strictement radiale.
2. Nous ne prenons en compte que le fondamental de cette induction.
3. Le nombre de paires de pôles doit être identique au stator et au rotor, car autrement le couple dans la machine est nul.
4. L'entrefer est le plus petit possible.
5. Les nappes de courant sont spatialement en quadrature électrique.
6. Les conditions sur les pulsations des différents courants impose le mode de fonctionnement de la machine.