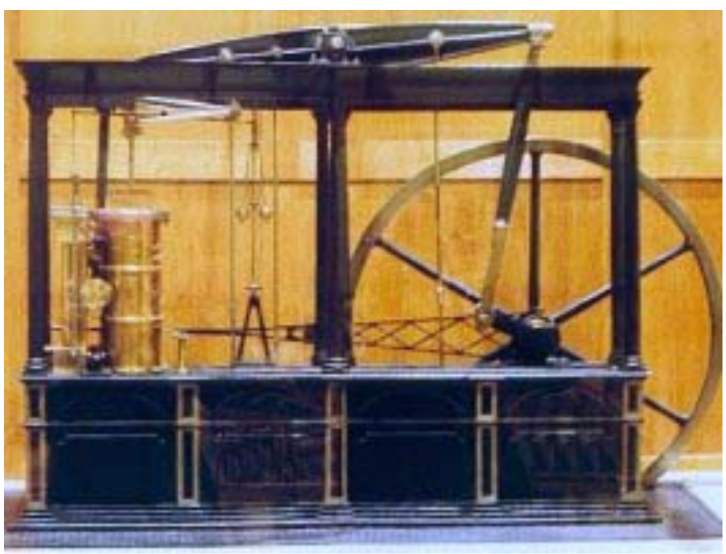
Automatique et automatismes

Notes de cours pour les élèves de CPGE PTSI

Version 1.0

29 mars 2012

écrit sous $\LaTeX 2_\varepsilon$



Elric THOMAS

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La technologie moderne a permis le développement des sciences tout en imposant l'exploration de domaines théoriques de plus en plus complexes. Parmi ces sciences en pleine expansion et intégrant rapidement l'apport des technologies modernes, on compte l'**AUTOMATIQUE**. Le substantif "automatique" a été utilisé pour la première fois dans l'article "Essai sur l'Automatique" publié dans la Revue Générale des Sciences du 15 novembre 1915 par l'espagnol Torres y Quevedo[1]. Le petit Larousse propose les définitions suivantes :

Définition 1 *Automatique :*

Science et technique de l'automatisation, qui étudient les méthodes scientifiques et les moyens technologiques utilisés pour la conception et la construction des systèmes automatiques.

Définition 2 *Automatisation :*

Exécution automatique de tâches industrielles, administratives ou scientifiques, sans intervention humaine.

Dans le langage scientifique, le mot "système" peut être défini de la manière suivante : un système consiste en une combinaison de parties (électriques, pneumatiques, thermiques, mécaniques, ...) qui se coordonnent pour concourir à un résultat. Les entrées sont les signaux qui apportent au système les informations du milieu extérieur. Les sorties fournissent la réponse du système relative aux entrées. On peut parler de causes (entrées) et d'effets (sorties). La "commande" d'un système consiste à exercer à partir des signaux d'entrée, une influence sur le système de manière à obtenir en sortie un comportement déterminé. Ce comportement peut être assimilé à la conduite d'une ou plusieurs grandeurs physiques telles que vitesse, accélération, position, température, effort, ... Lorsque cette influence est

1. **Leonardo Torres y Quevedo (1852-1936)**, ingénieur des Ponts et Chaussées, logicien, automaticien, il fut l'auteur d'innombrables inventions et réalisations (ponts suspendus, téléfériques, funiculaires, calculateurs analogiques, télécommandes par voie hertzienne, ballons dirigeables, etc.) Il réalisa à partir de 1911 des jeux d'échecs électromécaniques qui gagnaient des fins de partie ultra-simples (une tour et un roi) face à un joueur

exercée par l'homme, la commande est dite manuelle. Lorsque l'homme est remplacé par des dispositifs techniques autonomes, la commande est dite automatique.

Un système automatisé est alors un système technique pour lequel tout ou une partie du savoir-faire est confié à une machine.

Les systèmes de commande automatiques copient le plus souvent le comportement de l'homme. Si on observe le comportement de l'homme dans la réalisation d'une tâche quelconque, on pourra le décomposer en 3 phases essentielles :

- Observation,
- Réflexion,
- Action.

Prenons comme exemple le comportement d'un conducteur au volant de son véhicule. Le système que l'homme commande est sa voiture dans l'environnement de la route. Le résultat à atteindre (signaux de sortie) est le contrôle de la position et de la vitesse du véhicule. Les éléments susceptibles de modifier le comportement du système (signaux d'entrée) sont dans une première approche le freinage, l'accélération, la direction. Le cerveau et les membres constituent le système de commande qui va gérer les signaux d'entrée à partir des observations effectuées par l'oeil.

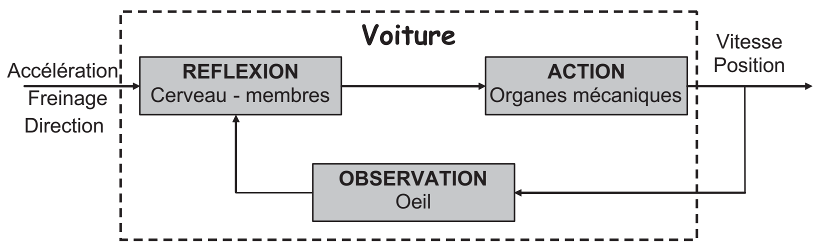


FIG. 1.1 – *Principe de la conduite d'un véhicule automobile*

Il est intéressant de noter que des types d'actions différents peuvent être appliqués suivant les critères intégrés lors de la phase de réflexion (conduite sportive, conduite économique, ...).

1.1 Buts et motivations

Réaliser un système automatique, c'est concevoir un système capable d'apporter une valeur ajoutée à une matière d'oeuvre sans intervention humaine.

Les buts et motivations de l'automatisation sont multiples. On peut les classer en plusieurs catégories :

- gain en compétitivité : diminuer les coûts ;
- gain en qualité : réduire les déchets, améliorer les performances ;
- gain en flexibilité : faciliter la conduite de la production ;
- gain en sûreté : augmenter la sécurité ;
- gain technique : impossibilité ou difficulté de conduite humaine.

Dans une économie de marché, toute automatisation d'un système de production aura pour objectif d'aider à la compétitivité finale du produit, soit directement (coût, qualité,...) soit indirectement (amélioration des conditions de travail). Il faudra donc toujours intégrer le critère économique en tenant compte de la rentabilité de l'automatisation.

1.2 Histoire

L'histoire des systèmes automatiques peut se diviser en trois périodes:

- La première période, que l'on peut qualifier de préhistoire de l'automatique s'étend de l'antiquité au milieu du siècle dernier. Des inventeurs géniaux ont conçu des systèmes automatiques de manière purement intuitive. Les systèmes de commande sont généralement issus des lois naturelles de la physique. Dès 250 avant J.C. nous avons des exemples avec l'horloge automatique à eau de Ktésybios (Fig. 1.2, p. 3), la lampe à huile de Philon de Bizance et la machine à doser le vin de Héron d'Alexandrie. Plus tard, Réaumur, Watt et son régulateur en 1788 (Fig. 1.2, p. 4), Jacquard et son métier à cartes perforées, font progresser l'automatisation.

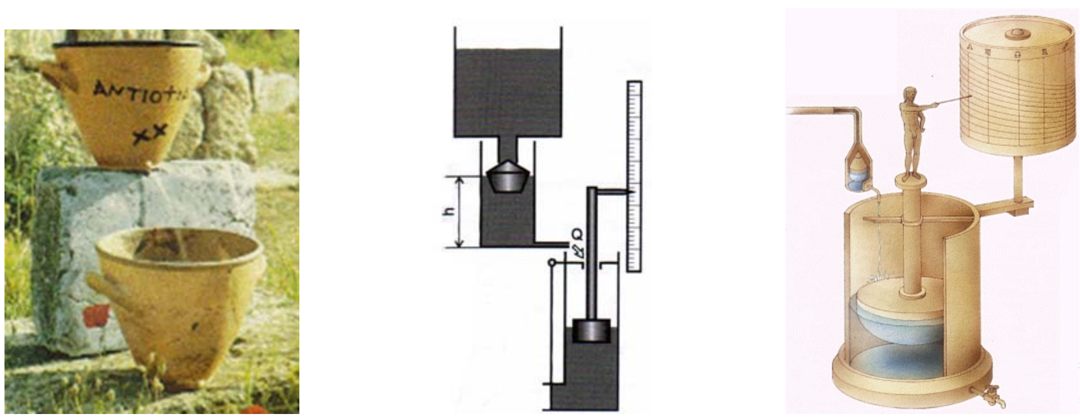


Fig. 1.2 – *Clepsydre - différentes réalisations*

- La deuxième période à partir du milieu du XIXème siècle est caractérisée par la théorie du bouclage (retour) et les applications de l'algèbre de Boole (systèmes combinatoires). L'étude des systèmes est abordée d'un point de vue analytique. Des chercheurs du nom de Nyquist, Bode, Black, Nichols, Hall, Evans ont laissé leur nom à des représentations de systèmes bouclés et ont publié leurs résultats à la fin de la seconde guerre mondiale.
- La troisième période débute avec les années cinquante. L'apparition de calculateurs numériques révolutionne le monde de l'automatique. La puissance de calcul disponible fait naître les méthodes dites de l'automatique " moderne" ou "avancé". Chez Renault, les premiers robots datent des années 70 pour l'assemblage de tôles de carrosserie. Les années 80 ont vu ensuite le développement de robots hydrauliques avec les premiers ateliers complètement robotisés (une centaine de robots à Douai en 1981 pour l'assemblage de la R9). Les années 90 ont ensuite vu le développement des robots tout électrique à moteurs auto synchrones et l'apparition de contrôleurs d'axe intégrant

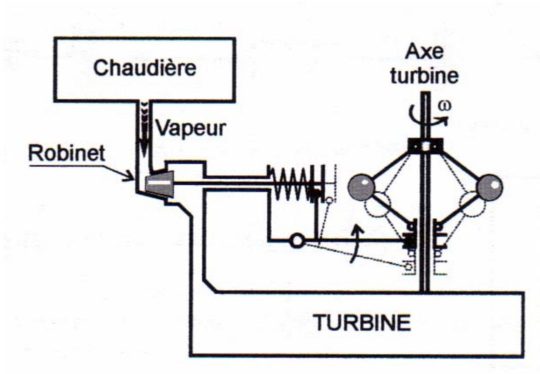


FIG. 1.3 – *Machine et régulateur de Watt - principe et réalisation*

l'ensemble des fonctions de contrôle / commande d'une chaîne monoaxe (traitement et surveillance séquentielle, carte d'axe et variateur, mesures et sécurité).

1.3 Description fonctionnelle d'un système automatisé

1.3.1 Représentation fonctionnelle

Un système automatisé peut se décomposer en deux parties distinctes :

- une partie opérative comprenant le processus agissant sur la matière d'œuvre et générant la valeur ajouté,
- une partie commande pilotant le processus grâce à des ordres ou des informations provenant de l'extérieur (opérateur, milieu environnant) ou de la partie opérative (capteurs), cette partie commande gère l'information, elle émet des ordres et envoie des informations.

Nous pouvons représenter ce système automatisé grâce à la représentation de type SADT ci-dessous.

1.3.2 Chaîne fonctionnelle (ou axe)

La chaîne fonctionnelle est constituée de l'ensemble des composants de la partie opérative (P.O.) et de la partie commande (P.C.), contribuant à la réalisation de la tâche opérative. Ces éléments sont fonctionnellement liés entre eux.

Nous y retrouvons l'ensembles des composants habituels :

- la chaîne d'action avec les préactionneurs, les actionneurs et les effecteurs,
- la chaîne d'information avec les capteurs, la partie commande et ses divers composants (interfaces, CPU).

L'étude d'un système avec une partie commande automatique est basée sur l'étude du flux d'information le long de la chaîne d'information.

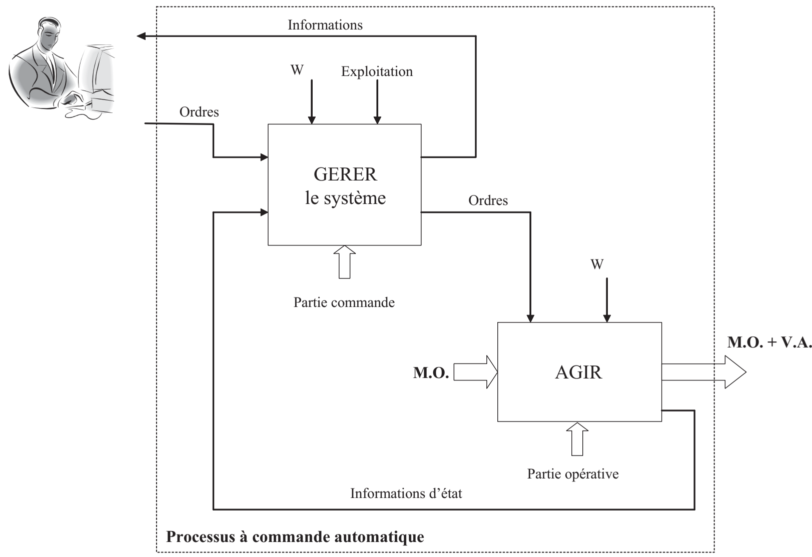


FIG. 1.4 – *Diagramme fonctionnel d'un processus automatisé*

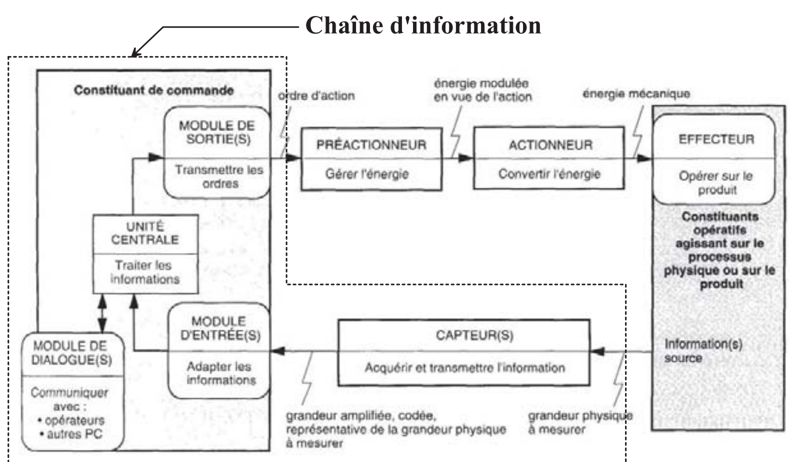


FIG. 1.5 – *Diagramme fonctionnel d'un processus automatisé*

1.4 L'information

L'information peut prendre des formes très diverses en fonction du système automatisé étudié. Elle peut être basée sur des grandeurs physiques variées (signal électrique, pneumatique, hydraulique, signal lumineux ou sonore, etc.). Le signal en question peut alors véhiculer une informations plus ou moins complexe en fonction des besoins.

1.4.1 Définitions

Dans la partie précédente, nous avons mis en évidence la chaîne d'information. La nature de celle-ci nous permettra en partie de distinguer différentes catégories de systèmes. L'information est nécessaire pour transmettre des décisions et pour disposer de renseignements sur l'état du système. Il existe deux types d'information :

- information discrète,
- information analogique.

Les supports de l'information sont en général des câbles électriques en nappe (liaisons parallèles), des câbles coaxiaux, des fibres optiques.

1.4.2 Information discrète

1.4.2.1 Signaux logiques (Tout Ou Rien)

Un signal logique est une grandeur qui n'admet que 2 états : l'état "travail" (tout) et l'état "repos" (rien). Chacun des ces états est décrit à l'aide des variables Booléennes 1 (Vrai) et 0 (Faux).

Exemple 1 *Si l'on considère comme variable de sortie la rotation d'un moteur M, si le moteur tourne on écrira $M = 1$, si le moteur est à l'arrêt, on écrira $M = 0$. Le diagramme de fonctionnement ci-dessous représente l'évolution temporelle d'un signal logique M.*

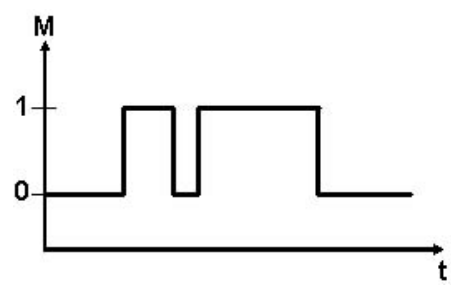


Fig. 1.6 – *Réponse de type Tout ou Rien*

Remarque 1 *L'information logique est représentée par un signal (généralement électrique, mais aussi pneumatique) dont la représentation temporelle, du fait de la technologie des composants, ne correspond pas exactement à un signal TOR. On peut en effet, distinguer 4 zones :*

- *zone 1 :*

- *zone 2 :*
- *zone 3 :*
- *zone 4 :*

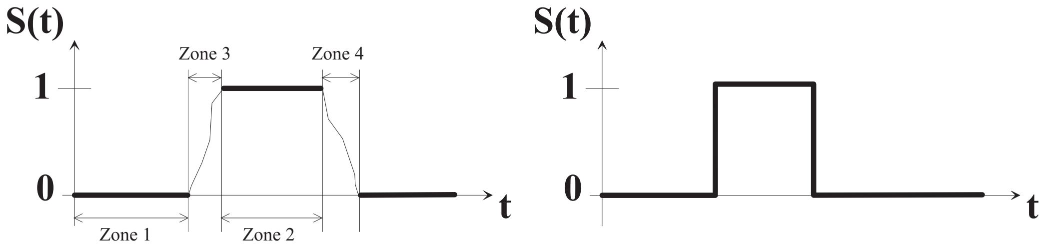


FIG. 1.7 – *Signal TOR réel et modèle employé*

Par hypothèse, le temps correspondant aux zones 3 et 4 est négligeable devant la durée des états logiques. D'autre part, les changements d'état des variables sont temporellement distincts.

1.4.2.2 Signaux numériques

L'information numérique discrète découle de la nécessité de discrimination d'une même information à l'aide d'un nombre restreint de variables. Une information numérique est le résultat d'un codage. La perte de contenu informationnel est malheureusement toujours irréversible.

Le signal numérique est alors l'image informationnelle d'une grandeur physique de type analogique. Ces signaux ne sont donc pas des signaux naturels. Ils sont traités par un calculateur et présentent la particularité d'être échantillonnés dans le temps (Convertisseur Analogique / Numérique CAN). Un signal numérique est codé à partir d'une combinaison de signaux logiques ou "bits". Un signal numérique ne prendra donc pas un nombre infini de valeurs. Sa résolution dépend du nombre de bits utilisés pour le codage. Par exemple, un signal numérique codé sur 8 bits peut prendre 2^8 soit 256 valeurs différentes.

EXEMPLE 2 *Afin de contrôler la vitesse angulaire ω du moteur par un calculateur, il est nécessaire de traduire cette vitesse ω sous forme d'un signal numérique.*

1.4.3 Information analogique

Un signal analogique est une grandeur physique (vitesse, position, température...) qui peut prendre un nombre infini de valeurs avec une variation continue.

EXEMPLE 3 *Si l'on considère l'exemple précédent du moteur électrique M, le signal de sortie analogique à considérer pourra être la vitesse angulaire du moteur ω.*

Le diagramme de fonctionnement ci-dessus représente l'évolution temporelle d'un signal analogique ω.

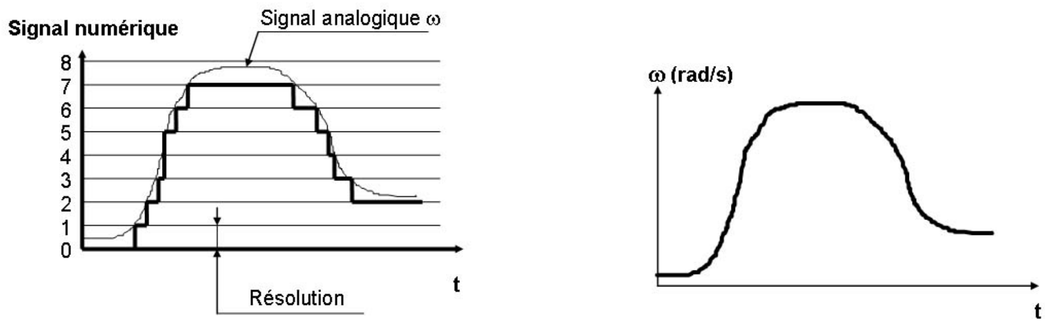


FIG. 1.8 – *Signaux numériques et analogiques*

1.5 Caractéristiques des différentes catégories de systèmes automatisés

1.5.1 Phénomène de retour ou rétro-action

Cette notion est fondamentale dans l'étude des systèmes automatiques. Le retour consiste à prendre en compte de manière permanente la situation du système afin d'élaborer le signal de commande. Un système en boucle fermée sera caractérisé par un dispositif de retour. Ainsi, dans ce type de système, le signal de commande sera fonction à la fois du signal d'entrée et du signal de sortie.

1.5.2 Systèmes à contrôle logique

Dans ce type de système, les signaux à contrôler sont exclusivement des signaux logiques. Le système obéit à un processus pré-établi qui envisage toutes les possibilités d'évolution. On distingue deux types de systèmes à contrôle logique :

- Un signal d'entrée logique (ou une combinaison de signaux d'entrée) conduit invariablement au même signal de sortie. On parlera de systèmes à logique combinatoire.
- Le signal de sortie est élaboré à partir d'un signal d'entrée logique (ou d'une combinaison de signaux) et doit prendre en compte une chronologie pré-établie qui porte sur un nombre fini d'opérations. Dans ce cas on parlera de systèmes à événements discrets ou encore d'automatismes séquentiels.

EXEMPLE 4 *Dans le laboratoire de SII du Lycée, nous pouvons trouver un système de type séquentiel géré par un automate programmable industriel, la maquette du système de palletisation PL200. Le portail automatique est lui piloté par une partie commande utilisant de la logique séquentiel.*

1.5.3 Systèmes à contrôle analogique ou numérique

Dans cette catégorie de système, les signaux à contrôler sont des grandeurs de type analogique ou numérique. Dans ce cas, toutes les situations possibles n'étant pas prévisibles (arrivée d'une perturbation par exemple), le déroulement des opérations ne peut pas être prédéterminé. Un tel système, s'il est munis d'un dispositif de retour (c'est à dire qu'une mesure de la situation est en permanence considérée dans l'élaboration du signal de commande) sera dit système asservi.

Lorsque les variables traitées sont à variation continue, on parlera de système continu ou analogique. D'une manière générale, la plupart des systèmes des systèmes physiques sont continus.

Lorsque les variables sont traitées par un calculateur, elles sont échantillonnées dans le temps, on parlera alors de système discret ou numérique. Les systèmes informatiques font partie de cette catégorie.

Exemple 5 *Dans le laboratoire de SII du Lycée, nous pouvons trouver plusieurs systèmes asservis, les pilotes automatiques de voilier (asservissement de la position du safran pour garder le cap du bateau) ou la maquette Maxpid pour l'asservissement de d'un axe du robot de cueillette de fruit.*

Première partie

Automatismes

Chapitre 2

Les systèmes logiques combinatoires

Un système automatisé est de type combinatoire lorsque la sortie logique ou les sorties $S_i(t)$ d'un objet logique peuvent être exprimées en fonction d'une combinaison de ses entrées logiques $e_i(t)$. Ces automatismes permettent de gérer des processus simples avec des évolutions indépendantes du temps.

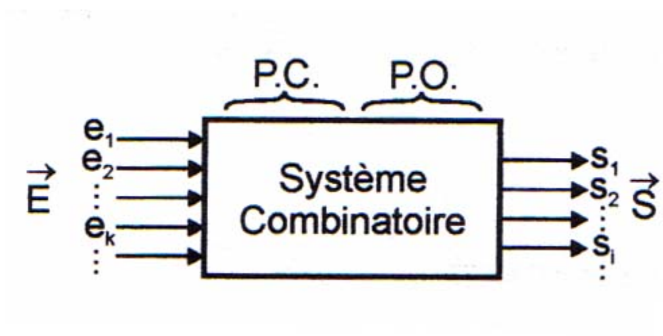


FIG. 2.1 – *Schéma général d'un système combinatoire*

2.1 Codage de l'information

Actuellement, un grand nombre d'applications de traitement automatisé de l'information se développent (suivi des colis, traitement du courier, archivage par code barre, puces RFID (Radio Frequency Identification), transfert de données informatiques). Pour toutes ces applications, il faut définir un codage capable d'être facilement appréhendé par les ordinateurs ou les microprocesseurs actuels donc obligatoirement basé sur la logique binaire. Un code binaire est une correspondance arbitraire entre un ensemble de symboles (0 et 1) et un ensemble d'objets (chiffres, lettres, ...). Il existe un grand nombre de codes binaires, plus ou moins utilisés et ayant des propriétés intéressantes pour les diverses applications (autocorrection par exemple).

2.1.1 Systèmes de numération

Il existe un grand nombre de système de numération liées aux différentes cultures ou à certaines technologies (système décimal ou romain).

2.1.1.1 Système décimal

Le système décimal est le système habituel de numération, il est aussi appelé système à base 10. Son alphabet est constitué de 10 chiffres {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}.

Contrairement aux chiffres romains, le code décimal est un code de numération pondéré. En effet, il associe à chaque position un poids fixe (10^0 pour le rang 0, 10^1 pour le rang 1, etc.).

2.1.1.2 Autres bases de numération

Une base B est définie par B symboles. B est un nombre entier positif exprimé en base 10.

Il existe trois grandes bases de numération :

- la base 10 ou décimale, précédemment citée,
- la base 2 ou binaire à deux chiffres {0,1} liée à la logique combinatoire et aux applications informatiques,
- la base 16 ou hexadécimale à seizes chiffres $\{0,1,2,\ldots,9,A,B,C,D,E,F\}$.

Base (2) Binaire				**Base (10) Décimal**	**Base (16) Héxadécimal**
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	2	2
0	0	1	1	3	3
0	1	0	0	4	4
0	1	0	1	5	5
0	1	1	0	6	6
0	1	1	1	7	7
1	0	0	0	8	8
1	0	0	1	9	9
1	0	1	0	10	A
1	0	1	1	11	B
1	1	0	0	12	C
1	1	0	1	13	D
1	1	1	0	14	E
1	1	1	1	15	F

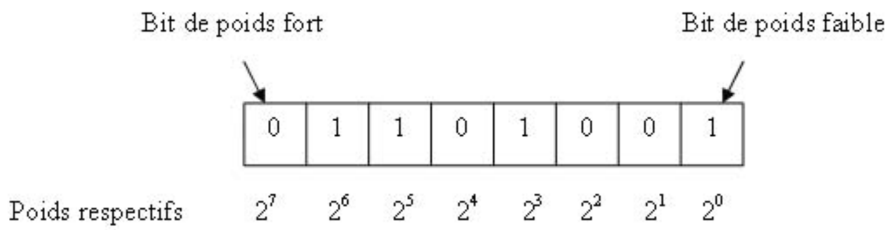
Fig. 2.2 – *Correspondance entre les bases*

Remarque 2 *On désigne un chiffre binaire par le terme* Bit *qui est la contraction de "Binary Digit". Un* octet *est constitué de huit bits.*

Remarque 3 *Les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division peuvent être réalisées en base 2 ou en base 16.*

2.1.2 Le code binaire naturel

Le code binaire naturel est un code pondéré. Chaque position de chiffre a un poids. Par exemple, pour un mot binaire à 8 bits :



Si bien que le mot binaire 01101001, est le codage du nombre $2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^0 = (105)_{10}$ en base décimale.

2.1.3 Le code binaire réfléchi

Le code binaire réfléchi (ou code GRAY) est construit de telle sorte que lorsque l'on change de ligne, seule une variable change d'état. Ce n'est pas un code pondéré, il ne permet donc pas d'effectuer des opérations arithmétiques.

Décimal	Binaire naturel	Binaire réfléchi
0	000	000
1	001	001
2	010	011
3	011	010
4	100	110
5	101	111
6	110	101
7	111	100

FIG. 2.3 – *Correspondance entre les codes binaires naturel et réfléchis*

Le code binaire réfléchi permet par exemple de coder des positions angulaires sans discontinuité et sans état parasite entre deux états successifs.

2.1.4 Le code décimal codé binaire (DCB)

Ce code est basé sur le code binaire naturel et est destiné à la représentation des nombres en base 10. En effet, le code binaire naturel n'associe pas de bit spécifique pour les unités, les dizaines et les centaines. Il est donc délicat d'identifier rapidement un nombre en base décimal à partir de sa représentation en binaire naturel.

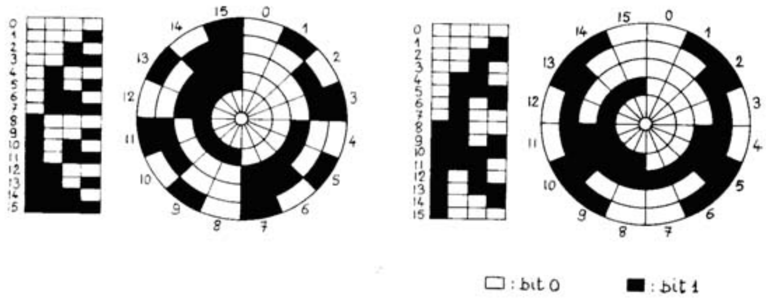


FIG. 2.4 – *Codeurs "binaire naturel" et Codeurs "binaire réfléchi"*

Afin de contrer ce problème, le code DCB associe 4 bits différents à chacune des puissances de 10 du nombre décimal que l'on désire coder.

Par exemple, cette année 2006 s'écrit :

2 0 0 6

0010 0000 0000 0110

2006 : $\boxed{0010}\boxed{0000}\boxed{0000}\boxed{0110}$

REMARQUE 4 *L'application du code DCB la plus courante est celle de l'affichage numérique ou chaque chiffre est associé à un groupe de 4 bits (ce qui explique les 4 entrées des afficheurs 7 segments). L'utilisation de ce code consomme plus de ressources en mémoires que l'utilisation du code binaire naturel, en effet, l'année 2006 se code sur 11 bits en binaire naturel* $(11111010110)_2$ *et sur* $4 \times 4 = 16$ *bits en DCB.*

2.1.5 Les codes p parmi n

Le code p parmi n est un code à n bits dont p bits sont à 1 et $(n-p)$ bits à 0. Le nombre de combinaisons répondant à cette définition est égale à $C_n^p = \frac{n!}{p!\cdot(n-p)!}$.

Les particularités données par ce code sont les suivantes :

- code auto-correcteur : en effet, la lecture du code peut être associée à la vérification du nombre de 1 et de 0 dans l'information, ce qui permet un contrôle de l'information lue par la détection de code erroné ;
- code personnel : en effet, il existe $C_n^p!$ arrangements de la codification, ce qui permet de personnaliser son codage : ainsi le code 3 parmi 5 procure 10! arrangements différents, soit 3628800 possibilités différentes.

EXEMPLE 6 *Le code postal utilise un code* 3 *parmi* 5 *pour coder les dix chiffres*[1].

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

1. Sur chaque ligne, il y a toujours trois bits à 1 et 2 bits à 0.

Il existe donc 10 *combinaisons possibles. Si l'on souhaite coder les 10 chiffres avec ces dix combinaisons, il y a* 10! *agencements possibles donc* 3628800 *possibilités. Le codage donné dans le tableau ci-contre est un des* 3628800 *possibles.*

n	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0
0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
2	0	1	1	0	1
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	1	1
5	1	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0
7	1	1	0	0	1
8	1	1	0	1	0
9	1	1	1	0	0

Exemple d'enveloppe portant un code à barres.

Dans le code barre ci-dessus, les barres représentent des 1 *et les vides des* 0*. Il se lit de la droite vers la gauche. Quel est le code postal de l'ENSAM de Lille ?*

Nota : *ces codes permettent de détecter 0 ou 1 erreur mais pas 2, 3, 4 ou 5, et ne permettent pas de les corriger.*

Remarque 5 *Dans un mot binaire, certains bits peuvent servir à coder l'information et d'autres à détecter des erreurs de codage ou de transmission. Bien d'autres codes existent (avec bit de parité, excédant 3, ASCII, ...) avec détection et correction d'erreurs ou non. La recherche des circuits combinatoires de transcodage fait appel à des méthodes de recherche et de simplification de fonctions binaires.*

2.2 Algèbre de Boole et variables logiques

Lorsque des variables sont de type tout ou rien, on dit que ce sont des variables logiques. Ces variables sont employées pour représenter des états tels que vrai ou faux pour une proposition, allumé ou éteint pour une lampe, haut ou bas pour un capteur, ... L'algèbre de Boole[2] est utilisée par les ordinateurs, les automates, ..., pour manipuler les données, les informations.

Les variables logiques associées à l'algèbre de Boole sont les valeurs 0 et 1, respectivement élément nul et unité de l'ensemble $E = \{0,1\}$. On les appelle aussi variables binaires ou booléennes.

Les règles de fonctionnement d'un système logique peuvent toutes s'exprimer à partir d'expressions combinant les propositions logiques avec les conjonctions de coordination "ET" et "OU" et de l'adverbe "NON".

Exemple 7 *Si "Travail régulier" ET NON "Fête toute la semaine" Alors "Réussite aux concours".*

L'algèbre de Boole donne une représentation mathématique au langage logique naturel :
- les propositions logiques sont remplacées par les variables logiques,
- les adverbes et conjonctions sont remplacés par des opérateurs,
- une fonction logique permet d'exprimer la relation entre les propositions logiques.

2.2.1 Les opérateurs logiques fondamentaux

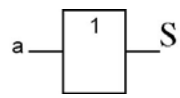
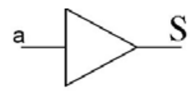
Afin d'exprimer les relations liant les variables logiques, George Boole a mis en place plusieurs opérateurs logiques. Il en existe 4 qui sont aux fondations de cet algèbre particulier, le "ET", le "OU", le "NON" et le "OUI".

Les quatres opérateurs fondamentaux permettent de définir les quatres lois mathématiques régissant cet algèbre binaire :
- l'égalité avec l'opérateur OUI ($S = a$),
- la négation ou complémentation avec l'opérateur NON $S = \overline{a}$,
- la somme logique (ou union) avec l'opérateur OU ($S = a + b$)
- le produit logique (ou intersection) avec l'opérateur ET ($S = a \cdot b$).

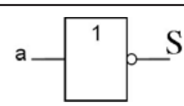
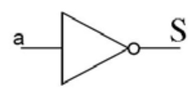
2. **Boole George :** Mathématicien et logicien anglais (Lincoln, 1815 - Ballintemple, 1864). Issu d'une famille pauvre, George Boole n'a pas les moyens financiers d'aller à l'université. Le jeune autodidacte se plonge dans l'étude des mathématiques auxquelles son père l'avait initié dès l'enfance. Bénéficiant des moyens de l'Institut de Mécanique de sa ville, il se confronte aux œuvres d'Isaac Newton, Pierre-Simon Laplace et Joseph-Louis Lagrange. En 1847 sort Mathematical Analysis of Logic, puis An investigation into the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities en 1854. George Boole y développe une nouvelle forme de logique, à la fois symbolique et mathématique. Les travaux de Boole, s'ils sont théoriques, n'en trouveront pas moins des applications primordiales dans des domaines aussi divers que les systèmes informatiques, la théorie des probabilités, les circuits électriques et téléphoniques, grâce à des scientifiques comme Pierce, Frege, Russel, Turing et Shannon. En 1849, George Boole se voit proposer une chaire de professeur des mathématiques au Queen's College de Cork, en Irlande. Et en 1857, il est nommé membre de la Royal Society. Il s'intéresse ensuite aux équations différentielles à travers deux traités qui auront une influence certaine : Treatise on differential equations (1859) et Treatise on the calculus of finite differences (1860).

Pour chacune de ces fonctions, nous pouvons associer un symbole normalisé (norme NF ISO 5784-1), développés suite aux travaux de l'IEC[3]. Ces symboles sont aussi appelés *portes logiques*. Nous pouvons aussi associer à ces portes logiques des symboles dit américains. La normalisation de ces symboles américains date de 1973 avec la norme ANSI[4] Y32.14-1973, ainsi que la norme militaire MIL-STD 806B. La norme américaine actuelle IEEE[5] ANSI Std 91-1984 reconnaît les portes logiques ISO mais garde toujours les anciennes représentations graphiques[6].

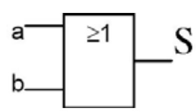
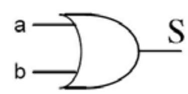
- **Fonction "OUI"**

<table>
<tr><th>Opérateur</th><th>Équation logique</th><th>Symbole AFNOR</th><th>Symbole américain</th><th>Table de vérité</th></tr>
<tr><td>OUI</td><td>$S =$</td><td>
</td><td>
</td><td><table><tr><td>a</td><td>S</td></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

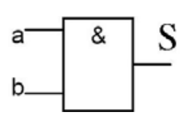
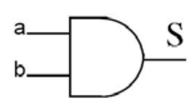
- **Fonction "NON"**

<table>
<tr><th>Opérateur</th><th>Équation logique</th><th>Symbole AFNOR</th><th>Symbole américain</th><th>Table de vérité</th></tr>
<tr><td>NON</td><td>$S =$</td><td>
</td><td>
</td><td><table><tr><td>a</td><td>S</td></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

- **Fonction "OU"**

<table>
<tr><th>Opérateur</th><th>Équation logique</th><th>Symbole AFNOR</th><th>Symbole américain</th><th>Table de vérité</th></tr>
<tr><td>OU</td><td>$S =$</td><td>
</td><td>
</td><td><table><tr><td>a</td><td>b</td><td>S</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="5">$S = 1$ si</td></tr>
</table>

- **Fonction "ET"**

<table>
<tr><th>Opérateur</th><th>Équation logique</th><th>Symbole AFNOR</th><th>Symbole américain</th><th>Table de vérité</th></tr>
<tr><td>ET</td><td>$S =$</td><td>
</td><td>
</td><td><table><tr><td>a</td><td>b</td><td>S</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="5">$S = 1$ si</td></tr>
</table>

3. International Electrotechnical Commission, http://www.iec.ch/
4. American National Standard Institute. http://www.ansi.org/
5. Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., http://www.ieee.org/portal/site
6. Quand on n'utilise pas le système métrique, on peut s'attendre à tout !

2.2.2 Règles de calcul

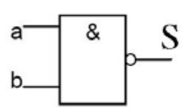
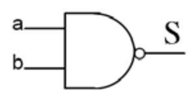
Propriétés	**Somme logique**	**Produit logique**
Commutativité	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativité	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributivité	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	$a+(b \cdot c) = (a+b)\cdot(a+c)$
Identité (élément neutre)	$a+0=a$	$a \cdot 1 = a$
Complémentarité	$a+\overline{a}=1$	$a \cdot \overline{a} = 0$
Idempotence	$a+a=a$	$a \cdot a = a$
Involution	$\overline{\overline{a}} = a$	
Élément absorbant	$a+1=1$	$a \cdot 0 = 0$
Théorème de l'absorbtion	$a+(a \cdot b) = a$	$a \cdot (a+b) = a$
Théorème de Morgan	$\overline{a+b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$	$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$

Remarque 6 *Le théorème de Morgan peut être généralisé à une fonction à n variables.*

2.2.3 Opérateurs logiques universels

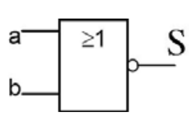
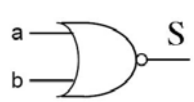
Les opérateurs NON ET (NAND) et NON OU (NOR) sont les complémentaires respectifs des opérateurs ET et OU. Ils sont dits universels car toute fonction logique peut être exprimée à partir de NAND ou de NOR.

- **Fonction "NAND" ou "NON ET"**

<table>
<tr><th>Opérateur</th><th>Équation logique</th><th>Symbole AFNOR</th><th>Symbole américain</th><th>Table de vérité</th></tr>
<tr><td>NAND</td><td>$S =$</td><td></td><td></td><td><table><tr><td>a</td><td>b</td><td>S</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="5">$S = 1$ si</td></tr>
</table>

On peut alors retrouver l'expression générale du NAND à partir de la table de vérité.
$S =$

- **Fonction "NOR" "NI" ou "NON OU"**

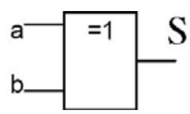
<table>
<tr><th>Opérateur</th><th>Équation logique</th><th>Symbole AFNOR</th><th>Symbole américain</th><th>Table de vérité</th></tr>
<tr><td>NOR
NI</td><td>$S =$</td><td></td><td></td><td><table><tr><td>a</td><td>b</td><td>S</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="5">$S = 1$ si</td></tr>
</table>

On peut aussi retrouver l'expression générale du NOR à partir de la table de vérité.
$S =$

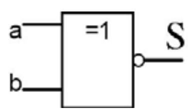
2.2.4 Opérateurs particuliers

Nous avons introduit quatre opérateurs correspondant à certaines fonctions à deux variables logiques. Cependant, il est possible de définir 16 (2^4) fonctions différentes à partir de deux variables boolèenes. Les fonctions les plus utilisées ont un nom ainsi qu'une représentation normalisée. Elles correspondent pour la plupart à des combinaisons des fonction logiques de base "NON", "ET" et "OU". Seule la fonction "OU Exclusif" ou "XOR" est une nouvelle fonction. Elle correspond au cas ou la sortie est égale à un si une seule des variables est à un. À l'inverse, la fonction "OU" est une fonction "OU inclusif".

- **Fonction "OU EXCLUSIF"**

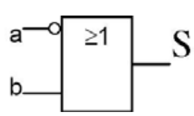
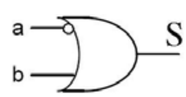
<table>
<tr><th>Opérateur</th><th>Équation logique</th><th>Symbole AFNOR</th><th>Symbole américain</th><th>Table de vérité</th></tr>
<tr><td>XOR</td><td>$S = a \oplus b$</td><td>
</td><td>
</td><td><table><tr><th>a</th><th>b</th><th>S</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="5">$S = 1$ si</td></tr>
</table>

- **Fonction "IDENTITE LOGIQUE"**

<table>
<tr><th>Opérateur</th><th>Équation logique</th><th>Symbole AFNOR</th><th>Symbole américain</th><th>Table de vérité</th></tr>
<tr><td>IDENTITE LOGIQUE</td><td>$S =$</td><td>
</td><td>
</td><td><table><tr><th>a</th><th>b</th><th>S</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="5">$S = 1$ si</td></tr>
</table>

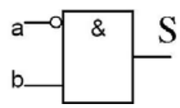
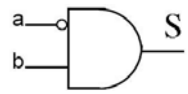
On peut alors retrouver l'expression générale de l'identité à partir du ou exclusif.
$S =$

- **Fonction "IMPLICATION"**

<table>
<tr><th>Opérateur</th><th>Équation logique</th><th>Symbole AFNOR</th><th>Symbole américain</th><th>Table de vérité</th></tr>
<tr><td>Implication</td><td>$S =$</td><td>
</td><td>
</td><td><table><tr><th>a</th><th>b</th><th>S</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
</table>

On peut alors retrouver l'expression générale de l'implication à partir de la table de vérité.
$S =$

- **Fonction “INHIBITION”**

Opérateur	**Équation logique**	**Symbole AFNOR**	**Symbole américain**	**Table de vérité**
Inhibition	$S =$			a, b, S: 0 0 ; 0 1 ; 1 0 ; 1 1

a	b	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

2.3 Spécification des équations logiques

La spécification d’une fonction booléenne se fait principalement à l’aide d’une table de vérité ou d’un tableau de Karnaugh.

2.3.1 Table de vérité

Une table de vérité permet de représenter le fonctionnement logique du système considéré. Cette table est basée sur la logique binaire.

Exemple 8 *La mise en marche d’une machine M impose :*

- *que la pièce soit bien positionnée (capteur p), que l’écran de protection soit fermé (capteur e) et une action sur le bouton poussoir d en fonctionnement automatique.*
- *que la pièce soit bien positionnée, une clé de maintenance c, une action sur le bouton poussoir d et pas de position particulière l’écran de protection en mode de réglage.*

La table de vérité de la fonction $M = f\,(p,e,c,d)$ est donnée ci-contre. Nous pouvons alors définir l’équation logique de la machine :
$S =$

Cette expression est difficilement exploitable en l’état, il faut donc chercher à la simplifier.

p	e	d	c	M
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Nous voyons sur l'exemple ci-dessus que les tables de vérité deviennent rapidement délicates et lourdes à utiliser, il faut donc définir un nouveau type de représentation plus léger.

2.3.2 Tableau de Karnaugh

La représentation des états d'une fonction logique se fait de manière plus condensée avec le tableau de Karnaugh qu'avec une table de vérité. Le tableau de Karnaugh peut être considéré comme une table de vérité à deux entrées. Pour une fonction logique à n variables binaires, il y a 2^n cases réparties en p lignes et q colonnes.

Les états de la fonction sont représentés dans le tableau et les états des variables autour, en respectant le code binaire réfléchi (ou cade Gray) (Sec. 2.1.3, p. 15). Ce tableau est utilisé comme une aide à la simplification des fonctions logiques.

Les éléments sont ordonnés de telle sorte que sur une même ligne ou colonne, les variables sont ordonnées selon le code Gray.

Nous allons construire 4 tableaux de Karnaugh représentant 4 fonctions de 1,2,3 et 4 variables. En effet, le programme des Classes Préparatoires se limite à l'étude de systèmes combinatoires à 4 variables binaires.[7]

Fonction d'une variable (jamais utilisé... et pour cause)

a	S
0	1
1	0

$S =$

a	0	1

Fonction de deux variables (rarement utilisé... et pour cause)

a	b	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$S =$

b \ a	0	1
0		
1		

Fonction de trois variables

a	b	c	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$S =$

c \ ab	00	01	11	10
0				
1				

7. Ce qui est bien suffisant, vous en conviendrez...

Fonction de quatres variables

a	b	c	d	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$S =$

cd \ ab	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Remarque 7 *En passant de la dernière colonne à la première colonne, seule une variable change d'état. On peut donc considérer que le tableau est tracé sur un "cylindre" d'axe vertical. De même, on passe de la dernière ligne à la première en faisant changer qu'une unique variable. Tout ce passe en fait comme si le tableau était construit sur une "sphère", ce tableau est donc sphérique. Ceci est possible grâce à l'utilisation du code Gray.*

2.4 Simplification des équations logiques

2.4.1 Méthode algébrique

C'est une méthode "Bête et méchante"[8] basée sur l'utilisation des différentes lois et propriétés de l'algèbre de Boole. L'utilisation de ces propriétés et notamment la factorisation, permet de faire apparaître des identités remarquables et ainsi de simplifier l'expression.

Les identités remarquables classiquement utilisées sont :

$a + 0 = a \qquad a + \overline{a} = 1 \quad a \cdot 1 = a \qquad a \cdot \overline{a} = 0 \qquad a + 1 = 1 \qquad a \cdot 0 = 0 \qquad \overline{\overline{a}} = a$

Exemple 9 *Dans l'exemple précédent, nous avons déterminé l'équation logique suivante :*

$$M = p \cdot e \cdot d \cdot c + p \cdot \overline{e} \cdot d \cdot c + p \cdot e \cdot d \cdot \overline{c}$$

Nous pouvons la simplifier en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole.

$M =$

$M =$

$M =$

8. Pour une fois...

La méthode algébrique fait souvent appel à un peu "d'intuition mathématique" et il parfois difficile de voir si la simplification est maximale. C'est pour cela que la méthode par tableau de Karnaugh est très utilisée.

Il existe cependant un certain nombre de méthodes systématiques permettant d'obtenir la forme minimale d'une équation logique avec par exemple la méthode de Quine-Mac Cluskey [9] ou la méthode des consensus. Ces méthodes sont très lourdes à manier mais elles peuvent être aisément implémentées informatiquement.

2.4.2 Méthode de simplification par tableau de Karnaugh

D'après la construction du tableau de Karnaugh, deux cases adjacentes ne diffèrent que par le changement d'une seule variable.

On se sert alors de la relation $a + \overline{a} = 1$. En effet, si deux cases adjacentes sont égales à 1, on peut simplifier l'équation en éliminant la variable qui change d'état pour ces deux cases. Le principe de base étant énoncé, il nous reste à l'appliquer sur des cas concrets...

Nous allons développer un exemple avant de déterminer une méthode générale de résolution.

Exemple 10

On donne l'expression logique non simplifiée ci-dessous :

$$S = \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot b \cdot c \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot d$$

En simplifiant algébriquement, on obtient :

$S =$

$S =$

$S =$

Cette simplification algébrique apparaît très clairement sur le tableau de Karnaugh en considérant les deux groupement de cases adjacentes 9 et 11 ainsi que 9 et 13.

cd \ ab	00	01	11	10
00	0 $_0$	0 $_1$	0 $_3$	0 $_2$
01	0 $_4$	0 $_5$	0 $_7$	0 $_6$
11	0 $_{12}$	1 $_{13}$	0 $_{15}$	0 $_{14}$
10	0 $_8$	1 $_9$	1 $_{11}$	0 $_{10}$

Les cases 9 et 11 correspondent à un domaine de valeurs des variables où la fonction vaut 1 à condition que d=0, c=1 et b=1, et ce quelle que soit la valeur de a. On peut faire la même remarque pour les case 9 et 13 et la variable d. On retrouve bien l'expression minimale :

$$S =$$

La méthode de recherche de l'expression minimale de la fonction logique peut se décomposer en 3 phases successives.

9. Il s'agit d'une méthode imaginée par le mathématicien américain W. V. QUINE et remodelée par son compatriote le Docteur Edwards J. Mac CLUSKEY Junior dans une thèse de doctorat qu'il présenta au M. I. T. (Massachusetts Institute of Technology) en juin 1956.

Phase 1 : *Recherche des monômes*[10] *premiers*

Il faut tout d'abords rechercher tous les groupements (cases adjacentes) *les plus grands possibles* permettant de couvrir les différentes cases où la fonction est à 1. Un groupement ne peut être constitué que de 2^n cases (1, 2, 4, 8).

cd \ ab	00	01	11	10
00	1_{0}	1_{1}	1_{3}	0_{2}
01	0_{4}	0_{5}	0_{7}	0_{6}
11	1_{12}	1_{13}	0_{15}	1_{14}
10	0_{8}	1_{9}	1_{11}	0_{10}

Dans le tableau de Karnaugh ci-dessus, les 5 monômes premiers de cette fonction sont :

....

Phase 2 : *Recherche des monômes premiers principaux*

Un monôme premier principal est un groupement contenant au moins une case couverte que par lui-même. *Ces groupements principaux sont indispensables pour l'écriture minimale de la fonction logique* si l'on veut traduire que celle-ci vaut 1 dans les cases en question.

Les monômes premiers principaux sont :...

Phase 3 :

Si une ou plusieurs cases "1" ne sont pas couvertes par les monômes premiers principaux, alors il faut déterminer parmi les groupements restants (*monômes premiers secondaires*) l'ensemble minimal permettant de couvrir les cases non couvertes par les monômes premiers principaux. Dans le cas ou il y a un choix possible entre deux groupements, le plus grand sera bien sûr retenu...

Dans notre exemple, la case 13 est la seule à ne pas être couverte par un monôme premier principal, mais elle est couverte par deux monômes premiers secondaires :

....

Finalement, il existe deux formes minimales de la fonction logique :

S=...

S=...

Remarque 8 *Il peut y avoir plusieurs possibilités de regroupement et la fonction simplifiée est alors différente, bien que le fonctionnement du système soit conservé.*

2.4.2.1 Cas des fonction incomplètes

Le cas des fonctions incomplètes (ou incomplètement spécifiées) peut apparaître comme un cas particulier. Pourtant, on peut considérer qu'en pratique, c'est le cas le plus fréquent.

10. Monôme : nom masculin (grec monos, seul, et nomos, portion ou formé par calembour sur l'argot de Polytechnique seul-homme) - Cortège que les étudiants organisent dans certaines circonstances, notamment à la fin des examens ou plus sérieusement monôme de degré n : polynôme de la forme générale $a_n \cdot x^n$, le coefficient a_n étant un élément non nul d'un anneau commutatif unitaire.

En effet, deux situations peuvent se produire :

– soit, pour le problème considéré, la valeur de la fonction n'a réellement pas d'importance pour certaines combinaisons de valeurs de variables,
– soit certaines combinaisons de valeurs de variables sont physiquement impossibles.

Le principe de la méthode composée de 3 phases, proposée pour une fonction complètement spécifiée, peut être transposé à à une fonction incomplètement spécifiée. Dans le tableau, les cases où la fonction n'est pas spécifiée prendront soit la valeur “1” soit la valeur “0”. Ce qui sera noté : Φ.

Phase 1 : *Recherche des monômes premiers*

On prendra ici la *couverture supérieure* de la fonction incomplètement spécifié, pour laquelle tous les Φ sont *supposés égaux à 1*.

cd \ ab	00	01	11	10
00	1_{0}	1_{1}	1_{3}	0_{2}
01	0_{4}	0_{5}	0_{7}	0_{6}
11	1_{12}	1_{13}	0_{15}	1_{14}
10	0_{8}	Φ_{9}	Φ_{11}	0_{10}

Dans le tableau de Karnaugh ci-dessus, les monômes premiers de cette fonction sont :

....

Phase 2 : *Recherche des monômes premiers principaux*

Dans le cas d'une fonction incomplètement spécifiée, les “1” qui doivent être couverts sont uniquement ceux pour lesquels la fonction est spécifié[11]. Dans ce cas, on prend $\Phi = 0$ afin de prendre la couverture minimale.

Les monômes premiers principaux sont :...

Phase 3 :

Si une ou plusieurs cases “1” ne sont pas couvertes par les monômes premiers principaux, alors il faut déterminer parmi les groupements restants (*monômes premiers secondaires*) l'ensemble minimal permettant de couvrir les cases non couvertes par les monômes premiers principaux. Dans le cas ou il y a un choix possible entre deux groupements, le plus grand sera bien sûr retenu...

Dans notre exemple, la case 13 est la seule à ne pas être couverte par un monôme premier principal, mais elle est couverte par deux monômes premiers secondaires :

....

Finalement, il existe une forme minimale de la fonction logique :

S=...

2.4.2.2 Notion de dualité

L'expression duale de n'importe quelle expression logique s'obtient en permutant les opérateurs “+” et “·” ainsi que les éléments 1 et 0 apparaissant explicitement dans l'expression.

11. logique, non ?

Toutes les propriétés de l'algèbre de Boole vérifient cette notion de dualité.

Exemple 11

L'absorption : $a + a \cdot b = a \quad \Leftrightarrow$ ....

$a + 0 = a \quad \Leftrightarrow$ ....

Cette notion peut évidemment être utilisée pour les tableaux de Karnaugh. Jusqu'à présent, nous avons raisonné sur les regroupement de "1" de la fonction logique pour exprimer la fonction simplifiée sous la forme de somme de produits ($\sum(\prod)$).

La dualité de l'algèbre de Boole autorise donc le même raisonnement sur les "0" de la fonction afin d'obtenir dans ce cas une expression simplifiée sous forme de produit de sommes ($\prod(\sum)$).

On appelle "*monal*[12]" le dual de monôme. Un monal est donc une somme logique de variables binaires.

La démarche de simplification de l'expression de la fonction logique s'effectue toujours en trois phases.

Phase 1 : *Recherche des monaux premiers*

cd \ ab	00	01	11	10
00	1_{0}	1_{1}	1_{3}	0_{2}
01	0_{4}	0_{5}	0_{7}	0_{6}
11	1_{12}	1_{13}	0_{15}	1_{14}
10	0_{8}	1_{9}	1_{11}	0_{10}

On cherche tous les groupements les plus grands possibles permettant de courir tous les "0" du tableau. Dans le tableau de Karnaugh ci-dessus, les monaux premiers de cette fonction sont :

....

Phase 2 : *Recherche des monaux premiers principaux*

Parmi les monaux, sélectionnez tous ceux qui couvrent au moins au moins une case "0" qu'ils sont les seuls à couvrir.

Les monaux premiers principaux sont :..

Phase 3 :

Si une ou plusieurs cases "0" ne sont pas couvertes par les monaux premiers principaux, alors il faut déterminer parmi les groupements restants (*monaux premiers secondaires*) l'ensemble minimal permettant de couvrir les cases non couvertes par les monaux premiers principaux. Dans le cas ou il y a un choix possible entre deux groupements, le plus grand sera bien sûr retenu...

Finalement, il existe deux formes minimales de la fonction logique :

S=...

S=...

Remarque 9 *L'expression minimale, sous forme de produit de sommes ne peut pas être facilement comparée à la some de produits obtenue précédemment.*

12. Désolé, mais pour celui là, je n'ai pas de définition plus académique...

Cette méthode est beaucoup moins utilisée que celle qui utilise les "1" de la fonction.

2.5 Réalisation des fonctions logiques

Les fonctions logiques permettent de réaliser les parties commandes de nombreux systèmes automatisés. La simplification des fonctions logiques permet de diminuer le nombre de portes logiques à utiliser (et donc le coût, l'encombrement...).

Dans le milieu industriel, on utilise habituellement plusieurs types d'énergies, l'énergie électrique, l'énergie pneumatique ou l'énergie hydraulique. L'énergie électrique est la plus utilisée comme énergie de commande, mais on utilise aussi l'énergie pneumatique et plus rarement l'énergie hydraulique.

Pour chaque énergies, il existe un certain nombre de composants qui réalisent les fonctions simples (ET, OU, NON, NAND ou NOR...). Afin de réaliser une fonction complexe, il faut agencer et assembler les composants technologiques qui réalisent les fonctions logiques simples.

Nous allons développer deux types de représentations permettant de préparer la création de ces fonctions logiques complexes :

- les schémas à contacts ou schéma ladder[13],
- le logigramme ou schéma logique.

2.5.1 Composants technologiques

Ces composants technologiques sont très différents suivant l'énergie utilisée.

Les cellules pneumatiques sont prévues pour être reliées entre elles par cablage[14], elles sont relativement encombrantes et sont de moins en moins utilisées.

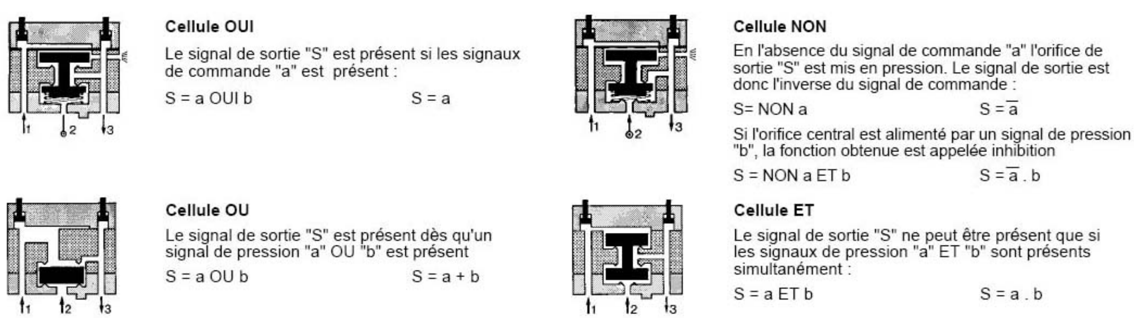


FIG. 2.5 – *Principe de fonctionnement des cellules pneumatiques*

Néanmoins, pour des applications industrielles de type machine spéciale (conditionnement ou emballage dans l'industrie agroalimentaire, machine utilisant l'énergie pneumatique de puissance, etc.), il est encore habituel de privilégier ce type de technologie.

13. Échelle en anglais, vous verrez pourquoi...
14. L'entreprise Crouzet commercialise ce type d'éléments pneumatiques. http://www.crouzet.com

FIG. 2.6 – *Différentes cellules pneumatiques*

Les portes logiques électroniques sont regroupées sur des circuits imprimés par groupe de 6 (portes “NON” ou “OUI”) ou par groupe de 4 (portes “Ou” ou “ET”). Cette technologie électronique est de plus en plus utilisée du fait de sa compacité et de son faible coût.

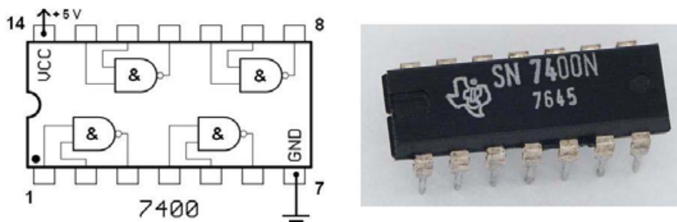


FIG. 2.7 – *Porte logique NAND en technologie TTL*

2.5.2 Les schémas à contacts (schéma ladder)

L’idée initiale du LADDER est la représentation de fonction logique sous la forme de schémas électriques. Cette représentation est originalement matérielle : quand les Automates Programmable Industriel n’existaient pas, les fonctions était réalisées par des câblages. Par exemple, pour réaliser un ET logique avec des interrupteurs, il suffit de les mettre en série. Pour réaliser un OU logique, il faut les mettre en parallèle.

Partant de ces principes, le LADDER a été créé et normalisé dans la norme CEI 61131-3. Il est, depuis, très utilisé dans la programmation des Automates Programmables Industriels[15].

Un schéma LADDER se lit de haut en bas et l’évaluation des valeurs se fait de gauche à droite. Les valeurs correspondent en fait, si on le compare à un schéma électrique, à la présence ou non d’un potentiel électrique à chaque nœud de connexion. En effet, le LADDER est basé sur le principe d’une alimentation en tension représentée par deux traits verticaux reliée horizontalement par des contacts, d’où le nom “LADDER” (échelle[16]).

N’importe quelle fonction peut être obtenue en combinant les deux opérateurs “ET” et “OU” ainsi que les deux fonctions “OUI” et “NON”. Le schéma contact en logique combinatoire se limite à l’utilisation de ces quatres composants.

15. Vous verrez plus tard que l’API du palletiseur PL200, c’est à dire le TSX17, utilise un langage de programmation basé sur le Grafcet et les schémas Ladder.
16. Voila pour l’explication...

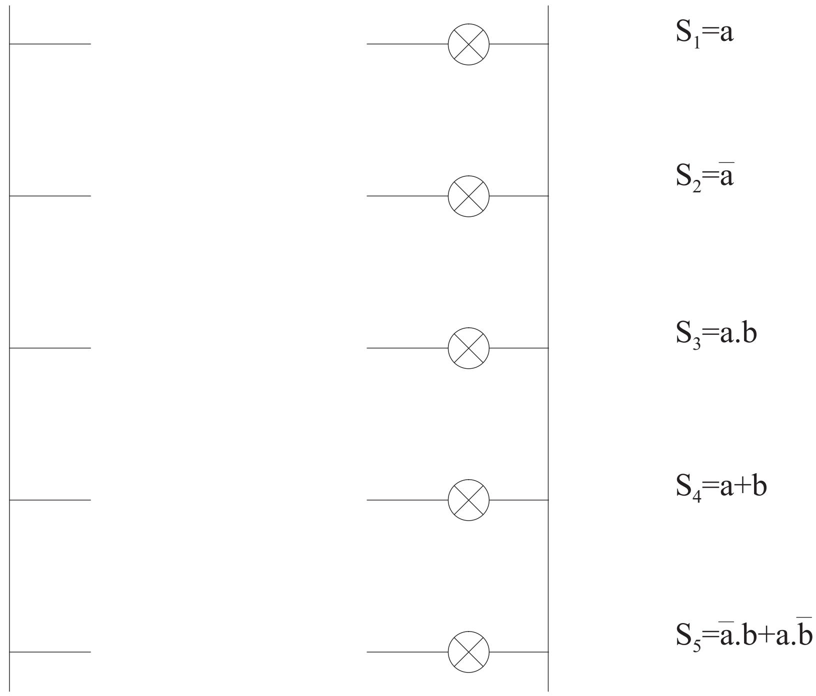


FIG. 2.8 – *Différents schémas Ladder*

2.5.3 Les logigrammes

Le logigramme d'une fonction quelconque est obtenu par association en série ou en parallèle des différents symboles normalisés (AFNOR) des *opérateurs logiques de base* ("ET", "OU" et "NON").

On peut par exemple câbler la fonction OU Exclusif.

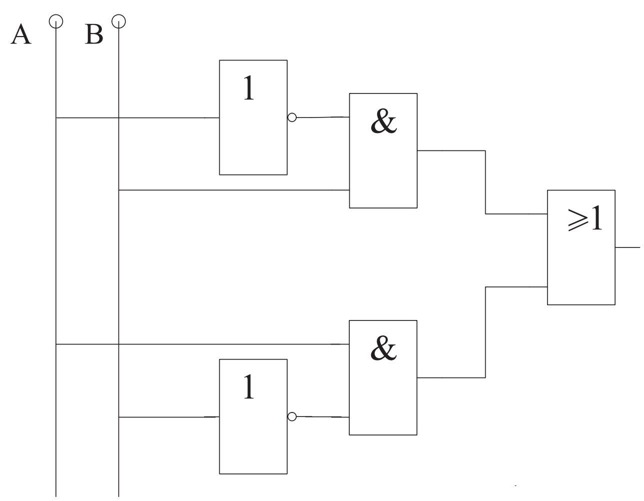


FIG. 2.9 – *Logigramme de la fonction Ou exclusif*

Par exemple, pour la fonction $M = p \cdot d \cdot (c + e)$ vu précédemment, le logigramme associé serait :

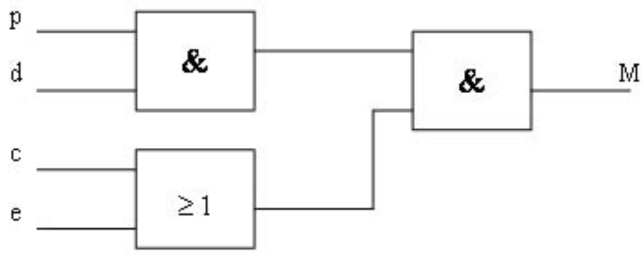


FIG. 2.10 – *Logigramme de la fonction de commande de la machine M*

2.5.4 Les schémas logiques

Il peut aussi être nécessaire de tracer un logigramme à partir uniquement de cellules NAND (technologie TTL[17] ou CMOS[18]) ou de cellules NOR (technologie ECL[19]). En effet, la réalisation de cellules logiques en électronique (transistors) permet notamment d'obtenir ces deux types d'opérateurs. À partir de cellules NAND ou NOR, on peut néanmoins reconstituer n'importe quelle porte logique.

	NAND	**NOR**
NON		

17. Technologie TTL(Transistor Transistor Logic) : cette famille utilise des transistors bipolaires. Dans cette famille technologique, les transistors travaillent en saturation blocage avec une tension d'alimentation de +5 Volt.
18. Technologie CMOS (Métal Oxyde Semiconducteur complémentaire) on utilise des transistors canal N et des transistors canal P pour réaliser des fonctions logiques. La technologie CMOS est actuellement la technologie dominante du marché. Son principal intérêt par rapport à d'autres technologies comme le NMOS ou le bipolaire est une consommation d'énergie remarquablement faible. En fait les circuits CMOS ont un courant statique (quand ils sont au repos) pratiquement négligeable. Cette technologie est alimentée par une tension d'alimentation entre +3 et +15 Volt.
19. Technologie ECL (Emitter Coupled Logic) ou en français Logique à émetteurs couplés : cette famille a été essentiellement développée par Motorola, c'est une famille rapide qui exploite un étage différentiel à deux transistors. Cette technologie est alimentée en -5,2 Volt.

	NAND	**NOR**
ET		
OU		

Prenons par exemple la fonction $M = p \cdot d \cdot (c + e)$. On peut écrire :

$$M = p \cdot d \cdot (c+e) = \overline{\overline{p \cdot d \cdot \overline{\overline{(c+e)}}}} = \overline{\overline{\overline{\overline{p \cdot d}} \cdot \overline{(\overline{c} \cdot \overline{e})}}}$$

Il faut donc 7 cellules NAND pour réaliser le câblage de cette fonction.

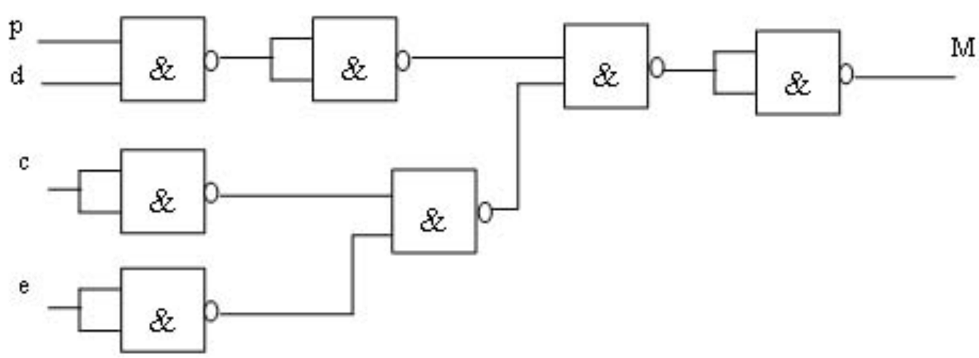


Fig. 2.11 – *Schéma logique en NAND de la fonction M*

On peut aussi écrire :

$$M = p \cdot d \cdot (c+e) = \overline{\overline{\overline{\overline{p \cdot d}} \cdot (c+e)}} = \overline{\overline{\overline{\overline{p} + \overline{d}}} + \overline{(c+e)}}$$

Il faut ici 6 cellules NOR pour réaliser le câblage de la fonction M.

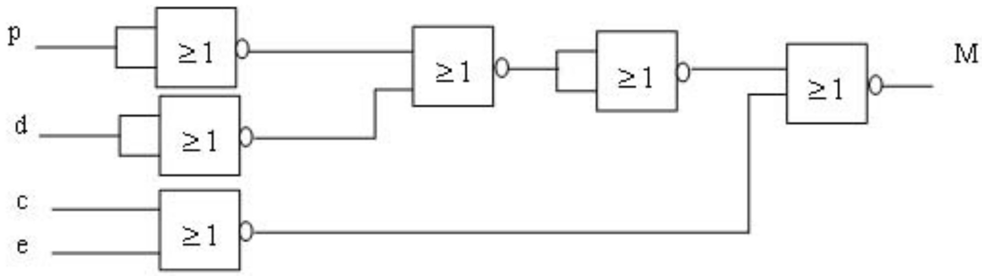


Fig. 2.12 – *Schéma logique en NOR de la fonction M*

Remarque 10 *Les différentes cellules logiques que nous avons manipulé sont à deux entrées, il faut cependant noter qu'il en existe à plusieurs entrées. D'un point de vue pratique, les performances diminuent avec l'augmentation du nombre d'entrée, elles sont donc très souvent limitées à 3 ou 4 entrées.*

Chapitre 3

Les systèmes logiques séquentiels

Pour un système combinatoire, la même cause produit toujours le même effet, l'effet disparaît dès que la cause disparaît.

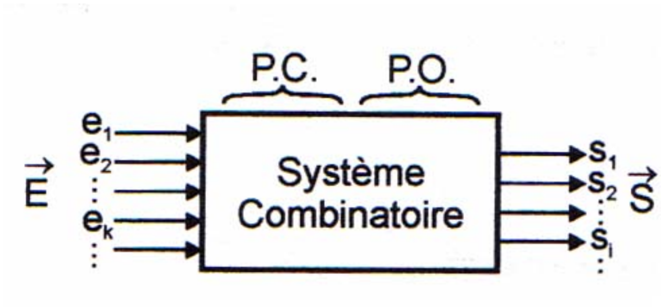


Fig. 3.1 – *Schéma général d'un système combinatoire*

$$S_i(t) = f(e_1,e_2,\dots,e_n).$$

Ce fonctionnement n'est pas suffisant pour représenter l'ensemble des systèmes automatiques logiques.

Dans d'applications, la valeur d'une sortie logique dépend non seulement de la valeur des entrées logiques mais peut également varier selon l'instant considéré. Deux cas de figure sont à considérer :

- une sortie logique conserve sa valeur lorsque que la cause qui a provoqué cet état a disparue. On parle dans ce cas de mémorisation (appui sur un bouton poussoir).
- une même combinaison d'entrées logiques provoque des états différents de la sortie logique associée selon l'historique du système.

Dans ces 2 cas, le comportement logique de la sortie est dit *séquentiel*.

Une même cause peut produire des effets différents. Un effet peut rester maintenu alors même que sa cause a disparu.

$$S_i(t) = f(e_1,e_2,\dots,e_n,t)$$

Définition 3 *Un système séquentiel est donc un système logique dont l'évolution dépend à la fois des entrées qui lui sont appliquées et de ses évolutions passées.*

En effet, il évolue *étape par étape*, et à un *état interne* du système associé à un *état des entrées*, correspond un *état des sorties*.

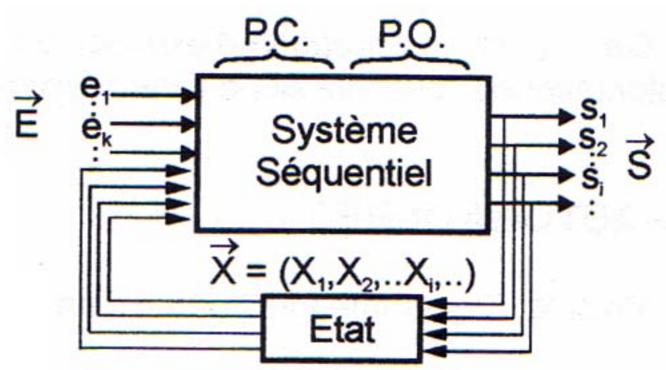


Fig. 3.2 – *Schéma général d'un système séquentiel*

Les variables X_i sont appelées variables internes du système. Le caractère séquentiel du système se mesure au nombre de variables internes nécessaires. On peut parler de variable d'état du système.

Définition 4 *État d'un système séquentiel*

L'état d'un système correspond à la quantité minimale d'informations sur le système nécessaires pour évaluer ses sorties à partir de ses entrées. Cela correspond à l'information suffisante sur "l'histoire" du système pour déterminer son "futur". Cela correspond toujours à une boucle de retour à l'intérieur du système.

3.1 Représentation temporelle d'un système séquentiel

Le temps intervenant dans la description des évolutions d'un système séquentiel, il est intéressant, afin de mieux comprendre ce système, de représenter l'évolution des entrées et des sorties en fonction du temps. Pour cela, nous utilisons des chronogrammes et des diagrammes de Gantt.

3.1.1 Chronogramme

Le chronogramme est un diagramme cartésien, comportant en abscisse, la variable temps et en ordonnée, la fonction à représenter. L'échelle de temps n'est pas forcément uniforme. On indique plutôt des temps t_i, lors de l'apparition d'un nouvel événement.

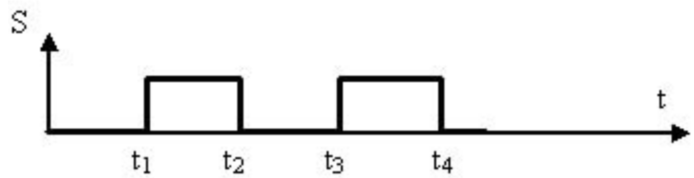


FIG. 3.3 – *Chronogramme d'une variable*

3.1.2 Diagramme de Gantt

Le diagramme de Gantt[1] est une variante du chronogramme avec la représentation temporelle de plusieurs variables et fonctions. L'état bas (valeur 0) des variables est facultatif.

FIG. 3.4 – *Diagramme de Gantt d'une bascule RS*

3.2 La fonction Mémoire

Les mémoires sont à la base des systèmes automatisés séquentiels. A chaque variable interne X_i, est associée une mémoire.

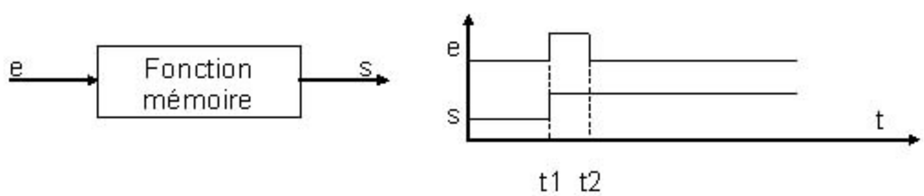


FIG. 3.5 – *Principe d'une mémoire*

EXEMPLE 12 *Commande de moteur*

Deux boutons poussoir "m" et "a" assure le fonctionnement d'un moteur "M". Le moteur doit démarrer si le bouton poussoir marche "m" est actionné ; une fois le bouton marche

1. Développé en 1917 par Henry L. Gantt. Ce type de diagramme est souvent utilisé en gestion de projet ou en gestion de production afin de coordonner des tâches ou des fabrications. Il est alors utilisé en outil de planification.

relâché, le moteur doit continuer à tourner tant que l'arrêt d'urgence "a" n'est pas actionné. Si on dresse la table de vérité de la sortie "M", deux valeurs de "M" sont possibles pour un certain état des variables d'entrées.

En effet si m=0 et a=0 :

- *le moteur marche si le dernier bouton poussoir appuyé est "m" ;*
- *le moteur est à l'arrêt si le dernier bouton poussoir appuyé est "a".*

Pour remédier à ce problème, il faut une variable interne au système ou mémoire, qui fera la distinction entre les deux états précédents, c'est dans ce cas le relais électrique auto-maintenu.

Une première classification permet de distinguer les mémoires permanentes des mémoires volatiles. On considère comme permanente, une mémoire qui conserve ses données en l'absence d'alimentation en énergie ; au contraire, une mémoire sera dite volatile si elle perd ses données en l'absence d'énergie.

Mémoires permanentes	Distributeurs électropneumatiques bistables.
	Contacteurs bistables à accrochage mécanique.
	Bascules R-S.
	ROM (ROM, PROM, EPROM)
	Disques durs, disquettes, CD-ROM.
Mémoires volatiles	Mémoires à auto-maintien (relais monostables).
	RAM.

Une deuxième classification permet de distinguer les différentes technologies : les mémoires mécaniques, électroniques, magnétiques ou optiques.

L'étude qui suit se limite à l'effet mémoire auto-maintenu en technologie électrique, électronique et pneumatique.

3.3 Les mémoires à auto-maintien

Ce type de mémoire, volatile, offre l'avantage de présenter un comportement orienté vers l'arrêt en cas de coupure d'énergie. Il est particulièrement utilisé pour les commandes de sécurité. Ces mémoires peuvent être de type prioritaires à la marche ou à l'arrêt ou encore symétriques. Elles peuvent être réalisées de manière électrique, électronique ou pneumatique.

3.3.1 Réalisation électrique - Relais auto-maintenu électromagnétique

Le relais est constitué d'une bobine alimentée par un circuit de commande, dont le noyau mobile ou la palette, provoque la commutation de contacts pouvant être placés dans un circuit de puissance.

Un contacteur est un relais particulier, pouvant commuter de fortes puissances électriques grâce à un dispositif de coupure d'arc électrique. Il est souvent couplé à d'autres éléments de commande comme un relais thermique, un disjoncteur magnéto-thermique, etc.

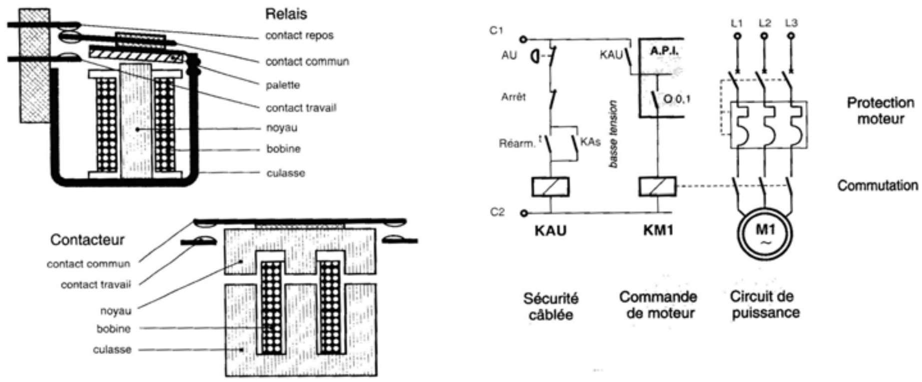


FIG. 3.6 – *Relais - Contacteur - Exemple d'utilisation*

A partir de ces relais, nous pouvons aisément câbler une commande de moteur avec effet mémoire. Dans le cas où nous utilisons un bouton poussoir "m" pour la marche et un bouton poussoir "a" pour l'arrêt de la machine, nous pouvons définir deux types de mémoire : à arrêt prioritaire ou à marche prioritaire.

3.3.1.1 La mémoire à effacement prioritaire

L'action sur "m" provoquera la mise sous tension de la bobine, et on aura donc "x"=1 ; le moteur sera alimenté. Dans le cas où "a" est actionné, la bobine n'étant plus alimenté, le contact x est ouvert et le moteur s'arrête. Si on a "m" et "a" en même temps, le moteur ne marche pas, d'où le nom d'effacement prioritaire.

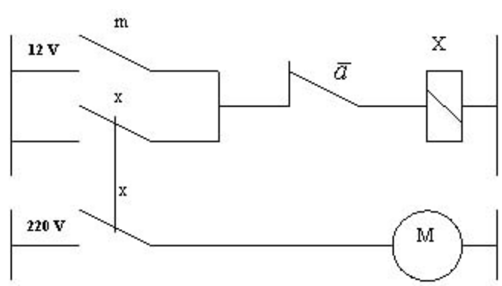


FIG. 3.7 – *Mémoire à arrêt prioritaire*

On peut alors écrire l'équation logique :

$$M = \overline{a} \cdot (x + m) \tag{3.1}$$

3.3.1.2 La mémoire à inscription prioritaire

Comme précédemment, l'action sur "m" permettra l'alimentation du moteur et l'action sur "a", l'arrêt du moteur. Mais dans ce cas, si on a "m" et "a'" en même temps, le moteur marche, d'où le nom d'inscription prioritaire ou de marche prioritaire.

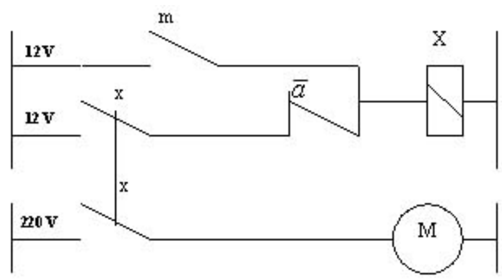


FIG. 3.8 – *Mémoire à inscription prioritaire*

On peut écrire alors l'équation logique de la sortie :

$$M = \overline{a} \cdot x + m \tag{3.2}$$

3.3.2 Réalisation pneumatique

Nous pouvons aisément réaliser le logigramme des équations logiques définies précédemment (ÉQ. 3.1, p. 39) et (ÉQ. 3.2, p. 40). Ce logigramme nous permettrait, le cas échéant de réaliser ces mémoires par un câblage pneumatique ou électronique.

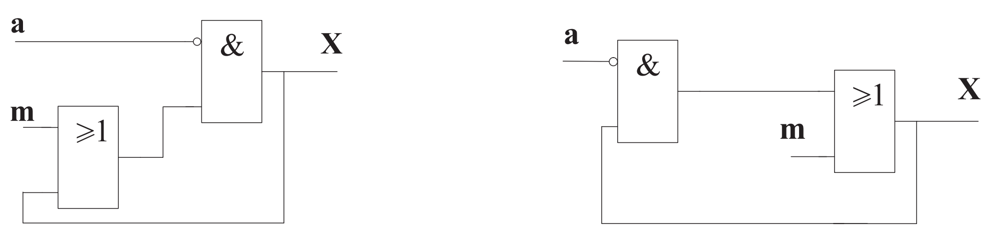


FIG. 3.9 – *Logigramme des mémoires à arrêt et à marche prioritaire*

En utilisant le théorème de Morgan et les diverses propriétés de l'algèbre de Boole, nous pouvons définir ces deux équations logiques à partir uniquement de portes logiques NAND ou NOR. On obtient alors les schémas logiques suivants.

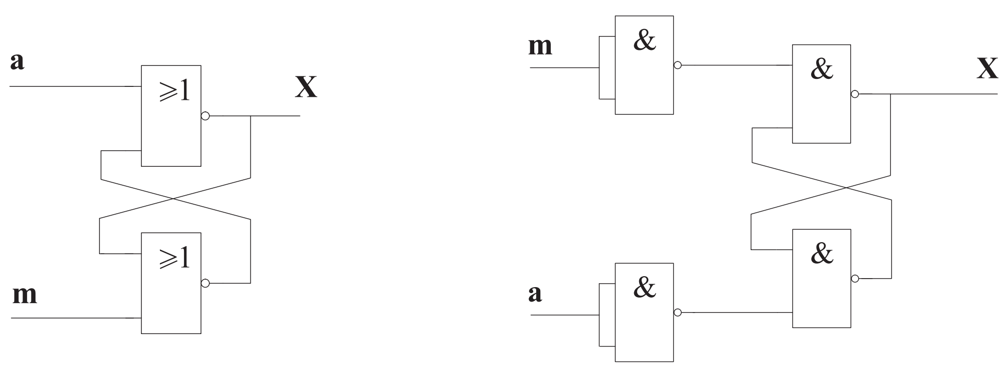


FIG. 3.10 – *Schéma logique des mémoires à arrêt et à marche prioritaire*

Ces mémoires peuvent être représentées par les symboles suivants :

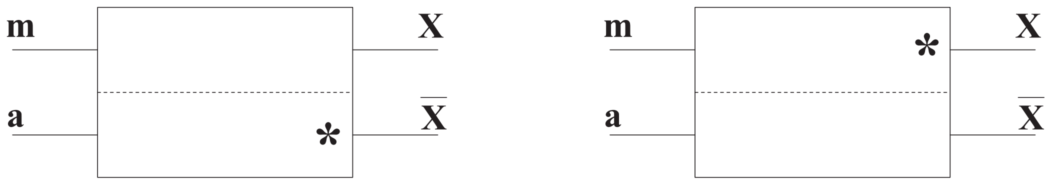


FIG. 3.11 – *Symbolisation des mémoires à arrêt et à marche prioritaire*

3.4 Les réalisations électroniques : les bascules

Les mémoires sont extrêmement utilisées dans des domaines très variées, elles sont toujours réalisables de manière électronique simplement par des combinaisons de portes NAND ou de portes NOR. Elles sont toutes basées des mémoires à deux états stables, dont les commandes de mise à 0 et à 1 sont appelés “s” et “r”. Elles sont appelées bascules ou mémoires bistables. Elles peuvent être asynchrones ou synchrones.

3.4.1 Les bascules RS

C’est une mémoire binaire de technologie électronique qui conserve en mémoire la valeur binaire précédente. On note “rs” comme *set* et *reset*.

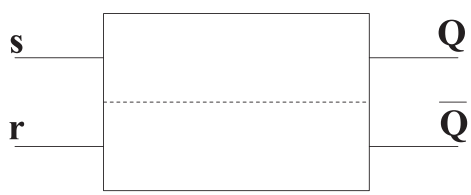


FIG. 3.12 – *Schéma normalisé d’une bascule RS*

On peut caractériser le fonctionnement de cette bascule grâce à la table de vérité et aux chronogrammes ci-dessous.

s	r	Q
0	0	Q^-
0	1	0
1	0	1
1	1	ε

La combinaison s=1 et r=1 est interdite pour la bascule RS standard. Il n’est donc pas spécifié dans la table de vérité.

3.4.2 Mémoires synchrones

Les circuits précédents était asynchrones. Le déclenchement de la bascule ne dépendait pas de l'évolution temporelle mais uniquement de la valeur des variables d'entrée “r” et “s”. Dans certaines applications, il est nécessaire de synchroniser le déclenchement de la bascule sur un signal d'horloge extérieur[2]. Dans ce cas, on utilise des bascules dites synchrones. Les commutations de la bascule ne se font qu'à des instants précis lié au signal d'horloge utilisé.

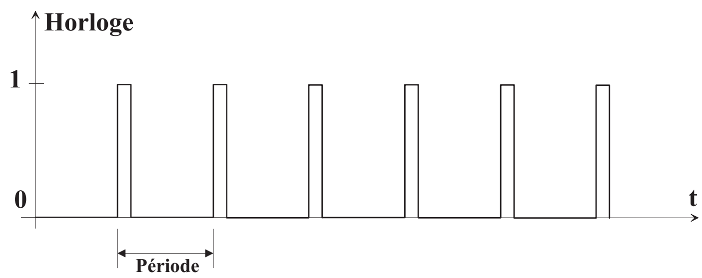


FIG. 3.13 – *Signal d'horloge*

Les bascules RS peuvent être synchronisées, elles sont alors notées RSH ou RST. Les entrées “r” et “s” sont alors statique et l'entrée d'horloge est dynamique[3].

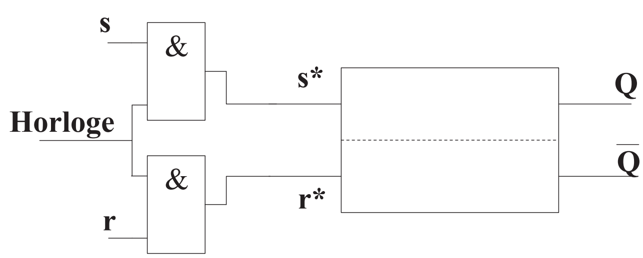


FIG. 3.14 – *Principe de la bascule RS synchronisée*

La synchronisation s'effectue sur les entrées. Cette synchronisation peut se faire sur le front montant de l'horloge ou sur le front descendant du signal d'horloge.

FIG. 3.15 – *Symbolisation des bascules RS synchronisées sur front montant ou front descendant*

Il existe d'autres types de bascules utilisées en électronique :

– la bascule RSH équipée de forçages asynchrones, les entrées s et r sont synchrones avec

2. En effet, le fonctionnement asynchrone peut apporter des comportements temporels paradoxaux si les entrées s et r évoluent pendant le changement d'état interne de la bascule.

3. Rien à voir avec la mécanique générale, une entrée statique n'entraîne pas le basculement, elle n'est pas immédiatement prise en compte alors qu'une entrée dynamique est directement prise en compte.

l'horloge alors que les entrées Set et Reset sont indépendantes du signal de l'horloge et prioritaires.

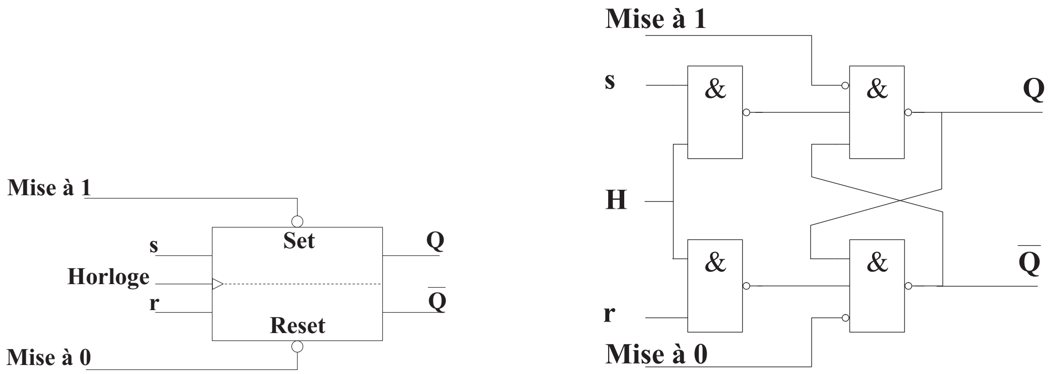


FIG. 3.16 – *Symbole et schéma logique des bascules RSH avec forçage*

– la bascule D, ou il n'y a qu'une unique entrée D (Data).

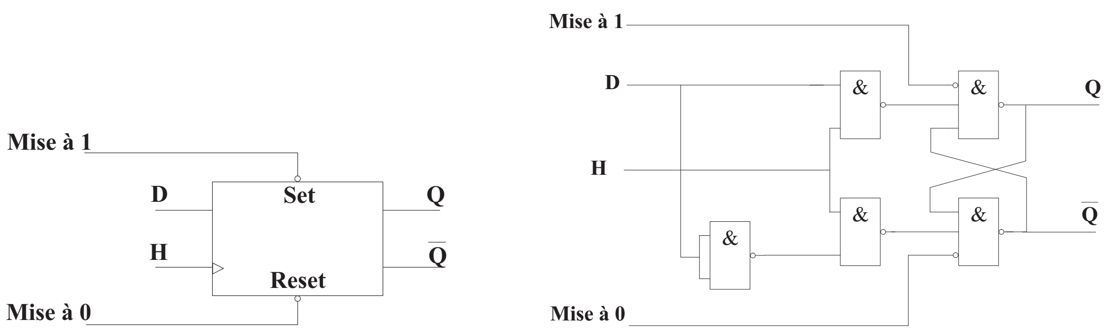


FIG. 3.17 – *Symbole et schéma logique des bascules D*

– la bascule maître-esclave JK, réalisée à partir de deux bascules RSH, une maître et une esclave.

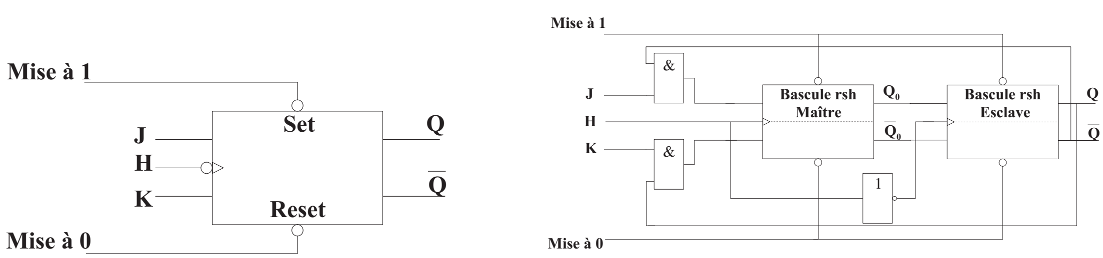


FIG. 3.18 – *Symbole et schéma de principe des bascules JK*

Chapitre 4

Le Grafcet

Le GRAFCET (GRAphe Fonctionnel de Commande Étape / Transition) est un outil de spécification de la partie séquentielle d'un système automatisé depuis le cahier des charges jusqu'à son exploitation.

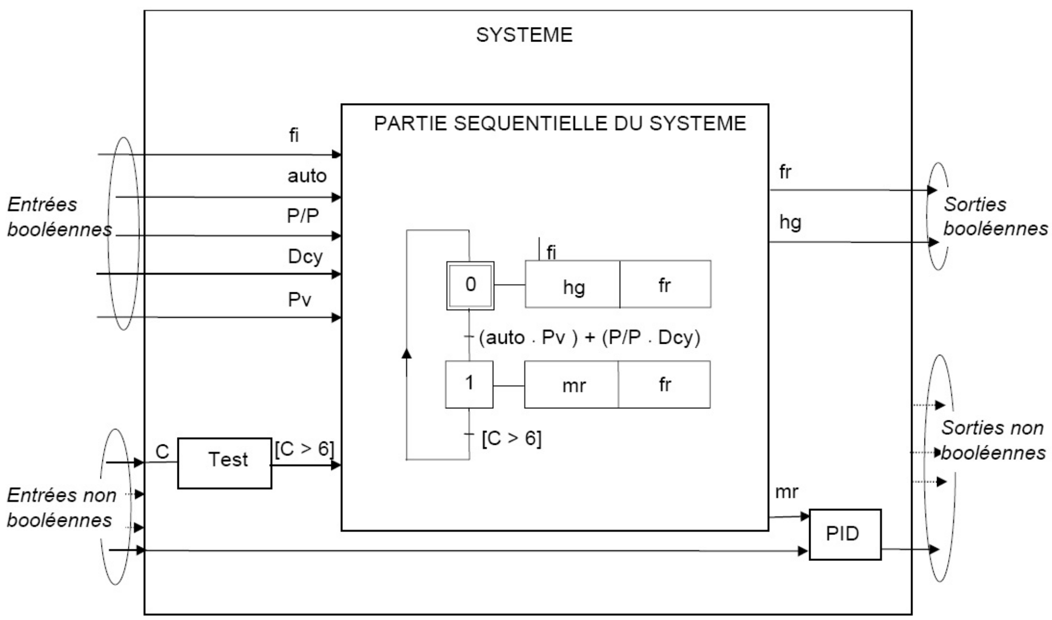


Fig. 4.1 – *Situation du grafcet dans un système séquentiel*

Le GRAFCET est né en 1975 des travaux du groupe de travail "systèmes logiques" de l'AFCET[1] sur la normalisation de la représentation du cahier des charges d'un automatisme logique. En partant des modèles existants (Réseau de Petri, Graphe d'état ou Or-

1. Association Française pour la Cybernétique Économique et Technique, association créée en 1968 et dont le but était de promouvoir les nouvelles technologies, elle a été remplacée depuis par l'ASTI (Association française des sciences et technologies de l'information).

ganigramme), ils développèrent un nouvel outil de modélisation, appelé GRAFCET[2]. Les résultats de ces travaux firent l'objet de publications en 1977, date de naissance officiel du petit GRAFCET. Dès 1979, sous l'impulsion de l'AFCET auprès des enseignants techniques et de l'ADEPA[3] auprès des PMI/PME, le GRAFCET commence à être utilisé puis il fait l'objet d'une norme AFNOR en 1982 (NF C03-190).

Au départ national, cet outil de modélisation est maintenant utilisé de manière internationale[4] par toutes les entreprises nécessitant une production automatisée, il est normalisé au plan international depuis 1987 (on parle alors de SFC pour Sequential Function Chart).

Le GRAFCET fait l'objet de la norme CEI 60848-2 publiée en Août 2002 " Langage de spécification GRAFCET pour diagrammes fonctionnels en séquence ".

Remarque 11 *GRAFCET en majuscules désigne le modèle en général, alors que grafcet en minuscules désigne la représentation d'un système logique donné... utilisant bien sur le modèle GRAFCET.*

La partie séquentielle d'un système est caractérisée par ses variables d'entrée, ses variables de sortie et son comportement. Cette partie séquentielle ne comporte que des variables d'entrées et de sorties booléennes. Toutefois le langage de spécification GRAFCET permet par extension de décrire le comportement de variables non booléennes (exemple : évaluation d'un prédicat ou affectation d'une valeur numérique à une variable).

Il est important de noter qu'il existe d'autres types de spécification d'un système séquentiel, nous en avons déjà vu certaines :

- les réseaux de Pétri,
- les graphes d'état,
- les chronogrammes,
- les algorithmes et les organigrammes.

4.1 Notions de base

Le GRAFCET est utile pour concevoir des grafcets donnant une représentation graphique et synthétique du comportement des systèmes. La représentation distingue :

- la structure avec les éléments graphiques (étapes, liaisons orientées, transitions), qui permet de décrire les évolutions possibles entre les situations,
- l'interprétation, qui fait la relation entre les variables d'entrées, la structure, et les variables de sorties (actions associées aux étapes, réceptivités associées aux transitions),
- des règles d'évolution, d'assignation et d'affectation définissent formellement le comportement dynamique de la Partie Commande.

Cahier des charges 1

2. L'acronyme est double GrAFCET pour groupe de l'AFCET et GRAFCET pour GRAphe Fonctionnel de Commande Étape / Transition.
3. Agence nationale pour le Développement de la Production Automatisée.
4. Il est même à la base de langages de programmation d'automates programmables (PL7-2 de Télémécanique).

Un chariot doit effectuer un aller retour entre deux positions "chariot à gauche" et "chariot à droite". Lorsqu'il est à gauche, l'appui sur le bouton "départ cycle" provoque un cycle de déplacement.

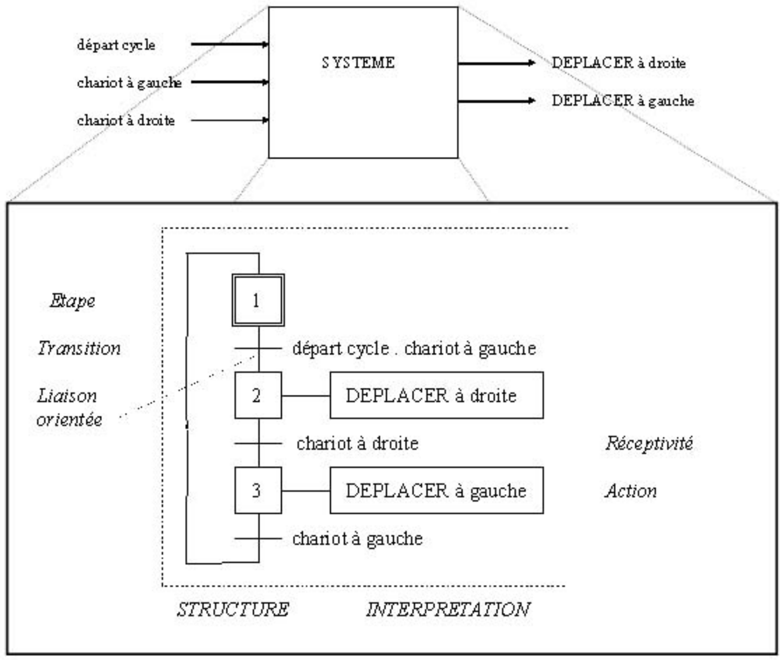


FIG. 4.2 – *Principe du GRAFCET*

4.1.1 Les étapes

Une étape est représentée par un carré et identifiée par un numéro. A un instant donné, une étape est soit active, soit inactive.

On représente une étape active par un point dans sa partie inférieure.

L'ensemble des étapes actives d'un Grafcet à un instant donné définit la situation de ce Grafcet à l'instant considéré (on la note par exemple $\{3; 10; 101\}$ où les étapes 3, 10 et 101 sont actives).

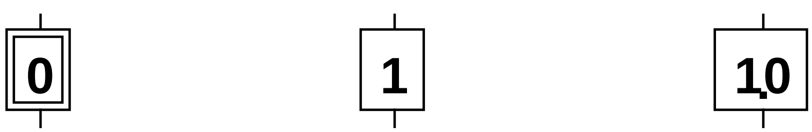


FIG. 4.3 – *Étape initiale, étape et étape active*

Les étapes initiales se représentent par un double carré. Elles indiquent la situation initiale du système, elles sont les étapes actives du Grafcet à l'instant initial.

REMARQUE 12 *Plusieurs étapes initiales peuvent être nécessaires pour décrire le compor-*

tement d'un système.

4.1.2 Les Actions

L'action indique, dans un rectangle, comment agir sur la variable de sortie, soit par assignation (action continue), soit par affectation (action mémorisée).

FIG. 4.4 – *Exemple d'action*

Les actions sont liées à la situation. Par conséquent, les actions sont associées aux étapes.

REMARQUE 13 *Par convention, afin d'éviter toute confusion entre l'état d'une étape (qui n'existe qu'à l'échelle du temps interne) et l'émission d'une sortie associée à cette étape, on note :*
- X_i*, l'état interne de l'étape i (*$X_i = 1$ *si l'étape i est active et* $X_i = 0$ *si i est inactive),*
- SX_i *ou* $S(X_i)$ *pour la représentation externe de l'état de* X_i*.*

4.1.3 Les transitions

Une transition indique la possibilité d'évolution entre plusieurs étapes. Le franchissement d'une transition, provoque un changement de situation du grafcet. Elle modélise les changements d'état du système.

Une transition est placée entre une ou plusieurs étapes d'entrée, situé en amont, et une ou plusieurs étapes de sortie, situées en aval de cette transition.

Elle est représentée par un trait horizontal.

4.1.4 Les réceptivités

Associée à chaque transition, la réceptivité est une condition logique qui est soit vraie, soit fausse, et qui est composée de variables d'entrées et/ou de variables internes. Cette réceptivité peut s'écrire sous forme de texte ou d'expression logique.

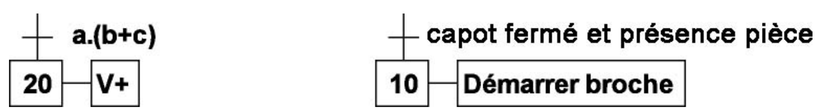


FIG. 4.5 – *Transitions et réceptivités*

Ces réceptivités permettent de savoir dans quelles conditions la ou les étapes de sortie doivent devenir actives.

4.1.5 Vocabulaire associé au modèle GRAFCET

DÉFINITION 5 *Situation d'un Grafcet*

....

Définition 6 *Événement d'entrée*

....

Définition 7 *Événement interne*

....

Définition 8 *Occurrence*
Au cours du cycle d'un système, de nombreux changements d'état des variables d'entrée se produisent. Pour les distinguer les uns des autres, nous appellerons occurrence chaque changement.

4.2 Structure graphique de base

Règle de syntaxe 1
L'alternance étape/transition, transition/étape doit toujours être respectée, c'est à dire que deux étapes doivent toujours être séparées par une seule et unique transition.

4.2.1 Les liaisons orientées

Elles sont orientées de haut en bas, si ce n'est pas le cas, une flèche doit indiquer le sens. Plusieurs liaisons peuvent arriver ou partir d'une étape.

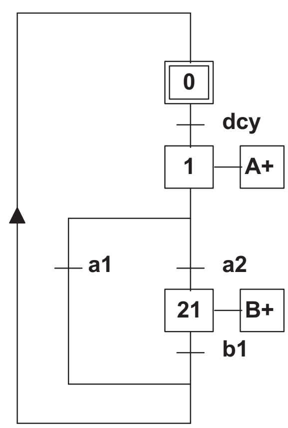


Fig. 4.6 – *Saut d'étape et retour de séquence*

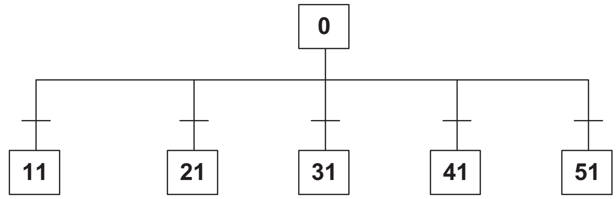
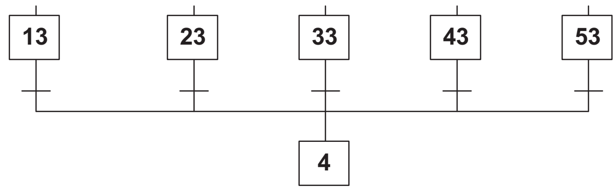
4.2.2 Structure de base

Plusieurs structures de base du GRAFCET répondent à ces règles de syntaxe, nous pouvons donner les structures de base ci-dessous[5] :

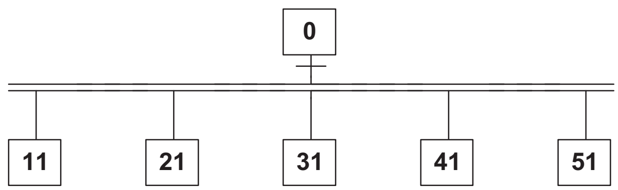
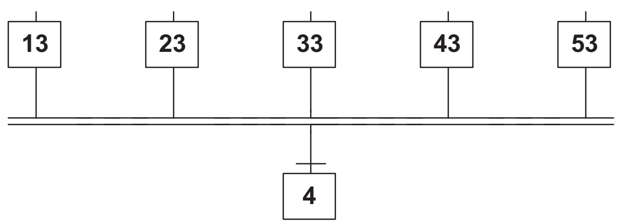
- la structure linéaire, avec une séquence dite unique, composée d'une suite d'étapes qui ne peuvent être activées que les unes après les autres, chaque étape n'est suivie que par une transition et chaque transition n'est validée que par une étape,

5. Nous verrons plus tard que nous pouvons mélanger ces différentes structures dans un même Grafcet.

– les structures alternatives avec divergence et convergence en “OU”,

Divergence en “OU”	
Convergence en “OU”	

– les structures simultanées avec divergence et convergence en “ET”.

Divergence en “ET”	
Convergence en “ET”	

4.2.2.1 Sélection de Séquence (structure alternative)

La sélection de séquences exprime un choix d’évolution entre plusieurs séquences à partir d’une ou de plusieurs étapes. Cette structure se représente par autant de transitions validées simultanément qu’il peut y avoir d’évolutions possibles.

Cahier des charges 2

Un chariot peut effectuer :

- *soit un aller retour entre deux positions “chariot au centre” et “chariot à droite” si le bouton “droite” est actionné,*
- *soit un aller retour entre deux positions “chariot au centre” et “chariot à gauche” si le bouton “gauche” est actionné.*

Si les deux boutons sont actionnés en même temps, le chariot part à droite.

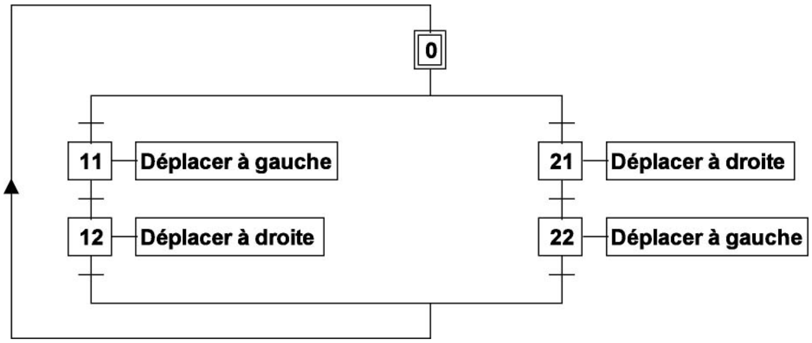


Fig. 4.7 – *Exemple de structure avec sélection de séquence*

4.2.2.2 Parallélisme structural (structure simultanée)

Lors de la divergence en "ET", le symbole de synchronisation est utilisé dans cette structure pour indiquer l'activation simultanée de plusieurs séquences. Après leur activation simultanée, l'évolution des étapes actives dans chacune des séquences parallèles devient alors indépendante.

De même, lors de la convergence en "ET", le symbole de synchronisation est utilisé dans cette structure pour indiquer l'attente de la fin des séquences amont avant d'activer la séquence aval. La transition n'est validée que lorsque toutes les étapes amont sont actives.

Cahier des charges 3

Deux chariots 1 et 2 ont pour position de départ respective "d1" et "d2". Après un appui sur un bouton "dcy", il doivent simultanément se déplacer à droite pour rejoindre une position d'arrivée "a1" et "a2". Ensuite ils doivent repartir simultanément de cette position d'arrivée pour rejoindre leur position de départ. Un nouveau cycle ne sera possible que s'ils sont tous les deux sur leur position de départ.

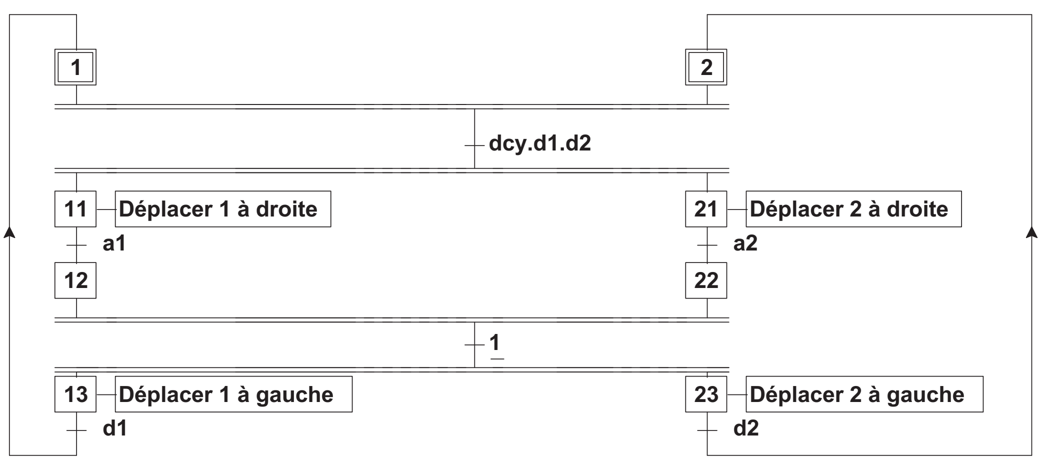


Fig. 4.8 – *Exemple de parallélisme structural*

4.3 Les règles d'évolution

Ces règles sont fondamentales et sont à connaître afin de bien appréhender le fonctionnement d'un Grafcet.

Règle 1 *Situation initiale*
La situation initiale est la situation à l'instant initial, elle est donc décrite par l'ensemble des étapes actives à cet instant.
Le choix de la situation à l'instant initial repose sur des considérations méthodologiques et relatives à la nature de la partie séquentielle du système visé.

Règle 2 *Transition franchissable*
Une transition est dite validée lorsque toutes les étapes immédiatement précédentes reliées à cette transition sont actives. Le franchissement d'une transition se produit :
- *lorsque la transition est validée,*
- *et que la réceptivité associée à cette transition est vraie.*

Une transition franchissable est obligatoirement franchie.

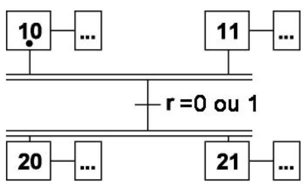


Fig. 4.9 – *Situation : 10*

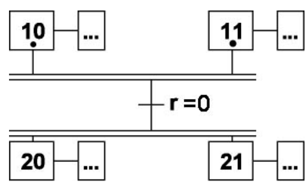


Fig. 4.10 – *Situation : 10, 11*

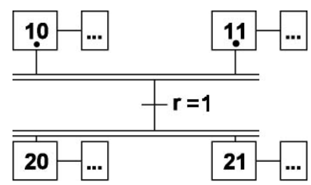


Fig. 4.11 – *Situation : 10, 11*

....

....

Remarque 14 *La durée de franchissement d'une transition est non nulle dans le temps interne, mais est très faible à l'échelle du temps externe.*

Règle 3 *Franchissement d'une transition*
Le franchissement d'une transition entraîne simultanément l'activation de toutes les étapes immédiatement suivantes et la désactivation de toutes les étapes immédiatement précédentes.

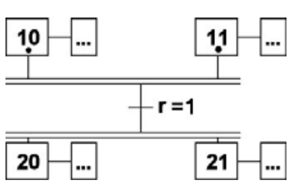
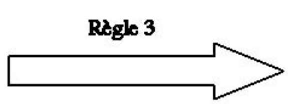


Fig. 4.12 – *Situation : 10, 11*



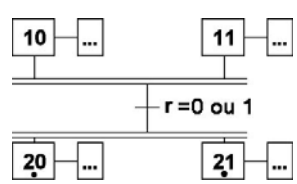


Fig. 4.13 – *Situation : 20, 21*

....

Remarque 15 *Le terme simultanément signifie à temps interne nul...*

Règle 4 *Franchissements simultanés*

Plusieurs transitions simultanément franchissables sont simultanément franchies.

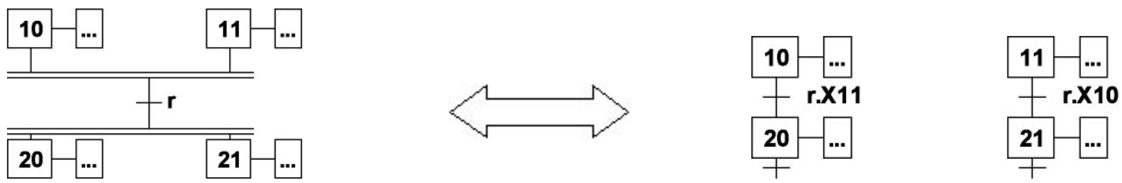


Fig. 4.14 – *Structures équivalentes déduites de la règle 4*

Règle 5 *Activation et désactivation simultanées*

Si, au cours du fonctionnement, la même étape est simultanément activée et désactivée, elle reste active.

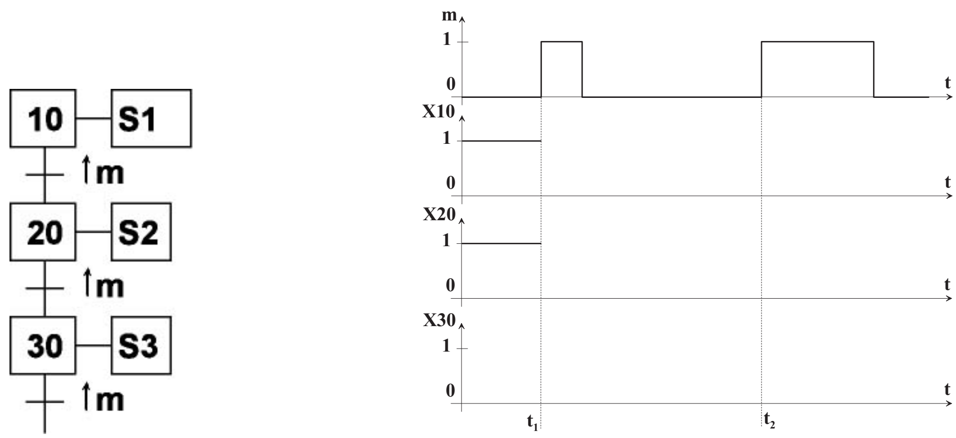


Fig. 4.15 – *Exemple d'application de la règle 5*

4.4 Le temps en GRAFCET

Le temps est un élément fondamental de la modélisation des systèmes logiques séquentiels[6].

À l'extérieur de la partie commande, le temps s'écoule de manière continu. Alors qu'à l'intérieur de la partie commande, le temps est discret. C'est pourquoi, nous retrouvons dans tout système informatisé ou automatisé une horloge interne. La période de cette horloge interne conditionne la rapidité de traitement des informations par la partie commande (0,00001 ms à 20 ms en électronique, 20 à 500 ms en électromécanique, 0.1 à 1 s en pneumatique).

Ainsi, l'échelle du temps interne (PC) et l'échelle du temps externe (PO) sont très différentes. Ceci pose un problème de synchronisation entre la PO et la PC si la durée

6. Logique, ils dépendent du temps...

séparant deux occurrences d'événements externes est inférieure à la période de l'horloge du système.

Afin de parer à cette éventualité, nous devons formuler le postulat temporel ci-dessous :

"Les intervalles de temps interne (retard entre deux dates internes) sont infiniment petits et donc considérés nuls à l'échelle du temps externe. La causalité (externe) est à temps nulle dans le modèle GRAFCET."

4.4.1 Temps externe

Dans le temps externe, seules sont connues les dates d'occurrence des événements externes (changement d'état des variables d'entrée).

Nous pouvons alors écrire ce nouveau postulat relatif au temps externe :

"Les occurrences d'événements externes sont temporellement distinctes."

En conséquence, ces occurrences sont associées à des dates différentes.

4.4.2 Temps interne

Le temps interne est discret, les dates d'occurrence des événements internes (changement de situation des étapes, ordre interne, etc.) sont les seules données.

Nous pouvons écrire le postulat ci-dessous concernant le temps interne :

*"La durée séparant l'instant ou une transition est franchissable de l'instant où elle est franchie est non nulle, à l'échelle du temps interne. Elle est appelée **durée d'évolution**."*

Nous pouvons alors illustrer les différents postulats temporels par l'exemple ci-dessous.

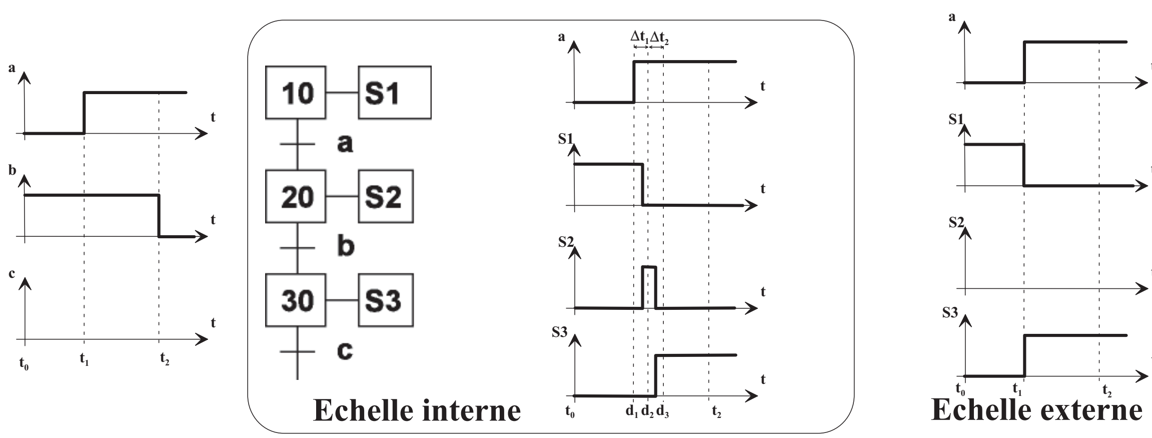


FIG. 4.16 – *Évolution du temps interne et du temps externe*

4.5 Construction d'un Grafcet

La construction d'un Grafcet nécessite le respect des règles de syntaxe et d'évolution d'un Grafcet mais aussi une analyse approfondie du cahier des charges. Une impasse sur cette analyse méthodique du cahier des charges rend très difficile l'élaboration d'un Grafcet correct.

La méthode de construction décrite ci-dessous provient de *Monsieur Christian Merlaud*, un des personnages à l'origine du Grafcet, membre de l'AFCET dès ses débuts, éminent professeur à l'École Normale Supérieure de Cachan, décédé accidentellement il y a quelques années[7].

Cette méthode peut se décomposer en cinq étapes successives :

1° étape : Caractériser des entrés/sorties de la partie commande

Cette étape se traduit généralement par un schéma fonctionnel permettant de mettre en place les différentes entrées/sorties et les notations associées.

Fig. 4.17 – *Exemple de schéma fonctionnel*

Remarque 16 *Cette partie est souvent donnée dans un sujet écrit afin d'imposer une notation commune et de faciliter la correction. A l'oral, c'est tout autre chose, vous devez être capable de caractériser les entrées/sorties à partir de la connaissance du système (technologie employé, etc.).*

2° étape : Identifier les comportements de la PC vis à vis de la PO

C'est à dire, identifier les ordres que la PC donne à la PO.

3° étape : Associer au moins une étape à chacun des comportements

Désormais, on connaît le nombre maximum d'étapes du Grafcet.

4° étape : Caractériser les transitions entre comportements

Cette phase peut être abordée par une simple technique de dénombrement : partant d'un comportement donné, il suffit de rechercher si une transition avec chacun des autres comportements est possible, et ceci sans s'occuper de la réceptivité associée. Désormais, le nombre maximum de transitions nécessaires à la construction du Grafcet est connu.

5° étape : Interpréter le Grafcet (actions et réceptivités)

Pour déterminer les actions, l'analyse s'effectue comportement par comportement en déterminant les ordres alors émis.

Pour déterminer les réceptivités :

- un point de vue "événementiel" consiste à représenter l'événements par un front montant ou descendant d'une entrée,
- un point de vue "conditionnel" consiste à exprimer de manière implicite les événements précédents à partir de l'état des entrées.

7. Tous ceux qui ont été ses élèves se souviennent de lui et le regrette amèrement... Un excellent professeur, doué d'un grande pédagogie et spécialiste de l'automatique.

Ce point de vue est celui qui anticipe la réalisation, il a l'avantage de permettre un questionnement de type "positif" ou "négatif" :

Questionnement positif : A quelle condition passer du comportement C_i au comportement C_j ?

Questionnement négatif : A quelle condition quitter le comportement actuel ?

4.6 Complément sur les actions

L'action indique, dans un rectangle, comment agir sur la variable de sortie, soit par assignation (action continue), soit par affectation (action mémorisée).

En mode continu, c'est l'association d'une action à une étape qui permet d'indiquer qu'une variable de sortie a la valeur vraie si l'étape est active et si la condition d'assignation est vérifiée.

En mode mémorisé, c'est l'association d'une action à des événements internes qui permet d'indiquer qu'une variable de sortie prend et garde la valeur imposée si l'un de ces événements se produit.

Dans le cours de PTSI, seul le mode continu est abordé[8].

Il peut y avoir une, plusieurs ou aucune action, associées à une étape. Elles traduisent ce qui doit être fait à chaque fois que l'étape associée est active.

Lorsqu'il y a plusieurs actions, elles sont toutes exécutées en même temps. Leur durée est égale à la durée de l'activation de l'étape concernée.

FIG. 4.18 – *Exemple de plusieurs actions associées à une étape*

4.6.1 Les actions conditionnelles en mode continu

DÉFINITION 9 *Condition d'assignation*

Une proposition logique, appelée condition d'assignation, qui peut être vraie ou fausse, conditionne toute action continue. ***L'absence de notation signifie que la condition d'assignation est toujours vraie.***

Dans le cas d'une action conditionnelle, la sortie "A" est assignée à la valeur vraie si l'étape "20" est active et si la variable "p" est vraie. Si deux actions sont liées à la même étapes et qu'une seule est conditionnelle, alors seule celle associée à la condition d'assignation dépend de la valeur de "p". Pour l'exemple ci-dessous, nous pouvons dire que :

$$A = X20 \cdot p \qquad B = X20$$

8. Ne vous inquiétez pas trop, le mode mémorisé est au programme de PT et de PSI...

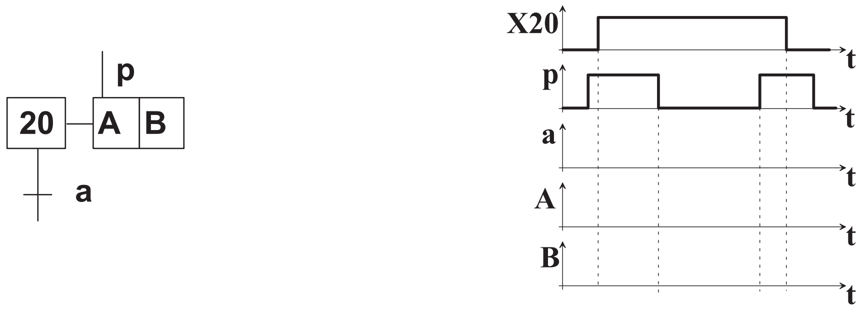


FIG. 4.19 – *Exemple d'action conditionnelle*

4.6.2 Les actions fonction du temps

La condition d'assignation peut être dépendante du temps, dans ce cas, le temps intervient comme condition logique. Il existe alors trois cas possibles :

– les actions retardées dans le temps, dans ce cas, la condition d'assignation n'est vraie qu'après un temps défini à partir de l'activation de l'étape. Si la durée d'activité de l'étape est inférieure au temps spécifié dans la condition d'assignation de l'action retardée, alors la sortie n'est pas assignée à la valeur vraie.

– les actions limitées dans le temps, dans ce cas, la durée spécifiée dans la condition d'assignation est la durée maximale, définie à partir de l'activation de l'étape, d'assignation de la valeur vraie à la sortie.

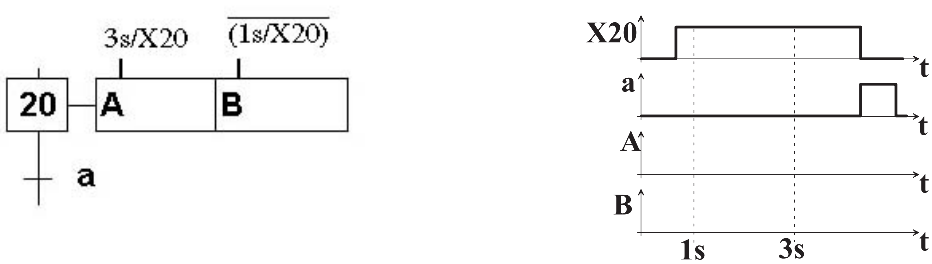


FIG. 4.20 – *Exemple d'action retardée dans le temps et action limitée dans le temps*

– les actions retardées et limitées dans le temps, on utilise alors l'opérateur retard de la norme CEI 617-12. Dans ce dernier cas, la condition d'assignation 3s/b/5s est vraie 3s

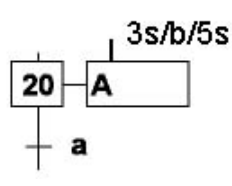


FIG. 4.21 – *Exemple d'action retardées et limitée dans le temps*

après l'occurrence d'un front montant de la variable "b" et reste vraie jusqu'à 5 s après l'occurrence d'un front descendant de "b". La variable temporisée "b" doit rester vraie pendant un temps égal ou supérieur à 3s pour que la condition d'assignation puisse être vraie. L'action "A" reste cependant dépendante de l'activation de l'étape "20".

4.6.3 Évolution fugace

Dans le cas général, l'évolution est non fugace, c'est-à-dire que l'événement d'entrée ne provoque qu'un seul pas d'évolution (le franchissement simultané d'une ou plusieurs transitions).

Une évolution fugace se produit quand plusieurs transitions successives sont franchies à l'occurrence d'un unique événement d'entrée. L'évolution correspondante est dite fugace.

Les étapes intermédiaires correspondantes, dites étapes instables, ne sont pas activées, mais on considère qu'elles ont été "virtuellement" activées et désactivées le long du chemin d'évolution intuitive, et de même que les transitions correspondantes ont été "virtuellement" franchies.

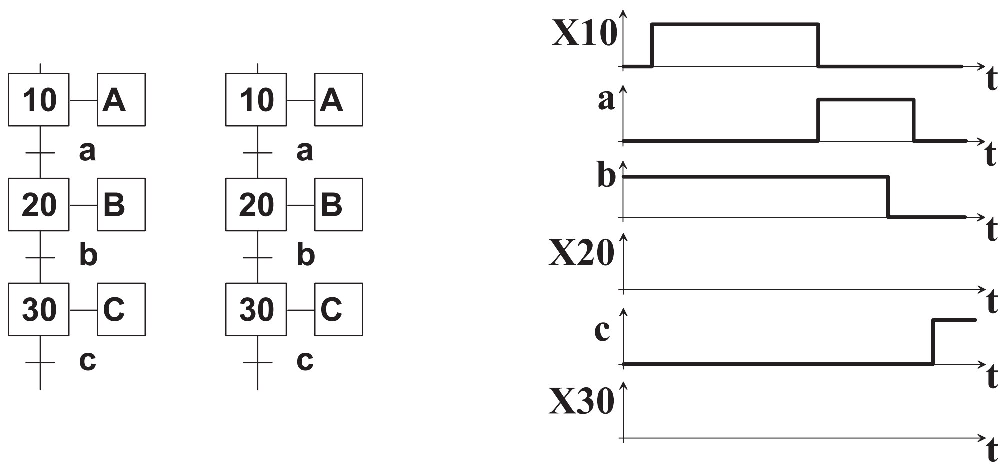


Fig. 4.22 – *Evolution fugace*

L'assignation d'une valeur de sortie par une action continue associée à une étape, qui à l'occasion d'une évolution fugace est une étape instable, n'est pas effective puisque l'étape n'est pas réellement activée.[9]

4.7 Complément sur les réceptivités

Une réceptivité est une condition logique. Elle est soit vraie, soit fausse. Elle peut être inscrite de manière littérale ou de manière symbolique (équation logique). Une réceptivité

9. Nous verrons l'année prochaine, que dans le cas des actions mémorisées, le passage par une étape instable permet d'affecter une valeur à une sortie mémorisée... Toujours le même problème de temps interne et de temps externe.

peut être une information externe (entrée) ou interne (variable d'étape par exemple).

Cahier des charges 4

Un chariot doit effectuer deux allers retours entre deux positions "chariot à gauche = cg" et "chariot à droite = cd". Une impulsion sur le bouton "départ cycle =dcy" provoque un cycle de déplacement.

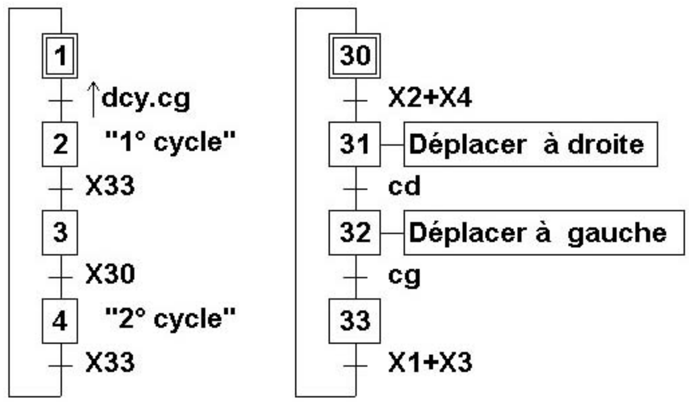


Fig. 4.23 – *Grafcet général et grafcet de tâche*

Pour noter une réceptivité toujours vraie, on utilise la notation"<u>1</u>".

4.7.1 Front montant ou front descendant

On peut aussi utiliser les notations non booléennes de front montant et front descendant. La notation $\uparrow *$ indique que la réceptivité n'est vraie qu'au changement d'etat de la variable * (front montant: passage de la valeur 0 à la valeur 1). Cette notation est generale et s'applique à toute proposition logique, qu'il s'agisse d'une variable élémentaire ou d'une combinaison de plusieurs variables booléennes. De même, la notation $\downarrow *$ indique que la réceptivité n'est vraie qu'au changement d'etat de la variable * (front descendant: passage de la valeur 1 à la valeur 0).

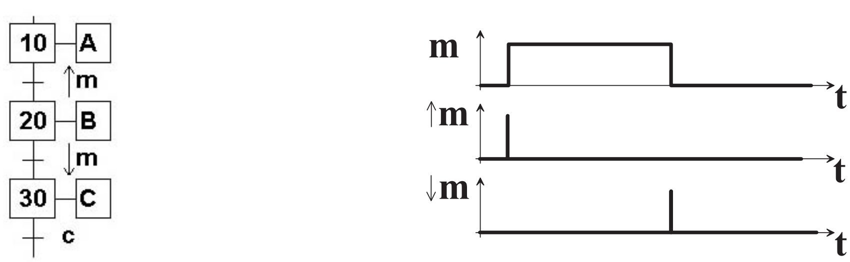


Fig. 4.24 – *Front montant et front descendant*

4.7.2 Réceptivité fonction du temps

De la même manière que pour les actions, on peut prendre en compte le temps dans une réceptivité à l'aide de l'opérateur normalisé "t1/x/t2". La variable "x" peut être une variable d'état d'une étape ou une variable d'entrée du système.

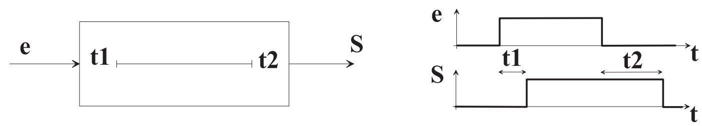


FIG. 4.25 – *Représentation de l'opérateur retard*

L'utilisation la plus courante de ce type de réceptivité est la temporisation de variable d'étape avec un temps t2 égal à zéro. L'étape temporisée doit rester active pendant un temps supérieur ou égal à t1 pour que la réceptivité puisse être vraie.

Cahier des charges 5

Un chariot doit effectuer un aller retour entre deux positions "chariot à gauche=cg" et "chariot à droite=cd". Lorsqu'il est à gauche, une impulsion sur le bouton "départ cycle=dcy" provoque un cycle de déplacement. Lorsqu'il est à droite, il doit attendre 30 secondes.

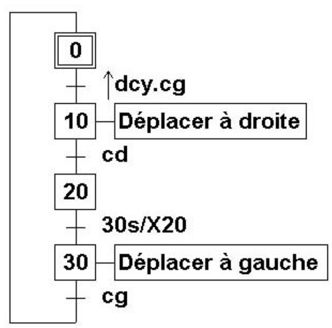


FIG. 4.26 – *Exemple de chariot avec temporisation*

4.7.3 Valeur booléenne d'un prédicat

La notation "[*]" signifie que la valeur booléenne du prédicat constitue la variable de réceptivité. Ainsi, lorsque l'assertion * est vérifiée, le prédicat vaut 1, dans le cas contraire, il vaut 0. L'astérisque doit être remplacé par l'assertion que l'on veut tester.

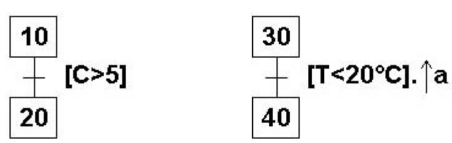


FIG. 4.27 – *Exemple de transitions avec prédicat*

4.8 Outils d'analyse d'un Grafcet

Trois outils sont couramment employés pour l'analyse et aussi pour la conception d'un Grafcet :

- le chronogramme à l'échelle de temps externe,
- le tableau d'évolution,
- le graphe des situations accessibles.

Le chronogramme permet d'illustrer le comportement temporel du Grafcet (nous l'avons déjà souvent utilisé pour cela).

Le graphe des situations accessibles permet de connaître quelles sont les situations accessibles pour un Grafcet donné et d'y associer des réceptivités.

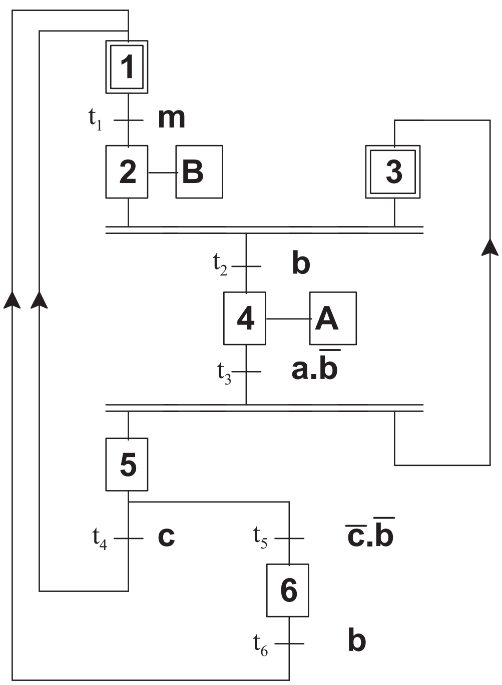
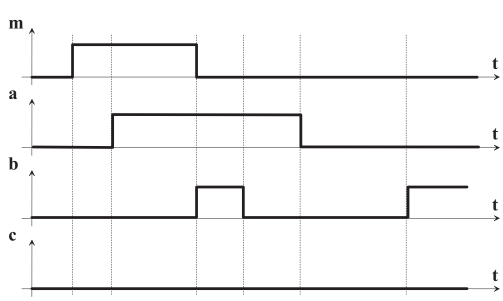


FIG. 4.28 – *Grafcet et graphe des situations accessibles*



Situation	Transitions validées	Événement condition	Transition franchissable	Nouvelle situation

FIG. 4.29 – *Tableau d'évolution et chronogrammes*

4.9 Structures supplémentaires

4.9.1 Sélection de séquence

Une sélection de séquence correspond à un choix d'évolution entre plusieurs séquences à partir d'une ou plusieurs étapes. Cette sélection de séquence utilise des divergences en "OU"[10]. Il faut bien veiller au respect de la règle d'alternance étape/transition lors de la création de ce type de Grafcet.

Remarque 17 *La sélection de séquence est utilisée pour effectuer un partage de ressource. On peut prendre comme exemple un système de deux vérins rentrant leurs tiges respectives dès qu'elles sont sorties. On souhaite que chaque vérin sorte (Si) puis rentre (Ri) sa tige sur impulsion d'un opérateur (↑ m). Le premier vérin qui a fini cet "aller-retour" doit immédiatement en effectuer un deuxième. Le cycle est alors terminé.*

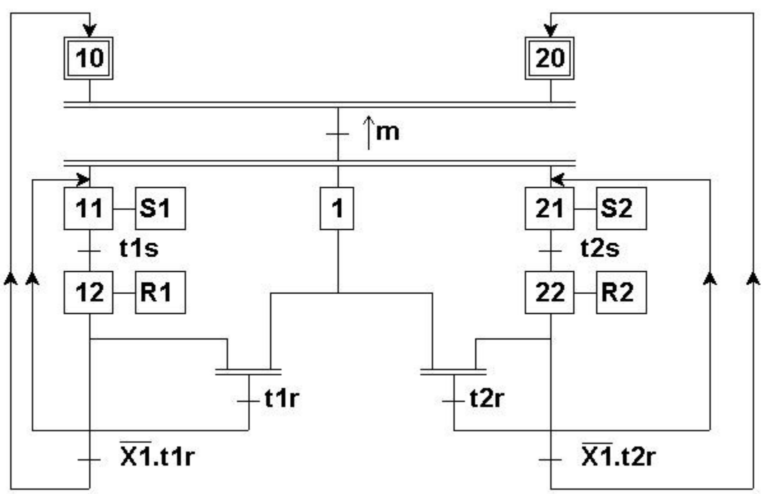


Fig. 4.30 – *Exemple de partage de ressource*

4.9.2 Reprise de séquence et saut d'étape(s)

Ces deux cas correspondent tous les deux à des cas particuliers de l'utilisation de la sélection de séquence (divergence en "OU"). Les reprises de séquence sont des aiguillages qui permettent de reprendre plusieurs fois la même séquence tant qu'une condition donnée n'est pas remplie.

Le saut d'étape est un aiguillage qui permet soit de parcourir la séquence complète soit de sauter une ou plusieurs étapes de la séquence lorsque, par exemple, les actions associées à ces étapes deviennent inutiles.

10. On peut cependant utiliser des divergences en "OU" et des divergences en "ET" pour cette sélection de séquence... Voir l'exemple.

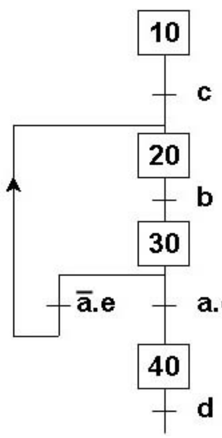


FIG. 4.31 – *Exemple de reprise de séquence*

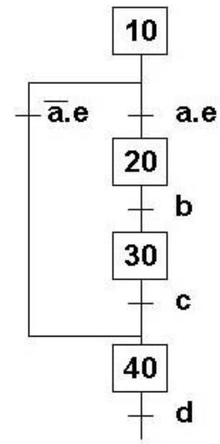


FIG. 4.32 – *Exemple de saut de séquence*

4.9.3 Accumulation et réservoir

L'accumulation permet les activations successives de plusieurs étapes puis les désactivations simultanées de ces étapes par le franchissement d'une transition.

CAHIER DES CHARGES 6

On désire accumuler trois cartons puis les évacuer ensemble. Chaque carton qui arrive dans la zone de stockage est détecté par une cellule photoélectrique (c).

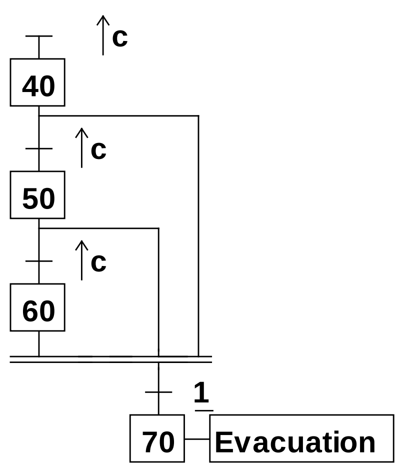


FIG. 4.33 – *Exemple d'accumulation*

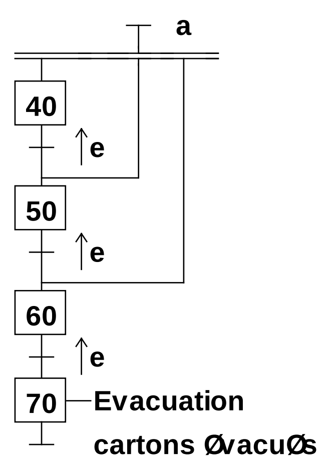


FIG. 4.34 – *Exemple de réservoir*

La structure en réservoir, quant à elle, permet les activations simultanées de plusieurs étapes par le franchissement d'une transition puis la désactivation successives de ces étapes.

CAHIER DES CHARGES 7

On reprend les trois cartons précédents et on désire les évacuer successivement à l'aide d'un vérin suite à l'impulsion d'un bouton (e) par un opérateur.

4.10 Les étapes et transitions sources ou puits

Les *étapes sources* sont des étapes initiales par lesquelles le système ne repasse plus en fonctionnement cyclique ou des étapes simples forcées à l'activation par un grafcet hiérarchiquement supérieur.

Les *étapes puits* sont des étapes qui une fois activées, ne peuvent être désactivées que par un grafcet hiérarchiquement supérieur (ordre de forçage) ou par une mise hors énergie du système.

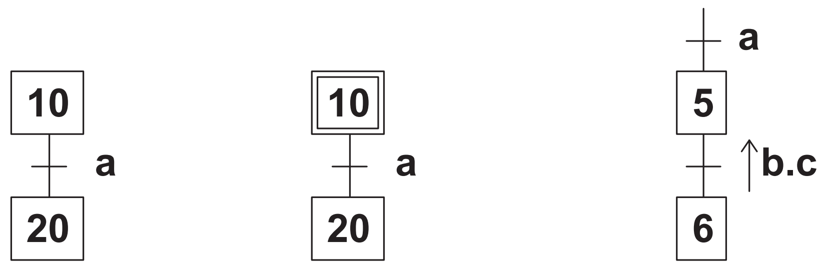


Fig. 4.35 – *Exemple d'étapes sources et d'étape puit*

Une *transition source* est une transition qui ne possède aucune étape amont. Par convention, la transition source est toujours validée et est franchie dès que sa réceptivité est vraie. Les transition sources correspondent à des entrées provoquant l'activation d'une étape du système à un moment quelconque du fonctionnement.

Les *transitions puits* sont des transitions qui désactivent une séquence sans conséquence sur la suite du fonctionnement du système.

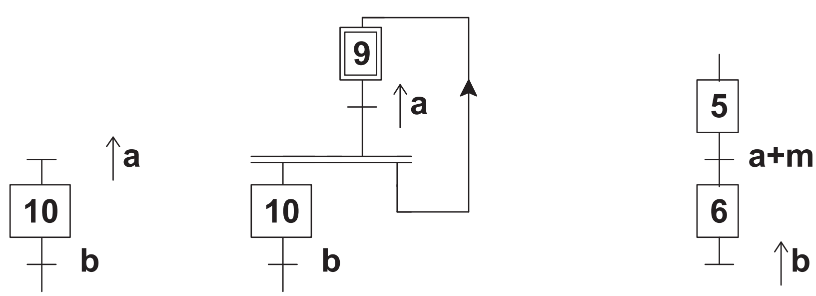


Fig. 4.36 – *Exemple de transition source et de transition puit*

4.11 Les macro-étapes

Afin de rendre la lecture d'un grafcet plus simple, un ensemble unique d'étapes et de transitions peut être remplacé par une macro-étape qui sera détaillée par la suite.

L'expansion d'une macro-étape M* est une partie de grafcet munie d'une étape d'entrée E* et d'une étape de sortie S*. L'étape d'entrée E* devient active lorsque l'une des transitions amont de la macro-étape est franchie. La ou les transitions aval de la macro-étape ne sont validées que lorsque l'étape de sortie S* est active.

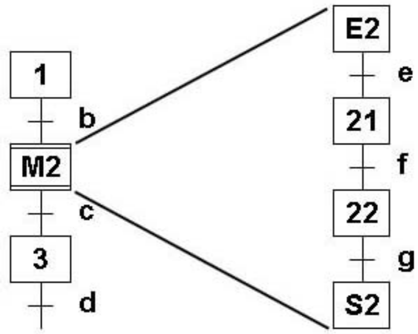


FIG. 4.37 – *Exemple de macro-étape avec son expansion*

Une macro-étape est dite active lorsque l'une au moins de ses étapes est active, elle est conséquemment dite inactive lorsque aucune de ses étapes n'est active. L'état actif ou inactif d'une macro-étape peut être représenté respectivement par les valeurs logiques "1" ou "0" d'une variable XM* (par exemple XM2=1) appelée variable de la macro-étape.

EXEMPLE 13 *Doseur malaxeur automatique*

Un malaxeur N reçoit des produits A et B préalablement dosés par une bascule C et des briquettes solubles amenées une par une par un tapis. L'automatisme décrit ci-dessous permet de réaliser un mélange comportant ces trois produits.

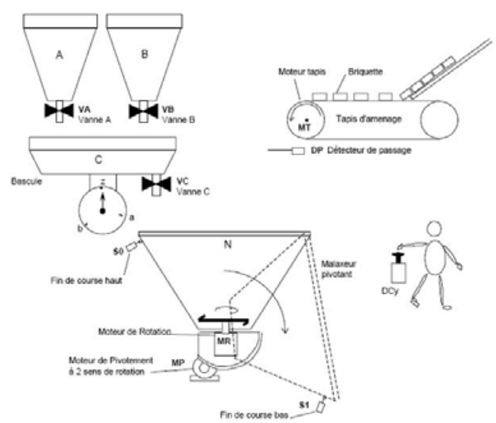


FIG. 4.38 – *Schéma descriptif du système*

L'action sur le bouton "Départ Cycle" provoque simultanément le pesage des produits et l'amenage des briquettes de la façon suivante:

- *dosage du produit A jusqu'au repère "a" de la bascule, puis dosage du produit B jusqu'au repère "b" suivi de la vidange de la bascule C dans le malaxeur;*
- *amenage de deux briquettes.*

Le cycle se termine par la rotation du malaxeur et son pivotement final au bout d'un temps t1, la rotation du malaxeur étant maintenue pendant la vidange.

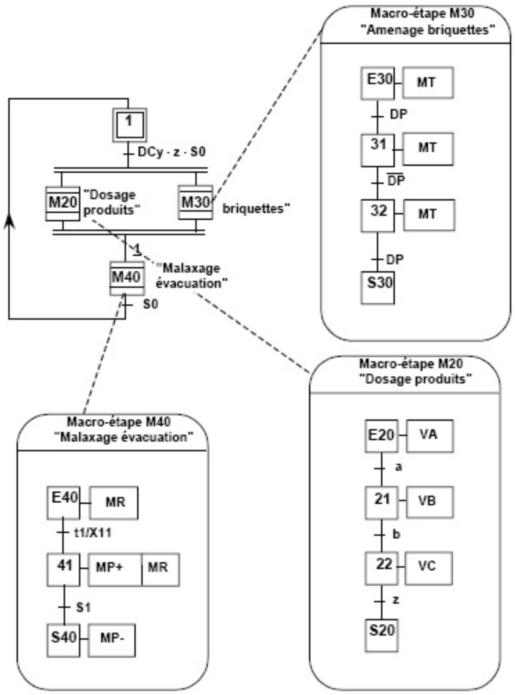


Fig. 4.39 – *Description du système par un grafcet avec des macro-étapes*

4.12 Structuration

Les systèmes automatisés industriels ont un fonctionnement le plus souvent extrêmement répétitif et un simple grafcet[11] permet généralement de décrire ce fonctionnement normal. Malheureusement, il arrive fréquemment pour un système industriel réel qu'un certain nombre d'événements obligent à prévoir un comportement pour le système totalement différent du fonctionnement normal (procédure de réglage, d'arrêt d'urgence, de mise en production ou d'arrêt de production, etc.). La prise en compte de ces différents cas de figure, amène trop souvent à la réalisation de grafcet très complexes, très rapidement illisibles et très certainement incomplets...

Afin de simplifier les grafcets obtenus, le modèle GRAFCET nous propose de décomposer le grafcet en plusieurs parties en fonction des différentes sous-fonctions du système. Nous appellerons les différents grafcets permettant de décrire un même système des *grafcets partiels*. Ils sont englobés dans un *grafcet global*. Ces grafcets partiels sont nommés :

- soit à partir de la fonction décrite par le grafcet (grafcet bouchage),
- soit à partir du numéro de l'étape initiale du grafcet (G20).

Il se peut que plusieurs grafcets soient nécessaires pour caractériser le fonctionnement d'une partie d'un système. Dans ce cas, les différents grafcets composant le grafcet partiel sont appelés *grafcet connexe*.

Cette structuration, peut se limiter à un simple découpage de la spécification ou intégrer des notions de hiérarchie par forçage ou par encapsulation.

11. C'est une façon de parler... Il ne sera pas toujours simple) !

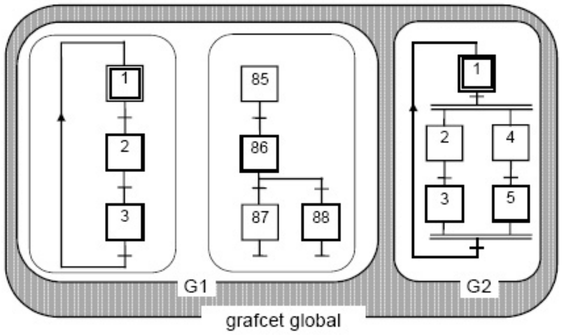


FIG. 4.40 – *Exemple de partitionnement d'un grafcet*

4.12.1 Structuration par forçage

Ce moyen de structuration de la spécification de la partie séquentielle d'un système utilise les ordres de forçage. Ces ordres permettent d'imposer une situation spécifique à un grafcet partiel donné, à partir de la situation d'un autre grafcet partiel.

Le grafcet donnant l'ordre de forçage sera appeler grafcet maître et l'autre, grafcet esclave. Il y a donc une hiérarchisation entre les différents grafcets décrivant le système. L'ordre de forçage est représenté dans un double rectangle associé à l'étape pour le différencier d'une action.

FIG. 4.41 – *Représentation du forçage*

En fonction de l'ordre de forçage apparaissant dans le double rectangle, il est possible de forcé le grafcet G2 dans des situations diverses :

G2{ } : Situation ou le grafcet 2 est totalement désactivé,

G2{ INIT } : Situation initiale du grafcet 2,

G2{ 10 12 } : Situation ou 10 et 12 sont actives et toutes les autres étapes sont inactives,

G2{ * } : Situation actuelle figée pour le grafcet 2 (maintien dans l'état).

REMARQUE 18 *Le forçage est un ordre interne, dont l'exécution est prioritaire sur l'application des règles d'évolution.*

REMARQUE 19 *Le grafcet forcé ne peut pas évoluer tant que dure l'ordre de forçage, on dit alors que le grafcet est figé.*

EXEMPLE 14 *La prise en compte des modes de marche (manuel, automatique et arrêt d'urgence) du doseur malaxeur automatique peut conduire à structurer hiérarchiquement la spécification en utilisant des ordres de forçage.*

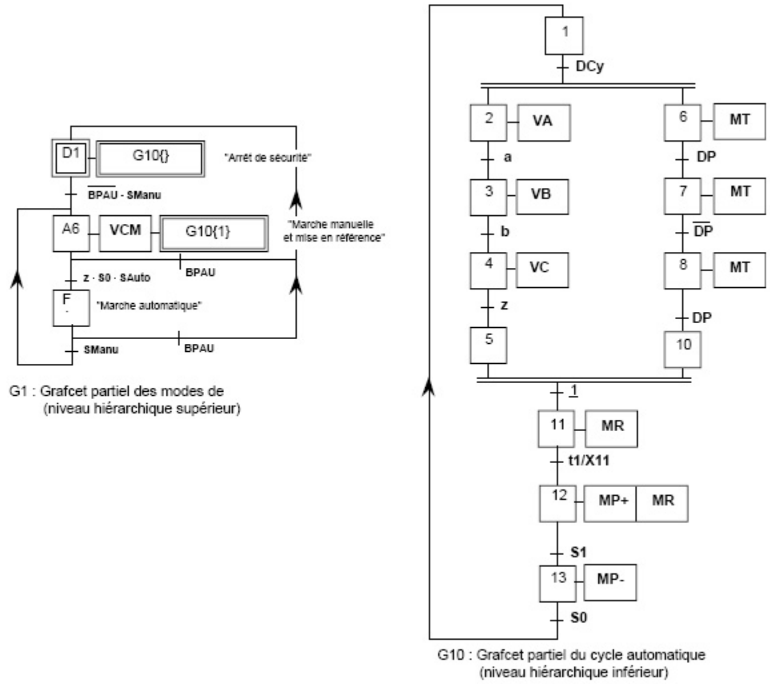


Fig. 4.42 – *Grafcet du système de dosage avec forçage*

4.12.2 Structuration par encapsulation

Il y a encapsulation d'un ensemble d'étapes, dites encapsulées, par une étape dite encapsulante, si et seulement si lorsque cette étape est active, l'une au moins des étapes encapsulées est active.

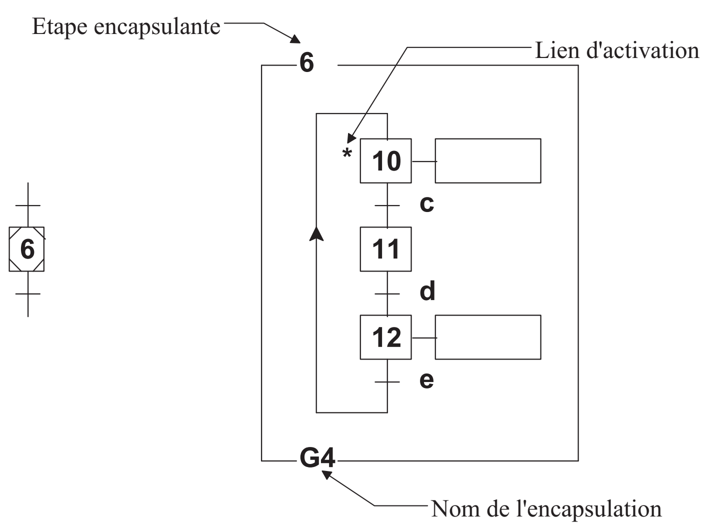


Fig. 4.43 – *Exemple d'étape encapsulante et d'encapsulation*

Une étape encapsulante possède toutes les propriétés de l'étape.

Son encapsulation est un graphe partiel représenté comme ci-dessus, entouré d'un cadre qui porte, en haut le numéro de l'étape encapsulante, en bas son nom. Les étapes actives à l'activation de l'étape encapsulante sont indiquées (à gauche) par un *, appelé lien d'activation. La variable d'état d'une étape appartenant à un grafcet encapsulé sera noté par exemple $X6/X10$.

Une étape encapsulante peut donner lieu à une ou plusieurs encapsulations possédant chacune au moins une étape active lorsque l'étape encapsulante est active et ne possédant aucune étape active lorsque l'étape encapsulante est inactive.

La désactivation de l'étape encapsulante entraîne la désactivation de toutes les étapes actives des encapsulations.

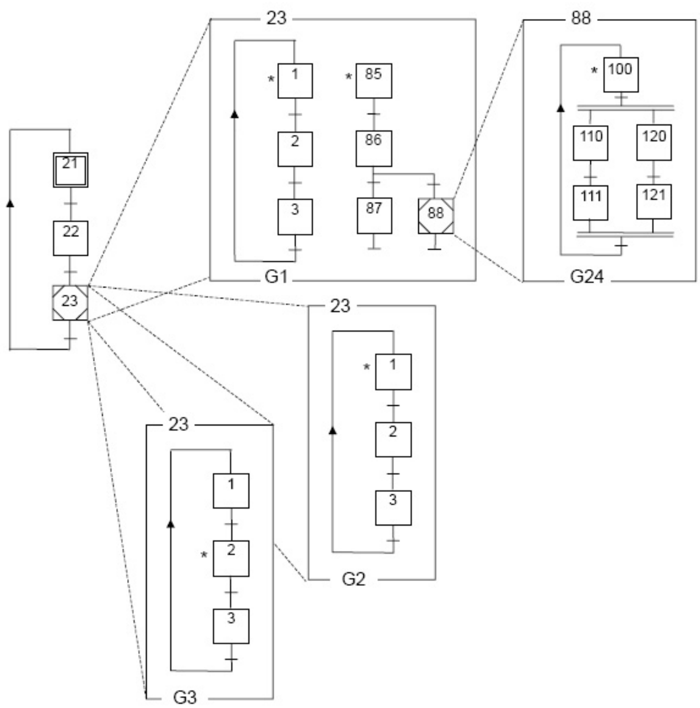


FIG. 4.44 – *Exemple d'encapsulation*

EXEMPLE 15 *L'étape encapsulante 23 possède 3 encapsulations représentées par les grafcets partiels 1, 2 et 3. Le grafcet partiel 24 est encapsulé dans l'étape 88 du grafcet partiel 1. Lorsque l'étape encapsulante 23 est activée, les étapes 1 et 85 de G1 sont également activées (de même pour les autres encapsulations de 23 : G2 et G3). Lorsque l'étape encapsulante 88 est activée, l'étape 100 de G24 est également activée. La désactivation de l'étape 88 provoque celle de toutes les étapes de G24. La désactivation de l'étape 23 provoque celle de toutes les étapes de G1, G2, G3, et de toutes celles de G24 (si l'étape 88 était active).*

4.13 Actions mémorisées

En mode mémorisé, c'est l'association d'une action à des événements internes qui permet d'indiquer qu'une variable de sortie prend et garde la valeur imposée si l'un de ces événements se produit.

La valeur d'une variable de sortie relative à une action mémorisée reste inchangée tant qu'un nouvel événement spécifié ne la modifie pas. On appelle affectation le fait de mémoriser, à un instant donné, la mise à une valeur déterminée d'une variable de sortie.

Règle 6 *Règle d'affectation*

La valeur d'une sortie, relative à une action mémorisée et associée à un événement, est affectée à la valeur indiquée si l'événement interne spécifié se produit; à l'initialisation la valeur de cette sortie est nulle.

4.13.1 Action à l'activation

Une action à l'activation est une action mémorisée associée à l'ensemble des événements internes qui ont chacun pour conséquence l'activation de l'étape liée à cette action. La représentation traditionnelle de l'action par un rectangle est complétée, au côté gauche, d'une flèche symbolisant l'activation de l'étape.

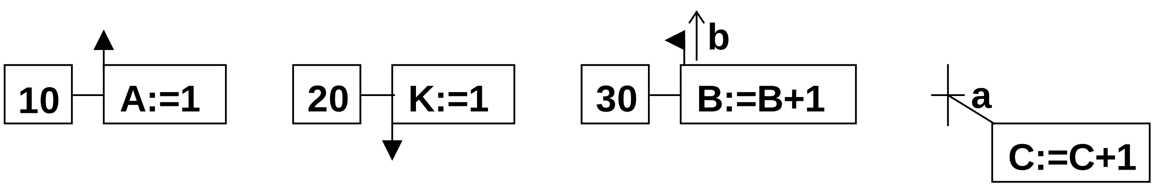


Fig. 4.45 – *Différents types d'actions mémorisés*

4.13.2 Action à la désactivation

Une action à la désactivation est une action mémorisée associée à l'ensemble des événements internes qui ont chacun pour conséquence la désactivation de l'étape liée à cette action. La représentation traditionnelle de l'action par un rectangle est complétée, au côté gauche, d'une flèche symbolisant la désactivation de l'étape.

4.13.3 Action sur événement

Une action sur événement est une action mémorisée associée à chacun des événements internes décrits par l'expression associée, à condition que l'étape, à laquelle l'action est reliée, soit active. La représentation traditionnelle de l'action par un rectangle est complétée, sur le côté haut, d'un symbole indiquant que l'action est conditionnée à l'occurrence d'un des événements internes spécifiés par l'expression associée. Il est impératif que l'expression logique associée, qui doit décrire un ensemble d'événements internes, comporte un ou plusieurs fronts de variables d'entrée.

4.13.4 Action au franchissement

Une action au franchissement est une action mémorisée associée à l'ensemble des événements internes qui ont chacun pour conséquence le franchissement de la transition à laquelle l'action est reliée.

La représentation traditionnelle de l'action par un rectangle est complétée par un trait oblique reliant l'action à la transition.

4.14 Différents points de vue

Un observateur qui s'implique dans le fonctionnement d'un système peut donner trois types de descriptions. Cette dimension de la description est caractéristique du Point de vue.

4.14.1 Point de vue Système (ou Procédé)

Ce premier niveau d'analyse est une approche générale qui porte essentiellement sur l'évolution de la matière d'oeuvre. La description est réalisée en terme de fonctions ou tâches élémentaires et peut rester relativement abstraite. En effet, l'observateur étant extérieur au système, son existence physique n'est donc pas nécessaire.

Le GRAFCET ou Graphe de coordination des tâches permet la description globale du fonctionnement normal à partir de l'enchaînement de tâches symboliques.

Le GEMMA ("Guide d'Étude des Modes des Marches et d'Arrêts") permet la description fonctionnelle des différents modes de marche et d'arrêt.

La définition des tâches étant réalisée, d'autres outils de type algorithmique ou encore des chronogrammes (diagramme de Gantt) permettent ce niveau de description.

4.14.2 Point de vue Partie Opérative (P.O.)

L'observateur s'implique ici dans le comportement attendu de la partie opérative à partir des choix techniques du système. Chaque tâche symbolique ou macro-étape du Graphe de coordination pourra ainsi être décomposée d'un point de vue P.O. Le comportement de la partie opérative pourra être décrit de manière littérale ou symbolique.

FIG. 4.46 – *Exemple illustrant les différents points de vue*

4.14.3 Point de vue Partie Commande (P.C.)

C'est le point de vue de l'automaticien, encore appelé point de vue réalisateur. L'observateur s'implique dans le fonctionnement de la P.C. et décrit les ordres que cette dernière doit émettre pour obtenir les effets attendus au niveau de la P.O. Dans cette description, on fera apparaître tous les signaux émis par la P.O. ou l'opérateur à destination de la P.C. ainsi que toutes les fonctions gérées de manière interne (Tempo, comptage,....).

D'un point de vue P.C., deux descriptions sont envisageables : soit on considère la commande des préactionneurs en fonction des signaux émis par les détecteurs, soit on considère les signaux d'entrée/sortie propres à une technologie de partie commande.

Remarque 20

Plusieurs GRAFCET hiérarchisés et coordonnés permettent de décrire un système :

- *GRAFCET de production normale (un ou plusieurs).*
- *GRAFCET de conduite qui gère les différents modes de marche issus du GEMMA.*
- *GRAFCET de sûreté qui gère les arrêts de sécurité issus du GEMMA.*

En plus du GRAFCET de sureté, certaines sécurités dites cablées font l'objet d'un traitement purement combinatoire.

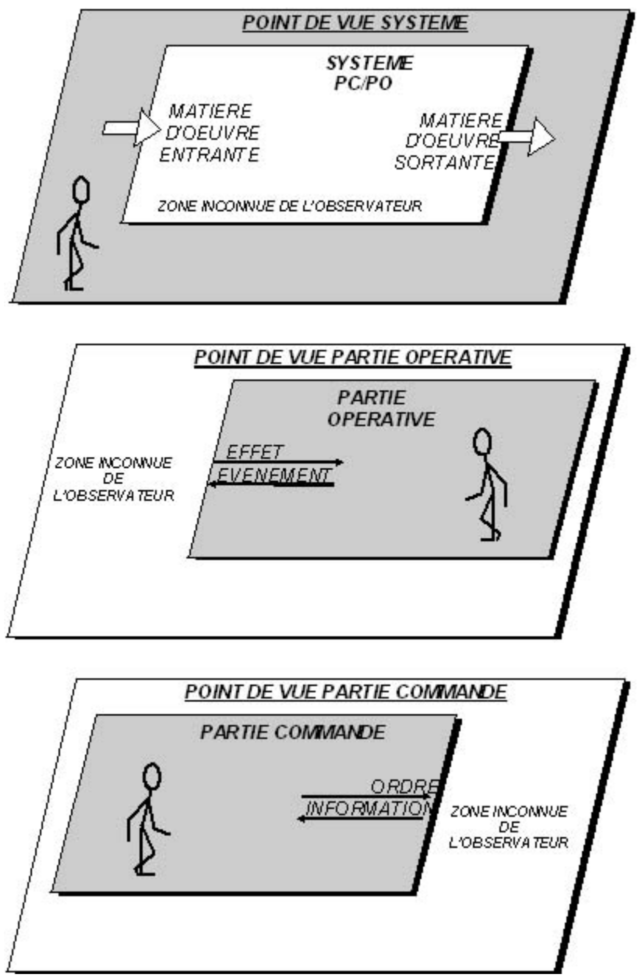


Fig. 4.47 – *Organisation des différents niveaux d'analyse*

Deuxième partie

Automatique

Chapitre 5

Introduction à l'automatique

Nous avons vu dans la partie précédente (Part. I, p. 13) les méthodes permettant de commander un système à partir d'un automatisme (logique combinatoire ou séquentielle). Ce type de commande admet très rapidement un grand nombre de limites pour des systèmes complexes ou surtout pour des systèmes où les grandeurs à commander sont de type analogiques et non pas logiques. Dans le monde industriel, il existe énormément de systèmes basés sur des variables analogiques :

– les régulations de vitesses ou de positions (machine à commande numérique, machines spéciales, robotique),
– les régulations de température, pression, débit associées aux process continus (chimie, agroalimentaire, métallurgie, etc.).

> " L'automatique est la discipline qui étudie les systèmes dynamiques, les signaux et l'information à des fins de conduite et de prise de régulation. Par conduite on entend pilotage de systèmes automatisés. Un système automatisé étant un dispositif formé d'éléments agencés et assurant une fonction déterminée sans intervention humaine. "(EEA, 1994)

Cette définition peut intégrer les systèmes combinatoires et séquentiels. Il est cependant usuel de décomposer les systèmes automatiques en deux ensembles :

– les automatismes, gérés par des parties commandes à signaux logiques combinatoires et séquentiels,
– les systèmes asservis ou asservissements[1], dont les parties commandes gèrent des signaux analogiques (ou numériques), la science d'étude de ces systèmes est appelée "l'automatique".

Une modélisation simple des systèmes asservis est basée sur les systèmes linéaires continus et invariants. Si les concepts liés à l'automatique ont longtemps relevé des seuls domaines de la mécanique, de l'électronique et de l'électromécanique (mécatronique), de l'industrie

1. Asservissement : État de servitude. - Asservir : Réduire à l'esclavage, mettre sous son entière dépendance. - Servitude : État de celui qui est serf, état d'absence de liberté, de soumission totale à un maitre. Grâce à ces définitions, nous comprendrons plus facilement le principe de base du fonctionnement d'un système asservi.

en général. On les rencontre à présent dans tous les domaines où est présente la notion de système (juridique, économique, biologique, etc.) ou dans l'ensemble des objets de la vie courante (lecteur CD, voiture, ordinateur, pilote automatique, etc.).

5.1 Exemple d'introduction

Afin d'introduire l'intérêt d'un système asservi, nous allons considérer un système simple et connu de tous et toutes : la douche...

Cette douche est régulée par l'utilisation d'un mitigeur, afin de simplifier notre exemple, nous nous intéresserons seulement à la régulation de température.

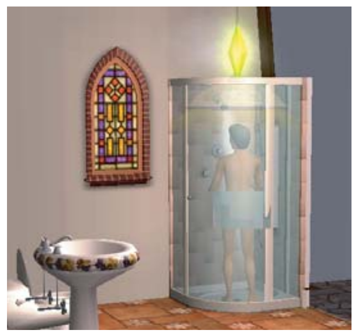


FIG. 5.1 – *Principe de base d'une douche...*

Maintenant, nous allons étudier deux cas, supposons que dans un premier temps, vous preniez votre douche à la piscine du Ouen Toro, après un petit 2000 m 4 nages... La température de la douche (*Consigne*) a été réglée à distance par un employé de la piscine sans aucune possibilité de vérification. Le résultat ne se fait pas attendre, soit vous prenez une douche brûlante, soit vous prenez une douche glaciale (*Observation, Capteur*). Dans ce premier cas, le système n'est pas bouclé, la sortie est observée (votre peau est brûlée au troisième degré ou s'est transformée en glaçon) mais cette observation ne peut influencer le fonctionnement du système.

"On dit alors que le système fonctionne en boucle ouverte."

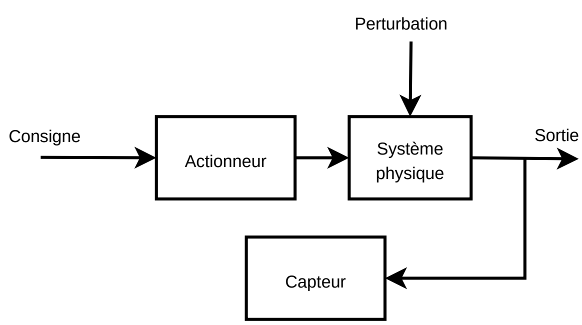


FIG. 5.2 – *Représentation d'un système en boucle ouverte*

Échaudé par cette expérience, mais bien décidé à retirer cette odeur de chlore qui vous colle à la peau, vous rentrez chez vous avec votre toute nouvelle voiture équipée d'un régulateur de vitesse afin d'éviter tout problèmes avec la maréchaussée sur la SAVExpress, mais ceci est un autre problème[2].

Arrivé chez vous, vous plongez sous votre douche, vous ouvrez le robinet côté eau chaude (*Consigne*) et ... L'eau est froide, pourquoi ? Quelle est la raison de ce retard, il provient de deux causes :

- L'eau contenue dans les tuyaux reliant votre magnifique chauffe-eau solaire en inox (X 5 Cr Ni 18-10 pour les intimes) est froide et il faut que tout le circuit se vide avant d'espérer toucher de l'eau chaude, cela correspond à un *retard pur*. Il sera identique quel que soit la consigne de température.
- Les tuyauteries sont froides et mettent un certain temps à se réchauffer[3]. Cela correspond au *temps de réponse* du système.

Lorsque l'eau arrive enfin à une température d'équilibre, elle ne correspond malheureusement jamais à celle désirée[4]. Il vous faut donc changer le réglage du mitigeur afin d'obtenir la bonne température (utilisation de votre pied ou de votre main comme *capteur*, de votre cerveau comme *régulateur* et de votre deuxième main comme *actionneur*).

Lors de l'arrivée d'une *perturbation* (chute de débit), cela entraîne une variation de température (*écart* ou *erreur*), la *chaîne de réaction* permet à nouveau d'ajuster le réglage afin de coller au mieux à la consigne initiale de température.

Dans ce deuxième cas, le système est toujours observé mais l'observation de la sortie permet de faire varier la commande du système afin de mieux coller à la consigne.

> *"On dit alors que le système fonctionne en boucle fermé, c'est un système asservi."*

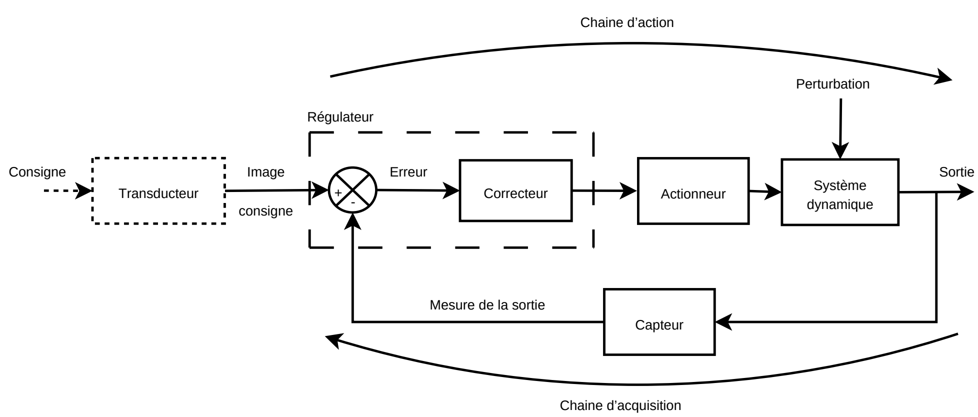


FIG. 5.3 – *Représentation d'un système en boucle fermé*

2. Nous nous y intéresserons un peu plus tard...
3. Votre maîtrise innée des transferts thermiques vous dit que pour réchauffer les tuyaux, il faut enlever des calories à l'eau donc elle vous arrivera toujours froide.
4. Nous trouvons ici un exemple flagrant de la loi de Murphy ou connue aussi sous le nom de LEM. Une loi qui n'est pas au programme de la PTSI, mais vous pouvez vous documenter.

Remarque 21 *Pour chaîne d'action, on parle aussi de chaîne directe. Pour chaîne d'acquisition, on parle aussi de chaîne de retour ou de réaction. L'action d'un système n'est réellement efficace que s'il existe une boucle de rétroaction qui permet de comparer les "buts fixés" (consignes) et les "résultats obtenus" (images sorties) afin d'ajuster l'entrée à la sortie souhaitée. Et tout à coup surgit un truc assez profond : le signal d'entrée (de la chaîne d'action) est modifié par le signal de sortie*[5].

Remarque 22 *Un système dynamique est un système qui possède une mémoire par opposition à un système instantané (rare dans la nature). Cette mémoire est en général assimilée à une inertie (mécanique : un moteur ne monte pas en vitesse de façon instantanée ; thermique : les plaques d'une cuisinière ne changent pas de température dès que vous tournez le bouton ; électrique : un condensateur ne se charge pas de façon instantanée). Cette "mémoire" d'un état antérieur (souvent d'équilibre) fait que la modification d'état, la réponse à une sollicitation ou à une commande ne sont pas instantanées. L'approximation à un système instantané est justifiée lorsque le temps de réponse est très inférieur au temps de transmission de l'information.*

La fin de notre histoire, vous avez décidé suite à tout cela d'acheter un robinet thermostatique afin d'éviter de nouveau problème, ce robinet permet d'effectuer l'ensemble de la régulation de température et regroupe les différents constituants de base d'un asservissement :
- le capteur de température,
- le régulateur (composé d'un comparateur et d'un correcteur),
- le préactionneur et l'actionneur.

5.2 Définitions importantes

Définition 10 *Notion d'asservissement*

Il y a asservissement d'une grandeur de sortie S a une grandeur de consigne E lorsque l'on force, par un dispositif de commande particulier, la grandeur S à suivre les évolutions de la grandeur E, et ce quels que soient les effets perturbateurs extérieurs.

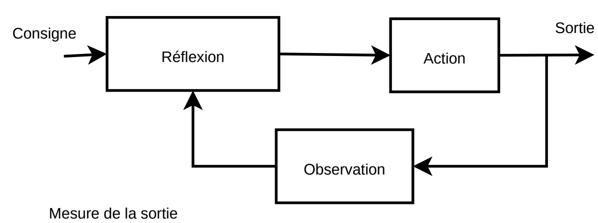


Fig. 5.4 – *Principe général d'un asservissement*

Un système asservi peut se décomposer en différentes fonctions :
- observation de l'état du système : utilisation d'un capteur,

5. C'est cette boucle qui introduit une instabilité éventuelle.

- comparaison, réflexion : l'état mesuré est comparé à la consigne et cela entraîne une éventuelle modification de la commande, l'organe qui réalise cette fonction est appelé régulateur et est composé d'un comparateur et d'un correcteur,
- action : l'actionneur apporte la puissance nécessaire à la réalisation de la tâche à accomplir.

Remarque 23 *Un système asservi est nécessairement :*
- *un système bouclé,*
- *un système comparateur,*
- *un système amplificateur.*

Définition 11 *Régulation*

Une régulation est un système asservi où la consigne est constante et où le but est d'éliminer l'effet des perturbations appliquées au système.

Il existe un grand nombre d'exemples du régulation, nous pouvons citer les régulations de température (climatisation, four, réfrigérateur, process chimiques), les régulations de vitesse (avion, voiture), les régulations de débit (process chimiques), etc.

Exemple 16 *Le régulateur de vitesse*

Nous reprenons donc le cours de notre histoire (p° 77) et nous nous intéressons plus particulièrement au régulateur de vitesse qui équipe un grand nombre de véhicules automobiles actuels[6]*. Le système est constitué principalement d'un capteur de la vitesse du véhicule,*

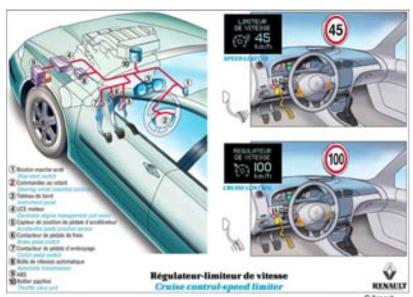


Fig. 5.5 – *Éléments constitutifs d'un régulateur-limiteur de vitesse (doc. Renault)*

placé au niveau d'une roue (couplé éventuellement au détecteur de blocage ABS), ou en sortie de la boite de vitesse, d'un servomécanisme ou actionneur commandant l'accélérateur en prenant le relais de la pédale d'accélérateur (celle-ci "s'enfonce" ou se "relache"), et d'un calculateur. Le système effectue alors seul les corrections du régime moteur en fonction du profil de la route, accélérant dans les côtes et ralentissant en faisant frein moteur dans les descentes. Dans la mesure ou ceci serait insuffisant par dépassement des limites du système il faut bien entendu, soit rétrograder sur le rapport inférieur et le cas échéant freiner par les moyens classiques. Les véhicules les plus récents n'ayant plus de cable d'accélérateur,

6. Inventé en 1945 par l'inventeur et ingénieur mécanicien américain Ralph Teetor, le premier régulateur de vitesse a été installé dans la Chrysler Imperial en 1958. La plupart des véhicules commercialisés aux USA en sont équipés.

c'est le micromoteur de commande des gaz qui est directement commandé par le calculateur général du véhicule, lequel assure désormais de nombreuses autres fonctions en gérant toute l'électronique.

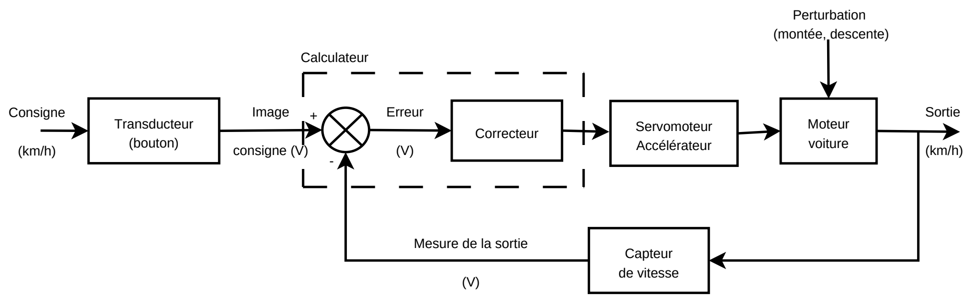


FIG. 5.6 – *Principe d'un régulateur de vitesse*

DÉFINITION 12 *Asservissement ou système suiveur*

Un asservissement ou système suiveur est un système asservi ou la consigne est variable et souvent ses évolutions sont inconnues, l'objectif de ce type de système est que la sortie suive au mieux la consigne d'entrée.

Nous pouvons alors citer comme exemple les asservissements de guidage des missiles, des radars de poursuite, les asservissements de position et/ou de vitesse pour des gouvernes d'avions ou de bateau.

EXEMPLE 17 *Asservissement de position et de vitesse sur MOCN*

La démarche productique dans les entreprises modernes a apporté un certain nombre de contraintes : nécessité de répétabilité (travail en grande série), nécessité de performances en précision (les tolérances exigées pour les pièces à fabriquer sont de plus en plus précises).

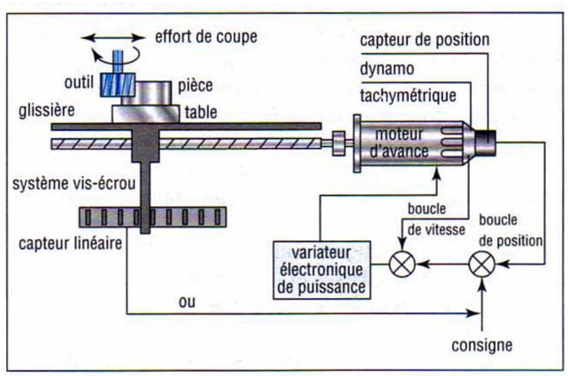


FIG. 5.7 – *Principe de la commande d'axe d'une MOCN*

Ces contraintes ont été prises en compte et ont menées à l'utilisation importante de Machines Outils à Commande Numérique. Ces machines permettent de tenir les tolérances, et ce, sur le long terme car les différents déplacements de la table sont commandés grâce à *deux boucles d'asservissement, une de vitesse et une de position. Ce double asservissement permet de maîtriser parfaitement les différentes évolutions de la table, et ce, malgré les actions mécaniques dues au phénomène de coupe et autres perturbations.*

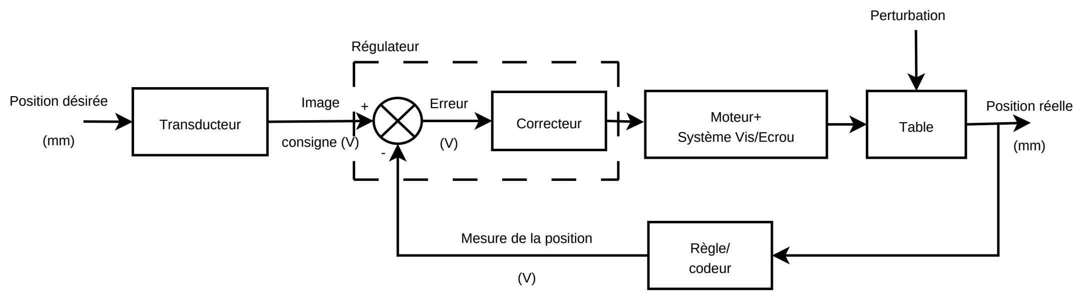


FIG. 5.8 – *Schéma de l'asservissement de position*

5.3 Les performances d'un asservissement

On entend par performances, les critères permettant de caractériser le comportement et donc la sortie (réponse) d'un système asservi. Ce paragraphe a pour but d'imager (qualitativement) ces caractéristiques afin de vous faire "sentir" ce qui va nous intéresser dans les systèmes asservis. La caractérisation quantitative de ces critères sera abordée plus tard dans le cours (en première et en deuxième année).

5.3.1 Précision

La précision est définie principalement par deux grandeurs :
- l'écart statique de position,
- l'écart statique de traînage.

5.3.1.1 Écart statique de position

Le système est soumis à une entrée d'amplitude constante $e(t) = E_0$: cela correspond à une consigne en échelon. La réponse du système atteint une valeur stable au bout d'un certain temps : c'est le régime permanent. La première partie de la réponse correspond au régime transitoire.

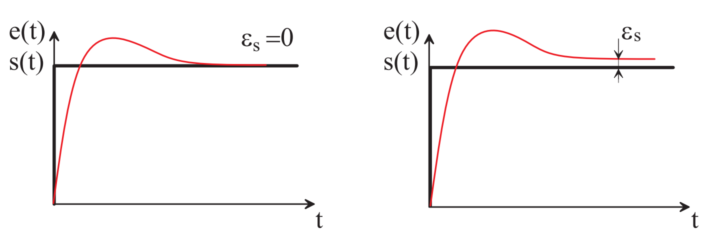


FIG. 5.9 – *Système avec et sans écart statique de position (plus ou moins précis)*

On mesure alors l'écart ε_s entre la consigne (valeur souhaitée) et la valeur atteinte en régime permanent.

5.3.1.2 Écart statique de traînage

Le système est, cette fois, soumis à une entrée d'amplitude variable sous forme d'une droite de pente a : $e(t) = a \cdot t$. Cela correspond à la consigne en rampe. De même que dans le cas de l'entrée en échelon, on mesure l'écart en régime permanent qui est alors ε_v.

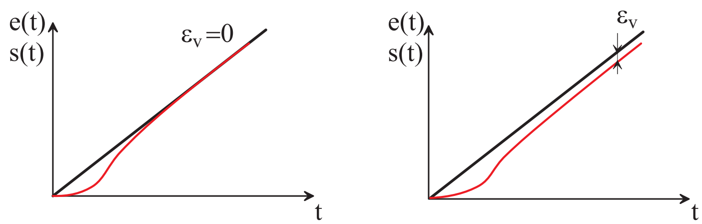


Fig. 5.10 – *Système avec et sans écart statique de traînage (plus ou moins précis)*

L'écart statique de traînage est aussi appelée écart statique de vitesse ou de poursuite.

Très souvent, le cahier des charges impose d'avoir un écart(de position, de poursuite ou les deux) le plus faible possible, voire nul.

5.3.2 Rapidité

La rapidité quantifie le temps à partir duquel le signal de sortie reste dans une bande de + ou -5% par rapport à la valeur finale observée. Ce temps est noté t_r ou $t_{5\%}$ et est appelé temps de réponse à 5%.

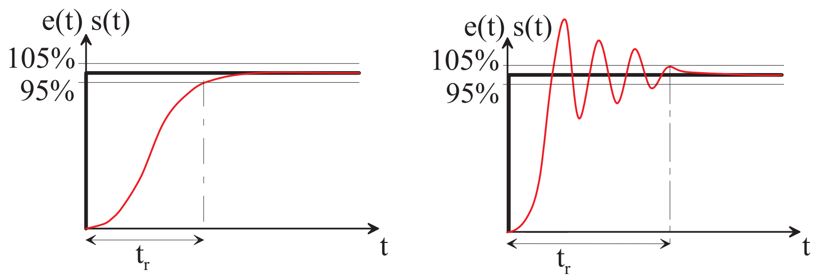


Fig. 5.11 – *Représentation du temps de réponse - rapidité*

Si ce temps est long, le système est dit lent, si ce temps est faible, le système est dit rapide. La rapidité est bien entendu une qualité recherchée pour un système asservi donné.

5.3.3 Stabilité

La stabilité d'un système caractérise sa capacité à converger vers une valeur constante lorsque la consigne est constante, et en l'absence de perturbation.

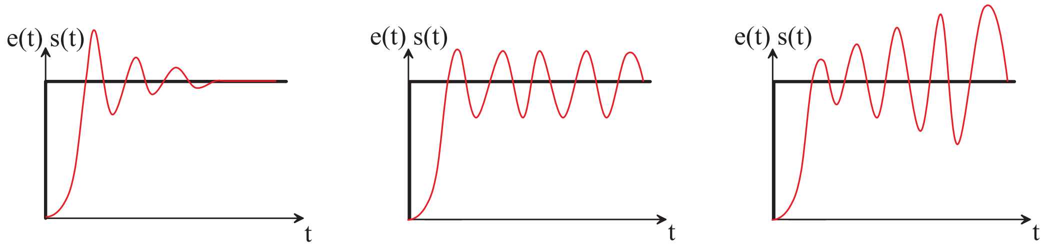


FIG. 5.12 – *Système stable, à la limite de la stabilité, instable*

REMARQUE 24 *Dans le cas ou il y a un problème sur le régulateur ou la commande, la sortie va dériver indéfiniment, elle ne sera donc pas oscillante mais elle sera tout de même instable.*

Si on considère la réponse globale du système comme la somme d'une réponse transitoire et d'une réponse permanente, on peut définir la stabilité en disant que la réponse transitoire du système tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

Ce critère est lui aussi extrêmement important dans la définition de la commande d'un système asservi.

5.3.4 Amortissement - Dépassement

Le dépassement correspond à l'écart qu'il y a entre la valeur maximale de la réponse et la valeur finale de cette réponse (régime stabilisé).

L'amortissement est assez délicat à définir, il pourrait correspondre à la capacité à atteindre rapidement la stabilité ou la capacité à atteindre la consigne avec le moins possible d'oscillations. Cette notion devient beaucoup plus simple à appréhender de manière graphique en s'intéressant à la forme de la réponse.

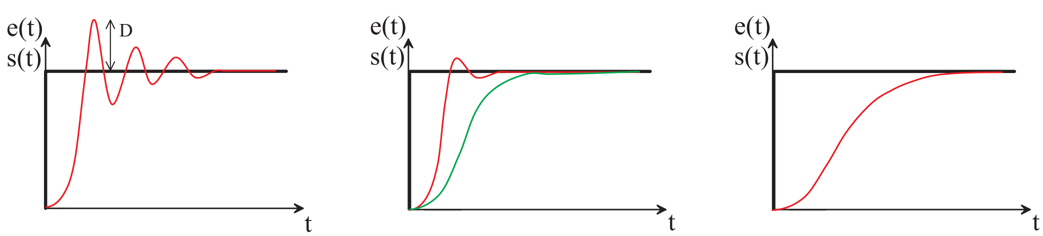


FIG. 5.13 – *Système mal amorti, bien amorti (avec ou sans dépassement) et trop amorti*

Un bon amortissement caractérise la capacité d'un système oscillant à se stabiliser rapidement et à ne pas présenter de dépassement trop important. Cela peut s'illustrer par :

- le premier pic de la réponse ne devra pas excéder une certaine valeur (par exemple 10% de la consigne), faible dépassement,
- le nombre d'oscillations avant la stabilisation devra être faible pour ménager la mécanique en particulier.

5.4 Les correcteurs

Les différentes exigences de rapidité, de stabilité et de précision présentent dans les cahiers des charges des systèmes asservis sont souvent contradictoires. En effet, le fait de vouloir rendre le système plus rapide (augmentation des gains) amène souvent l'instabilité pour le système (liée à la boucle de réaction).

Afin d'améliorer les performances d'un système, on peut lui ajouter un correcteur qui permettra de concilier les différents critères et de tenir les contraintes du cahier des charges.

Ces correcteurs sont le plus souvent mis en série (en cascade) avec le système à corriger, mais ils peuvent certaines fois être positionnés en parallèle ou en boucle de retour.

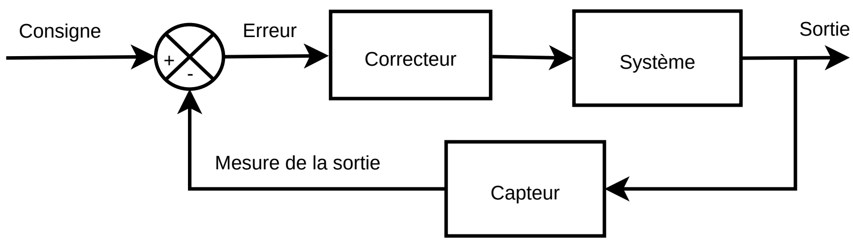


FIG. 5.14 – *Schéma d'un système avec correcteur en série*

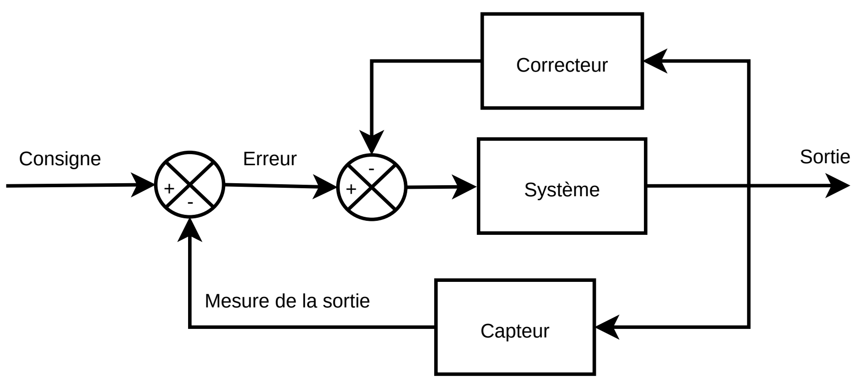


FIG. 5.15 – *Schéma d'un système avec correcteur en parallèle*

Il existe un grand nombre de correcteurs différents basés sur des éléments différents :

- les correcteurs proportionnels (P), qui permettent de diminuer le temps de réponse mais diminuent la stabilité,
- les correcteurs dérivée (D), qui permettent d'augmenter la stabilité,
- les correcteurs intégrale (I), qui permettent de supprimer l'erreur statique,
- un regroupement des correcteurs précédents (PID),
- les correcteurs par avance ou retard de phase...

L'étude de l'effet de certain de ces correcteurs est au programme de deuxième année, pour les autres, il faudra attendre d'intégrer une école d'ingénieurs.

Chapitre 6

Étude des Systèmes Linéaires Continus et Invariants

Le but de ce chapitre est de présenter une modélisation possible des systèmes asservis réels qui nous entourent. Cette modélisation simple est, bien entendu, nécessairement très imparfaite. Néanmoins, c'est la modélisation la plus utilisée, de plus, elle permet de représenter très finement la majorité des systèmes automatiques.

6.1 Explication de texte

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la définition d'un système linéaire continu et invariant. Pour cela, nous allons définir chacun des termes qui composent cette expression.

6.1.1 Système monovariable

Les systèmes réels sont très souvent des systèmes multivariables (guidage d'un missile, système de contrôle d'attitude d'un satellite, pilote automatique d'un avion), l'étude de tels systèmes demande une maîtrise de la résolution des systèmes d'équations différentielles, des systèmes matriciels, de méthode comme la représentation d'état. Ces outils mathématiques n'étant pas encore acquis, nous nous bornerons donc cette année à l'étude des systèmes monovariables, c'est à dire ou il n'y a qu'une entrée et une sortie pour le système considéré.

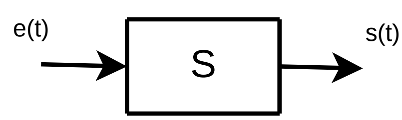


Fig. 6.1 – *Représentation d'un système monovariable*

L'ensemble des propriétés énoncées dans ce cours restent bien entendu valables pour un système multivariable.

Exemple 18 *Le pilote automatique d'un avion est chargé de maintenir l'avion dans une certaine attitude (orientation) et sur une certaine trajectoire. Ce pilote automatique gère* *alors conjointement la position du centre d'inertie et l'orientation du centre d'inertie de cet avion. Il y a donc au minimum 6 consignes en entrée (3 positions, 3 orientations) et autant de sorties. L'ensemble de ces variables sont toutes plus ou moins couplées, il est donc très difficile d'étudier une partie de ce système et de la considérer comme étant monovariable.*

Nous pouvons cependant étudier le pilote automatique longitudinal d'un avion, chargé de maintenir l'assiette à une valeur de consigne, et ce lorsque toutes les autres variables sont constantes (vol en palier).

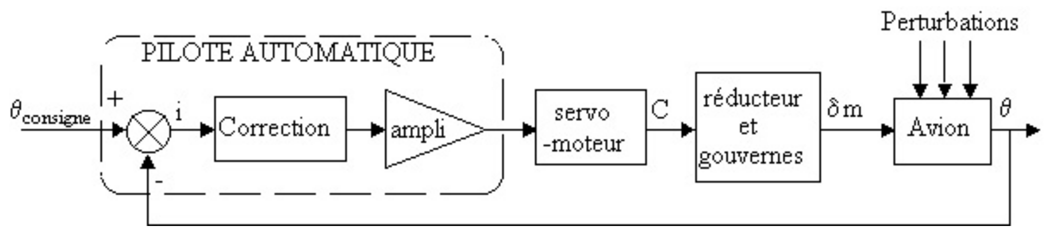


FIG. 6.2 – *Schéma de principe d'une partie d'un PA d'avion*

La représentation de ce système est la suivante :

- *l'entrée principale est l'assiette de consigne.*
- *les entrées secondaires sont des perturbations (turbulences atmosphériques).*
- *la sortie est l'assiette de l'avion.*
- *le comparateur est un gyroscope d'assiette détectant l'écart entre θ et $\theta_{consigne}$, muni d'un potentiomètre dont le zéro correspond à $\theta_{consigne}$ (le courant i issu du potentiomètre est proportionnel à $\theta - \theta_{consigne}$).*
- *ce courant est ensuite remis en forme (correction) et amplifié avant d'aller commander un servomoteur. Ce servomoteur produit un couple induisant, par l'intermédiaire d'un réducteur, un braquage δ_m de la gouverne de profondeur.*
- *le système à commander est l'avion qui, réagissant au braquage de la gouverne, voit son assiette se modifier.*
- *la boucle de retour ramène l'assiette de l'avion au comparateur.*

6.1.2 Système invariant

Un système est dit invariant si ses caractéristiques sont indépendantes du temps.

$$[e(t) \longmapsto s(t)] \Longrightarrow [e(t-\tau) \longmapsto s(t-\tau)] \tag{6.1}$$

Ainsi, si la réponse d'un système invariant à une entrée de type échelon appliquée à l'instant $t = 0$ est de la forme suivante : alors, sa réponse à une entrée de type échelon appliquée à l'instant τ (quelconque) sera la même.

Cela veut tout simplement dire que notre système ne vieillit pas, les propriétés ainsi que les caractéristiques intrinsèques au système ne dépendent pas du temps.

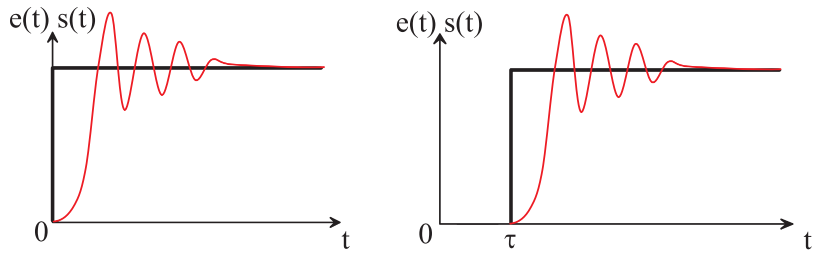


Fig. 6.3 – *Système invariant*

6.1.3 Système continu

Un système est dit *continu* si les signaux qu'il reçoit et transmet sont continus et mesurables à tout instant. On parle aussi de système analogique.

Si ces signaux ne sont mesurés que périodiquement (tous les kT) et considérés comme nuls hors des instants de mesure, le système est dit *continu échantillonné*. Cela correspond à l'utilisation de calculateurs numériques comme régulateurs. Le fait d'avoir un système continu et une partie commande discrète nous oblige à utiliser des convertisseurs analogiques numériques (CAN) ainsi que des convertisseurs numériques analogiques (CNA) afin d'effectuer l'interface entre les deux parties du système étudié.

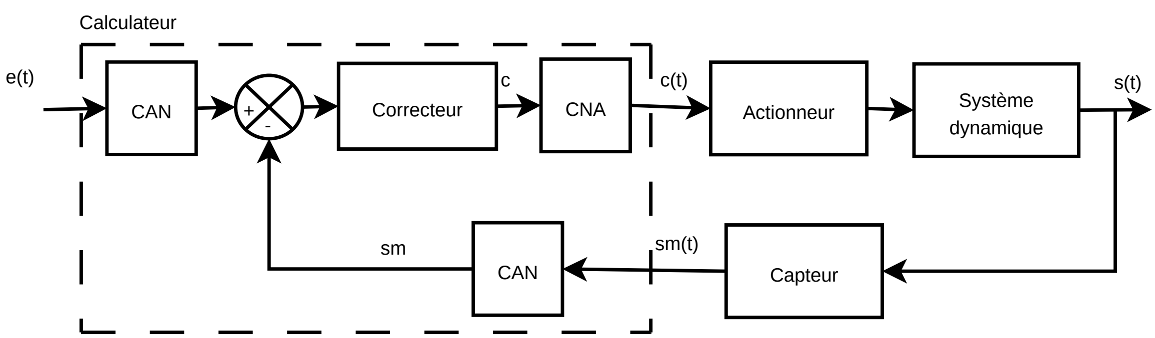


Fig. 6.4 – *Exemple de système échantillonné*

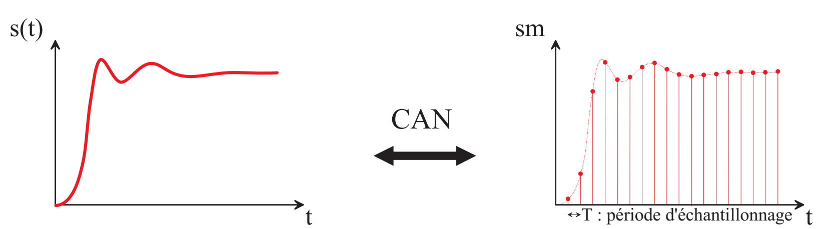


Fig. 6.5 – *Principe du convertisseur analogique numérique*

L'étude de ce type de système s'effectue grâce à des outils différents (transformée en z) par rapport à l'étude des systèmes continus. Cette théorie ne fait pas l'objet du cours d'automatique de prépa...

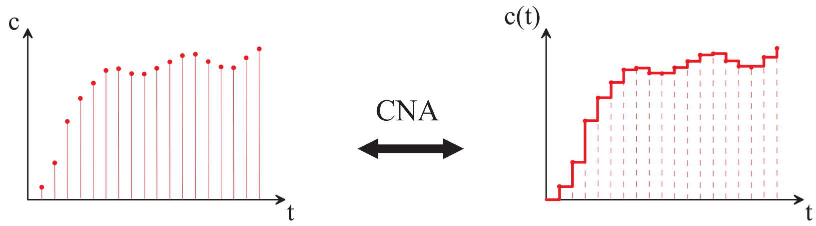


FIG. 6.6 – *Principe du convertisseur numérique analogique*

6.1.4 Système linéaire

Un système est dit *linéaire* s'il est régi par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Cette propriété est une propriété purement mathématique.

Un tel système possède les deux propriétés suivantes, qui forment ce que l'on appelle le principe de superposition :

- l'additivité,
- l'homogénéité.

6.1.4.1 Homogénéité

Un système est dit homogène si à une entrée $e(t)$ correspond la sortie $s(t)$, alors à une entrée $\lambda \cdot e(t)$ correspond la sortie $\lambda \cdot s(t)$.

6.1.4.2 Additivité

Si la réponse à $e_1(t)$ est $s_1(t)$ et si la réponse à $e_2(t)$ est $s_2(t)$, alors la réponse à $e_1(t) + e_2(t)$ est $s_1(t) + s_2(t)$.

REMARQUE 25 *Un système composé de plusieurs sous-systèmes est linéaire si tous ses sous-systèmes sont linéaires.*

REMARQUE 26 *Les systèmes physiques à étudier ne sont jamais parfaits. Les éléments les constituant présentent très souvent des phénomènes de non-linéarité (courbures de caractéristiques, saturations, seuils, hystérésis).*

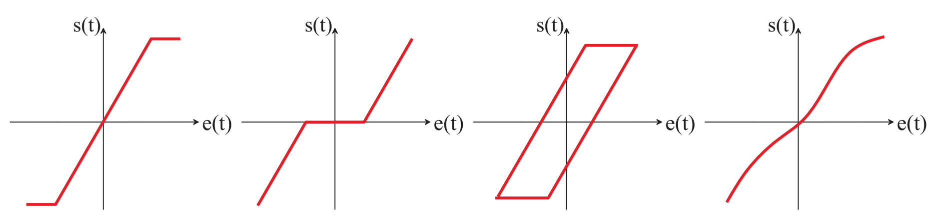


FIG. 6.7 – *Différentes non linéarités*

La mise en équation de ces systèmes conduit donc généralement à des modèles hautement non-linéaires.

Néanmoins, dans la plupart des cas, on peut se ramener, par des hypothèses simplificatrices, à des modèles linéaires, en étudiant par exemple uniquement un domaine de fonctionnement précis.

6.2 Fonctions d'entrée classiques

Les entrées auxquelles sont soumis les systèmes asservis sont quelconques (aléatoires ou déterministes selon que le hasard intervient ou non). Il faudrait donc en toute rigueur faire appel à des méthodes statistiques pour étudier les performances de ces systèmes. Or, ces méthodes conduisent à des techniques d'une application relativement délicate.

C'est pourquoi, dans la pratique, on mesure les performances d'un système asservi sur les réponses qu'il fournit à un certain nombre d'entrées-type (de même qu'en psychologie appliquée, on caractérise un individu par ses réactions à des stimuli normalisés).

Ces entrées-type sont au nombre de quatre :

– l'entrée de type échelon,
– l'entrée de type rampe,
– l'entrée de type impulsion,
– l'entrée de type harmonique.

Souvenez-vous qu'une consigne ne correspond à rien d'autre qu'une grandeur physique (position, vitesse, accélération, T°C, etc.) dont on fixe les valeurs à atteindre par le système à chaque instant.

6.2.1 L'échelon

L'entrée de type échelon est de la forme :

$$e(t) = e_0 \cdot u(t) \tag{6.2}$$

où $u(t)$ est la fonction échelon unitaire, également appelée fonction de Heaviside[1]. Cette fonction est définie pour $t \neq 0$ par :

$$\begin{cases} \forall t < 0; \quad u(t) = 0 \\ \forall t > 0; \quad u(t) = 1 \end{cases} \tag{6.3}$$

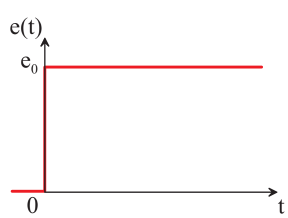


Fig. 6.8 – *Entrée de type échelon*

La réponse d'un système à une entrée de type échelon est appelée réponse indicielle ou réponse unitaire (si $e_0 = 1$). Elle caractérise un changement d'état (régulation de température, de pression, de débit, etc.).

1. Oliver Heaviside (18 mai 1850 - 3 février 1925) était un physicien britannique autodidacte.

6.2.2 La rampe

L'entrée de type rampe est de la forme :

$$e(t) = \alpha \cdot t \cdot u(t) \tag{6.4}$$

Cette entrée correspondant à une commande de vitesse constante, on parle aussi d'entrée en échelon de vitesse. Elle est définie à partir de l'échelon unitaire $u(t)$.

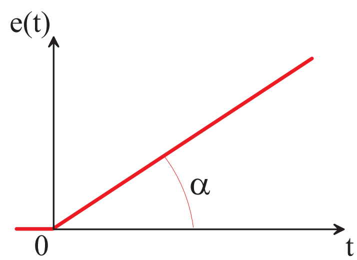


FIG. 6.9 – *Entrée de type rampe*

La réponse d'un système à une entrée de type rampe est appelée réponse à un échelon de vitesse.

REMARQUE 27 *Une variante également utilisée est la consigne dite en trapèze qui est à une combinaison de rampes (souvenir de TP).*

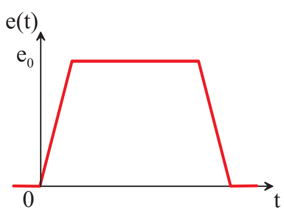


FIG. 6.10 – *Entrée en trapèze*

6.2.3 L'entrée impulsionnelle

Considérons la fenêtre rectangulaire représentée ci-dessous. L'aire est égale à 1. Une manière pratique de définir l'impulsion de Dirac est de considérer la limite de cette fenêtre rectangulaire lorsque T tend vers 0.

$\delta(t)$ est la fonction impulsion unitaire, aussi appelée impulsion de Dirac[2]. Elle possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall t \neq 0 & \delta(t) = 0 \\ t = 0 & \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = 1 \end{cases} \tag{6.5}$$

2. Paul Adrien Maurice Dirac est un physicien et mathématicien britannique (1902-1984), il est l'un des pères de la mécanique quantique et reste célèbre pour avoir prévu l'existence de l'antimatière (positron). Pour les besoins du formalisme quantique, Dirac a introduit un objet singulier, qu'on appelle aujourd'hui impulsion de Dirac, notée $\delta(t)$.

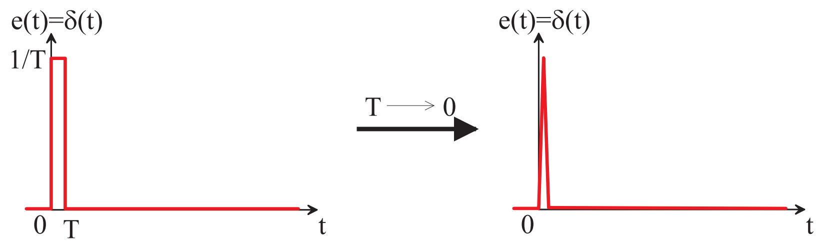


FIG. 6.11 – *Impulsion de Dirac*

La réponse d'un système à une entrée de type impulsion est appelée réponse impulsionnelle. Elle permet de caractérisé le comportement du système face à un choc ou à un parasite.

REMARQUE 28 *on peut considérer l'impulsion unitaire comme la dérivée de l'échelon unitaire :*

$$\delta\left(t\right)=\frac{d}{dt}u\left(t\right)$$

La réponse impulsionnelle d'un système est donc la dérivée de sa réponse indicielle.

6.2.4 La sinusoïde ou entrée de type harmonique

L'entrée de type harmonique est de la forme :

$$e\left(t\right)=e_0\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\varphi\right)\cdot u\left(t\right) \tag{6.6}$$

avec

- e_o l'amplitude,
- ω la pulsation (exprimée en radians/s),
- φ la phase (exprimée en radians).

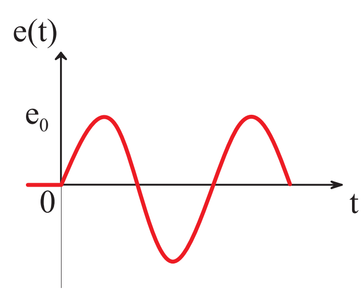


FIG. 6.12 – *Entrée de type sinusoïdale*

Elle est également définie à partir de l'échelon unitaire.

La réponse d'un système à une entrée harmonique est appelée réponse harmonique ou réponse fréquentielle.

Remarque 29 *Cette entrée est très utilisée pour les systèmes électriques car elle permet de déterminer le comportement du système en fonction des fréquences qui lui sont appliquées. En mécanique, cette entrée est rarement utilisée, sauf pour des études théoriques de la stabilité d'un système.*

6.3 Modèle de comportement et modèle théorique

Lorsque l'on est confronté à l'étude d'un système automatique et que l'on désire modéliser mathématiquement son fonctionnement, il y a deux méthodes possibles pour déterminer l'équation différentielle caractérisant le fonctionnement de ce système, on peut :

- soit créer un modèle de comportement,
- ou créer un modèle théorique.

6.3.1 Modèle théorique

L'étude d'un système asservi passe toujours par l'élaboration initiale d'un modèle mathématique. Afin de déterminer de manière théorique le modèle mathématique associé à un système donné, on utilise le modèle mathématique connu associé à chaque sous-ensemble composant le système considéré (actionneur, capteur, système mécanique ou électronique). Il reste alors à les regrouper afin d'obtenir l'équation différentielle générale permettant de modéliser ce système. La mise en place de ce type de modèle demande de maîtriser parfaitement les différentes lois de la physique (électricité, électronique, mécanique, hydraulique, etc.), on parle alors de *modèle de connaissance.*

On parle de *modélisation d'un système.*

Exemple 19 *Étude d'un circuit RC*

Soit le circuit électrique défini sur le schéma ci-dessous.

On désire déterminer un modèle mathématique (équation différentielle) pour ce système.

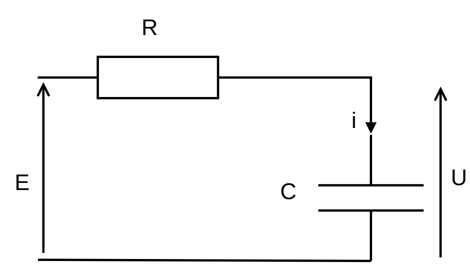


Fig. 6.13 – *Exemple de circuit RC*

Le modèle physique est très simple dans ce cas :

$$E = R \cdot i + U \qquad i = C \cdot \frac{dU}{dt}$$

En composant ces deux équations, on obtient :

$$E(t) = U(t) + RC \cdot \frac{dU(t)}{dt}$$

Nous trouvons alors une équation différentielle du premier ordre correspondant à un système dit du "premier ordre".

Le modèle théorique sera nécessairement très précis mais aussi très complexe, difficile à manipuler et nécessite souvent des simplifications ou des linéarisations afin d'obtenir un modèle plus exploitable.

6.3.2 Modèle de comportement

Afin de déterminer un modèle de comportement pour un système donné, on s'intéresse à la réponse temporelle ou fréquentielle de ce système.

On soumet le système à une ou à plusieurs entrées usuelles (rampe, dirac, échelon, etc.) et on compare la réponse du système à un catalogue de réponses types (1° ordre, 2° ordre, retard, etc.).

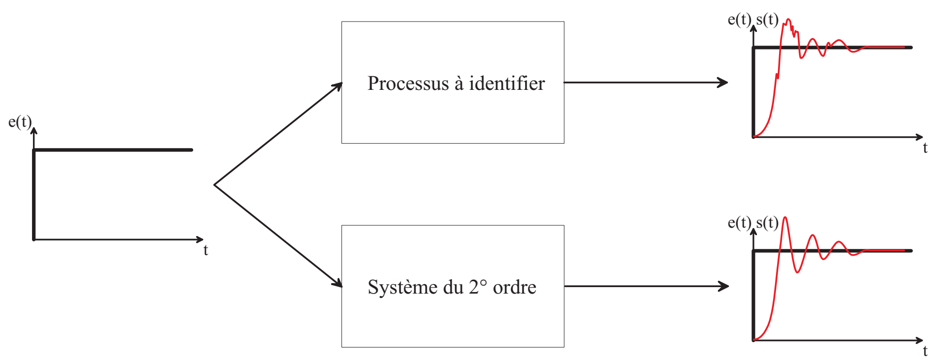


FIG. 6.14 – *Détermination d'un modèle de comportement*

On cherche donc dans ce cas là à identifier le comportement du système et donc à identifier le modèle mathématique s'approchant le plus du système réel étudié, on parle dans ce cas là d'*identification*.

La grande différence entre la modélisation et l'identification réside dans le fait que dans le premier cas, le système est parfaitement connu, alors que dans le second, le système est supposé totalement inconnu (on le remplace par une boite noire) et on ne connaît que ses entrées et sorties.

Le modèle de comportement est nécessairement approché mais il est toujours plus simple à manipuler.

6.4 Équations différentielles

Lorsque la modélisation mathématique du système a été réalisée, nous nous trouvons en présence d'une équation différentielle d'ordre n, qui traduit les relations qui existent entre son entrée $e(t)$ et sa sortie $s(t)$.

Pour déterminer la réponse du système à une entrée $e(t)$ donnée, il faut intégrer cette équation différentielle que l'on peut écrire de façon générale sous la forme :

$$a_0 \cdot s(t) + a_1 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + \cdots + a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 \cdot e(t) + b_1 \cdot \frac{de(t)}{dt} + \cdots + b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} \quad (6.7)$$

Les systèmes étudiés étant linéaires, les différents coefficients a_i et b_j sont nécessairement constants.

Dans le cadre du programme, on se limitera aux premier et second ordres :

– équation différentielle du premier ordre (généralisée) :

$$a_0 \cdot s(t) + a_1 \cdot \frac{ds(t)}{dt} = b_0 \cdot e(t) + b_1 \cdot \frac{de(t)}{dt} \quad (6.8)$$

– équation différentielle du deuxième ordre (généralisée) :

$$a_0 \cdot s(t) + a_1 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = b_0 \cdot e(t) + b_1 \cdot \frac{de(t)}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2 e(t)}{dt^2} \quad (6.9)$$

Exemple 20 *Le moteur à courant continu (actionneur de référence)*

On s'intéresse à un moteur à courant continu et on cherche à déterminer les équations différentielles caractérisant ce système. On note L, l'inductance de l'induit et R la résistance de l'induit du moteur, J le moment d'inertie axial du moteur.

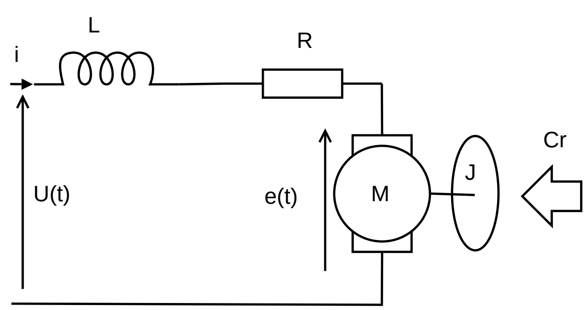


Fig. 6.15 – *Modélisation d'un moteur à courant continu*

Il y trois types d'équations :

– *les équations électromécaniques (dites aussi de couplage) :*
Fcem (force contre électromotrice) proportionnelle à ω :

$$e(t) = K_e \cdot \omega(t) \quad \text{avec } K_e \text{ constante électrique}$$

Couple proportionnel à $i(t)$:

$$C_m(t) = K_c \cdot i(t) \quad \text{avec } K_c \text{ constante de couple}$$

– *les équations électriques :*

$$U(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + e(t)$$

– *les équations mécaniques :*
On applique le Principe Fondamental de la Dynamique en projection suivant l'axe du moteur :

$$C_m(t) - C_f(t) - C_r(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt}$$

avec $Cf(t)$ les frottements visqueux :

$$C_f(t) = K_d \cdot \omega(t) \quad \textit{avec } K_d \textit{ constante de couple de frottements visqueux}$$

et $C_r(t)$ le couple récepteur intervenant comme une perturbation.

Nous voyons sur l'exemple précédent (bien que très simple[3]) que le passage d'un système d'équations à une équation différentielle simple n'est pas trivial. D'autre part, il faut ensuite résoudre cette équation différentielle générale, dans le cas d'une équation différentielle du second ordre, nous savons que la solution de l'équation générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et d'une solution particulière.

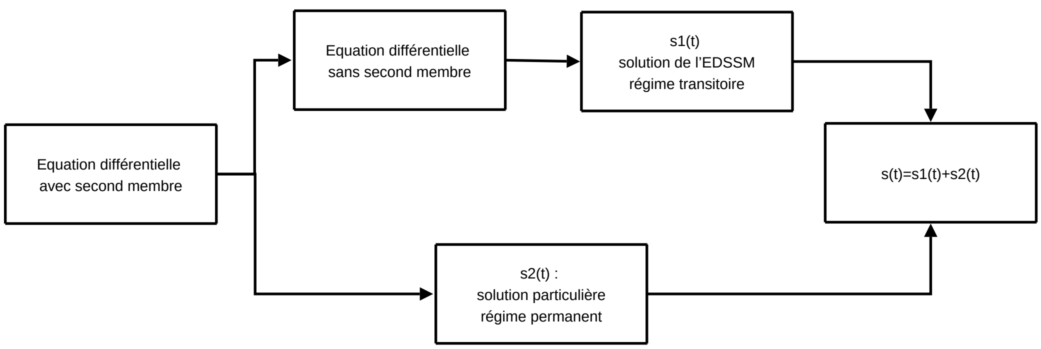


FIG. 6.16 – *Principe de résolution classique d'une équation différentielle*

Ces méthodes sont très souvent longues et laborieuses, en automatique, nous utiliserons une autre méthode plus rapide basée sur l'utilisation d'un nouvel outil mathématique appelé *Transformée de Laplace*. L'idée de base est de transformer nos équations différentielles en polynômes, de résoudre, puis de faire la transformation inverse pour revenir au domaine temporel.

6.5 La transformée de Laplace

Nous utiliserons la *transformée de Laplace*[4] comme un outil, nous ne sommes pas là pour démontrer les propriétés de cette transformation. Nous utiliserons des tables de transformation, les transformées usuelles finiront par être connues !

3. Gloops...
4. Marquis Pierre Simon de Laplace (1749-1827), astronome, mathématicien et physicien français.

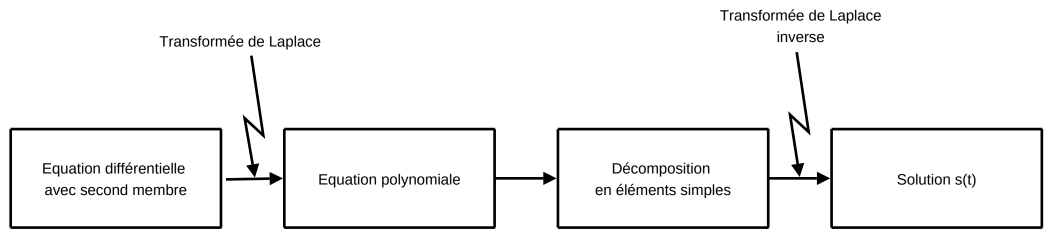


FIG. 6.17 – *Principe de résolution par la transformée de Laplace d'une équation différentielle*

La définition et les propriétés qui suivent existent sous certaines conditions qui sont vérifiées pour les fonctions courantes que vous utiliserez (croyez moi sur parole !).

Cette transformée mathématique nous permettra non seulement de résoudre de manière simple et élégante[5] des équations différentielles, mais elle nous permettra aussi d'introduire une fonction appelée "fonction de transfert" ou "transmitance". Grâce à cette fonction, nous pourrons déterminer les caractéristiques d'un système asservi sans avoir besoin de résoudre l'équation différentielle le caractérisant.

6.5.1 Définition

Soit une fonction $f(t)$ telle que $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

La transformée de Laplace de cette fonction $f(t)$ est définie par :

$$f(t) \overset{\mathcal{L}}{\longmapsto} \mathcal{L}\left(f(t)\right) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt$$

ou p est une variable complexe quelconque ($p \in \mathbb{C}$).

6.5.2 Propriétés

Nous allons énoncer dans cette partie un certain nombre de propriétés des transformées de Laplace. Bien entendu, nous ne chercherons pas à démontrer ces propriétés, les professeurs

5. Ce sont les mathématiciens qui le disent, ce n'est malheureusement pas toujours vrai !

de mathématiques s'en chargeront bien assez tôt...

Propriétés importantes	Temporel $f(t)$	Laplace $\mathcal{L}\left(f(t)\right) = F(p)$
Linéarité	$[a \cdot f\,(t) + b \cdot g\,(t)] \cdot u\,(t)$	$a \cdot F\,(p) + b \cdot G\,(p)$
Dérivé première	$\dfrac{df(t)}{dt} \cdot u\,(t)$	$pF\,(p) - f(0^+)$
Dérivé seconde	$\dfrac{d^2f(t)}{dt^2} \cdot u\,(t)$	$p\big(pF\,(p) - f(0^+)\big) - f'(0^+)$
Intégration	$g(t) = \displaystyle\int_0^t f(x) \cdot dx \cdot u\,(t)$	$\dfrac{F(p)}{p} + \dfrac{g(0^+)}{p}$
Théorème du retard	$f\,(t - \tau)$	$e^{-p\tau} \cdot F(p)$
Facteur d'échelle	$f(at) \cdot u\,(t)$	$\dfrac{1}{a} \cdot F\left(\dfrac{p}{a}\right)$

Propriétés importantes	Temporel $f(t)$	Laplace $\mathcal{L}\left(f(t)\right) = F(p)$
Amortissement	$e^{-at} \cdot f(t)$	$F\,(p + a)$
Théorème de la valeur initiale	$\lim\limits_{t \to 0} f(t) = \lim\limits_{p \to \infty} p \cdot F(p)$	
Théorème de la valeur finale	$\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \lim\limits_{p \to 0} p \cdot F(p)$	

Remarque 30 *La transformée de Laplace d'un produit n'est pas le produit des transformées de Laplace. En effet, on peut définir le produit de convolution par :*

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u) \cdot g(t - u)du$$

La transformée de Laplace du produit de convolution est le produit des transformée de Laplace.

$$\mathcal{L}\left(f(t) * g(t)\right) = F(p) \cdot G(p)$$

6.5.3 Table de transformée

Nous trouverons ci-dessous les transformées des fonctions usuelles.

$f(t) \cdot u(t)$	$F(p)$	$f(t) \cdot u(t)$	$F(p)$
Dirac $\delta(t)$	1	Échelon $K \cdot u(t)$	$\frac{K}{p}$
Rampe $Kt \cdot u(t)$	$\frac{K}{p^2}$	$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$\sin \omega t \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\cos \omega t \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sinh \omega t \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	$\cosh \omega t \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$e^{-at} \cdot \sin \omega t \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \cdot \cos \omega t \cdot u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{t^n \cdot e^{-at}}{n!} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^{n+1}}$
$\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot u(t)$	$\frac{1}{p\,(1+\tau p)}$	$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(1+\tau p)}$
$\left(t-\tau+\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2\,(1+\tau p)}$	$\frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(1+\tau p)^2}$

Et maintenant, celles qui sont un peu moins usuelles...

$f(t) \cdot u(t)$	$F(p)$
$\left(t - 2\tau + (t + 2\tau)\, e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot u(t)$	$\dfrac{1}{p^2\,(1+\tau p)^2}$
$\left(1 - \dfrac{t+\tau}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot u(t)$	$\dfrac{1}{p\,(1+\tau p)^2}$
$\dfrac{1}{\tau - \nu}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\nu}}\right) \cdot u(t)$	$\dfrac{1}{(1+\tau p)\,(1+\nu p)}$
$\left[1 + \dfrac{1}{\tau - \nu}\left(\tau e^{-\frac{t}{\tau}} - \nu e^{-\frac{t}{\nu}}\right)\right] \cdot u(t)$	$\dfrac{1}{p\,(1+\tau p)\,(1+\nu p)}$
$\left[t - (\tau + \nu) + \dfrac{1}{\tau - \nu}\left(\tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}} - \nu^2 e^{-\frac{t}{\nu}}\right)\right] \cdot u(t)$	$\dfrac{1}{p^2\,(1+\tau p)\,(1+\nu p)}$
$\left[\dfrac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t\right)\right] \cdot u(t)$	$\dfrac{1}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$ et $\xi < 1$
$\left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t + \psi\right)\right] \cdot u(t)$	$\dfrac{1}{p\left(1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2\right)}$ $\xi = \cos\psi$ $\xi < 1$

6.6 Fonctions de transfert ou transmittance

Pratiquement, tous les systèmes que nous étudierons répondront à un système d'équations différentielles à coefficients constants du type :

$$a_0 \cdot s\,(t) + a_1 \cdot \frac{ds\,(t)}{dt} + \cdots + a_n \cdot \frac{d^n s\,(t)}{dt^n} = b_0 \cdot e\,(t) + b_1 \cdot \frac{de\,(t)}{dt} + \cdots + b_m \cdot \frac{d^m e\,(t)}{dt^m} \tag{6.10}$$

Dans la mesure où l'on s'intéresse aux propriétés de stabilité des systèmes, les conditions initiales nous importent peu. En général, on part d'un état stable et on regarde la réaction à un stimulus. Avec les conditions initiales dites de Heaviside (conditions initiales nulles : changement de variable si nécessaire), l'équation obtenue suite à l'application de la transformée de Laplace est :

$$[a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n] \cdot S(p) = [b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^n m] \cdot E(p) \tag{6.11}$$

Ce qui conduit à :

$$S(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n} \cdot E(p) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum_{j=0}^{n} a_j p^j} \cdot E(p) = H(p) \cdot E(p) \tag{6.12}$$

$H(p)$ est appelée fonction de transfert ou transmittance du système, elle est obtenue pour des conditions initiales nulles et telle que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n} = \frac{N(p)}{D(p)} \tag{6.13}$$

Remarque 31

- *La fonction de transfert caractérise le système indépendamment de l'entrée appliquée et des conditions initiales. Elle est propre au système.*
- *Les zéros du système sont les valeurs de p qui annulent $N(p)$.*
- *Les pôles du système sont les valeurs de p qui annulent $D(p)$.*
- *La fonction de transfert correspond à la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle.*

6.6.1 Résolution d'équation différentielle

Le principe est donc simple, une fois que l'on a $H(p)$, lorsque l'on recherche la réponse d'un système à une entrée donnée $e(t)$, on calcule la transformée de Laplace de $e(t)$: $E(p)$. On trouve aisément $S(p) = H(p) \cdot E(p)$. Il ne reste plus qu'à rechercher la transformée inverse de $S(p)$ et on a $s(t)$.[6]

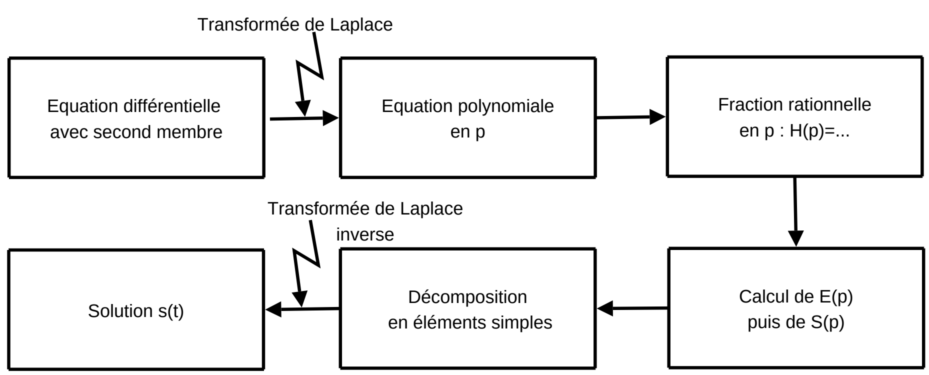


Fig. 6.18 – *Principe de résolution d'une équation différentielle*

Il faudra parfois être capable de se débrouiller avec des fractions rationnelles de façon à se ramener à des formes existant dans la table.

6. Simple. Joli. Efficace... Enfin, on verra !

6.7 Modélisation des systèmes

La difficulté de l'étude des systèmes asservis ne réside pas dans la mise en équation(s) mais dans la compréhension du problème et la modélisation qu'on en fait. On ne fera jamais appel, en automatique et en classe préparatoire, à des connaissances physiques très pointues : vous resterez dans les équations que vous connaissez et qui sont celles des phénomènes physiques de base. En premier lieu, il faut identifier la grandeur que l'on souhaite réguler ou asservir. Celle-ci n'est pas confondue, le plus souvent, avec la grandeur sortante “physique” du processus. Il est ensuite nécessaire de réaliser le schéma bloc du processus étudié. Vous avez compris que le schéma bloc est une représentation du système étudié : il traduit un modèle, adapté à une théorie et à des hypothèses (phénomènes linéaires, etc...). Chaque bloc possède une entrée $E(p)$ et une sortie $S(p)$. A l'intérieur de chacun des blocs on fera, bien entendu, apparaître une fonction de transfert $H(p)$ telle que : $S(p) = H(p) \cdot E(p)$.

$$S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

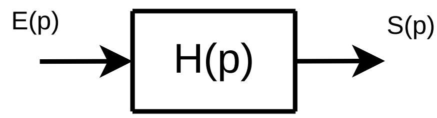
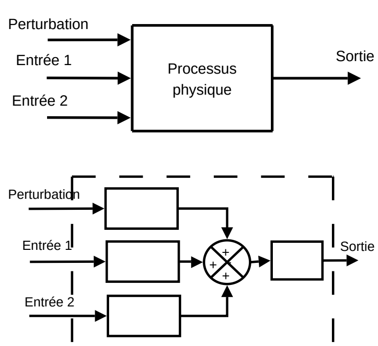
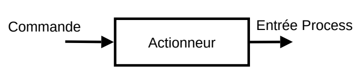
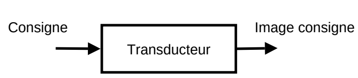
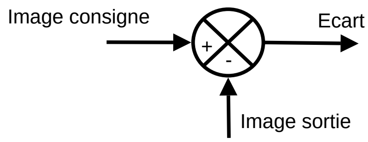


Fig. 6.19 – *Notion de schéma bloc*

6.7.1 Mise en boite !

La première étape consiste à bien isoler le processus dont on s'occupe, identifier les grandeurs d'entrée (commandes et perturbations) et les grandeurs de sortie.

	On représente tout d'abord le schéma fonctionnel du processus physique. On procède d'abord globalement. Si le process possède plusieurs entrées, on peut en général décomposer le système. La sortie du process est étudiée pour chaque entrée prise séparément et on somme l'ensemble afin de trouver la sortie globale. Les perturbations peuvent le plus souvent être considérées comme des entrées. Le terme de perturbation n'est pas nécessairement “négatif”. En effet, dans le cas du moteur par exemple, le couple imposé par le récepteur sera considéré comme une perturbation.
	Les actionneurs sont par exemple les moteurs électriques (entrée en tension, sortie en vitesse de rotation et couple) ou hydrauliques (entrée en débit, sortie en vitesse de rotation ou de translation).
	Le rôle d'un transducteur est de transformer une consigne souhaitée par l'utilisateur en un “signal” compréhensible par le système (tension ou incrément par exemple).

	Le rôle du capteur est de mesurer une grandeur de sortie du process et de la transformer en un “signal” compréhensible par le système (tension ou incrément par exemple).
	Le comparateur(ou soustracteur) permet de mesurer la différence entre deux signaux de même nature pour calculer un écart (de même nature que les signaux).
	Le régulateur (essentiellement étudié en Spé) ou encore Correcteur élabore à partir de l’écart mesuré une commande adaptée pour le système. La commande est une fonction plus ou moins complexe de l’écart : cela va du simple amplificateur (en Sup) aux correcteurs qui intègrent ou dérivent l’écart (en Spé) afin d’obtenir une commande plus ou moins “robuste”.

Enfin on représente l’ensemble du processus et les boucles d’asservissement du point de vue de l’automaticien.

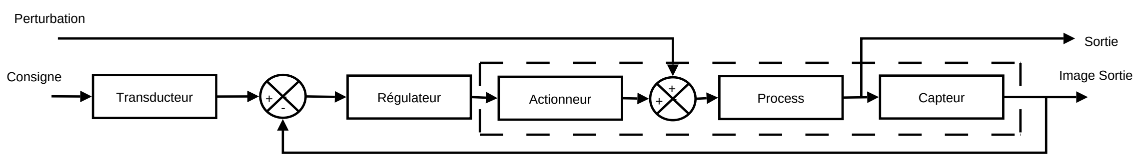


FIG. 6.20 – *Boucle d’asservissement “point de vue automaticien”*

Ce qui est encadré en pointillé correspond à ce que l’automaticien doit étudier : la chaîne dont il doit connaître le comportement avant de l’asservir.

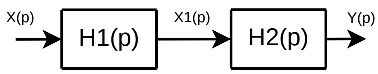
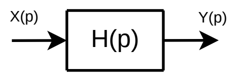
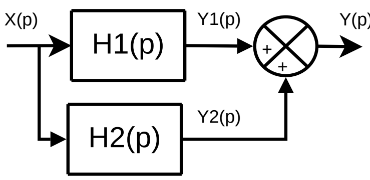
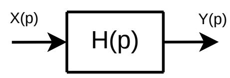
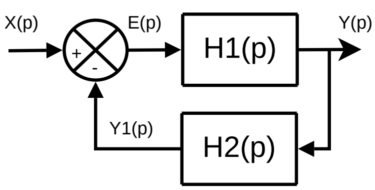
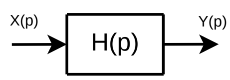
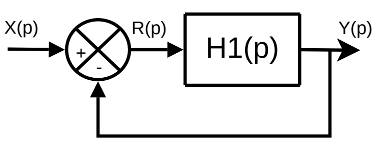
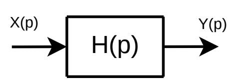
6.8 Algèbre des schémas-blocs

Finalement, on représente tout ou partie d’un système par une boite dans laquelle se trouvera la fonction de transfert $H(p)$. Nous avons vu précédemment qu’un système asservi réel est composé d’un grand nombre d’éléments auquel nous pouvons associer des transmittances pour chacun des éléments. Il nous sera très utile d’effectuer des opérations sur ces schémas-blocs afin de les simplifier ou de faire apparaître une forme spécifique (FTBO, FTBF, forme canonique).

DÉFINITION 13

Deux schémas blocs sont équivalents si leurs fonctions de transfert (globale) sont identiques. Le problème est qu’en général la boite “globale” est composée de plusieurs blocs assemblés.

Nous allons introduire à présent un certain nombre d'opérations régulièrement effectuées sur les schémas-blocs.

<table>
<tr><th colspan="3">Transmittances en série</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>$H(p) =$</td></tr>
<tr><th colspan="3">Transmittances en parallèle</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>$H(p) =$</td></tr>
<tr><th colspan="3">Boucle de rétroaction</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>$H(p) =$</td></tr>
<tr><th colspan="3">Retour unitaire</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>$H(p) =$</td></tr>
</table>

Après simplifications, un système asservi peut se représenter généralement sous la forme du schéma bloc suivant :

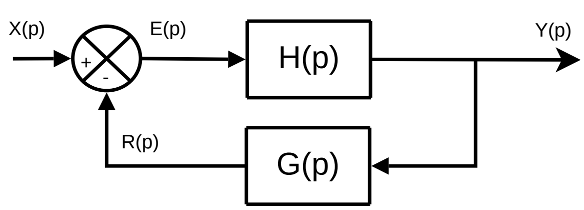


FIG. 6.21 – *Boucle d'asservissement*

Cette forme de schéma-bloc est appelée forme canonique. À partir de ce schéma bloc, on peut déterminer deux fonctions de transfert caractérisant le système asservi étudié :

- la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO),
- la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF).

6.8.1 Détermination de la FTBO

Nous prenons le système sous sa forme canonique (Fig. 6.21, p. 103) et nous le considérons en boucle ouverte, c'est à dire que nous ouvrons la boucle de rétroaction après la transmittance $G(p)$.

On obtient alors :

$$X(p) = E(p) \quad \text{et} \quad R(p) = H(p) \cdot G(p) \cdot X(p)$$

Nous pouvons donc écrire que la FTBO du système étudié peut s'écrire :

$$FTBO(p) = \frac{R(p)}{X(p)} = H(p) \cdot G(p) = FTCD(p) \cdot FTCR(p) \tag{6.14}$$

On note :

- FTCD, la fonction de transfert de la chaîne directe,
- FTCR, la fonction de transfert de la chaîne de retour.

6.8.2 Détermination de la FTBF

La $FTBF$ d'un système asservi peut s'écrire en fonction de la $FTBO$. En effet, on a :

$$Y(p) = H(p) \cdot E(p) = H(p) \cdot (X(p) - R(p)) \text{ et } R(p) = G(p) \cdot Y(p)$$

En regroupant les sorties $Y(p)$, on obtient :

$$Y(p) \cdot (1 + G(p) \cdot H(p)) = H(p) \cdot X(p)$$

On en déduit alors l'expression de la $FTBF$ d'un système asservi sous forme canonique en fonction de la $FTBO$

$$FTBF(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{H(p)}{1 + H(p) \cdot G(p)} = \frac{FTCD(p)}{1 + FTBO(p)} \tag{6.15}$$

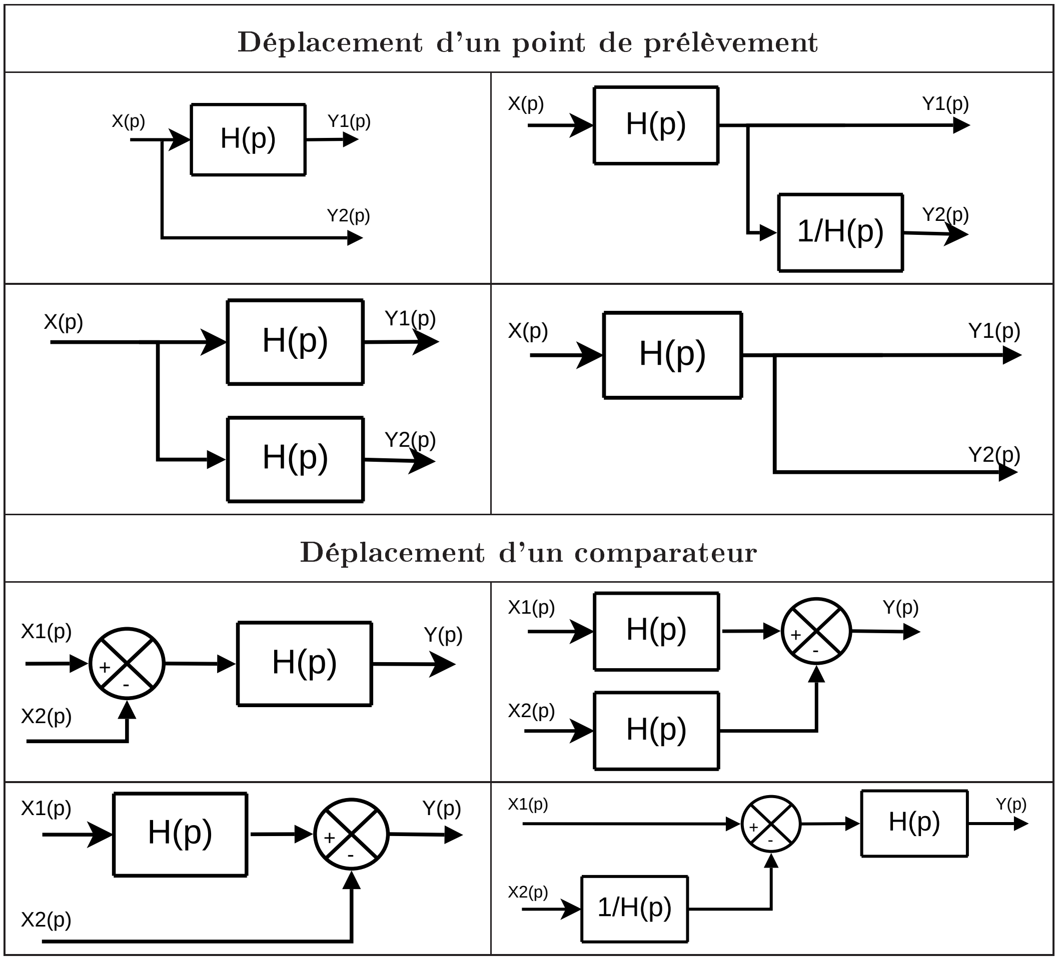
Remarque 32 *Cas d'un système avec un retour unitaire*

Dans le cas d'un système avec un retour unitaire, la $FTBO$ du système est égale à la $FTCD$, ce qui donne :

$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)} \tag{6.16}$$

6.8.3 Autres changements dans les schémas-blocs

Afin de simplifier les schémas-blocs, nous pouvons être amené à déplacé des points de prélèvement ou des comparateurs.



Chapitre 7

Analyse temporelle des systèmes du premier et deuxième ordre

Un système asservi quelconque peut être considéré comme étant la composition de systèmes linéaires élémentaires. Parmi les plus courants, nous retrouvons :

- les systèmes à action proportionnelle, tels que [1]

$$s(t) = K \cdot e(t) \quad \Leftrightarrow \quad S(p) = K \cdot E(p) \Rightarrow H(p) = K$$

- les systèmes intégrateurs, tels que [2]

$$\frac{ds(t)}{dt} = K \cdot e(t) \quad \Leftrightarrow \quad p \cdot S(p) = K \cdot E(p) \Rightarrow H(p) = \frac{K}{p}$$

- les systèmes du premier ordre,
- les systèmes du second ordre.

Nous nous intéresserons dans ce chapitre plus particulièrement aux systèmes du premier ordre et du second ordre.

7.1 Système du premier ordre

Définition 14 *Un système physique d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est dit du premier ordre si la sortie $s(t)$ vérifie une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :*

$$\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \tag{7.1}$$

On appelle K le gain statique, en effet, en régime stationnaire :

$$K = \frac{s(t)}{e(t)} \text{ si } \dot{s}(t) = 0$$

On appelle τ la constante de temps du système, en seconde (s).

1. Si les conditions initiales sont nulles.
2. Toujours si les conditions initiales sont nulles...

7.1.1 Détermination de la fonction de transfert

Si les conditions initiales sont nulles, $(s(0) = 0)$:

$$\tau \cdot p \cdot S(p) + S(p) = K \cdot E(p)$$

On peut alors déterminer aisément la fonction de transfert d'un système du premier ordre:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \tag{7.2}$$

7.1.2 Étude de la réponse indicielle

Soit une consigne échelon $e(t) = u(t)$ [3], Elle s'écrit dans le domaine de Laplace $E(p) = \frac{1}{p}$. Nous pouvons alors écrire la valeur de la sortie dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{K}{p} - \frac{K \cdot \tau}{1 + \tau \cdot p}$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, on trouve alors la réponse temporelle à un échelon (réponse indicielle) $s(t)$:

$$s(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot u(t)$$

Nous pouvons tracer la réponse indicielle $s(t)$ au système du premier ordre ci-dessous :

$$H(p) = \frac{2}{1 + 3 \cdot p}$$

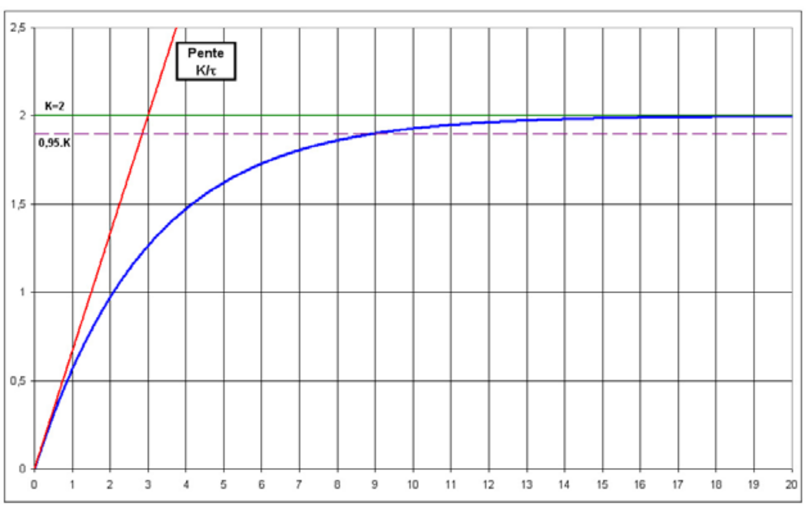


FIG. 7.1 – *Réponse indicielle d'un système du premier ordre*

3. Vous aurez remarquez que nous nous limitons à l'utilisation de l'échelon unitaire...

$s(0^+) =$ $\quad s(\tau) =$ $\quad s(3\tau) =$	
Pente à l'origine	$\dfrac{ds(t)}{dt} =$ $\qquad \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{ds(t)}{dt} =$
Temps de réponse à 5%	$t_{5\%} =$
Erreur statique	$\varepsilon(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} (e(t) - s(t)) =$

FIG. 7.2 – *Caractéristiques de la réponse temporelle*

Le temps de réponse à 5% caractérise[4] la fin du régime transitoire et le passage au régime permanent.

REMARQUE 33 *Le gain statique K caractérise le comportement du système en régime établi. La constante de temps τ caractérise le comportement dynamique du système.*

7.1.3 Étude de la réponse impulsionnelle

Dans ce cas,l'entrée est définie par un Dirac $e(t) = \delta(t)$, soit en se plaçant dans le domaine de Laplace $E(p) = 1$. L'expression de la sortie est donc égale à la transmittance du système :

$$S(p) = H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} = \frac{\frac{K}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + p}$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, on trouve alors la réponse temporelle à un Dirac :

$$s(t) = \frac{K}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t) \tag{7.3}$$

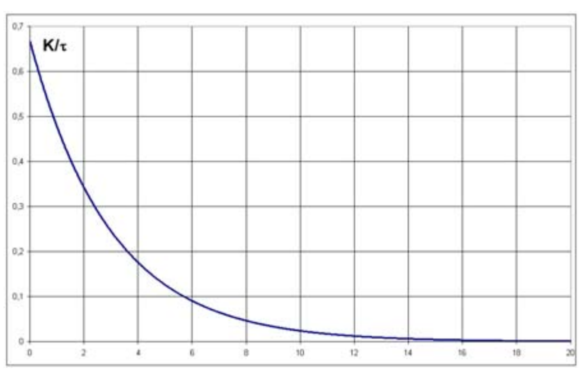


FIG. 7.3 – *Réponse indicielle d'un système du premier ordre*

4. De manière assez arbitraire...

7.1.4 Étude de la réponse temporelle à une rampe

Dans ce dernier cas, l'entrée que nous utilisons est une rampe, donc telle que $e(t) = a \cdot t \cdot u(t)$, ce qui donne dans le domaine de Laplace $E(p) = \frac{a}{p^2}$, on en déduit alors l'expression de la sortie :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \cdot \frac{a}{p^2}$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, nous obtenons la réponse temporelle à une rampe pour un système de premier ordre :

$$s(t) = a \cdot K \cdot \left(t - \tau + \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot u(t)$$

Nous pouvons tracer la réponse $s(t)$ à une rampe $e(t) = 2 \cdot t \cdot u(t)$ aux deux systèmes du premier ordre ci-dessous :

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + 3 \cdot p} \qquad H_2(p) = \frac{2}{1 + 3 \cdot p}$$

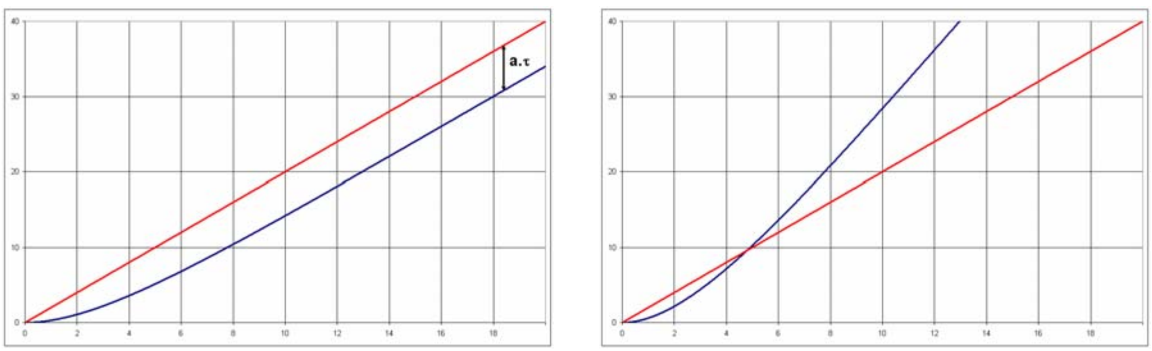


FIG. 7.4 – *Réponse à une rampe de systèmes du premier ordre*

$s(0^+) =$	$\lim_{t \to \infty} s(t) =$
Pente à l'origine	$\frac{ds(t)}{dt} =$ $\Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{ds(t)}{dt} =$
Équation de l'asymptote	
Erreur de traînage	$\Delta = \lim_{t \to \infty} (e(t) - s(t)) =$

FIG. 7.5 – *Caractéristiques de la réponse temporelle*

7.2 Système du deuxième ordre

Définition 15 *Un système du deuxième ordre est un système dont la sortie $s(t)$ vérifie une équation différentielle du deuxième ordre :*

$$\tau^2 \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\xi \cdot \tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \tag{7.4}$$

Le terme K est appelé le *gain statique* du système, τ, la *constante de temps* et ξ le *coefficient d'amortissement* avec $\xi > 0$.

Si on pose $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$,la *pulsation propre du système non amorti (en $rad \cdot s^{-1}$)*, l'équation peut également se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\frac{\xi}{\omega_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \tag{7.5}$$

Remarque 34 *L'étude dynamique des systèmes mécaniques (application du Principe Fondamental de la Dynamique ou d'un Théorème énergétique) aboutit souvent à des équations de ce type. La dérivée seconde $\frac{d^2s(t)}{dt^2}$ correspondant à un terme homogène à une accélération, la dérivée première $\frac{ds(t)}{dt}$ à un terme homogène à une vitesse et la variable $s(t)$ à une position (ou une orientation... si $s(t)$ est un angle).*

7.2.1 Détermination de la fonction de transfert

Avec les conditions initiales dites de Heaviside (nulles, c'est à dire $s(0) = \frac{ds(t)}{dt} = 0$ changement de variable si nécessaire), nous pouvons écrire l'équation du système dans le domaine de Laplace sous la forme suivante :

$$\tau^2 \cdot p^2 \cdot S(p) + 2 \cdot \tau \cdot \xi \cdot p \cdot S(p) + S(p) = K \cdot E(p) \tag{7.6}$$

On en déduit la fonction de transfert d'un système du second ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\tau^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \tau \cdot \xi \cdot p + 1} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \xi \cdot p + \omega_0^2} \tag{7.7}$$

7.2.2 Étude de la réponse temporelle à un échelon

Soit une consigne échelon $e(t) = e_0 \cdot u(t)$, donc $E(p) = \frac{e_0}{p}$.

Nous pouvons alors écrire $S(p)$:

$$S(p) = \frac{e_0}{p} \cdot \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \xi \cdot p + \omega_0^2}$$

Nous limiterons notre étude au cas de l'échelon unitaire ($e_0 = 1$), c'est en effet le cas le plus habituel.

On obtient alors :

Théorème de la valeur initiale	$s(0+) =$
Théorème de la valeur finale	$s(+\infty) =$
Tangente à l'origine	$\dfrac{ds(0+)}{dt} =$

FIG. 7.6 – *Caractéristiques de la réponse temporelle*

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{\left(p^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \xi \cdot p + \omega_0^2\right) \cdot p} \tag{7.8}$$

REMARQUE 35

- *Le régime établi ne dépend que de K, il ne dépend pas du coefficient d'amortissement et de la pulsation propre.*
- *La tangente à l'origine est horizontale, ce qui diffère d'un système du premier ordre.*

Afin de déterminer la réponse temporelle à un échelon pour ce système du second ordre, il faut tout d'abord exprimer la fonction $S(p)$ sous la forme de fractions rationnelles simples. Mais cette décomposition dépend de la valeur des pôles du système, c'est à dire des racines de l'équation ci-dessous :

$$p^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \xi \cdot p + \omega_0^2 = 0 \tag{7.9}$$

Son discriminant vaut :

$$\Delta = 4 \cdot \omega_0^2 \cdot \left(\xi^2 - 1\right) \tag{7.10}$$

1. Si $\xi > 1$, **le système est dit amorti et le régime est apériodique**, l'équation (ÉQ. 7.9, p. 112) possède 2 racines réelles distinctes (p_1 et p_2).

   $$p_1 = \omega_0 \cdot \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \qquad p_2 = \omega_0 \cdot \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

   La sortie $S(p)$ se décompose alors en trois fraction simples :

   $$S(p) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot p} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p - p_1)} + \frac{C}{(p - p_2)}$$

   Après calcul, on trouve :

   $$\begin{cases} A = K \\ B = \dfrac{K \cdot \omega_0^2}{(p_1 - p_2) \cdot p_1} = \dfrac{K \cdot \omega_0^2}{2 \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot p_1} \\ C = \dfrac{K \cdot \omega_0^2}{(p_2 - p_1) \cdot p_2} = -\dfrac{K \cdot \omega_0^2}{2 \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot p_2} \end{cases}$$

En posant $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$ et $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$ et en utilisant la transformée inverse de Laplace, on trouve :

$$s(t) = K\left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}\cdot\left(\tau_1\cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2\cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right] \tag{7.11}$$

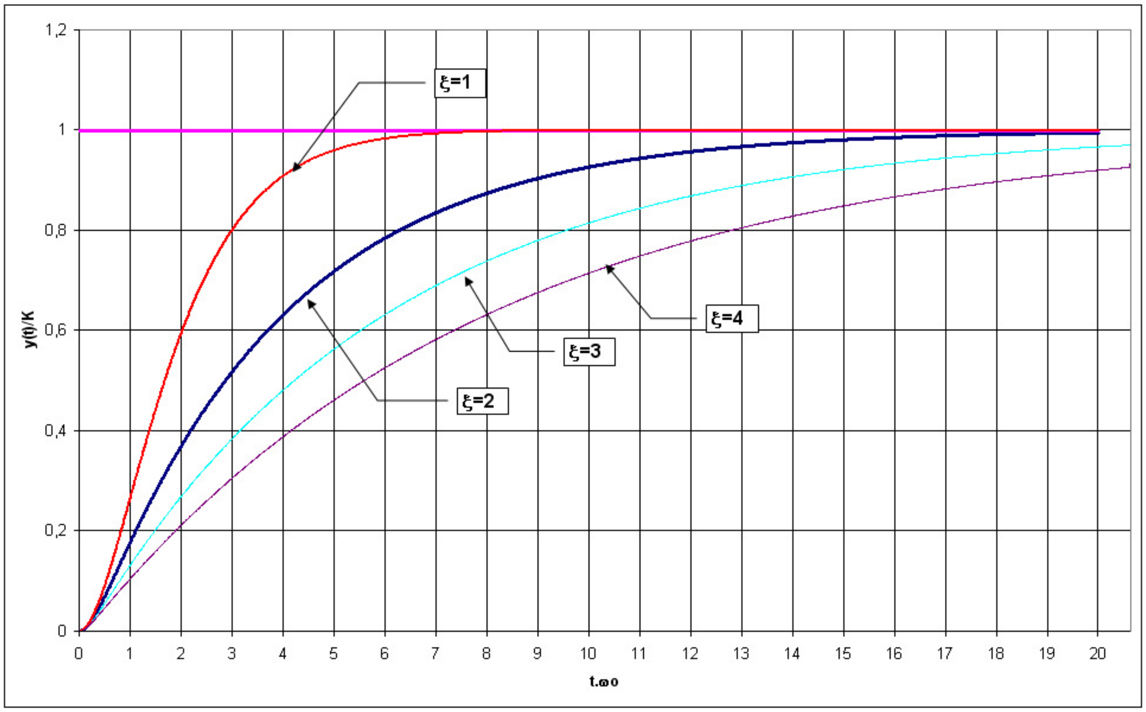


FIG. 7.7 – *Réponse indicielle d'un système du second ordre avec $\xi \geq 1$*

REMARQUE 36 *Lorsque l'on est amené à identifier un système du premier ou second ordre, cette courbe(réponse d'un second ordre à un échelon) est souvent confondue avec celle d'un premier ordre. La "principale" différence entre les deux est la tangente à l'origine.*

2. Si $\xi = 1$, **l'amortissement est dit critique et le régime est apériodique**, l'équation (ÉQ. 7.9, p. 112) possède une racine double ($p = -\omega_0$).
   La sortie s'écrit alors :
   $$S(p) = \frac{K\cdot\omega_0^2}{(p+\omega_0)^2\cdot p} = -\frac{K\cdot\omega_0}{(p+\omega_0)^2} - \frac{K}{(p+\omega_0)} + \frac{K}{p}$$
   En utilisant la transformée de Laplace inverse, on trouve la réponse temporelle à un échelon dans le cas d'un système du second ordre avec amortissement critique :
   $$s(t) = K\left[1 - (1+\omega_0\cdot t)\cdot e^{-\omega_0\cdot t}\right] \tag{7.12}$$

REMARQUE 37 *La forme de cette réponse est proche de la précédente mais sa rapidité ($t_{5\%}$) est bien meilleure.*

3. Si $\xi < 1$, **le système est sous-amorti et la réponse est pseudo-périodique**, l'équation (ÉQ. 7.9, p. 112) possède deux racines complexes conjuguées :

$$p_i = \omega_0 \cdot \left(-\xi \pm j \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right)$$

On peut décomposer à nouveau décomposer la sortie $S(p)$ sous la forme de fractions simples :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B \cdot p + C}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

Après identification des trois constantes et en redécomposant, on trouve :

$$S(p) = \frac{K}{p} - \frac{K \cdot p + 2K\xi\omega_0}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K}{p} - \frac{K \cdot p + 2K\xi\omega_0}{(p+\xi\omega_0)^2 + \left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\right)^2}$$

Il faut ensuite faire apparaître l'expression des transformées de Laplace des sinus et cosinus amortis :

$$S(p) = K\left[\frac{1}{p} - \frac{p+\xi\omega_0}{(p+\xi\omega_0)^2 + \left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\right)^2} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}{(p+\xi\omega_0)^2 + \left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\right)^2}\right]$$

En utilisant la transformée inverse de Laplace pour le sinus et le cosinus amortis (PART. 6.5.3, p. 98), et en posant :

$$\cos\psi = \xi \qquad\qquad \sin\psi = \sqrt{1-\xi^2}$$

On obtient :

$$s(t) = K\left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \left(\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \cdot t\right) \cdot \sin\psi + \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \cdot t\right)\cos\psi\right)\right]$$

En utilisant une relation simple de trigonométrie[5], on arrive enfin à l'expression de la réponse temporelle $s(t)$ d'un système du second ordre en régime pseudo-périodique :

$$s(t) = K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \psi\right)\right] \tag{7.13}$$

La réponse est donc pseudo-périodique de pseudo-période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$$

Sans amortissement ($\xi = 0$), on a $T = \frac{2\cdot\pi}{\omega_0}$, d'où le nom de pulsation propre non amorti pour ω_0.

5. Enfin quelque chose de simple...

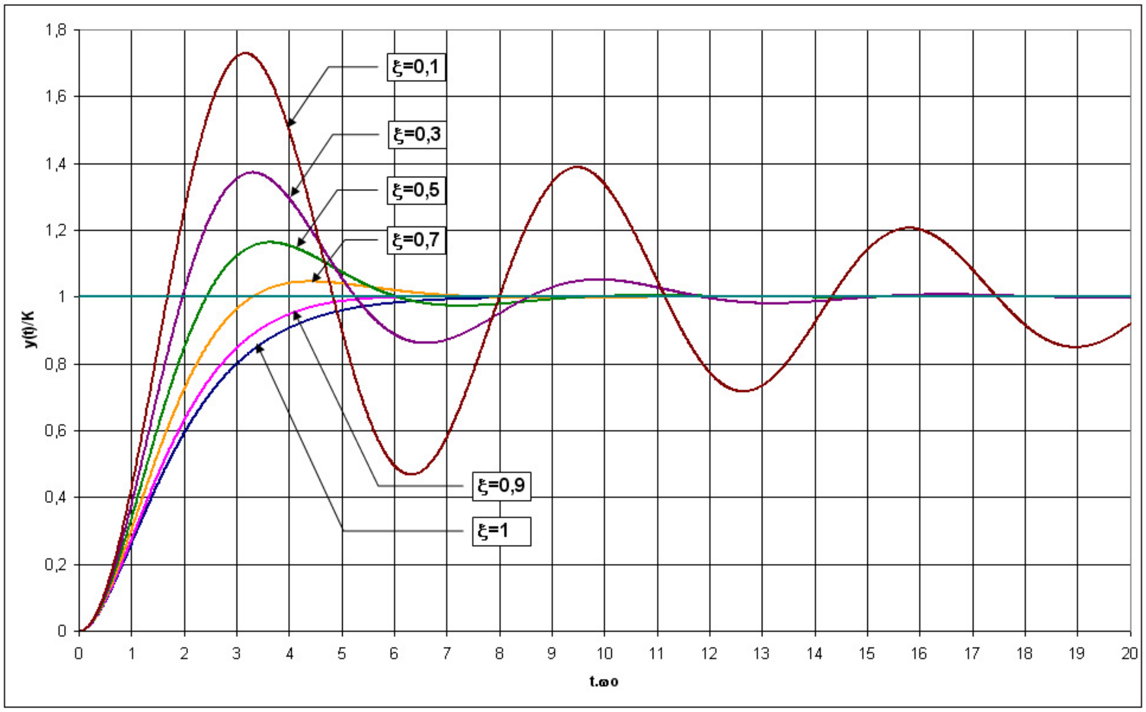


FIG. 7.8 – *Réponse indicielle d'un système du second ordre avec $\xi \geq 1$*

La pulsation propre amortie du système est :

$$\omega_n = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

Les différents dépassements peuvent être déterminés à partir de la connaissance de la dérivée de la réponse à l'échelon :

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{K \cdot \omega_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\xi \omega_0 \cdot t} \cdot \sin\left(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t\right) \tag{7.14}$$

REMARQUE 38 *A partir de l'expression de la dérivée de la réponse, on retrouve le fait que la pente de la réponse est nulle à l'origine :*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{ds(t)}{dt} = 0$$

Les dépassements relatifs transitoires sont donnés pour les instant t_k tels que :

$$\frac{ds(t_k)}{dt} = 0$$

On trouve alors pour t_k :

$$t_k = k \cdot \frac{\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

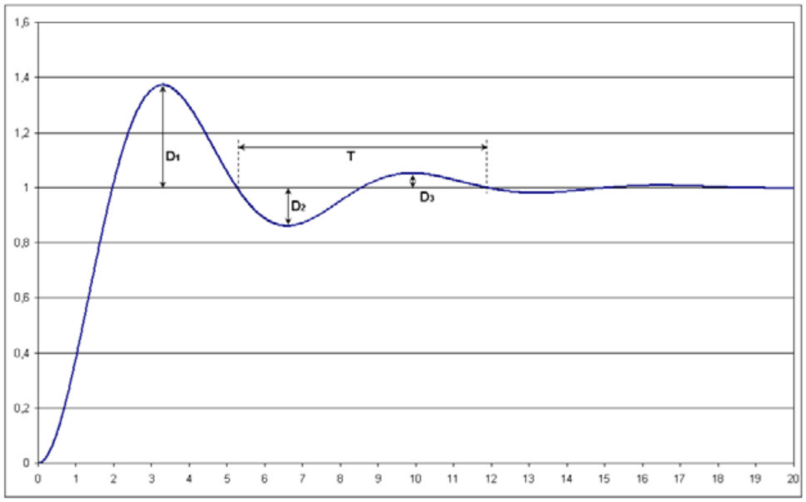


FIG. 7.9 – *Dépassement et pseudo-période pour un système du second ordre*

On définit alors le dépassement relatif d'ordre k par la relation :

$$D_{r_{k\%}} = \left|\frac{s(\infty) - s(t_k)}{s(\infty)}\right| = \left|\frac{e^{-\xi\omega_0 t_k}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \cdot t_k + \psi\right)\right| = e^{-\frac{\xi k \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Les différents dépassements relatifs ne dépendent donc que du coefficient d'amortissement ξ.

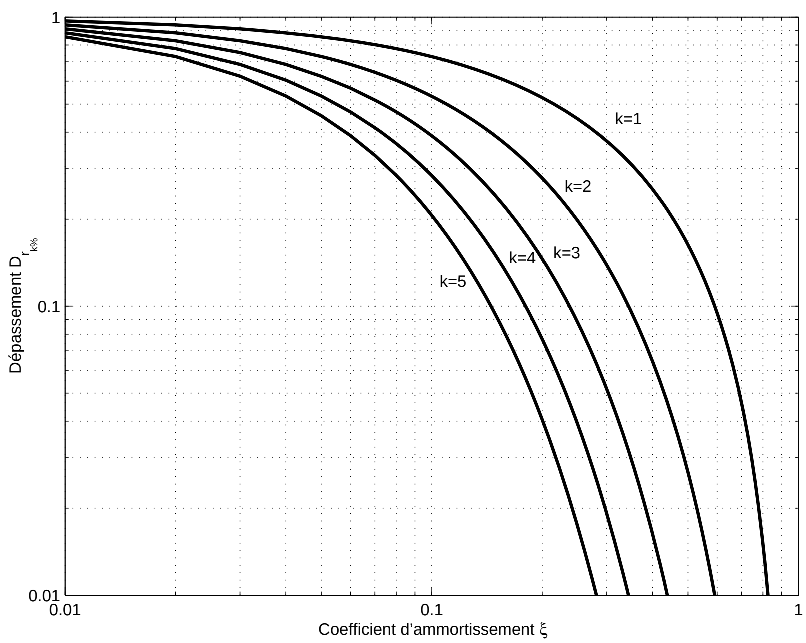


FIG. 7.10 – *Dépassements d'un système du second ordre*

Remarque 39 *Évolution de la réponse en fonction de ω_0*
Si on prend un système du second ordre quelconque, que l'on fixe l'amortissement (ici $\xi = 0{,}3$) et que l'on fait évoluer sa pulsation propre non amorti ω_0, on remarque que :

- *le temps de réponse $t_{r5\%}$ diminue si la pulsation propre ω_0 augmente, le système sera d'autant plus rapide que ω_0 sera important,*
- *la valeur du dépassement ne change pas, ω_0 n'a donc pas d'influence sur le dépassement.*

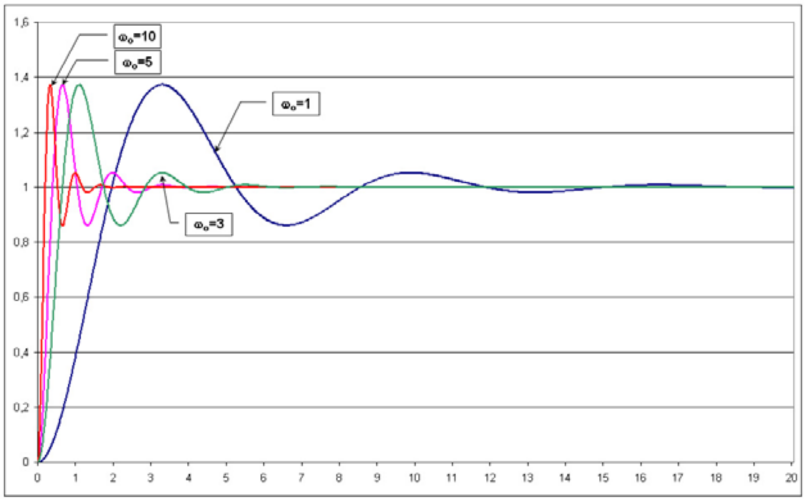


Fig. 7.11 – Évolution de la réponse d'un système pseudo-périodique du second ordre en fonction de ω_0

Il est à noter que tout ceci est vrai pour un système moins amorti et même pour un système dont la réponse n'est pas oscillante ($\xi > 1$).

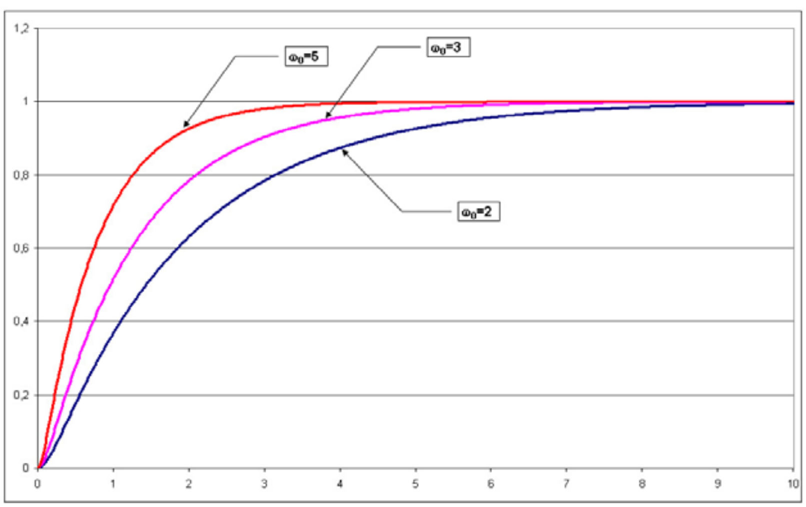


Fig. 7.12 – Évolution de la réponse d'un système non oscillant du second ordre en fonction de ω_0

Remarque 40 *Temps de réponse*

Contrairement au cas des systèmes du premier ordre, il n'y a pas d'expression simple pour le temps de réponse à 5%. Le temps de réponse minimum est obtenu pour un dépassement relatif de 5%, ce qui correspond à un coefficient d'amortissement $\xi = 0{,}7$. *Les valeurs du temps de réponse réduit* $\omega_0 \cdot t_{5\%}$ *sont généralement déterminés grâce à un abaque fonction du coefficient d'amortissement.*

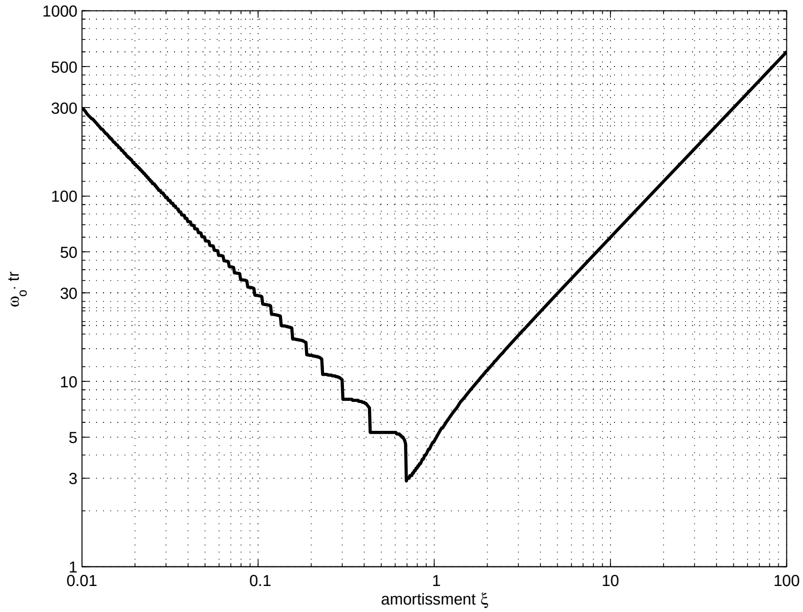


Fig. 7.13 – *Temps de réponse réduit d'un système du second ordre*

Troisième partie

Annexes

Annexe A

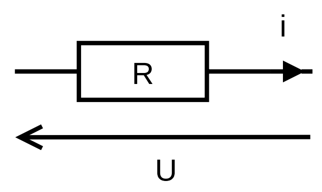
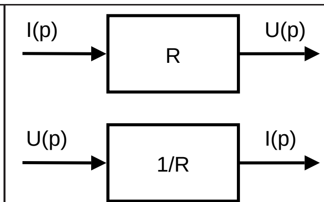
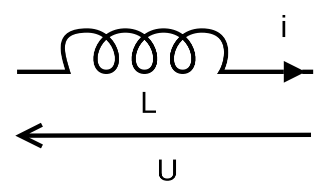
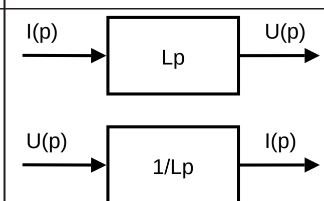
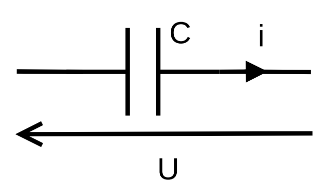
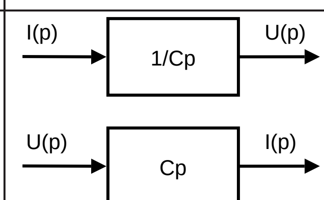
Transformée de Laplace

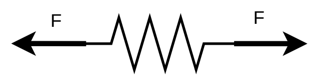
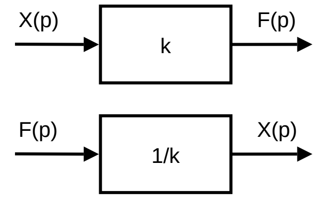
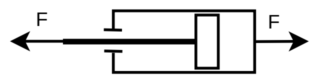
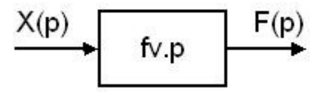
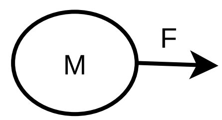
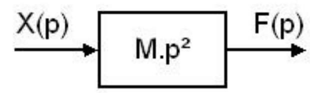
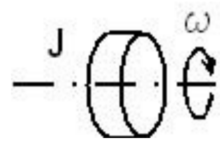
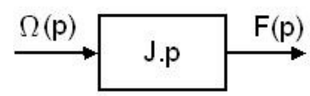
$f(t)\cdot u(t)$	$F(p)$	$f(t)\cdot u(t)$	$F(p)$
Dirac $\delta(t)$	1	Échelon $K\cdot u(t)$	$\dfrac{K}{p}$
Rampe $Kt\cdot u(t)$	$\dfrac{K}{p^2}$	$e^{-at}\cdot u(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\sin\omega t\cdot u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\cos\omega t\cdot u(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sinh\omega t\cdot u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$	$\cosh\omega t\cdot u(t)$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
$e^{-at}\cdot\sin\omega t\cdot u(t)$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cdot\cos\omega t\cdot u(t)$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$t^n\cdot u(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\dfrac{t^n\cdot e^{-at}}{n!}\cdot u(t)$	$\dfrac{1}{(p+a)^{n+1}}$
$\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot u(t)$	$\dfrac{1}{p\,(1+\tau p)}$	$\dfrac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot u(t)$	$\dfrac{1}{(1+\tau p)}$
$\left(t-\tau+\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot u(t)$	$\dfrac{1}{p^2\,(1+\tau p)}$	$\dfrac{t}{\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot u(t)$	$\dfrac{1}{(1+\tau p)^2}$

$f(t)\cdot u(t)$	$F(p)$
$\left(t-2\tau+(t+2\tau)\,e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot u(t)$	$\dfrac{1}{p^2\,(1+\tau p)^2}$
$\left(1-\dfrac{t+\tau}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot u(t)$	$\dfrac{1}{p\,(1+\tau p)^2}$
$\dfrac{1}{\tau-\nu}\left(e^{-\frac{t}{\tau}}-e^{-\frac{t}{\nu}}\right)\cdot u(t)$	$\dfrac{1}{(1+\tau p)\,(1+\nu p)}$
$\left[1+\dfrac{1}{\tau-\nu}\left(\tau e^{-\frac{t}{\tau}}-\nu e^{-\frac{t}{\nu}}\right)\right]\cdot u(t)$	$\dfrac{1}{p\,(1+\tau p)\,(1+\nu p)}$
$\left[t-(\tau+\nu)+\dfrac{1}{\tau-\nu}\left(\tau^2e^{-\frac{t}{\tau}}-\nu^2e^{-\frac{t}{\nu}}\right)\right]\cdot u(t)$	$\dfrac{1}{p^2\,(1+\tau p)\,(1+\nu p)}$
$\left[\dfrac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t\right)\right]\cdot u(t)$	$\dfrac{1}{1+2\xi\frac{p}{\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$ et $\xi<1$
$\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t+\psi\right)\right]\cdot u(t)$	$\dfrac{1}{p\left(1+2\xi\frac{p}{\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2\right)}$ $\xi=\cos\psi$ $\xi<1$

Annexe B

Principales transmittances

Systèmes électriques			
Élément	**Équation**	**Schéma**	**Schéma bloc**
Résistance	$U = R \cdot i$		
Inductance	$U = L\dfrac{di}{dt}$		
Condensateur	$U = \dfrac{1}{C}\int i \cdot dt$		

Systèmes mécaniques			
Élément	**Équation**	**Schéma**	**Schéma bloc**
Ressort	$F = k \cdot x$		
Frottements visqueux (amortisseur)	$F = f_v \dfrac{dx}{dt}$		
Masse	$F = M \dfrac{d^2x}{dt^2}$		
Inertie en rotation	$\mathcal{C} = J \dfrac{d\omega}{dt}$		

Bibliographie

[Bar95] P-J Barre, J-P Carron, *Systèmes automatiques, Tome 1, Analyse et modèles*, Ellipses , 1995.

[Bec03] Laurent Becle, *Cours d'automatique*, Lycée Jules Garnier Nouméa, 2004.

[Bi051] F. Binet, *Asservissements Cours*, Préparation Agregations B1 et B3 , 2005.

[Bi052] F. Binet, *Asservissements Outils Mathématiques*, Préparation Agregations B1 et B3 , 2005.

[Bou06] Philippe Bourzac, *Automatique - Asservissement 1*, Lycée Vaucanson Tours , 2006.

[Cho97] Maurice Chossat, *Mathématiques de l'ingénieur*, Dunod , 1997.

[Col97] G. Colombari, J. Giraud, *Sciences Industrielles CPGE 1° année*, Foucher , 1997.

[Fab05] Jean-Yves Faber, *Automatismes et automatique*, Ellipses , 2005.

[Fab03] J. Fabre, Yves Plusquellec et M. Agullo, *Que savez vous de l'outil mathématique? A l'usage des élèves ingénieurs et des étudiants en mécanique*, Fascicules 1-6, Cepadues, 2003.

[Mer95] C. Merlaud, J. Perrin, J-P Trichard, *Automatique Informatique Industrielle*, Dunod , 1995.